Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cálculo I–Curso 2005

Práctico 10
Práctico de Taylor: o sea el poder de las derivadas.

§1. Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio de grado n. Prueba que para $a, x \in \mathbb{R}$ cualesquiera se tiene $p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

§2. Hacer las gráficas de los primeros 3 polinomios de Taylor en 0 de la función seno.

§3. Hallar $\sqrt{7}$ con error menor a 0.01 mediante el desarrollo de la función $\sqrt{x+8}$.

§4. Hallar la serie de Taylor en 0 de una primitiva de la función e^{x^2}.

§5. Use la igualdad $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$ y la fórmula de Taylor para calcular las derivadas sucesivas en el punto $x = 0$ de la función $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

§6. Calcular la derivada de orden 2001 y 2003 en $x = 0$ de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^5}{1+x^6}$.

§7. (a) Sea $f : I \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ en el intervalo I. Suponga que existe $K > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leq K$ para todo x en I y todo n natural. Pruebe que, para $x_0, x \in I$ vale $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

(b) Aplicar el punto anterior para las funciones $\text{sen}(x)$ y $\cos(x)$ con $x_0 = 0$.

§8. Sea $f(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$. Probar que $f(0) = 0$, $f'(x) = 2xf(x) + 1$, y encontrar la serie de Taylor de f en 0.

Ejercicios de Discusión

§1. Fórmula de Stirling. En este ejercicio se demostrará que $n! = \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}(1+\alpha_n)$, donde $\alpha_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

(a) Probar que $\int_{k-1}^{k} \log(x)dx \leq \log k \leq \int_k^{k+1} \log(x)dx \quad \forall k = 1, 2, 3..., n$ y sumando desde 1 a n, deducir que $n \log n - n \leq \log(n!) \leq (n+1)\log(n+1) - n$.

(b) Sea $d_n = \log(n!) - (n + \frac{1}{2})\log(n) + n$. Probar que $d_n - d_{n+1} = (n + \frac{1}{2})\log\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1$ y usando el desarrollo de Taylor en 0 de $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$ deducir que d_n es decreciente y que $d_n - d_{n+1} \leq \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$. Sea $c = \lim d_n$. Deducir que $\lim \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = e^c$. Sólo resta probar que $c = \log(\sqrt{2\pi})$.

(c) Sea $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n x dx$. Probar que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ y deducir que $I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)....3.1}{2k(2k-2)....4.2} \frac{\pi}{2}$ y que $I_{2k+1} = \frac{2k(2k-2)....4.2}{(2k+1)(2k-1)....5.3}$.

(d) Probar que $\lim \frac{I_{2k+2}}{I_{2k}} = 1$ y observando que I_n es decreciente, deducir que $\lim \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} = 1$.

(e) Deducir que $c = \log(\sqrt{2\pi})$.