Práctico 3.

Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
MATEMÁTICA I
Curso 2005

Funciones continuas; funciones derivables.

1. Considérese la ecuación: $e^{-x^7} = x$. Explicar por qué dicha ecuación tiene alguna solución. ¿Puede tener más de una solución?

2. Calcular las derivadas de las siguientes funciones: $(2x+3)e^x$, $x\ln x$, $\frac{3x+2}{x-4}$, $5\sqrt{x}/(x^2-1)$, $\ln|2x^2-x|$, $\ln|\frac{x-1}{x+1}|$, $e^x - 1/e^x + 1$, $[x(2x+1)^2]^{1/3}$, $x^2\mathrm{sen}x$, $\cos x/(x^2+1)$, $e^{2x}\cos 3x$, $e^{-x}(5\cos 2x + 2\mathrm{sen}2x)$, e^{x^3}, $\mathrm{sen}e^{x^2}$.

3. Dibujar la gráfica de las siguientes funciones. Estudiar continuidad, derivabilidad y dibujar las semitangentes en los puntos angulosos.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 3 \\ 2x+1 & x > 3 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ -x+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq 0 \\ \ln x & 0 < x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$$

4. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones, discutiendo según $a, b \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ e^{ax} + b & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

5. Sea $f(x) = \ln|2x+1|$. Hallar los puntos del gráfico de f en los cuales la tangente es paralela a la recta $2x + 3y - 20 = 0$.

6. Determinar $a, b \in \mathbb{R}$ para que las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = e^x$ tengan la misma tangente en el punto de abscisa 0.

7. Se definen las funciones seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica de la siguiente forma: $\mathrm{sh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{th}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathrm{th}(x) = \mathrm{sh}(x)/\mathrm{ch}(x)$. Probar que $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$, $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$, $\mathrm{sh}^2(x) - \mathrm{ch}^2(x) = 1$, $\mathrm{th}'(x) = \mathrm{ch}^{-2}(x)$.

8. Usar la aproximación tangente para estimar los valores de $(8.004)^{1/3}$ y para estimar $e^{0.01}$. Comparar las aproximaciones obtenidas con las que da una calculadora.

9. La difusión de la gripe en una cierta escuela se modela mediante la ecuación
$$P(t) = \frac{100}{1 + e^{3-t}},$$
donde $P(t)$ es el número total de estudiantes infectados t días después de observar por primera vez la gripe. Muchos de ellos podrían estar sanos de nuevo en el tiempo t.

   (a) Estime el número inicial de estudiantes infectados con la gripe.

   (b) ¿Cuán rápido se difundía la gripe después de tres días?

   (c) ¿Cuándo se difunde la gripe con una tasa máxima? ¿Cuál es la tasa máxima?

10. En una reserva natural habitan c ciervos. El número de ciervos depende de la cantidad h de hierba disponible en la reserva y a su vez esa cantidad es afectada por el número de insectos i de cierta especie que habita en la reserva. Se supone que $c, h, i \geq 0$. Las relaciones de dependencia entre c, h e i son las siguientes: $c(h) = 1000\sqrt{h^2 + 3h + 2}$, $h(i) = 1 - \frac{100i}{100i+1}$. Hallar una fórmula que exprese la variación del número de ciervos en función del número de insectos.¿Pueden llegar a extinguirse los ciervos? Hallar el valor de h para el cual la cantidad de ciervos es mínima. ¿Ese valor de h se alcanza para algún valor de i?.