Práctico 1.

Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
MATEMÁTICA I
Curso 2005

Series.

1. Escribir los primeros 3 términos y las primeras 3 sumas parciales de las series de término general
   $a_n = \frac{1}{n(n+2)}, n \geq 1; \qquad \frac{n!}{(2n)!}, n \geq 1; \qquad \frac{(-1)^n}{n^2}, n \geq 1.$

2. Escribir el término general de las siguientes series:
   $\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{20}} + \frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{1}{\sqrt{40}} + \cdots;$

   $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \cdots;$

   $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \cdots;$

   $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \cdots.$

3. Discutir la convergencia de las series $\sum a_n$ que se dan a continuación. En el caso de convergencia calcular la suma correspondiente (salvo en los casos $a_n = \frac{1}{n^n}$ y $a_n = \frac{1}{n!}$). su suma:

   $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ $\qquad$ $a_n = \ln(1 + \frac{1}{n});$

   $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}};$ $\qquad$ $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n;$

   $a_n = -\ln(1 - \frac{1}{n^2});$ $\qquad$ $a_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}};$

   $a_n = \frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^n};$ $\qquad$ $a_n = \frac{5}{4^n} + \frac{3^{n+1}}{2^{n-1}};$

   $a_n = 3^n$ $\qquad$ $a_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n}, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2}{3^n}, & \text{si } n \text{ es impar;} \end{cases}$

   $a_n = \frac{1}{n^n}$ $\qquad$ $a_n = \frac{1}{n!}.$

4. Usando los criterios vistos para la clasificación de series de términos positivos, clasificar en los siguientes casos la serie $\sum b_n$, (cuando corresponda discutir según $\alpha \in \mathbb{R}$):

   $b_n = \frac{n}{2^n};$ $\qquad$ $b_n = e^{-n^\alpha};$

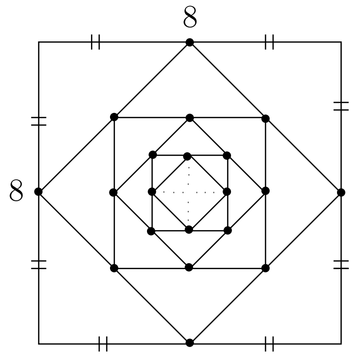
   $b_n = \frac{n^2+1}{n^5+3};$ $\qquad$ $b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2};$

   $b_n = \ln(1 + \frac{1}{n^2});$ $\qquad$ $b_n = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1;$

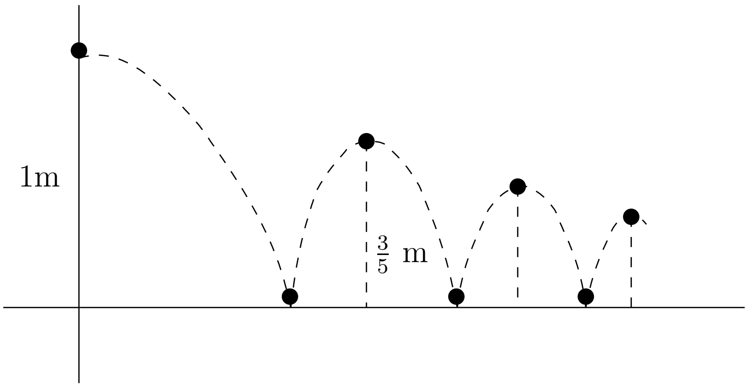
   $b_n = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})$. Sugerencia: ver que $a_n < \frac{1}{n^2}$

5. Clasificar las series de los ejercicios 1 y 2.

6. Calcular la suma de las áreas de los cuadrados de la figura.



7. Una pelota se tira desde una altura de un metro y comienza a rebotar. Cada vez que rebota, la pelota alcanza los 3/5 de la altura máxima que había alcanzado antes de la caída anterior (ver figura). Calcular la distancia vertical recorrida por la pelota.



8. Dada la sucesión definida por $x_0 = \pi, x_{n+1} = 10(x_n - [x_n]), \forall n \geq 0$ ($[x]$ es la parte entera de x). Sea $a_n = \frac{[x_n]}{10^n}, \forall n \geq 0$.
Calcular a_0, a_1, a_2, a_3. Probar que la serie $\sum a_n$ converge, explicitando su suma.