

Práctico 3

Transformaciones de Möbius

El mapa $S : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una *transformación de Möbius* si existen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que $S(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \forall z \in \mathbb{C}$ y $ad - cd \neq 0$.

Notación: $\mathcal{M} = \{S : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty \text{ tal que } S \text{ transformación de Möbius}\}$.

1.
 - a) Hallar la imagen de \mathbb{D} por $f(z) = \frac{z}{1-z}$.
 - b) Hallar las imágenes de las rectas paralelas a los ejes coordenados por $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.
 - c) Si a, b, c son complejos no alineados, hallar una transformación de Möbius que transforme la circunferencia por ellos determinada en la circunferencia unidad.
2. En los siguientes casos, hallar $f(\mathcal{E})$, donde:
 - a) $\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$, $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.
 - b) $\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 10, \operatorname{Im} z > 0\}$, $f(z) = \frac{2z-i}{2+iz}$.
 - c) $\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \pi/4\}$, $f(z) = \frac{z}{z-1}$.
 - d) $\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $f(z) = \frac{z-1}{z}$.
 - e) $\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $f(z) = \frac{z-1}{z-2}$.
3. Hallar una transformación de Möbius que lleve:
 - a) $-1, i$ y $1+i$ en: i) $0, 2i, 1-i$; ii) $i, \infty, -i$.
 - b) $-1, \infty$ y i en: i) $i, 1, 1+i$; ii) $\infty, i, 1$; iii) $0, \infty, 1$.
4. En los siguientes casos hallar $g \in \mathcal{M}$ a partir de los siguientes datos:
 - a) 1 e i son fijos, $g(0) = -1$.
 - b) $\frac{1}{2}$ y 2 son fijos, $g(\frac{5}{4} + \frac{3i}{4}) = \infty$.
 - c) i es el único punto fijo y $g(1) = \infty$.
5. Transformar la faja vertical $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$ en:
 - a) el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.
 - b) el disco unidad, con $g(0) = 0$.
6. Hallar la transformación de Möbius que lleve $\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ en:

- a) el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ con $|z - \frac{d}{2}| \leq \frac{d}{2}$ excluido;
- b) la lúnula comprendida entre las circunferencias $|z - \frac{d_1}{2}| = \frac{d_1}{2}$ y $|z - \frac{d_2}{2}| = \frac{d_2}{2}$.
7. Hallar una transformación de Möbius que lleve el disco $|z| \leq r$ en el semiplano derecho con $g(r) = 0$ y $g(-r) = \infty$. ¿Es esta transformación única? ¿Qué valores podría tomar $g(ir)$?
8. Sea $g \in \mathcal{M}$, $g \neq id$. Probar que:
- a) $g(0) = 0$, $g(\infty) = \infty$ si y sólo si $g(z) = az$.
- b) $g(\infty) = \infty$ y es el único punto fijo si y sólo si g es una traslación.
- c) $g(0) = \infty$ y $g(\infty) = 0$ si y sólo si $g(z) = az^{-1}$.
9. Encontrar una función holomorfa biyectiva que lleve la región $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{i}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$ en el disco unidad.
10. Para las transformaciones $f(z) = \frac{z+1}{z}$ y $g(z) = \frac{z-1}{z}$ hallar las imágenes de las circunferencias centradas en el origen.
11. ¿En qué se transforma $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ mediante $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$?
12. * Sea $g \in \mathcal{M}$. Se define el *círculo isométrico* de g como el conjunto

$$\Omega_g = \{z \in \mathbb{C} : |cz + d| = |ad - bc| \frac{1}{2}\}.$$

- a) Probar que $g|_{\Omega_g}$ es una isometría.
- b) Mostrar que, si $c \neq 0$, entonces Ω_g es el círculo de centro $-\frac{d}{c}$ y radio $\frac{|ad-bc|^{\frac{1}{2}}}{|c|}$ y que en otro caso se tiene que $\Omega_g = \mathbb{C}$ o $\Omega_g = \emptyset$.
- c) Comparar $|g'(z)|$ con 1, hallando los conjuntos del plano que son dilatados o contraídos por g .
13. Sea $g \in \mathcal{M}$ que transforma el eje real en el mismo. Probar que existen a, b, c y $d \in \mathbb{R}$ tales que $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

*El ejercicio marcado con * es para entregar. Fecha límite de entrega 26 de abril.*