Práctico 5.

Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
MATEMÁTICA I
Curso 2005

Integración (I): primeras propiedades, primitivas, regla de Barrow, teorema fundamental.

1. Una partícula comienza en $x = 0$ y se mueve a lo largo del eje x con la velocidad $v(t) = t^2$, para $t \geq 0$. ¿Dónde está la partícula en $t = 3$? (recordar que $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$).

2. Sea f una función continua en el intervalo $[2, 8]$ tal que $\int_2^8 f = 20$ y $\int_8^4 f = 12$. Calcular $\int_2^4 f$. Probar que existe $c \in [2, 4]$ tal que $f(c) = 16$.

3. Calcular primitivas de las funciones: $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$, $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x\sqrt{x}}$, $f(x) = 1/x+1/x^2+(e^x-1)^2$, $f(x) = 2\operatorname{sen}(3x)+1/(x^2+1)$, $f(x) = 2x^2-e^x$, $f(x) = e^{x+2}-1$. Hallar una primitiva de $f(x) = x^2 + x$ que se anule en $x = 2$.

4. Probar que si F es una primitiva de f y k es una constante cualquiera entonces $F + k$ es también una primitiva de f y que si F_1 y F_2 son primitivas de f entonces $F_1 - F_2$ es constante.

5. Probar que si F y G son primitivas de f y g respectivamente, entonces $aF + bG$ es una primitiva de $af + bg$, para todo par de constantes a y b.

6. Probar que si F es una primitiva de f entonces la función $x \mapsto F(x + a)$ es una primitiva de $x \mapsto f(x + a)$, y que la función $x \mapsto F(kx)/k$ es una primitiva de $x \mapsto f(kx)$ donde k es una constante no nula y a una constante cualquiera.

7. Hallar una función f tal que $f'(x) = \cos(\pi x) + e^{x-1}$ y $f(1) = 3$. Hallar una función f tal que $f''(x) = 3x^2 - e^x - 2$ y $f'(0) = f(0) = 1$.

8. Calcular la derivada de la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ y usar el resultado para calcular una primitiva de $1/\cos^2 x$. Calcular una primitiva de $1 + \operatorname{tg}^2 x$ escribiendo esta función en términos de $\cos x$.

9. Se recuerdan las siguientes fórmulas trigonométricas: $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$, y $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 x = 1$. Usar las fórmulas anteriores para calcular primitivas de $\operatorname{sen}^2 x$, $\cos^2 x$. Usar el ejercicio anterior para escribir una primitiva de $\operatorname{tg}^2 x$.

10. Calcular $\int_{-1}^{2}(2x^2 - e^x)dx$, $\int_{2}^{-1}(2x^2 - e^x)dx$, $\int_1^4(1/\sqrt{x})dx$, $\int_0^\pi \operatorname{sen}(2x)dx$, $\int_1^2(1/x + 1/x^2 + (e^x - 1)^2)dx$.

11. Hallar el área comprendida entre el gráfico de f y el eje Ox en el intervalo indicado: $f(x) = x^3 + 1$, $[0, 2]$, $f(x) = \cos x$, $[0, \pi/2]$,$f(x) = 2x - \operatorname{sen} x$, $[-\pi/4, \pi/6]$.

12.
    a) Hallar el área de la región limitada por el gráfico de $f(x) = \sqrt{x-1}$ el eje Ox y las rectas $x = 2$ y $x = 5$.
    b) Hallar el área de la región limitada por el gráfico de $f(x) = e^x - 1$ el eje Ox y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
    c) Hallar el área de la región limitada por el gráfico de $f(x) = x^3$ y la recta $y = x$.

13. Calcular las derivadas de las siguientes funciones: $\int_0^x \sqrt{t^2 - t + 1}dt$, $\int_x^3(\operatorname{sen}^3 t + t^2)dt$, $\int_x^{x^3}(e^t - 2)dt$, $\int_{x^2}^{1+x} \sqrt{4 + t^2}dt$.
    Sugerencia: Si $F(x) = \int_a^x f$ entonces $\int_a^{\alpha(x)} f = F(\alpha(x))$