

PRÁCTICO 5

1. Probar que todo espacio de Hilbert es reflexivo.
2. Probar que  $l^p$  es un espacio de Hilbert si y sólo si  $p = 2$ . (Sugerencia: recordar que una norma que proviene de un producto interno satisface la ley del paralelogramo.)
3. Sea  $H$  un espacio de Hilbert.
  - a) Si  $x_n, y_n$  pertenecen a la bola unidad cerrada de  $H$  para todo  $n$  y  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow 1$ , entonces  $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ .
  - b) Si  $x_n \in H$  para todo  $n$ ,  $x_n \xrightarrow{w} x$  y  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$  entonces  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ .
4. Probar que la completación de un espacio con producto interno es un espacio de Hilbert.
5. Si  $H_1, H_2, \dots$  son espacios de Hilbert, sea  
 $H = \{(h_n)_{n \geq 1} \mid h_n \in H_n \text{ y } \sum_{n \geq 1} \|h_n\|^2 < \infty\}$ .  
Si  $h = (h_n), g = (g_n) \in H$  definimos  $\langle h, g \rangle = \sum_{n \geq 1} \langle h_n, g_n \rangle_n$ .  
Probar que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno en  $H$  y que  $H$  resulta un espacio de Hilbert con este producto interno.
6.
  - a) Si  $H$  es un espacio de Hilbert y  $E$  es un subconjunto cerrado y convexo de  $H$ , entonces  $E$  contiene un único elemento de norma mínima.
  - b) Si  $M$  es un subespacio cerrado de  $H$  y  $x \notin M$ , entonces existe un único  $y \in M$  tal que  $d(x, y) = d(x, M)$ .
  - c) Si  $M$  es un subespacio cerrado de  $H$ , entonces  $H = M \oplus M^\perp$ .
7. En  $\ell^1(\mathbb{N})$ , probar que el conjunto  $K = \{\{x_n\} \in \ell^1 \mid \sum x_n = 1\}$  es cerrado, convexo y tiene infinitos elementos de norma mínima.
8. Sean  $H$  un espacio de Hilbert y  $a \in H$ , y supongamos que  $K$  es un subespacio cerrado de  $H$ . Demostrar que  $\min\{\|x - a\| : x \in K\} = \max\{|\langle a, y \rangle| : y \in K^\perp, \|y\| = 1\}$ .
9. Calcular  $\min_{a,b,c} \{\int_{-1}^1 |t^3 - a - bt - ct^2|^2 dt\}$  y obtener  $\max \int_{-1}^1 g(t)t^3 dt$ , donde  $g$  está sometida a las condiciones  $\int_{-1}^1 g(t)dt = \int_{-1}^1 tg(t)dt = \int_{-1}^1 t^2g(t)dt = 0$ , y  $\int_{-1}^1 |g(t)|^2 dt = 1$ .
10. Sean  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un conjunto ortonormal y  $\mathbf{Q}$  el *cubo de Hilbert*:  
 $\mathbf{Q} = \{h \in H : h = \sum_{i=1}^{\infty} c_n e_n, \text{ donde } |c_n| \leq 1/n\}$ .  
Probar que  $\mathbf{Q}$  es convexo y compacto.

11. Sea  $H = \ell^2(\mathbb{N})$ .
- Sea  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $|\lambda| < 1$ . Probar que  $\phi_\lambda(x) = \sum_0^\infty x_k \lambda^k$  define una funcional  $\phi_\lambda : H \rightarrow \mathbb{C}$  acotada y hallar  $h_\lambda \in H$  tal que  $\phi_\lambda(x) = \langle x, h_\lambda \rangle$  para todo  $x \in H$ .
  - ¿Cuál es la norma de  $\phi_\lambda$ ?
12. Probar que si  $H$  es un espacio de Hilbert de dimensión infinita, entonces toda sucesión ortonormal infinita converge débilmente a 0.
13. En  $\ell^2(\mathbb{N})$ , sea  $X$  el subespacio generado por  $\{x \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \#\{n \mid x_n \neq 0\} < \infty\} \cup \{\{\frac{1}{n}\}\}$ . Probar que  $X$  es un espacio con producto interno no completo. Mostrar que existe un conjunto ortonormal  $E \subset X$  y  $x \in X$  tal que  $x$  no tiene proyección sobre  $E$ .
14.
  - Probar que en espacios de Hilbert de dimensión infinita, ninguna base ortonormal es una base de Hamel.
  - Probar que un espacio de Hilbert es separable si y sólo si tiene una base ortonormal numerable.
15. Sea  $H$  un espacio de Hilbert, probar que todo elemento de norma uno es un punto extremal de la bola unidad. Probar que toda isometría es extremal en la bola unidad de  $\mathbf{B}(H)$ .
16. Probar que si  $H$  es un espacio de Hilbert y  $T \in \mathbf{B}(H)$ , entonces  $T : H \rightarrow H$  es continua si consideramos la topología débil en ambas copias de  $H$ .
17. Sea  $W$  el *shift con pesos*,  $W : l^2 \rightarrow l^2$ , dado por
- $$w(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_{n-1} x_{n-1}, \dots),$$
- donde  $\{\alpha_n\}$  es una sucesión acotada de números complejos. Probar que  $W \in \mathbf{B}(l^2)$  y calcular  $\|W\|$  y  $W^*$
18. Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $M$  un subespacio cerrado, sea  $P : H \rightarrow M$  la proyección como en el ejercicio 6. Probar que  $P$  es una proyección ortogonal en  $\mathbf{B}(H)$ , i.e.  $P \in \mathbf{B}(H)$ ;  $P^* = P$ ,  $P^2 = P$ .
19. Sea  $P \in \mathbf{B}(H)$  idempotente (es decir, tal que  $P^2 = P$ ). Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
- $P$  es una proyección ortogonal.
  - $P$  es autoadjunta.
  - $\text{Im}(P)$  y  $\text{ker}(P)$  son ortogonales.
  - $P = 0$  o  $\|P\| = 1$ .