Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra I
Segundo semestre de 2005

Práctico 3

1. Se consideran los *enteros de Gauss* $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.

   a) Probar que $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.

   b) Probar que la función $\phi : \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$ definida por $\phi(a + bi) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ es un morfismo de anillos.

2. Sean $A_1, \dots, A_n$ anillos. En el producto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_n$ se definen dos operaciones suma "+" y producto "·" mediante:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)\,,$$
$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) := (a_1 \cdot b_1, \dots, a_n \cdot b_n)\,.$$

   a) Probar que con estas operaciones $A_1 \times \cdots \times A_n$ es un anillo que se llama el *producto directo* de $A_1, \dots, A_n$.

   b) Probar que para todo $i = 1, \dots, n$, la proyección $\pi_i : A_1 \times \cdots \times A_n \to A_i$ definida por $\pi_i\,(a_1, \dots, a_n) = a_i$, es un morfismo de anillos.

   c) Sea B un anillo y $\varphi_i : B \to A_i$, $i = 1, \dots, n$ morfismos de anillos. Probar que existe un único morfismo de anillos $\varphi : B \to A_1 \times \cdots \times A_n$ tal que $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$, $\forall i = 1, \dots, n$.

   d) Sean $\tilde{A}_i := \{(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n : \ a_j = 0, \ \forall j \neq i\}$, $i = 1, \dots, n$. Probar que cada $\tilde{A}_i$ es un ideal de $A_1 \times \cdots \times A_n$ isomorfo a A_i (como grupo aditivo) y que $A_1 \times \cdots \times A_n = \tilde{A}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{A}_n$.

3. Sea A un anillo y $a \in A[[X]]$. Probar que a es invertible en $A[[X]]$ si y solo si a_0 es invertible en A. Dar un ejemplo de un elemento $a \in A[X]$ que no es invertible en $A[X]$ y sí lo es en $A[[X]]$.

4. Probar que el polinomio $X^3 - X$ tiene 6 raíces en $\mathbb{Z}_6$.

5. Probar que el polinomio $X^2 + 1$ tiene infinitas raíces en el anillo de los cuaterniones.

6. Un anillo A se dice *simple* si $A \neq \{0\}$ y A no tiene ideales propios.

   a) Observar que un anillo con división es un anillo simple y que un anillo conmutativo simple es lo mismo que un cuerpo.

   b) Probar que si A_1 y A_2 son dos anillos simples, entonces $A_1 \times A_2$ no es simple.

7. Sea A un anillo conmutativo y $a, b \in A$. Probar que $\langle a \rangle \langle b \rangle = \langle ab \rangle$.
   Deducir que si $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces $(m\mathbb{Z})(n\mathbb{Z}) = mn\mathbb{Z}$.

8. Sea A el anillo de funciones de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$. Dado $S \subset [0, 1]$, sea $I_S = \{f \in A : f(x) = 0, \ \forall x \in S\}$.

   a) Probar que $I_S \lhd A$.

   b) Sean $S_1 = [0, 1/2]$ y $S_2 = [1/2, 1]$. Probar que $I_{S_1} I_{S_2} = I_{S_1} \cap I_{S_2} = \{0\}$.

9. Sea A un anillo y $M_n(A)$ el anillo de matrices $n \times n$ con coeficientes en A.

a) Si $I \lhd A$ probar que $M_n(I) \lhd M_n(A)$.

b) Probar que todos los ideales de $M_n(A)$ son de la forma $M_n(I)$ para algún ideal I de A.

c) Probar que si A es un anillo con división, entonces $M_n(A)$ es un anillo simple. En particular, si K es un cuerpo entonces $M_n(K)$ es un anillo simple.

d) ¿Todo anillo simple es un anillo con división?

10. Sea A un anillo que verifica que existen ideales $I_1, \dots, I_n$ de A tales que $A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ (como grupos abelianos).

    a) Probar que existen únicos $e_i \in I_i$, $i = 1, \dots, n$, tales que que $e_1, \dots, e_n$ forman un *conjunto completo de idempotentes ortogonales centrales*:

    - $1 = e_1 + \cdots + e_n$,
    - $e_i^2 = e_i, \ \forall i = 1, \dots, n$,
    - $e_i e_j = 0, \ \forall \ i \neq j$,
    - $e_i x = x e_i, \ \forall x \in A, \ \forall i = 1, \dots, n$.

    b) Probar que $I_i = e_i A$, $\forall i = 1, \dots, n$ y que cada I_i tiene estructura de anillo (pero no de subanillo de A) de forma tal que el mapa $\rho_i : A \to I_i$ definido por $\rho_i(x) = e_i x$ es un morfismo de anillos.

    c) Probar que $A \simeq I_1 \times \cdots \times I_n$ como anillos.

    d) Comparar con el ejercicio 2.

11. Sea A un anillo y $e_1, \dots, e_n$ un conjunto completo de idempotentes ortogonales centrales. Probar que cada $e_i A$ es un ideal de A y que $A = e_1 A \oplus \cdots \oplus e_n A$.

12. Encontrar e_1, e_2 en $\mathbb{Z}_6$ que formen un conjunto completo de idempotentes ortogonales centrales y escribir $\mathbb{Z}_6 = I_1 \oplus I_2$, siendo I_1, I_2 ideales propios de $\mathbb{Z}_6$.