Práctico 0.

Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
MATEMÁTICA I
Curso 2005

Repaso

1. Calcular (expresando el resultado final como una fracción con el numerador y el denominador sin factores comunes):
a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$, b) $2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$, c) $\frac{1/2}{1/3}$, d) $\frac{1/2}{2}$, e) $\frac{2}{1/2}$.

2. Decidir si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:
a) $2+1=2\left(\frac{1}{2}+1\right)$, b) $21+3a=3\,(18+a)$, c) $21+3a=3(6+(a+1))$,
d) $3a+b+3=3\left(a+\frac{b}{3}+1\right)$.

3. Decidir si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:
a) $(a^2)^3=a^5$, b) $(a^2)^3=a^6$, c) $(a^2)^3=a^8$, d) $(a^2)^{-1}=a^{\frac{1}{2}}$ e) $(a^2)^{-1}=a$,
f) $(a^2)^{-1}=a^{-2}$, g) $(a^2)^{-1}=\frac{1}{a^2}$, h) $\sqrt{a}=a^{-2}$, i) $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$, j) $(\sqrt{a})^3=a^{\frac{3}{2}}$,
k) $(\sqrt{a})^3=a^{3-2}=a$, l) $a^2a^3=a^5$, m) $\frac{a^2}{a^3}=a^{\frac{2}{3}}$.

4. Decidir si las siguientes igualdades (o afirmaciones) son verdaderas o falsas:
a) $a^2b^2=(ab)^4$, b) $a^2+b^2=(a+b)^2$, c) $(2a+4b)^2=2(a+2b)^2$, d) $\sqrt{(-2)^2}=-2$,
e) $\sqrt{(-2)^2}=2$, f) $\sqrt{(-2)^2}=|-2|$, g) $\sqrt{(-2)^2}$ no existe, h) $\sqrt{-2}$ no existe.

5. Probar las siguientes igualdades:
a) $(x+1)^2=x^2+2x+1$, b) $(x-1)^2=x^2-2x+1$, c) $x^2-1=(x+1)(x-1)$,
d) $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$, e) $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$,
f) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, g) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$, h) $\frac{1}{\sqrt{a}-1}=\frac{\sqrt{a}+1}{a-1}\quad a\neq 1$.

6. Encontrar el error en el siguiente razonamiento:
$$x=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow (x+1)(x-1)=0\Rightarrow (x+1)(x-1)+2=2$$
$$\Rightarrow \tfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}+\tfrac{2}{x-1}=\tfrac{2}{x-1}\Rightarrow x+1+\tfrac{2}{x-1}=\tfrac{2}{x-1}\Rightarrow x+1=0\Rightarrow 1+1=0$$

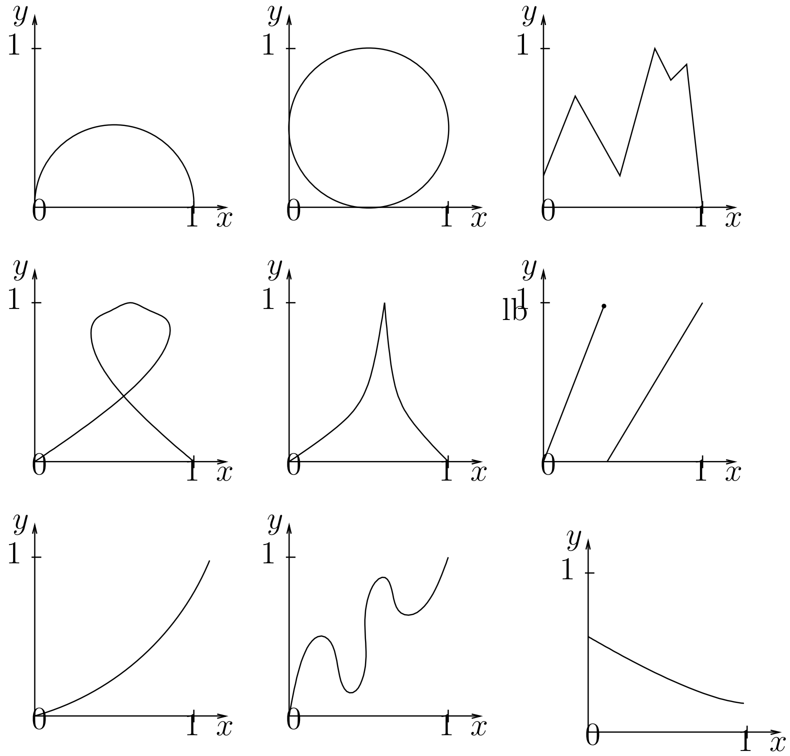
7. Sea a un número real positivo. Se designa con el símbolo $\ln a$ (y se lo llama el logaritmo en base e del número a) a un número b tal que $e^b=a$. Es decir: $\ln a=b$ si y sólo si $e^b=a$. Verificar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (indiquemos $\ln 3=c$ y $\ln 2=d$):
a) $\ln 9=\ln 3^2=c^2$, b) $\ln 5=\ln(2+3)=d+c$, c) $\ln 5=\ln(2+3)=dc$,
d) $\ln 6=\ln(2{,}3)=dc$, e) $\ln(1/2)=-d$, f) $\ln 1=1$, g) $\ln 1=0$,
h) $\ln 1$ no existe, i) $\ln -3=1/c$, j) $\ln -3=-c$.

8. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
a) $\ln x=\ln y\ \Rightarrow\ x=y$, b) $x^2=y^2\ \Rightarrow\ x=y$, c) $x^3=y^3\ \Rightarrow\ x=y$,

9. Resolver:
a) $\ln(x^2-1)=\ln(x-1)$, b) $\ln(x^2-2x+1)=2$, c) $3x^2-21x+12=-24$,
d) $\mathrm{e}^{\ln(x^2-1)}=0$, e) $\mathrm{e}^x-1>0$, f) $-x^3+2x^2-x\geq 0$, g) $\frac{\mathrm{e}^{x^2-2x-2}}{\mathrm{e}^{3x-8}}=1$, h) $\sqrt{x+3}=3$,
i) $\ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}$, j) $2^x=64^{\ln 3}$, k) $8^{-x}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, l) $\frac{2x}{x-6}=\frac{1}{x+3}$, m) $\sqrt{x}=x+2$,
n) $|x^2-1|=\frac{1}{2}$, o) $\frac{3x+2}{x-1}-\frac{8}{x-4}\geq 0$.

10. Hallar las raíces de los siguientes polinomios que sean independientes del parámetro a:
a) $x^2 + (1+a)x + a$, b) $(a-1)x^2 + 1 - a$, c) $-x^3 + ax^2 + (a+1)x + 6(1-a)$,

11. ¿Cuáles de las siguientes gráficas representa a una función con dominio $[0,1]$ y codominio $[0,1]$?



En los casos de que sí sea el gráfico de una función determinar si la función es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva.

12. Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes inecuaciones.

a) $1 < |x+2| \leq 5$, $1 < |-x^2 + 4x - 2| < 2$.

b) $|x^3 + 3x^2| = |x^3|$, $|x^3 + 3x^2| = x^3$.

c) $|x^3 + 3x^2| < |x^3|$, $|x^3 + 3x^2| < x^3$

13. Para cada $a \in \mathbb{R}$, se considera la función $f_a(x) = e^{ax}(1-x)$.
Probar que los gráficos de las funciones f_a se cortan en exactamente dos puntos, y hallar dichos puntos.

14. Para cada $a \in \mathbb{R}$, se considera el polinomio $p_a(x) = x^3 + (a^2+2)x^2 + (2a^2+3a)x + 6a - 2$.

a) Probar que $p_0(1) = 1$. En este caso decimos que 1 es un punto fijo para la función p_0, o que la función p_0 deja fijo a 1.

b) Probar que 1 no es punto fijo para la función p_2.

c) Hallar $\alpha \in \mathbb{R}$ que sea punto fijo para todos los p_a a la vez.