Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

EXAMEN DE MATEMÁTICA II. 20/08/03

1. Se considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   a) Calcular el rango de A.
   b) Si T es la transformación lineal cuya matriz asociada es A, hallar dominio y codominio de T y deducir de (a) la dimensión de $\operatorname{Ker}(T)$.
   c) Calcular A^t.
   d) Si S es la transformación lineal cuya matriz asociada es A^t, hallar la matriz asociada a $T \circ S$.

2. Se considera una población dividida en tres clases de edad de 10 años cada una, de la cual se sabe que su matriz de Leslie es
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$
   siendo a una constante que se determinará.
   a) Hallar a sabiendo que 2 es valor propio de L. De ahora en adelante se trabaja con el valor de a hallado.
   b) Supongamos que a largo plazo hay 1000 hembras con edades entre 10 y 20 años.
      1) ¿Cuantas hembras hay de menos de 10 años y cuantas entre 20 y 30 años?
      2) ¿Cuantas hembras en total después que hayan pasado 20 años?

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) e^{xy}$.
   a) Estudiar el signo de f.
   b) Hallar los puntos estacionarios de f.
   c) Hallar los extremos absolutos de f en el conjunto $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 4y^2 \leq 1 \text{ y } x \geq 0\right\}$.

Nota: Se deben justificar todos los pasos en la resolución de cada ejercicio, es decir debe aparecer en la hoja todas las cuentas que llevaron a la solución del mismo. En caso contrario no se dará ningún puntaje a la resolución de dicho ejercicio.

Soluciones:

1. $a = 4$,
   hay 2000 entre 0 y 10 y 250 entre 20 y 30.
   a los 20 años hay 13000.
2. $L = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$
   $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.
   $c = 40$, $X^{(k)} \cong 40 \cdot 2^k \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1/6 \end{bmatrix}$.
   $X_1^{(10)} = 40 \cdot 2^{10} = 40960$.
3. $f(0,0) = 0$ y $f(x,y) > 0$ si $(x,y) \neq (0,0)$.
   $(0,0)$, $\left(-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$.
   los puntos a considerar son $(0,0)$, $\left(1/\sqrt{2}, \pm 1/2\sqrt{2}\right)$, $(0, \pm 2)$. máx. abs. $16 = f(0,\pm 2)$, mín. abs. $0 = f(0,0)$.