

PRÁCTICO 6

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el mapa $\varphi_n : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ definido por $\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ para todo $x \in \ell^\infty$. Probar que $\varphi_n \in \mathbf{B}(\ell^\infty, \mathbb{C})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar además que las φ_n están acotadas puntualmente en $\ell^1 \subset \ell^\infty$ pero no están acotadas uniformemente en ℓ^∞ . Deducir que ℓ^1 es de primera categoría en ℓ^∞ .
2. Probar que si $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ converge para todo $x = \{x_k\} \in c_0$, entonces $\{\alpha_k\} \in \ell^1$.
3. Sean X e Y espacios normados, X de Banach y $\{A_n\} \subset \mathbf{B}(X, Y)$. Probar que si $A_n(x) \rightarrow A(x)$ para todo $x \in X$, entonces $A \in \mathbf{B}(X, Y)$.
4. Sean X e Y espacios normados, Y completo y $S = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset \mathbf{B}(X, Y)$ tal que $\overline{\langle S \rangle} = \mathbf{B}(X, Y)$.
Probar que si $\{x_n\} \subset X$ y $x \in X$, entonces $A(x_n) \rightarrow A(x)$ para toda $A \in \mathbf{B}(X, Y)$ si y sólo si $A_\alpha(x_n) \rightarrow A_\alpha(x)$ para toda $\alpha \in I$ y $\{x_n\}$ es acotada.
5. Sea $X = C([0, 1])$ con la norma de L^1 y $A_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $A_n(f) = n \int_0^{\frac{1}{n}} f$. Probar que $A_n \in \mathbf{B}(X, \mathbb{C})$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, A_n esta acotada puntualmente y que $\|A_n\| = n$ (i.e. no están acotadas uniformemente). Comparar con el teorema de acotación uniforme.
6. a) Sea X un espacio normado y $A \subset X$. Probar que A es acotado si y sólo si $\sup\{|\varphi(a)| \mid a \in A\} < \infty$ para toda $\varphi \in X^*$.
b) Si X es completo y $A \subset X^*$, entonces A es acotado si y sólo si para todo $x \in X$ $\sup\{|\varphi(x)| \mid \varphi \in A\} < \infty$.
7. Sea $X = \{x \in \ell^1 \mid \sum n|x_n| < \infty\}$ con la norma de ℓ^1
 - a) Probar que X es un subespacio propio y denso de ℓ^1 , por lo tanto no es completo.
 - b) Sea $T : X \rightarrow \ell^1$ dado por $T(\{x_n\}) = \{nx_n\}$, probar que T es cerrado pero no acotado.
 - c) Sea $S = T^{-1}$, probar que S es acotada, sobreyectiva pero no abierta.
8. Sean $Y = (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ y $X = \{f \in Y : f \text{ es derivable y } f' \in Y\}$.
 - a) Probar que X no es de Banach.
 - b) Sea $T : X \rightarrow Y$, $Tf = f'$. Probar que $G(T)$ es cerrado. ¿Es T continua?

9. Sean X e Y espacios de Banach, y $T \in \mathbf{B}(X, Y)$. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:
- Existe $c > 0$ tal que $\forall x \in X \quad \|Tx\| \geq c\|x\|$.
 - $\text{Im}(T)$ es cerrada y $\ker(T) = \{0\}$.
10. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ una transformación lineal. Probar que T es continua si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $x_n \rightarrow 0$ y $Tx_n \rightarrow y$, se tiene que $y = 0$.
11. Sea X un espacio de Banach y $T : X \longrightarrow X$ una transformación lineal tal que $T^2 = T$ y $\ker(T)$ e $\text{Im}(T)$ son cerrados. Probar que T es continua.
12. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \rightarrow Y$ lineal. Probar que son equivalentes:
- $T \in \mathbf{B}(X, Y)$.
 - $\varphi \circ T \in X^*$ para toda $\varphi \in Y^*$.
 - $T : (X, w) \rightarrow (Y, w)$ es continua.
13. Sea X un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ dos normas en X con las cuales X es completo. Probar que si alguna de las normas domina a la otra son equivalentes.
14. Probar el teorema de la aplicación abierta a partir del teorema del gráfico cerrado.