Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cálculo I–Curso 2005

Práctico 8

§1. (a) Sea $f:(a,b)\to[0,\infty)$ una función integrable. Probar que $\int_a^b f \geq 0$.

(b) Sea $f:(-a,a)\to\mathbb{R}$ una función. Decimos que f es par si $f(x)=f(-x)$, para todo $x\in(-a,a)$ y decimos que f es impar si $f(x)=-f(-x)$, para todo $x\in(-a,a)$. Probar que si f es par entonces $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$. Calcular $\int_{-a}^{a} f$ si f es impar.

§2. (a) Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que:
$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x\in[0,1] \\ 2x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ y $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Bosquejar los gráficos de f y F.

(b) Sea $f:[-1,4]\to\mathbb{R}$ integrable tal que $f(x)\geq 2$, para todo $x\in[-1,0]\cup[2,4]$ y $f(x)\geq 4$, para todo $x\in[0,2]$.

i. Probar que $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx \geq 14$.

ii. Si además se sabe que $f(x)\geq 3$ para todo $x\in[1,3]$, hallar $m\in\mathbb{R}$ tal que $14<m<\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$.

(c) Sea f una función continua en $[2,8]$ tal que $\int_2^8 f(x)\,dx = 20$ y $\int_8^4 f(x)\,dx = 12$.

i. Calcular $\int_2^4 f(x)\,dx$.

ii. Probar que existe $c\in[2,4]$ tal que $f(c)=16$. ¿Existe $d\in[2,8]$ tal que $f(d)=-1$?

§3. (a) Calcular las primitivas de las siguientes funciones:

$f_1 = 3x^2 - x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ $\quad f_2 = \frac{6x-5\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$ $\quad f_3 = \frac{1}{x+1}$

$f_4 = 1+\operatorname{tg}^2(x) - 2\cos(x)$ $\quad f_5 = \frac{1}{(x+1)^5}$ $\quad f_6 = \frac{2x}{x^2+1}$

$f_7 = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad f_8 = \frac{1}{1-x^2}$.

(b) Calcular las siguientes integrales:

$\int_1^2 f_1(x)\,dx$ $\quad \int_1^4 f_2(x)\,dx$ $\quad \int_0^1 f_3(x)\,dx$ $\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} f_4(x)\,dx$

$\int_1^7 f_5(x)\,dx$ $\quad \int_{-1} 1 f_6(x)\,dx$ $\quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} f_7(x)\,dx$ $\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_8(x)\,dx$.

§4. (a) Cálcular la derivada de las siguientes funciones:

$F(x)=\int_1^x \frac{e^t}{3+\operatorname{sen}(t)}\,dt$ $\quad G(x)=\int_0^{x^2} \frac{1+\sqrt{t}}{2+t}\,dt$

$H(x)=\int_{2x+5}^{3} e^{1-t}\operatorname{sen}(t)\,dt$ $\quad I(x)=\int_{x^2}^{x^3} \frac{t^7}{1+t^4}\,dt$

(b) Se consideran las siguientes funciones definidas en todo $\mathbb{R}$:

$J(x) = \operatorname{arctg}(x) - \frac{x}{x^2+1} \quad L(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x^2}{x^2+1}} \sqrt{\frac{t}{1-t}}\, dt.$

Calcular $J'(x)$, $L'(x)$, $J(1)$ y $L(1)$. Deducir la relación entre J y L en $[0, +\infty)$ y en $(-\infty, 0)$.

§5. Calcular integrando por partes: a) $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$ b) $\int x \operatorname{sen} x \cos x\, dx$
c) $\int \operatorname{arctg} x\, dx$ d) $\int x^3 \operatorname{ch} 3x\, dx$ e) $\int \ln x\, dx$ f) $\int x^3 e^{-x^2}\, dx$
g) $\int e^{ax} \cos bx\, dx$ h) $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$ i) $\int x^3 \ln x\, dx$.

§6. Calcular por el método de sustitución:
a) $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \sqrt{4 - \operatorname{sen} 2x}\, dx$ b) $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{(3+\cos x)^2} dx$ c) $\int_3^8 \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx$
d) $\int x^{n-1} \operatorname{sen}^n x\, dx$, $n \neq 0$ e) $\int_a^{1/a} \frac{dt}{1+t^2}$, $a \neq 0$ f) $\int x^2 \sqrt{x+1}\, dx$

§7. (a) Probar que $\int_0^1 x^m (1-x)^n\, dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m\, dx$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, y calcular $\int_0^1 x^2 (1-x)^{30} dx$.

(b) Sea f continua. Demostrar que $\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx$, y calcular $\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x} dx$.

(c) Demostrar que $\int_0^1 (1-x^2)^{n-1/2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

(d) Sea $F(x, a) := \int_0^x \frac{t^p}{(t^2+a^2)^q} dt$, $a > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$. Demostrar que $F(x, a) = a^{p+1-2q} F(\frac{x}{a}, 1)$.

§8. Encontrar una función continua y no constantemente nula f tal que

$$f^2(x) = \int_0^x \frac{f(t) \operatorname{sen} t\, dt}{2 + \cos t}.$$

§9. Recordando que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, expresar $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$ en función de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

(a) Probar que integrales de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$, donde R es una función racional, pueden ser reducidas mediante la sustitución $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ a integrales de la forma $\int r(u) du$, donde r es también una función racional. Calcular $\int \frac{dx}{\cos x + \operatorname{sen} x}$ y $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1+\cos x + \operatorname{sen} x}$.

(b) Idem con $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$ y la sustitución $x = a \operatorname{sen} t$. Calcular $\int \frac{x\, dx}{4-x^2+\sqrt{4-x^2}}$.

(c) Idem con $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\, dx$ y la sustitución $x = a \operatorname{sh} t$. Calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$.

(d) Idem con $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx$ y la sustitución $x = a \operatorname{ch} t$. Calcular $\int \frac{\sqrt{4x^2-1}\, dx}{x^2}$.

§10. Si se aplica la sustitución $x = \operatorname{sen} t$ a la integral definida $\int_0^{\pi} t^3 \cos t\, dt$ resulta $\int_0^{\pi} t^3 \cos t\, dt = \int_0^0 (\operatorname{arcsen} x)^3 dx = 0$. ¿Por qué es equivocado este razonamiento?

§11. (a) Integrando por partes deducir la fórmula

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx, \forall n \geq 2.$$

(b) Hallar una fórmula de recurrencia para $\int \cos^n x\,dx$.

(c) Calcular: $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$, $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\,dx$, $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$.

(d) Sea $a_n := \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$, $\forall n \geq 0$. Probar que $a_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$, $\forall n \geq 1$, y que $a_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, $\forall n \geq 0$.

(e) Mostrar que $1 \leq \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$. Deducir que $\frac{\pi}{2} = \lim_n 2n\left(\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$, y concluir que $\sqrt{\pi} = \lim_n \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}$.

§12. (a) Hallar todas las primitivas de las siguientes funciones:

$$\frac{3x^3 - 10x^2 - x}{(x^2-1)^2} \quad \frac{1-5x}{x^3-x} \quad \frac{x^2}{x^2+4x+3} \quad \frac{x^3+x^2-3}{x^2-x-2}.$$

(b) Calcular:

$$\int_{-1}^{0} \frac{3x+2}{x^2-3x+2}\,dx \qquad \int_2^3 \frac{3x^3-3x+1}{x^2-1}\,dx$$

$$\int_4^2 \frac{x^2+x+3}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,dx$$