Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2005

Notaciones

- Sea X un espacio de medida con medida positiva μ y $1 \leq p < \infty$.

  Sea $\|f\|_p := (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ y $L^p(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \|f\|_p < \infty\}$.

- En la situación anterior, sea $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible. Consideremos $S = \big\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > \alpha\}) = 0\big\}$, entonces $\inf S = \min S$ se llama supremo esencial de $|f|$.

  Definimos $\|f\|_\infty =$ supremo esencial de $|f|$. El espacio de las funciones esencialmente acotadas es: $L^\infty(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid \|f\|_\infty < \infty\}$

- Si $1 \leq p \leq \infty$, y μ es la medida de conteo en $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$, entonces $l^p(\mathbb{N}) := L^p(\mathbb{N})$ y $l^p(\mathbb{Z}) := L^p(\mathbb{Z})$.

  Explícitamente, si $\{x_n\}$ es una sucesión de números complejos, $\|\{x_n\}\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ y $l^p(\mathbb{N}) = \big\{\{x_n\} \mid (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\big\}$ si $p < \infty$.
  Si $p = \infty$, $\|\{x_n\}\|_\infty = \sup\{|x_n|\}$ y $l^\infty(\mathbb{N}) = \big\{\{x_n\} \mid \{x_n\} \text{ es acotada}\big\}$. Igual para $\mathbb{Z}$.

- Si $0 < p < 1$ y f es una función medible Lebesgue en $[0, 1]$, definimos $\Delta(f) := \int_X |f(x)|^p d\mu$ y $L_p := \big\{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \Delta(f) < \infty\big\}$, la función $d_p(f, g) = \Delta(f - g)$, define una distancia en L^p.

- Si X es un espacio topológico compacto, notaremos $C(X) = \big\{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ es continua}\big\}$.

  Si X es localmente compacto y Hausdorff,

  $C_0(X) = \big\{f : X \to \mathbb{C} \mid \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, K \subset X \text{ compacto tal que } |f(x)| < \varepsilon\, \forall\, x \in X \setminus K\big\}$.

  $C_c(X) = \big\{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ es de soporte compacto}\big\}$.

  $C_b(X) = \big\{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ es acotada}\big\}$.

  En estos cuatro espacios consideramos la norma del supremo que notaremos $\| \ \|_\infty$.

Práctico 1

1. Sea l^∞ el espacio de sucesiones acotadas con coeficientes en $\mathbb{C}$, y la norma del supremo.

   a) Probar que l^∞ es un espacio de Banach no separable.

   b) Sean c_0 y c los subespacios de l^∞ definidos por
   $c_0 = \{\{x_n\} \in l^\infty : \text{lím}_n\, x_n = 0\}$; $c = \{\{x_n\} \in l^\infty : \text{lím}_n\, x_n = x \text{ para algún } x \in \mathbb{C}\}$.
   Probar que c_0 y c son subespacios cerrados y separables de l^∞.

   c) Sea $e \in l^\infty$, $e = \{e_n\}$, donde $e_n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$. Probar que $c = \mathbb{C}e + c_0$.

2. Sea X un espacio normado. Probar que X es un espacio de Banach sii toda serie en X absolutamente convergente es convergente, es decir, si $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq X$ es tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, entonces existe $x \in X$ tal que $x = \text{lím}_n \sum_{j=1}^{n} x_j =: \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

3. Sean c y c_0 como en el ejercicio 1. Sea $T : c \to c_0$ tal que $T(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) = (\text{lím}_n x_n, x_1 - \text{lím}_n x_n, \ldots, x_k - \text{lím}_n x_n, \ldots)$.

   a) Probar que T es lineal y biyectiva.

   b) Calcular $\|T\|$ y $\|T^{-1}\|$.

4. Sean M y N espacios de Hausdorff compactos y $\tau : M \longrightarrow N$ una función continua. Sea $T : C(N) \longrightarrow C(M)$ dada por

$$(Tf)(x) = f(\tau x).$$

   Probar que $T \in \mathbf{B}(C(N), C(M))$ y calcular $\|T\|$.

5. Sea X un espacio normado. Probar que existe un espacio de Banach $\tilde{X}$, único salvo isomorfismos isométricos, tal que existe $\iota : X \longrightarrow \tilde{X}$, isomorfismo isométrico en su imagen, y $\overline{\iota(X)} = \tilde{X}$. Probar que si Y es un espacio de Banach y $T_0 \in \mathbf{B}(X, Y)$, T_0 se extiende (identificando X y su imagen por ι) en forma única a $T \in \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{Y})$.

6. Sean X e Y espacios normados, Y de dimensión finita. Probar que un operador

   $T : X \longrightarrow Y$ es continuo sii $\ker(T)$ es un subespacio cerrado de X.

7. Probar que la bola unitaria cerrada de un espacio normado X es compacta sii X es de dimensión finita.

8. Sean Y y Z subespacios cerrados de un espacio de Banach X. Probar que si Z es de dimensión finita entonces $Y + Z$ es cerrado (Sugerencia: Considerar el mapa cociente $\pi : X \to X/Y$, y notar que $\pi^{-1}(\pi(Z)) = Y + Z$). ¿Se puede afirmar lo mismo en general si Z no es dimensión finita?

9. Sea $\Omega := \{\alpha \in \mathbb{C} : \text{Re}(\alpha) < 1\}$. Para $\alpha \in \Omega$ y $x \in C([0,1])$ definamos

$$T_\alpha x(s) = s^{\alpha-1} \int_0^s t^{-\alpha} x(t) dt$$

   si $s \in (0, 1]$ y $T_\alpha(0) = (1 - \alpha)^{-1} x(0)$. Probar que:

   a) $T_\alpha : C([0,1]) \to C([0,1])$ es un operador acotado, y que $\|T_\alpha\| = \frac{1}{\text{Re}(1-\alpha)}$

   b) $T_\alpha - T_\beta = (\alpha - \beta) T_\alpha T_\beta$ siempre que $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $\text{Re}(\alpha), \text{Re}(\beta) < 1$. Deducir que el mapa $\alpha \to T_\alpha$ es holomorfo en el semiplano $\text{Re}(\alpha) < 1$, y calcular su función derivada.

10. Sea X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Probar que $C_b(X)$ es completo; $C_0(X)$ es cerrado y que $C_c(X)$ es denso en $C_0(X)$.