Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción al Análisis Complejo
Curso 2005

Práctico 4

Razón doble e Integrales

Dos puntos z y z^* se dicen *simétricos* respecto a la cfa (o recta) que pasa por α, β y γ si $[z^*, \alpha, \beta, \gamma]$ es conjugado de $[z, \alpha, \beta, \gamma]$.

1. Hallar la imágen simétrica de las curvas siguientes con respecto a la circunferencia unidad:

   a) $\mid z \mid = \frac{1}{2}$.
   b) $\mid z - 1 \mid = 1$.
   c) $y = 2$.
   d) $\mid z - a \mid = a$.

2. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia (o una recta) y a, b, $c \in \mathcal{C}$. Definimos

$$\mathcal{C}^L = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}[z, a, b, c] > 0\}$$

$$\mathcal{C}^R = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}[z, a, b, c] < 0\}.$$

   a) Sea $g \in \mathcal{M}$. Probar que si $z \in \mathcal{C}^L$ ($z \in \mathcal{C}^R$) entonces $g(z) \in g(\mathcal{C})^L$ ($g(z) \in g(\mathcal{C})^R$).
   b) Si a,b, c son reales probar que:
      1) Si $a < b < c$ entonces $\mathcal{C}^L = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$.
      2) Si $a > b > c$ entonces $\mathcal{C}^L = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z < 0\}$.

3. Calcular $\int_\gamma f(z)dz$ en los siguientes casos:

   a) $f(z) = \frac{z+2}{z}$, $\gamma : \gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.
   b) $f(z) = e^z$, $\gamma : \gamma(t) = (1+i)t$, $t \in [0, 1]$.
   c) $f(z) = z^m \bar{z}^n$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $\gamma : \gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Calcular las siguientes intergales

   a) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$.
   b) $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1} dz$.

5. ⁕ Integrando $f(z) = 1/z$ sobre la elipse $\gamma : \gamma(t) = a\cos t + ib\,\mathrm{sen}\, t$, mostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\,\mathrm{sen}^2\, t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

6. Sea γ el cuadrado de vértices $\pm 2 \pm 2i$, recorrido en sentido antihorario. Calcular:

(a) $\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z-\pi/2} dz$; (b) $\int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2+8)} dz$; (c) $\int_\gamma \frac{z\,dz}{2z+1}$;

(d) $\int_\gamma \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2} dz$, $x_0 \in (-2, 2)$; (e) $\int_\gamma \frac{\cosh z}{z^4}$.

El ejercico marcado con ⁕ es para entregar. Fecha límite de entrega 3 de mayo.