Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra I
Segundo semestre de 2005

Práctico 2

1. Dado un grupo abeliano G, probar que $\text{End}(G)$ es un anillo con la suma definida en el ejercicio 16. b) del Práctico 1 y con la composición como producto.

2. Sea A un anillo. Probar que $\text{Fun}(S, A)$ es un anillo con la suma definida como en el ejercicio 16. a) del Práctico 1 y la multiplicación definida por: $(fg)(s) = f(s)g(s)$, para todo $f, g \in M(S, A)$, y $s \in S$.

3. Sea X un conjunto no vacío, y $\mathcal{P}(X)$ su conjunto potencia (es decir, la familia de subconjuntos de X). Si $A, B \in \mathcal{P}(X)$ se define $A + B := A\nabla B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ y $AB := A \cap B$. Probar que $\mathcal{P}(X)$ es un anillo. ¿Es conmutativo? ¿Cuál es la unidad? ¿Cuáles son los elementos invertibles?

4. Probar que todo dominio finito es un cuerpo.

5. Un *anillo de Boole* es un anillo A tal que $x^2 = x$ para todo $x \in A$.

   a) Probar que si A es un anillo de Boole se tiene que $x + x = 0$ para todo $x \in A$

   b) Probar que $\mathcal{P}(X)$, con la estructura definida en el ejercicio 3, es un anillo de Boole.

6. Sea z un elemento de un anillo con inverso a la derecha *i.e.* existe x tal que $zx = 1$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) z tiene más de un inverso a la derecha.

   b) z no es invertible.

   c) z es divisor de cero a la izquierda *i.e.* existe $0 \neq t$ tal que $zt = 0$.

7. Sea A un anillo.

   a) Un elemento $e \in A$ es *idempotente* si $e^2 = e$. Probar que los únicos elementos idempotentes en un dominio son 0 y 1.

   b) Un elemento $z \in A$ es *nilpotente* si existe un entero positivo n tal que $z^n = 0$. Probar que 0 es el único elemento nilpotente en un dominio.

   c) Sean x e y elementos nilpotentes de A. Probar que $x+y$ es nilpotente si A es conmutativo. Probar con un ejemplo que este resultado no vale en general si A no es conmutativo.

   d) Sea $z \in A$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $z^n = 0$. Probar que $1 - z$ tiene inversa $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$.

8. Dados un anillo A y un subconjunto no vacío S de A, se define el *centralizador* de S por $C(S) = \{x \in A : xs = sx, \ \forall s \in S\}$.

   a) Probar que $C(S)$ es un subanillo de A y que $S \subset C(C(S))$.

   b) El *centro* de A es el subanillo $C(A)$. Probar que el centro es un anillo conmutativo.

   c) Sea A un anillo, probar que $C\left(M_n(A)\right) = \{aI_n : \ a \in C(A)\}$.

   d) Sea K un cuerpo, deducir que si $A \in M_n(K)$ verifica $AB = BA$ para todo $B \in M_n(K)$, entonces existe $a \in K$ tal que $A = aI_n$.

   e) Sea $A = M_2(\mathbb{R})$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Hallar $C(B)$ y $C(C(B))$.

9. Se consideran las matrices $\mathbf{1}, \ \mathbf{i}, \ \mathbf{j}, \ \mathbf{k} \in M_2(\mathbb{C})$, definidas por:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

   Sea $\mathcal{H} = \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \subset M_2(\mathbb{C})$.

   a) Probar que $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}$ y que $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$.

   b) Deducir: $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$ y $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$.

   c) Probar que $\mathcal{H}$ es un anillo con la suma y producto habituales en $M_2(\mathbb{C})$ llamado el *anillo de los cuaterniones*. Observar que el conjunto $\{a\mathbf{1} : \ a \in \mathbb{R}\}$ es un subanillo de $\mathcal{H}$ isomorfo a $\mathbb{R}$, luego escribimos $a\mathbf{1} = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

10. Sea $\mathcal{H}$ el anillo de los cuaterniones. Dado $x \in \mathcal{H}$, $x = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, se definen

$$\overline{x} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}, \quad N(x) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad \text{y} \quad T(x) = 2a.$$

   Probar que:

   a) $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$ y $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$.

   b) Para todo $x \in \mathcal{H}$ se tiene que $x\overline{x} = N(x)$ y $x^2 - T(x)\,x + N(x) = 0$.

   c) Si $x \in \mathcal{H}$ y $x \neq 0$, entonces x es invertible. Luego $\mathcal{H}$ es un anillo con división.

   d) $N(xy) = N(x)N(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$.

   e) Hallar el centro de $\mathcal{H}$.

11. Sea A un anillo. Probar que una matriz diagonal $X = (x_{ij}) \in M_n(A)$ es invertible si y solo si x_{ii} es invertible para todo $i = 1, 2, \ldots n$. En esta situación hallar la inversa de X.

12. Sea A un anillo, $p \in A$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $i \neq j$, $i, j \leq n$. Probar que $Id + pE_{ij}$ es invertible en $M_n(A)$ y hallar su inversa.