

1. Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. Sea $M = \text{Hom}_{alg}(C(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$.
 - a) si $\varphi \in M$, el conjunto $\{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid \varphi(f) = 0\}$ es un ideal maximal de $C(X, \mathbb{R})$.
 - b) Si $I \subset C(X, \mathbb{R})$ es un ideal propio, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in I$ (Suponer que no es así y deducir que $1 \in I$).
 - c) El mapa $\hat{\cdot} : X \rightarrow M$, definido por $\hat{x}(f) = f(x)$ es una biyección.
 - d) Consideremos en M la topología de la convergencia puntual, probar que entonces $x \mapsto \hat{x}$ es un homeomorfismo.
Conclusión: La topología de X está determinada por la estructura algebraica de $C(X, \mathbb{R})$.
2. Para $n \geq 1$ considere el espacio $C^n([0, 1]) := \{f \in C([0, 1]) \mid f \text{ tiene } n \text{ derivadas continuas}\}$.
 - a) Probar que $C^n([0, 1])$ es de Banach con la norma $\|f\| := \sup\{\|f^k\| \mid 0 \leq k \leq n\}$.
 - b) Probar que $C^n([0, 1])$ es de Banach con la norma $\|f\| := \sum_1^n \|f^k\|_\infty$.
 - c) Probar que $C^1([0, 1])$, no es de Banach con la norma del supremo, y que $T : C^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$, definida por $T(f) := f'$ no es continua.
3. Si $X = \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\} \cup \{0\}$, entonces $C(X)$ es isométricamente isomorfo a c .
4. Consideremos $S : l^2 \rightarrow l^2$ tal que $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Probar que S es una isometría no sobreyectiva.
5. Consideremos $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, la función característica del conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$. Si $1 \leq p \leq \infty$ y $f \in L^p(0, 1)$, definimos $V(f)(x) := \int_0^1 k(x, y)f(y)dy$.
Probar que $V \in \mathbf{B}(L^p(0, 1))$ y que $\|V\| \leq 1$. El operador V se llama *operador de Volterra*.
6. Consideremos $\pi : l^\infty \rightarrow l^\infty/c_0$ y definamos $\|x\|_\pi := \limsup |x_n|$ para todo $x \in l^\infty$. Probar que $\|\cdot\|_\pi$ es una seminorma; que $\{x \in l^\infty \mid \|x\|_\pi = 0\} = c_0$ y que $\|x\|_\pi = \|\pi(x)\|$ para todo $x \in l^\infty$.

7. Si X es un espacio topológico compacto, entonces $C(X)$ es reflexivo si y sólo si X es finito.
8. Para $p \in (1, \infty)$, probar que cada punto de la “superficie” de la bola cerrada unitaria de $L^p[0, 1]$ es un punto extremal de esta bola.
9. Mostrar que la bola unidad cerrada de ℓ^1 es la envolvente convexa cerrada de sus puntos extremales.
10. Consideremos $M_n(\mathbb{F})$ como $\mathbf{B}(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)$, de ese modo se puede dar una estructura de espacio normado a $M_n(\mathbb{F})$. Si B es la bola unitaria de $M_n(\mathbb{F})$, probar que $\text{ext}(B)$ está formado por las isometrías de \mathbb{F}^n , i.e. si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ son las matrices ortogonales y si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ son las matrices unitarias.
11.
 - a) Sean X un espacio topológico compacto; $x_0 \in X$ y $A = \{f \in C(X) \mid f(x_0) = 0\}$, entonces A es una subálgebra cerrada de $C(X)$ que separa puntos de X , es cerrada por conjugación pero no tiene a las constantes (i.e. $1 \notin A$).
 - b) Probar que si A es una subálgebra cerrada de $C(X)$ que separa puntos de X y es cerrada por conjugación, entonces o bien $A = C(X)$ o bien existe $x_0 \in X$ tal que $A = \{f \in C(X) \mid f(x_0) = 0\}$. (Sugerencia: considerar el álgebra $A \oplus \mathbb{C}$, probar que es un álgebra que satisface las hipótesis de S-W y que A es un ideal maximal de $A \oplus \mathbb{C}$)
12. Sea X un espacio topológico localmente compacto y A una subálgebra cerrada de $C_0(X)$ tal que:
 - a) Para todo $x \in X$ existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq 0$.
 - b) A separa puntos de X .
 - c) A es cerrada por conjugación.

Probar que $A = C_0(X)$. (Sugerencia: considerar la compactificación con un punto de X y usar el ejercicio anterior)

13.
 - a) Si X es compacto, un ejemplo de A cerrada, cerrada por conjugación, con 1 y que no separa puntos de X es el siguiente:
Sean $x_0, x_1 \in X$, $x_0 \neq x_1$, $A = \{f \in C(X) \mid f(x_0) = f(x_1)\}$.
 - b) Si X es compacto, $A \subset C(X)$ cerrada, y cerrada por conjugación, con 1. Considerar la relación de equivalencia: $x \sim y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$ para todo $f \in A$. Probar que o bien $A = C(X)$ o bien $A = \{f \in C(X) \mid x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)\}$.