Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2005

Práctico 3

1. Sea X un espacio de Banach, si M es un subespacio cerrado de X, definimos

$$M^{\perp} := \{\varphi \in X^* \mid \varphi(x) = 0 \, \forall x \in M\}$$

   Probar que $M^{\perp}$ es un subespacio cerrado de X^*, que $(\frac{X}{M})^* \simeq M^{\perp}$ y que $\frac{X^*}{M^{\perp}} \simeq M^*$.

2. Probar que un espacio de Banach es reflexivo si y sólo si su dual lo es.

3. ¿Existe una medida μ_n sobre $[0,1]$ tal que $\int_0^1 p \, d\mu_n = p'(0)$ para todo polinomio de grado menor o igual a n? ¿Y para todo polinomio p?

4. Sean X un espacio vectorial topológico, A y B subconjuntos convexos disjuntos de X, A abierto. Probar que existen $\varphi \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\operatorname{Re}\varphi(x) < \gamma \leq \operatorname{Re}\varphi(y)$ para todo $x \in A$ e $y \in B$. (Sugerencia: usar la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach).

5. Probar que en un espacio vectorial topológico T_1 implica T_2.(Sugerencia: Para todo U entorno del origen existe V entorno del origen tal que $V + V \subset U$ y $V = -V$).

6. Sean X un espacio vectorial topológico, $A \subset X$ compacto, $B \subset X$ cerrado tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces existe un entorno del origen V para el cual $(A+V) \cap (B+V) = \emptyset$.

7. ¿La topología de los abiertos algebraicos en $\mathbb{R}^2$ es una topología lineal?.(No vale usar el ejercicio 10).

8. Sea K un compacto de un espacio vectorial topológico X, probar que K es acotado.

9. Si X es un espacio vectorial topológico que contiene un entorno del origen acotado, entonces X tiene una base local numerable.

10. Probar que en espacios vectoriales de dimensión finita existe una única topología vectorial.

11. Si X es un espacio vectorial topológico, probar que X es localmente compacto si y sólo si es de dimensión finita.