

PRÁCTICO 5

1. Probar que las siguientes funciones son holomorfas en  $\Omega$ , y calcular sus valores:

i)  $f(z) = \int_{\gamma} \frac{2\xi^2 - \xi - 2}{\xi - z} d\xi$ , donde  $\gamma : \gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ .

ii)  $f(z) = \int_{\gamma} \frac{\xi^3 + 2\xi}{(\xi - z)^3} d\xi$ , donde  $\gamma : |z - 2| = 1$  recorrida en sentido positivo, y  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ .

2. Demostrar que si  $f$  es continua en un entorno de  $a \in \mathbb{C}$ , entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a).$$

3.  $\square$  Demostrar que si  $f$  es continua en la semifranja  $x \geq x_0$ ,  $0 \leq y \leq h$  y se tiene que el límite  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x + iy) = A$  no depende de  $y$  y existe uniformemente respecto a  $y$ , entonces se cumple que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\beta_x} f(z) dz = iAh$ , donde  $\beta_x$  es el segmento  $0 \leq y \leq h$  de la recta vertical que pasa por  $x$  recorrida desde abajo hacia arriba.

4. Sean  $f, g \in H(\mathbb{D})$ , funciones sin ceros en  $\mathbb{D}$ . Si  $\frac{f'}{f}(\frac{1}{n}) = \frac{g'}{g}(\frac{1}{n})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ; mostrar que  $f = kg$  para algún  $k \in \mathbb{C}$ .

5. Hallar las multiplicidades de los ceros de las funciones siguientes:  $\tan z$ ,  $\exp 2z + \exp z$ ,  $(z^3 + 1)(\exp z - 1)$ ,  $\frac{(z^2 - \pi^2) \operatorname{sen} z}{z^7}$ ,  $\cos z^3$ ,  $\exp(\tan z)$ ,  $\cos^3 z$ .

6. Si  $a$  es cero de orden  $k$  para  $f$  y cero de orden  $n$  para  $g$ , ¿Qué es  $a$  para las siguientes funciones? i)  $f(z)g(z)$ ; ii)  $f(z) + g(z)$ ; iii)  $f(z)/g(z)$ .

7. Si  $f$  y  $g \in H(D(a, r))$  y  $f(a) = g(a) = 0$ . Probar que  $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$ .

8. Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  convergente para  $|z| < R$ . Probar que para todo  $r \in (0, R)$  se tiene:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}. \text{ Sea } M(r) = \max\{|f(re^{it})| : t \in [0, 2\pi]\}. \text{ Probar que si existe } r \in (0, R) \text{ tal que } |c_n| = \frac{M(r)}{r^n}, \text{ entonces } f(z) = c_n z^n, \forall z.$$

9. Si  $f \in H(\mathbb{D})$  y verifica  $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$ , hallar la mejor aproximación de  $|f^{(n)}(0)|$  que pueda proporcionar la desigualdad de Cauchy.

10. De acuerdo al teorema de Liouville, una función entera y acotada  $f$  es constante. Demostrar este teorema calculando la integral  $\int_{|z|=R} \frac{f(z) dz}{(z-a)(z-b)}$ , donde  $|a|, |b| < R$ , y estimándola para  $R \rightarrow \infty$ .

11. Supóngase que  $f$  y  $g$  son funciones enteras, y  $|f(z)| \leq |g(z)|$ , para todo  $z$ .

- i) Probar que si  $g$  tiene un cero de orden  $m$  en  $z_0$  entonces  $f$  tiene un cero de orden  $n$  con  $n \geq m$  en  $z_0$ .
  - ii) Deducir que  $f = kg$  para un  $k \in \mathbb{C}$ .
12. i) Probar que las funciones  $expz$ ,  $\text{sen } z$ ,  $\text{cos } z$  tienen singularidades esenciales en  $\infty$ .
- ii) Clasificar las singularidades de las funciones:  $\frac{\text{sen}^2 z}{z}$ ,  $\frac{z^2+1}{\text{sen } z}$ ,  $\frac{z^2}{z^2+1}expz$ .
13. Probar que una función entera sin singularidad esencial en  $\infty$  es un polinomio.
14. Sea  $\Omega$  una región acotada y  $\{f_n\} \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  tales que  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $\partial\Omega$ . Probar que  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $\overline{\Omega}$ .
15. Sean  $f \in H(\Omega)$  y  $\Gamma$  un camino cerrado en  $\Omega$  tal que:  $ind_{\Gamma}(\alpha) \neq 0$ , para todo  $\alpha \notin \Omega$ ,  $|f(\xi)| \leq 1$  para todo  $\xi \in \Gamma^*$ . Sea  $z \in \Omega$  tal que  $ind_{\Gamma}(z) \neq 1$ , probar que  $|f(z)| \leq 1$ .

*El ejercicio marcado con  $\square$  es para entregar. Fecha límite de entrega 17 de mayo.*