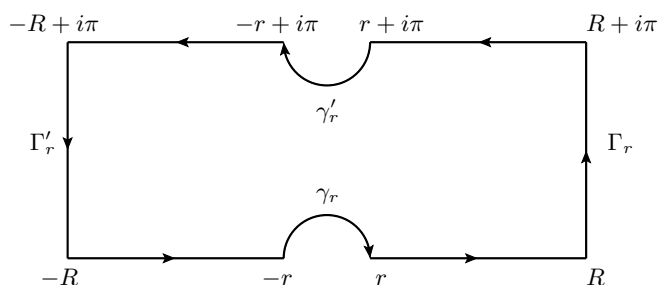


PRÁCTICO 8

- Calcular los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades:
 - $(z^2 + 1)/(z^2 + z + 1)$; (b) $(\exp z + 1)/\operatorname{sen} z$; (c) $\tan^2 z$; (d) $1/(z^2 \operatorname{ch} z)$.
- Calcular las siguientes integrales:
 - $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^4 + 1}$, donde γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$ orientada positivamente.
 - $\int_{\gamma} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}$, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = 2 + \frac{1}{2}e^{2\pi it}$.
 - $\int_{\gamma} \frac{z^3 dz}{2z^4 + 1}$, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = e^{2\pi it}$.
 - $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz$, $\gamma_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma_r(t) = re^{2\pi it}$.
 - $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} z^n \exp(z/2) dz$, $n \in \mathbb{Z}$, $\gamma_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma_r(t) = re^{2\pi it}$.
- Calcular las integrales que siguen por el método de los residuos: (a) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \operatorname{sen}^2 t}$; $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$
 (b) $\int_0^{\pi} \frac{\cos 2t dt}{1 + a^2 + 2a \cos t}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq \pm 1$; (c) $\int_0^{\pi} \frac{dt}{(a + \cos t)^2}$, $|a| > 1$; (d) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos t)^2}$, $a, b > 0$.
- Calcular las siguientes integrales por el método de los residuos:
 - $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 dt}{t^4 + t^2 + 1}$; (b) $\int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 + t^2}$, $a \in \mathbb{R}$; (c) $\int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2 + 1)^3}$; (d) $\int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^6}$; (e) $\int_0^{\infty} \frac{t^2 - t + 2}{t^4 + 10t^2 + 9} dt$.

Probar que $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{sh} t} dt$ converge, y calcularla (Sugerencia:

- integrar la función $f(z) := \frac{\exp(iz)}{\operatorname{sh} z}$ en el camino de la figura de al lado).



- Calcular:
 - $\int_0^{\infty} \frac{t \operatorname{sen} bt}{a^2 + t^2} dt$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$; (b) $\int_0^{\infty} \frac{\cos mt}{1 + t^2 + t^4} dt$, $m > 0$.
- ▲ Sea f una función meromorfa en una región que contiene al semiplano superior cerrado Π^+ . Sea \mathcal{P} el conjunto de polos de f en Π^+ . Probar que si \mathcal{P} es finito y $\mathcal{P} \cap \mathbb{R} = \emptyset$, y si $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, entonces para todo $m > 0$ se tiene:

$$\int_0^{\infty} [e^{imt} f(t) + e^{-imt} f(-t)] dt = 2\pi i \sum_{p \in \mathcal{P}} \operatorname{Res}(e^{imz} f(z), p).$$

Deducir que si f es par, entonces $\int_0^{\infty} f(t) \cos mtdt = \pi i \sum_{p \in \mathcal{P}} \operatorname{Res}(e^{imz} f(z), p)$, y que si f es impar, entonces $\int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen} mtdt = \pi \sum_{p \in \mathcal{P}} \operatorname{Res}(e^{imz} f(z), p)$.

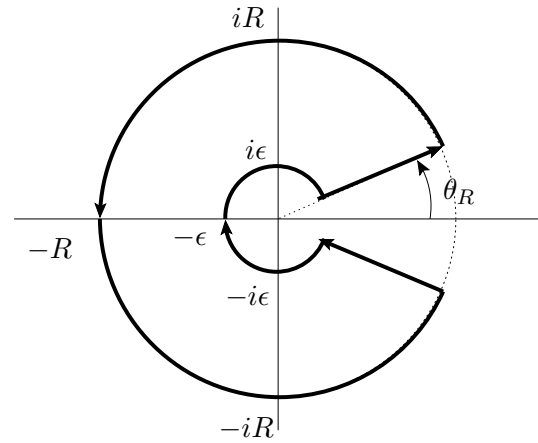
Aprovechar y calcular: $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha t}{(1+t^2)(4+t^4)} dt$ y $\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha t}{t^2 + b^2} dt$, $\alpha, a > 0$.

8. Mostrar que si $0 < a < 1$ se tiene: $\int_0^\infty \frac{t^{-a}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}$.

Sea $a \in (0, 1)$. Integrando sobre el camino de al lado una función conveniente, y tomando límite en R , probar que (se supone que el ángulo θ_R tiende a cero cuando $R \rightarrow \infty$):

9.

$$\int_0^\infty \frac{t^a}{1+t^2} dt = \frac{\pi \cos \frac{(a+1)\pi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{(a+1)\pi}{\pi}}.$$



10. Sean $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Probar que $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha t}{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} a} dt = \frac{\pi \operatorname{sen} \alpha a}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} \alpha \pi}$ (Sugerencia: integrar $\frac{\exp(i\alpha z)}{\operatorname{ch} z + \operatorname{ch} a}$ sobre la frontera del rectángulo de vértices $\pm R$, $\pm R + 2\pi i$).

Pequeño Apéndice

- a) Integrales del tipo $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t) dt$.

Supongamos que $R = P/Q$ es una función racional de dos variables, es decir, $P, Q \in \mathbb{C}[X, Y]$, y supongamos que $Q(x, y) \neq 0$ si $x^2 + y^2 = 1$. Entonces $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t) dt$ se puede calcular integrando $f(z) = \frac{-i}{z} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2z}\right)$ sobre la circunferencia unidad.

- b) Integrales del tipo $\int_{-\infty}^\infty f(t) dt$.

Supongamos que f es holomorfa en un abierto $\Omega \supseteq \{\operatorname{Im} z \geq 0\} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$, donde $z_1, \dots, z_k \notin \mathbb{R}$, y que existen $R > 0$, $M > 0$, $\delta > 0$ tales que $|f(z)| \leq M/|z|^{1+\delta}$ si $|z| \geq R$ y $\operatorname{Im} z \geq 0$. Entonces $\int_{-\infty}^\infty f(t) dt$ se puede calcular integrando sobre $\Gamma_r = \gamma_r^{(1)} + \gamma_r^{(2)}$ y luego tomando límite en r , donde $\gamma_r^{(1)} : [-r, r] \rightarrow \Omega$ es tal que $\gamma_r^{(1)}(t) = t$, y $\gamma_r^{(2)} : [0, \pi] \rightarrow \Omega$ es tal que $\gamma_r^{(2)}(t) = re^{it}$.

- c) Integrales del tipo $\int_{-\infty}^\infty f(t) e^{i\alpha t} dt$, $\alpha > 0$.

En las mismas hipótesis de (b) sobre f , salvo que δ también puede ser 0, y si $\alpha > 0$, $\int_{-\infty}^\infty f(t) e^{i\alpha t} dt$ se puede calcular tomando límites de integrales de $f(z) \exp(i\alpha z)$ sobre rectángulos, uno de cuyos lados está sobre \mathbb{R} .

- d) Integrales de los tipos $\int_0^\infty f(t) \ln(t) dt$, $\int_0^\infty f(t) dt$

Si $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$, con $\{z_1, \dots, z_k\} \cap [0, \infty) = \emptyset$, y si existen $R > 0$, $M > 0$, $\delta > 0$ tales que $|f(z)| \leq M/|z|^{1+\delta}$ si $|z| \geq R$, entonces las integrales anteriores se pueden calcular integrando $f(z) \ln^2(z)$ sobre "ojos de llave", y después tomando límite.

e) Integrales del tipo $\int_0^\infty R(t)t^{-\alpha}dt$, $\alpha \in (0, 1)$.

Si R es una función racional que no tiene polos sobre $[0, \infty)$ y tal que $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0$, entonces estas integrales se pueden calcular integrando $z^{-\alpha}R(z)$ sobre “ojos de llave”, y después tomando el límite.

El ejercicio marcado con ▲ es para entregar. Fecha límite de entrega 14 de junio.