

Práctico 7

1. Sean K un cuerpo, V un K -espacio vectorial y $T \in \text{End}_K(V)$. Se considera V como $K[X]$ -módulo definiendo para $p \in K[X]$ y $v \in V$, $p \cdot v = [p(T)](v)$.
 - a) Probar que los $K[X]$ -submódulos de V son los subespacios vectoriales de V que son invariantes bajo T .
 - b) Si W es otro K -espacio vectorial y $S \in \text{End}_K(W)$, probar que V y W son isomorfos como $K[X]$ -módulos, con las estructuras definidas por T y S respectivamente, si y solo si existe un isomorfismo de K -espacios vectoriales $R : V \rightarrow W$ tal que $R^{-1} \circ S \circ R = T$.
 - c) En el caso particular de $V = \mathbb{R}^2$ y $T : V \rightarrow V$ definida por $T(x, y) = (y, x)$, hallar todos los $K[X]$ -submódulos de V .
2. Un módulo M se dice *simple* si $M \neq 0$ y M no tiene submódulos propios. Un módulo M se dice *indescomponible* si $M \neq 0$ y M no se puede escribir como suma directa de submódulos propios, en caso contrario se dice que M es *descomponible*. Observar que simple implica indescomponible. Un módulo M se dice *semisimple* si es $M = 0$ o M es suma directa de submódulos simples.
 - a) Probar que todo módulo simple es cíclico.
 - b) Probar que si $M \neq 0$, entonces M es descomponible si y solo si existe $\varphi \in \text{End}_A(M)$ tal que $\varphi^2 = \varphi$, $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \text{id}$.
3. Dado K un anillo con división, se considera el anillo $A = M_n(K)$. Sean $\{E_{ij} : i, j = 1, \dots, n\}$ y $\{e_i : i = 1, \dots, n\}$ las bases canónicas de A y de K^n , respectivamente.
 - a) Probar que K^n es un A -módulo simple. Sugerencia: calcular $E_{ij} e_k$.
 - b) Probar que para cada $j = 1, \dots, n$, el conjunto $L_j = \{\sum_{i=1}^n a_i E_{ij} : a_1, \dots, a_n \in K\}$ es un ideal izquierdo de A isomorfo a K^n como A -módulo y que $A = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$. Deducir que A es semisimple como A -módulo.
4. Probar que si D es un DIP, entonces D es indescomponible como D -módulo.
5. Se considera \mathbb{Z}_m como \mathbb{Z} -módulo.
 - a) Probar que \mathbb{Z}_m es simple si y solo si $m = p$ primo.
 - b) Probar que \mathbb{Z}_m es indescomponible si y solo si $m = p^l$ con p primo, $l \geq 1$.
 - c) Probar que \mathbb{Z}_m es descomponible si y solo si en la descomposición factorial de m aparecen primos distintos.
 - d) Probar que \mathbb{Z}_m es semisimple si y solo si $m = p_1 \cdots p_r$, siendo p_1, \dots, p_r números primos distintos.
6. *Lema de Schur*.
 - a) Sean M y N dos A -módulos simples y $\varphi \in \text{Hom}_A(M, N)$. Probar que $\varphi = 0$ o φ es un isomorfismo.
 - b) Si M es un módulo simple, probar que $\text{End}_A(M)$ es un anillo con división.

7. Sea A un anillo.
- Sea I un ideal izquierdo maximal de A , probar que A/I es un A -módulo simple.
 - Probar que si $M = Am$ es simple, entonces existe I ideal izquierdo maximal de A tal que $M \simeq A/I$. Sugerencia: considerar $\text{anl}(m) := \{a \in A : am = 0\}$.
8. Sea A un anillo, $I \subset A$ un ideal izquierdo y M un A -módulo. Para cada subconjunto no vacío S de M definimos $IS = \{\sum_{i=1}^n a_i m_i : a_i \in I, m_i \in S, i = 1, \dots, n, n = 1, 2, \dots\}$.
- Probar para todo $\emptyset \neq S \subset M$ el conjunto IS es un A -submódulo de M .
 - Si además I es un ideal (bilateral) de A , probar M/IM es un A/I -módulo definiendo $(a + I)(m + IM) = am + IM$.
9.
 - Probar que si $0 \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \rightarrow 0$ es una sucesión exacta corta que escinde via $\nu : P \rightarrow N$, entonces $N = \text{Ker } \psi \oplus \text{Im } \nu$.
 - Probar que si $\varphi : M \rightarrow N$ y $\psi : N \rightarrow M$ son morfismos de módulos tales que $\varphi \circ \psi = \text{id}_N$, entonces $M = \text{Im } \psi \oplus \text{Ker } \varphi$.
10. Sean p, q números primos.
- Probar que existe una sucesión exacta corta $E : 0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_{pq} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_q \rightarrow 0$, siendo φ el mapa inducido por $m \mapsto qm$ y ψ el mapa inducido por la identidad.
 - Probar que E escinde si y solo si $p \neq q$.
11. Mostrar con un ejemplo que existen sucesiones exactas cortas $E : 0 \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \rightarrow 0$ y $E' : 0 \rightarrow M' \xrightarrow{\varphi'} N' \xrightarrow{\psi'} P' \rightarrow 0$ tales que $M \simeq M'$ y $P \simeq P'$ pero E y E' no son isomorfas.
12. Sea $E : 0 \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta y $K = \text{Ker } \psi$. Probar que E es isomorfa a $0 \rightarrow K \xrightarrow{\iota} N \xrightarrow{\pi} N/K \rightarrow 0$.
13. Probar que la relación de isomorfismo entre sucesiones exactas cortas es de equivalencia.