Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Complejo–Curso 2005

Práctico 7

1. Probar el *principio del mínimo*: si Ω es una región y $f \in \text{Hol}(\Omega)$ no tiene ceros en Ω, entonces $|f|$ no tiene mínimos locales en Ω, a menos que f sea constante.

2. Probar que $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ es simplemente conexo.

3. Se dice que un conjunto Ω es *estrellado* si existe $\omega \in \Omega$ tal que $[\omega, z] \subseteq \Omega$, $\forall z \in \Omega$. Probar que todo conjunto convexo es estrellado. Probar que todo abierto estrellado $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es una región simplemente conexa.

4. Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es una región simplemente conexa y $f \in \text{Hol}(\Omega)$, ¿entonces $f(\Omega)$ es simplemente conexa?

5. Sea Γ_R el rectánulo de vértices R, $R+ib$, $-R+ib$ y $-R$ orientado positivamente, donde $R > 0$ y $b > 0$. Calculando $\int_{\Gamma_R} exp(-z^2)dz$, probar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx)dx = \sqrt{\pi}e^{-b^2}$.

6. Demostrar que si f es continua en el sector $0 < |z-a| \leq r_0$, $0 \leq \arg(z-a) \leq \alpha$ $(0 < \alpha \leq 2\pi)$ y existe $\lim_{z \to a}(z-a)f(z)dz = A$, entonces se tiene que
$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = iA\alpha,$$
donde γ_r es el arco de circunferencia $|z-a| = r$ perteneciente al sector dado y recorrida en la dirección positiva.

7. *Lema de Jordan.*
Si f es continua en la región $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0, \text{Im}\, z > a\}$, donde $R_0 > 0$, $a \in \mathbb{R}$, y en esta región $f(z) \to 0$ cuando $z \to \infty$, probar que para todo número positivo m se tiene que:
$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} e^{imz} f(z)dz = 0,$$
donde Γ_R es el arco de circunferencia $|z| = R$ perteneciente a la región dada.
Sugerencia: Al estimar el módulo de la integral a lo largo de la semicircunferencia $|z| = R$, $\text{Im}\, z > 0$, recurrir a la desigualdad $sen\theta \geq 2\theta/\pi$, válida para $0 \leq \theta \leq \pi/2$, y al realizar las estimaciones a lo largo de los arcos pertenecientes al semiplano inferior (en el caso que $a < 0$) recordar que la longitud de cada uno de ellos tiende hacia $|a|$ para $R \to \infty$.

8. Si f es continua en $\operatorname{Re} z \geq \sigma$, donde σ es un número real fijo, y en este semiplano $f(z) \to 0$ cuando $z \to \infty$, entonces para todo número negativo t se tiene que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} e^{zt} f(z)dz = 0,$$

donde Γ_R es el arco de circunferencia $|z| = R$, $\operatorname{Re} z \geq \sigma$. Si f es continua en $\operatorname{Re} z \leq \sigma$, la proposición es válida si t es positivo y si Γ_R es el arco de circunferencia $|z| = R$, $\operatorname{Re} z \leq \sigma$.

9. *Lemas de deformación de caminos*

   Sean $a \in \mathbb{C}$, $r_0 > 0$, $\epsilon_0 > 0$, y $\theta_1, \theta_2 : [r_0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi_1, \varphi_2 : (0, \epsilon_0] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\theta_1(r) \leq \theta_2(r)\ \forall r \in [r_0, \infty)$, y $\varphi_1(\epsilon) \leq \varphi_2(\epsilon)\ \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0]$. Se consideran los conjuntos $\Sigma^a = \Sigma^a(r_0, \theta_1, \theta_2) := \{z = a + re^{it} : r \geq r_0,\ \theta_1(r) \leq t \leq \theta_2(r)\}$, y $\Sigma_a = \Sigma_a(\epsilon_0, \varphi_1, \varphi_2) := \{z = a + \epsilon e^{it} : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0, \varphi_1(\epsilon) \leq t \leq \varphi_2(\epsilon)\}$. (Dibujar tales conjuntos Σ^a y Σ_a cuando θ_1, θ_2, φ_1 y φ_2 son constantes). Sean $f : \Sigma^a \to \mathbb{C}$ y $g : \Sigma_a \to \mathbb{C}$ funciones continuas. Supongamos que existe $L := \lim zf(z)$ cuando $z \to \infty$ dentro de Σ^a, y que existe $l := \lim\ (z - a)g(z)$ cuando $z \to a$ dentro de Σ_a. Sean $\Gamma_r : [\theta_1(r), \theta_2(r)] \to \Sigma^a$ tal que $\Gamma_r(t) = a + re^{it}$, y $\gamma_\epsilon : [\varphi_1(\epsilon), \varphi_2(\epsilon)] \to \Sigma_a$ tal que $\gamma_\epsilon(t) = a + \epsilon e^{it}$. Probar que:

   a) Si $L = 0$ y $\theta_2 - \theta_1$ está acotada, entonces $\lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r} f(z)dz = 0$.

   b) Si existe $\theta = \lim_{r\to\infty} \big(\theta_2(r) - \theta_1(r)\big)$, entonces $\lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r} f(z)dz = i\theta L$.

   c) Si $l = 0$ y $\varphi_2 - \varphi_1$ está acotada, entonces $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon} g(z)dz = 0$.

   d) Si existe $\varphi = \lim_{\epsilon\to 0} \big(\theta_2(\epsilon) - \theta_1(\epsilon)\big)$, entonces $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon} g(z)dz = i\theta l$.