

PRÁCTICO 10

1. Sea  $u(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ . Mostrar que  $u$  es armónica y hallar  $f$  holomorfa tal que  $u = \operatorname{Re}(f)$ .
2. Sea  $f$  entera tal que es real sobre el eje real y puramente imaginaria sobre el eje imaginario. Probar que  $f$  es impar.
3. Sea  $u$  armónica en  $\{\operatorname{Im}(z) \geq 0\}$  tal que  $0 \leq u(z) \leq Ky, \forall y > 0$ . Probar que  $u = ky$  para algún  $k$ .
4. Probar que  $f(z) = \sum z^{n!}$  no puede ser extendida a ningún abierto que contenga estrictamente el disco unidad.
5. Sea  $\Omega$  abierto y conexo y  $u$  una función armónica en  $\Omega$ . Sea  $D \subset \Omega$  abierto y sea  $(f, D)$  un elemento de función tal que  $u = \operatorname{Re}(f)$  en  $D$ . Probar que  $f$  se puede extender analíticamente a lo largo de cualquier curva en  $\Omega$ .
6. Sea  $z, z', w$  tres puntos del disco hiperbólico  $\Delta$ . Denotamos por  $[z, z']$  el segmento de geodésica que une  $z$  con  $z'$ . Probar que si  $w' \in [z, z']$  entonces  $d(w', w) \leq \max\{d(z, w), d(z', w)\}$  donde  $d$  es la distancia hiperbólica. Concluir que el diámetro de un triángulo es igual a la longitud del mayor lado.
7. Calcular el área de un polígono (convexo) en función del número de lados y los ángulos internos.
8. Sean  $S_1, S_2$  superficies de Riemann (conexas) y  $f : S_1 \rightarrow S_2$  holomorfa no constante. Probar que  $f$  es abierta. Si  $S_1$  es compacta probar que  $f$  es sobre.
9. Sea  $S$  superficie de Riemann compacta y  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Probar que  $f$  es constante.