Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

EXAMEN DE MATEMÁTICA II. 5/08/03

1. Se considera el plano $\Pi : 3x - 4y = 4$ y el punto $P = (7, 8, 1)$.
   a) Probar que $P \notin \Pi$.
   b) Hallar la ecuación paramétrica de la recta r perpendicular a Π por el punto P.
   c) Hallar $r \cap \Pi$ y calcular $d(P, \Pi)$.
   d) Dar la ecuación del plano $\Pi' \neq \Pi$ que verifica:
      - $\Pi' \parallel \Pi$.
      - $d(P, \Pi') = d(P, \Pi)$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x - y, x - y, 0)$.
   a) Probar que T es lineal y hallar su matriz asociada.
   b) Hallar bases para $\mathrm{Ker}\,(T)$ e $Im(T)$.
   c) Probar que $T^2 = 0$.
   d) Deducir que las transformaciones $I - T$ y $I + T$ son inversas entre sí .

3. Se considera una población dividida en dos clases de edad de un año cada una.
   a) Hallar su matriz de Leslie L sabiendo que en promedio:
      - Cada hembra de menos de un año tiene un descendiente.
      - Cada hembra de entre uno y dos años tiene seis descendientes.
      - De las hembras de menos de un año sobrevive una de cada tres.

   b) Hallar los valores propios $\lambda_1 > \lambda_2$ de L.
   c) Hallar los vectores propios X_1 y X_2 de L.
   d) Supongamos que inicialmente hay treinta hembras de menos de un año y diez de entre uno y dos años. Hallar explícitamente $c \in \mathbb{R}$ tal que $X^{(k)} \cong c\lambda_1^k X_1$ para valores grandes de k ($X^{(k)}$ es el vector de distribución de edades).
   e) Dar una estimación de la cantidad de hembras de menos de un año que habrá al transcurrir diez años.

Nota: Se deben justificar todos los pasos en la resolución de cada ejercicio, es decir debe aparecer en la hoja todas las cuentas que llevaron a la solución del mismo. En caso contrario no se dará ningún puntaje a la resolución de dicho ejercicio.