

PRÁCTICO 9

1. Sea  $T \in B(H)$  normal y compacto, con  $T = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n P_n$  según el teorema espectral. Si  $\phi \in \ell^\infty(\mathbb{C})$ , definimos  $\phi(T) : H \rightarrow H$  tal que  $\phi(T)x = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(\beta_n) P_n x + \phi(0) P_0 x$ ,  $\forall x \in H$ , donde  $P_0$  es la proyección ortogonal de  $H$  sobre  $\ker T$ . Probar que la transformación  $\pi : \ell^\infty \rightarrow B(H)$  tal que  $\phi \mapsto \phi(T)$  tiene las siguientes propiedades:
  - a)  $\pi$  es un homomorfismo unital de álgebras con involución, es decir: es lineal, multiplicativo, lleva la función 1 en el operador identidad, y conserva la involución, o sea, si  $\bar{\phi}$  es la función conjugada de  $\phi$ , entonces  $\pi(\bar{\phi}) = \pi(\phi)^*$  (otra forma de escribir esto:  $\bar{\phi}(T) = \phi(T)^*$ ).
  - b) Si  $\phi(z) = z$ ,  $\forall z \in \sigma(T)$ , entonces  $\phi(T) = T$ .
  - c)  $\|\phi(T)\| = \sup\{|\phi(z)| : z \in \sigma(T)\}$ .
  - d)  $S \in B(H)$  es tal que  $ST = TS$  si y sólo si  $S\phi(T) = \phi(T)S$ ,  $\forall \phi \in \ell^\infty$ .
2. Un operador  $A \in \mathbf{B}(H)$  se dice positivo si es autoadjunto y  $\langle Ah, h \rangle \geq 0$  para todo  $h \in H$ .  
Probar que si  $A \in \mathbf{B}_0(H)$  ( $H$  es un espacio de Hilbert sobre  $\mathbb{C}$ ) es normal, entonces es positivo si y sólo si todos sus valores propios son reales y positivos.
3. Probar que si  $T$  es un operador compacto y autoadjunto, entonces existen  $A, B \in \mathbf{B}(H)$  compactos y positivos tales que  $T = A - B$  y  $AB = BA = 0$ . (Sugerencia: usar el ejercicio 1, para las funciones  $f_+ = \frac{1}{2}(|id| + id)$  y  $f_- = \frac{1}{2}(|id| - id)$  )
4. (Raíz cuadrada de un operador). Sea  $T$  un operador compacto y positivo, probar que existe un único operador  $A$  compacto y positivo tal que  $A^2 = T$  (usar el ejercicio 1).
5. Sea  $B$  la bola unitaria cerrada de  $\ell^2(\mathbb{N})$  y  $f : B \rightarrow B$  definida por  $f((1 - \|x\|^2), x_1, x_2, \dots)$ . Probar que  $f(B) \subset B$ , que  $f$  es continua y que no tiene puntos fijos.
6. Hallar subespacios invariantes no triviales del shift en  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , del shift en  $\ell^2(\mathbb{N})$ , de su adjunto y de  $A(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$ .
7. probar que la hipótesis  $E$  acotado en el teorema del punto fijo de Schauder no es necesaria.
8. El objetivo de este ejercicio es probar que  $\{A \in \mathbf{B}(H) \mid \sigma_p(A) \neq \emptyset\}$  es denso en  $\mathbf{B}(H)$ .
  - a) Sea  $\sigma_{ap}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \{f_n\} \subset X \mid \|f_n\| = 1 \text{ y } (A - \lambda I)f_n \rightarrow_n 0\}$ .  
Probar que  $\partial\sigma(A) \subset \sigma_{ap}(A)$ , y como  $\sigma(A)$  es compacto y no vacío concluimos que  $\sigma_{ap}(A) \neq \emptyset$  para cualquier  $A$ .

- b) Construir una sucesión de operadores  $A_n \in \mathbf{B}(X)$  tal que  $\sigma_p(A_n) \neq \emptyset$  y  $A_n \rightarrow_n A$  en norma. Para eso, considerar  $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$  y  $\{f_n\} \subset X$  una sucesión tal que  $\|f_n\| = 1$  y  $\|(A - \lambda I)f_n\| \rightarrow_n 0$ .  
 Probar que existe una sucesión  $\psi_n \in X^*$  tal que  $\|\psi_n\| = 1$  y  $\psi_n(f_n) = 1$ .  
 Sea  $M_n = \ker(\psi_n)$ , entonces si  $g \in X$ , para cada  $n$  existe  $h_{n,g} \in M_n$  tal que  $g = \psi_n(g)f_n + h_{n,g}$ .  
 Definir  $A_n(g) = \psi_n(g)\lambda f_n + A(h_{n,g})$ , probar que esta sucesión satisface lo deseado.
9. Probar el teorema de Markov-Kakutani. Sea  $X$  normado y  $K \subset X$  compacto y convexo. Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de mapas continuos afines de  $K$  en  $K$  y que conmutan dos a dos. Entonces existe un punto  $x \in K$  fijo para todo  $A_i$ .