Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cálculo I–Curso 2005

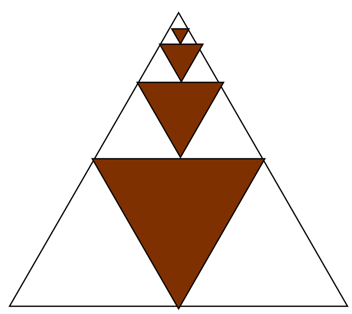
Encaren series.

1. **Serie Geométrica**
Una de las paradojas de Zenón, argumentando en contra de que el espacio fuera continuo es la siguiente. Si tiro una flecha hacia un blanco, antes de llegar al blanco debe pasar por el punto medio entre él y el blanco. Al llegar al punto medio todavía tiene que pasar por el punto medio entre su posición actual y el blanco. Y así debe recorrer infinitos segmentos. Zenón consideró que este argumento mostraba que era imposible el movimiento en el continuo.

Preguntas

a) ¿Cuánto da la suma $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$?

b) ¿Cuánto da la suma $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i}$?



c) Discutir según k cuánto da la suma $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k^i}$.

d) Si λ es un número real ¿qué pasa con la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i$?

2. Clasificá las siguientes series, y en caso de convergencia encontrá la suma de las mismas.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5}{4}\right)^{n-1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-3n+2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} log\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^{n-1}}$$

3. Clasificá las siguientes series

$$\sum cosn \qquad \sum \frac{n^3}{e^n} \qquad \sum(\sqrt{n}-1) \qquad \sum(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$\sum sen(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \qquad \sum\left(1-cosn\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \qquad \sum \frac{1}{2^n+3^n+n^4}$$

4. Sea $\sum a_i < \infty$ probar que la cola de esta serie (que se define como $\sum_{i=N}^{\infty} a_i$, o sea que consiste en quitarle los N terminos iniciales a la serie original) tiende a cero con N.

5. Sean (a_n), (b_n) y (c_n) sucesiones tales que:
$0 < b_n < a_n < 1$, $\forall\, n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, y $c_n = \frac{1-a_n}{1+b_n}$. Clasificá:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (1-c_n)$$

6. Sabiendo que $a_n > 0$ y que $\sum a_n$ converge, clasificá las siguientes series o mostrá con ejemplos que no es posible afirmar nada.

$$\sum \frac{1}{a_n} \qquad \sum a_n^2 \qquad \sum \sqrt{a_n} \qquad \sum log(1+a_n)$$

7. Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de términos no negativos cuyas series son divergentes. ¿ Qué se puede decir de las series $\sum \min\{a_n, b_n\}$ y de $\sum \max\{a_n, b_n\}$?

8. En cada uno de los siguientes casos clasificá $\sum a_n$

$$a_n = log\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \qquad a_n = e^{1/n^2}-1 \qquad a_n = \frac{(sen\ n)^2}{n^2} \qquad a_n = \frac{2-cos\ \frac{1}{n}}{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \qquad a_n = n^q e^{-\gamma n} \quad (q \in \mathbb{R},\ \gamma > 0)$$

$$a_n = \frac{2^n}{n^n} \qquad a_n = \frac{2^n\ n!}{n^n} \qquad a_n = \frac{3^n\ n!}{n^n} \qquad a_n = \frac{n!}{n^n} \qquad a_n = \frac{n!}{(2n)!}$$

$$a_n = \frac{n^2}{3^n} \qquad a_n = \frac{n!}{n^n} \qquad a_n = \frac{1}{(logn)^{logn}}$$

$$a_n = \frac{n!}{3^n} \qquad a_n = \frac{n!}{2^{2n}} \qquad a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n \qquad a_n = \frac{(2n+1)!!}{(3n)!!}$$

9. Averiguar si las siguientes series son convergentes y en ese caso estudiar si son también absolutamente convergentes. (Se dice que una serie $\sum x_n$ es *condicionalmente convergente* si $\sum x_n$ converge y $\sum |x_n|$ diverge).

$$\sum(-1)^n \frac{n+3}{n^2} \qquad \sum \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \qquad \sum(-1)^n \frac{\log n}{n^\alpha}$$

10. Clasificá las siguientes series de términos complejos

$$\sum \frac{n(2+i)^n}{2^n} \qquad \sum \frac{n(2i-1)^n}{3^n} \qquad \sum \frac{1}{n(3+i)^n}$$

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}+i} \qquad \sum \frac{i^n}{n} \qquad \sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + i\frac{n^n}{n!2^n} \right)$$

11. Hallá el conjunto de todos los números complejos para los que las siguientes series convergen

$$\sum \frac{1}{(1+|z|^2)^n} \qquad \sum \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n \qquad \sum \frac{(z-1)^n}{(n+2)!} \qquad \sum \left(\frac{z}{2z+1}\right)^n$$

12. **Criterio de Raabe.** Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones positivas. Sea

$$c_n = b_n - \frac{b_{n+1}a_{n+1}}{a_n}.$$

   a) Probá que si existe $r > 0$ tal que $c_n \geq r$ para todo $n \geq N$, entonces $\sum a_n$ converge. (*Sugerencia:* probá que $\sum_{k=N}^{n} a_k \leq a_N b_N / r$.)

   b) Probá que si $c_n \leq 0$ para $n \geq N$ y $\sum 1/b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ diverge.

   c) Aplicá (a) y (b) con $b_n = n-1$ para deducir el criterio de Raabe:

   1) Si existen $r > 0$ y $N \geq 1$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{n}$$

   para todo $n \geq N$, entonces $\sum a_n$ converge.

   2) Si $a_{n+1}/a_n \geq 1 - 1/n$ para todo $n \geq N$, entonces $\sum a_n$ diverge.

   3) Encontrá una "versión" del criterio de Raabe con "paso al límite". Clasificá

$$\sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad \sum \frac{e^n\ n!}{n^n}$$

13. **Serie de la exponencial**
Definimos $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$ (observar que si z es real esta definición coincide con la ya conocida).

   a) Probar que $z \mapsto e^z$ define una función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

   b) Probar que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Observar que esto justifica la definición dada en el teórico.

   c) Probar que e^z nunca vale 0 y por lo tanto no es sobreyectiva. ¿Es inyectiva?

14. **Constante de Euler**
En 1734 Euler demuestra que la velocidad con la que tiende a infinito la serie armónica es como $logn$, probando que la diferencia entre ambas tiende a una constante, conocida como constante de Euler que él mismo calculó en 0,577218. Aún hoy no se sabe si la constante de Euler es racional o irracional.

a) Sea $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - logn$. Probar que es convergente (sug: escribir $logn = \sum_{i=1}^{n-1}(log(i+1) - logi)$ y aplicar teorema de valor medio).

b) Probar que $\lim \frac{logn}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = 1$

c) Calcular $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3n} - \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n-2})$.

d) Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = log2$.

e) Si p y q son naturales $p < q$, probar que $\lim_n \sum_{i=pn+1}^{qn} \frac{1}{i} = log(q/p)$.

15. **Ejercicios de discusión**

a) **Producto de Series**
Al multiplicar una suma de n numeros por otra nos queda la suma de los productos de términos de la primer sumatoria con términos de la segunda. Al intentar definir el producto de dos series nos encontramos con el problema de que según el orden en el cual intentemos sumar los términos producto, la suma puede dar distinta. Dar una definición del producto de dos series (debe ser una serie que contenga una vez y solo una vez cada término de la forma $a_n b_m$ donde las series a multiplicar con $\sum a_n$ y $\sum b_n$).

1) ¿El producto de dos series convergentes converge al producto de las sumas?
2) El producto de dos series absolutamente convergentes ¿Es absolutamente convergente? (En este caso no importaría el orden en el cual se sumaran los términos de la serie producto)

b) **Una prueba de la infinitud de los primos utilizando la serie armónica**
Si los primos fueran finitos $p_1, \ldots, p_n$ entonces la serie armónica seria igual al producto de las series $1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \ldots$. Como la serie correspondiente al primo i-ésimo es convergente a $\frac{p_i}{p_i - 1}$ tendriamos que la serie armónica sería convergente, lo cual sabemos que es falso.
El ejercicio consiste en entender la demostración anterior y demostrar las afirmaciones que se hacen.
Como una curiosidad notamos que Euler demostró que la serie $\sum \frac{1}{p_i}$ donde p_i es el i-ésimo primo es divergente. Este resultado implica tanto que la serie armónica es divergente como que los primos son infinitos.

c) **Series de ladrillos**
Si tenés infinitos ladrillos, de ancho 1 y altura $\frac{1}{2}$, y apilás una cierta cantidad de ellos de manera tal que no se caiga la torre. ¿Cuál es la distancia horizontal máxima que podés lograr entre dos ladrillos de la torre?