

Práctico 6

1. Probar que el polinomio  $1 + X + X^3 + X^4$  no es irreducible sobre  $K[X]$  para ningún cuerpo  $K$ .
2. Sean  $D$  un dominio factorial,  $K$  su cuerpo de fracciones y  $p \in D[X]$  un polinomio mónico. Sea  $\alpha \in K$  una raíz de  $p$ . Probar que  $\alpha \in D$ .
3. *Criterio de irreducibilidad de Eisenstein.*  
Sean  $D$  un dominio factorial,  $K$  su cuerpo de fracciones y  $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in D[X]$ , donde  $n \geq 1$  y  $a_n \neq 0$ .  
Supongamos que existe  $p \in D$  irreducible tal que  $p \nmid a_n$ ,  $p \mid a_k$  para todo  $k = 0, 1, \dots, n-1$  y  $p^2 \nmid a_0$ .  
Probar que  $f$  es irreducible en  $K[X]$ ; si además  $f$  es primitivo, probar que es irreducible en  $D[X]$ .  
Sugerencia: observar que si  $f = c(f)g$  con  $g \in D[X]$  primitivo, entonces  $g$  verifica lo mismo que  $f$ .
4. Determinar si el polinomio  $f$  es irreducible en  $\mathbb{Q}[X]$  y en  $\mathbb{Z}[X]$ .  
$$f = 2X^5 - 6X^3 + 9X^2 - 15, \quad f = 2X^3 + 3X^2 + 2X + 3, \quad f = X^4 + X + 4,$$
$$f = 3X^4 + 6X^2 + 6, \quad f = X^3 - 7X + 3, \quad f = X^4 - X^3 + 2X - X + 1.$$
5. Sean  $D$  un dominio factorial y  $p \in D[X, Y]$ ,  $p = Y^4 + 2X^2Y^3 + X^3Y^2 - XY + X$ . Probar que  $p$  es irreducible en  $D[X, Y]$ .
6. Sea  $D$  un dominio factorial y  $c \in D$ . Dado  $f \in D[X]$ ,  $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ , sea  $f_c \in D[X]$ ,  $f_c = a_0 + a_1(X - c) + \dots + a_n(X - c)^n$ .
  - a) Probar que  $f$  es irreducible en  $D[X]$  si y sólo si  $f_c$  lo es.
  - b) Probar que si  $p$  es un número primo, el *polinomio ciclotómico*  $f = X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1$  es irreducible en  $\mathbb{Q}[X]$ .  
Sugerencia: observar que  $f = (X^p - 1)/(X - 1)$ , luego  $f_{-1} = ((X + 1)^p - 1)/X$  y usar el criterio de Eisenstein.
7.
  - a) Probar que el polinomio  $X + 1$  es invertible en  $\mathbb{Z}[[X]]$  pero no en  $\mathbb{Z}[X]$ .
  - b) Probar que  $X^2 + 3X + 2$  es irreducible en  $\mathbb{Z}[[X]]$  pero no en  $\mathbb{Z}[X]$ .
8. Hallar todos los ideales maximales de  $\mathbb{Q}[X]$  que contienen a  $\langle X^3 + 2X \rangle$ .
9. Sea  $K$  un cuerpo. Probar:
  - a)  $\langle X, Y \rangle$  es un ideal maximal de  $K[X, Y]$ .
  - b)  $\langle Y \rangle$  es un ideal primo de  $K[X, Y]$  que no es maximal.
10. Sea  $I = \langle 3, X^3 - X^2 + 2X - 1 \rangle \subset \mathbb{Z}[X]$ .
  - a) Probar que  $I$  no es principal.
  - b) Probar que  $\mathbb{Z}[X]/I$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_3[X]/J$ , donde  $J = \langle X^3 - X^2 + \bar{2}X - \bar{1} \rangle \subset \mathbb{Z}_3[X]$ .  
¿Es  $\mathbb{Z}[X]/I$  un cuerpo?
11. Sea  $K$  un cuerpo. Probar que todo ideal no nulo de  $K[[X]]$  es de la forma  $\langle X^n \rangle$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Deducir que  $K[[X]]$  es un dominio de ideales principales y un anillo local.