

PRÁCTICO 2

1. Sea X un espacio vectorial y supongamos que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son dos normas sobre X . Probar que son equivalentes:
 - a) Existe $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c\|x\|'$ para todo $x \in X$.
 - b) La topología inducida por $\|\cdot\|$ contiene a la topología inducida por $\|\cdot\|'$.
Deducir que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son equivalentes (i.e. inducen la misma topología en X) si y sólo si existen constantes $c, C > 0$ tales que $\|x\| \leq c\|x\|'$ y $\|x\|' \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.
2. Sea X un espacio normado y $Z \subset X$ un subespacio cerrado tal que Z y $\frac{X}{Z}$ son espacios de Banach. Probar que X es un espacio de Banach.
3. Sea X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff (LCH). Sea X_∞ la compactificación con un punto de X . Probar que $C_0(X)$ y $\{f \in C(X_\infty) \mid f(\infty) = 0\}$ (con la norma de $C(X_\infty)$ restringida) son isométricamente isomorfos.
Se recuerda que si X es un espacio LCH, la compactificación con un punto $\infty \notin X$ de X es $X_\infty = X \cup \{\infty\}$, con la siguiente topología: $U \subset X_\infty$ es abierto si
 - a) $U \subset X$ es abierto o
 - b) $\infty \in U$ y U^c es un subconjunto compacto de X .
4.
 - a) Para $1 \leq p \leq \infty$ sea $Z = \{x \in l^p \mid x_{2n} = 0 \forall n\}$. Probar que $\frac{l^p}{Z}$ es isométricamente isomorfo a l^p .
 - b) Sea X un espacio topológico localmente compacto normal; $F \subset X$ un conjunto cerrado y $M = \{f \in C_0(X) \mid f(x) = 0 \forall x \in F\}$. Probar que $\frac{C_0(X)}{M}$ es isométricamente isomorfo a $C_0(F)$.
Se recuerda que un espacio topológico es normal si
 - 1) para todo $x \neq y$ existe U abierto tal que $y \in U$ y $x \notin U$
 - 2) Si $A, B \subset X$ son cerrados disjuntos, entonces existen abiertos disjuntos U, V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.
5. Sea X un espacio de Banach, probar que
 - a) Si $T, S \in \mathbf{B}(X)$, entonces $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$.
 - b) Si $T \in \mathbf{B}(X)$ es tal que $\|Id - T\| < 1$, entonces T es invertible.
 - c) Si $T, S \in \mathbf{B}(X)$, T es invertible y $\|T - S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, entonces S es invertible. Deducir que el conjunto de operadores invertibles es abierto.

- d) Probar que el mapa $T \mapsto T^{-1}$ es continuo.
6. Sean $X = L^2([0, 1])$, $\phi \in C([0, 1])$ y $T : X \rightarrow X$ definido por $T(f)(t) = \Phi(t)f(t)$. Probar que $T \in \mathbf{B}(X)$ y $\|T\| = \|\Phi\|_\infty$.
7. a) Probar que $(l^1)^* = l^\infty$, es decir, hallar un isomorfismo isométrico entre estos dos espacios.
 b) ¿Para que $\varphi \in (l^1)^*$ se cumple que existe $x \in l^1$ tal que $\|x\| = 1$ y $|\varphi(x)| = \|\varphi\|$?
8. a) Probar el lema de Riesz usando el teorema de Hahn Banach.
 b) Sea X es un espacio normado, $\varphi \in X^*$ y $M = \ker \varphi$. Probar que son equivalentes
 1) Existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $|\varphi(x)| = \|\varphi\|$.
 2) Existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $d(x, M) = 1$.
9. Sea X un espacio normado y $A \subset X$, probar que A es denso en X si y sólo si para todo $\varphi \in X^*$ tal que $\varphi|_A = 0$, se tiene que $\varphi = 0$.
10. Sea X un espacio normado. Probar que $J : X \rightarrow X^{**}$, definido por $J(x)(\varphi) = \varphi(x)$ para todo $x \in X$ y $\varphi \in X^*$, es una isometría. Dar un ejemplo en que J no sea sobreyectiva.
11. Sea X un espacio normado. Probar que si X^* es separable, entonces X lo es. (Sugerencia: dado $\{f_n\}$ un conjunto denso y numerable de X^* , probar que para cada n existe $x_n \in X$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|f_n\|$, entonces el espacio generado por $\{x_n\}$ es denso en X). ¿Vale el recíproco?.