Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cálculo I–Curso 2005

Práctico 7.

1. *a*) Sean f y g funciones reales. Demostrar que si f y g son uniformemente continuas en un intervalo (a,b), entonces también lo son $f+g$ y fg.

   b) Estudiar la continuidad uniforme de las siguientes funciones en los intervalos indicados:

   1) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ en $[-1,1]$.
   2) $f(x) = \log x$ en $(0,1)$.
   3) $f(x) = \sqrt{x}$ en $[1,+\infty)$.
   4) $f(x) = e^x \cos(\frac{1}{x})$ en $(0,1)$.
   5) $f(x) = x^2$ en $(-a,a)$, $a \in \mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}$.
   6) $f(x) = x + \operatorname{sen}(x)$ en $\mathbb{R}$.

   c) Demostrar que si f es uniformemente continua en $[a,c]$ y en $[c,d]$, entonces es uniformemente continua en $[a,b]$.

   d) Mostrar que $f(x) = \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}$, con $x \neq 0$ es uniformemente continua en $(-1,0)$ y en $(0,1)$. ¿Es uniformemente continua en $(-1,0)\cup(0,1)$?.

2. *a*) Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ tal que $\forall\varepsilon>0$ existe un conjunto finito F que verifica que $|f(x)|<\varepsilon$, $\forall x \in (a,b)\backslash F$. Probar que f es continua en $c\in(a,b)$ sí y sólo sí $f(c)=0$.

   b) Sea $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ con } \operatorname{mcd}(p,q)=1 \end{cases}$.
   Usar la parte anterior para probar que f es discontinua en cada racional y continua en cada irracional.

3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1-\sqrt[3]{x^2}$. Mostrar que $f(1)=0=f(-1)$, y que f' no se anula en $(-1,1)$. Explicar por qué esto no contradice el teorema de Rolle.

4. Sea f continua en $[a,+\infty)$ y derivable en $(a,+\infty)$, tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Mostrar que existe $c\in(a,+\infty)$ tal que $f'(c)=0$. Vale un resultado análogo para $(-\infty,a]$ (Comparar con el teorema de Rolle).

5. Supóngase que la función f es dos veces derivable en $[a,+\infty)$, y que $f(a)>0$, $f'(a)<0$, y $f''(x)\leq 0$, $\forall x>a$. Demostrar que la ecuación $f(x)=0$ tiene exactamente una solución en $(a,+\infty)$.

6. *Propiedad del valor intermedio para funciones derivadas.* Supóngase que f es una función derivable en el intervalo abierto I, y sean $a,b\in I$, con $f'(a)<f'(b)$. Probar que si d es tal que $f'(a)<d<f'(b)$, entonces existe c entre a y b tal que $f'(c)=d$ (Sugerencia: mostrar que la función g tal que $g(x)=f(x)-dx$ tiene un extremo relativo entre a y b).

7. *a*) Dado $s > 0$, probar que entre todos los reales positivos x e y tales que $x + y = s$, el valor de $x^2 + y^2$ es mínimo cuando $x = y$.

   b) Probar que entre todos los rectángulos de perímetro dado el de mayor área es el cuadrado.

   c) En la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hay que inscribir un rectángulo con los lados paralelos a los ejes de la elipse, de modo que su área sea máxima. Resolver el problema y dar el valor de dicha área máxima.

   d) Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si los lados del rectángulo miden 12 y 18 centímetros.