

---

# *Dinámica Genérica en Superficies*

---

*Pablo Lessa Echeverriarza*

Orientador: *Martín Sambarino*

abril de 2006

Monografía de Licenciatura  
Licenciatura en Matemática  
Universidad de la República  
Montevideo - Uruguay.

## **Dedicatoria**

Para vos pelao.

## **Agradecimientos**

A todos los estudiantes que ya todos sabemos, y muy especialmente a: Alfonso, Leva, Matías, Diego, Juliana, Sambita, y Pablito, de los cuales aprendí día a día en los últimos años.



## Índice general

Dedicatoria	1
Agradecimientos	1
Capítulo 1. Introducción	5
1. Espacio de Fases y Acción del Tiempo	5
2. Puntos Periódicos y No Errantes	5
3. Los Sistemas Simples y los Complejos	6
4. Los Sistemas Estables y los Inestables	7
5. El Dualismo Dinámico: Las Conjeturas de Palis	7
6. Objetivos	9
Capítulo 2. Idea	11
1. ¿Como encontrar un punto homoclínico transversal?	11
2. Problema 1: Garantizar Infinitos Puntos Silla	13
3. Problema 2: Continuidad de las Direcciones Estables e Inestables	13
4. Problema 3: Longitud de las Variedades Invariantes	14
5. Resumen	14
Capítulo 3. Resultados Genéricos	15
1. Dinámica Genérica	15
2. Kupka-Smale	15
3. Densidad de Pugh	15
4. Semicontinuidad Inferior	16
5. Teorema de Pliss	17
6. Infinitos Puntos Silla	18
7. Resumen	18
Capítulo 4. Descomposición Dominada	19
1. Descomposición Dominada, Conos Invariantes, y Entornos Admisibles	19
2. Teorema de Hirsch, Pugh, y Shub	22
3. Reparametrización	22
4. Teorema de Variedad Estable Fuerte	23
5. Descomposición Dominada en $Per_1(f)$	24
6. Resumen	24
Capítulo 5. Longitud de las Variedades Invariantes	25

1. Lema Numérico	25
2. Infinitos Puntos con Variedades Estables Largas	26
3. Resultados para $W^{cu}$	26
4. Resumen	30
Capítulo 6. Demostración	31
1. Demostración de la Conjetura Débil de Palis	31
Apéndice 1: Métrica de Hausdorff	35
2. Métrica de Hausdorff	35
3. Semicontinuidad Inferior	35
Apéndice 2: Topología $C^1$	39
4. Métrica $C^1$	39
5. $\mathcal{F}$ es un Espacio de Baire	39
Bibliografía	41

## CAPÍTULO 1

### Introducción

En esta introducción fijaremos notación para diversos conceptos que serán usados en toda la monografía. También daremos los enunciados de las conjeturas de Palis, lo cual nos permitirá establecer los objetivos finales de este trabajo.

#### 1. Espacio de Fases y Acción del Tiempo

Nuestro espacio de fases  $\mathcal{M}$ , será una superficie diferenciable, compacta, conexa, y sin borde. Supondremos siempre que sea necesario que  $\mathcal{M}$  es un subconjunto de algún  $\mathbb{R}^N$ .

Recordemos que las únicas superficies de este tipo son [FW99]:

1. La Esfera de dimensión 2
2. El Toro
3. La Esfera con  $n$  asas
4. El Plano Proyectivo
5. La Botella de Klein
6. La Esfera con  $n$  crosshandles (un crosshandle consiste en quitarle un disco abierto a una superficie e identificar los puntos opuestos del círculo que se obtiene como borde)

Estudiaremos la acción de sistemas dinámicos reversibles en tiempo discreto en  $\mathcal{M}$ . Usaremos  $\mathcal{F}$  para significar el conjunto de los difeomorfismos  $C^1$  de  $\mathcal{M}$  con la métrica  $C^1$ . Utilizaremos las letras  $f, g$  para denotar elementos  $\mathcal{F}$  y  $d(f, g)$  para la distancia  $C^1$  entre  $f$  y  $g$ . Para más detalles sobre  $\mathcal{F}$  ver el apéndice.

#### 2. Puntos Periódicos y No Errantes

Fijado  $f \in \mathcal{F}$  usaremos  $Per(f)$  para denotar el conjunto de los puntos periódicos de  $f$ . Si  $p \in Per(f)$  usaremos  $\pi(p)$  para significar el período de  $p$ .

Supondremos conocidas las nociones de punto periódico hiperbólico, punto atractor, repulsor, y silla. Se pueden encontrar detalles en [KH95]. El símbolo  $Per_1(f)$  denota el conjunto de puntos periódicos hiperbólicos tipo silla de  $f$ .

DEFINICIÓN 2.1. Si  $x \in \mathcal{M}$

$$W^s(x) = \{y \in \mathcal{M} : d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow +\infty\}$$

$$W^u(x) = \{y \in \mathcal{M} : d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow -\infty\}$$

Si  $p$  es un punto periódico hiperbólico,  $E_p^u$  y  $E_p^s$  denotan su espacio estable e inestable respectivamente.

Recordemos que:

**TEOREMA 2.1.** *Si  $p \in \text{Per}(f)$  y  $p$  es hiperbólico, entonces  $W^s(p)$  y  $W^u(p)$  son subvariedades  $C^1$  de  $\mathcal{M}$  y son difeomorfos a  $E_p^s$  y  $E_p^u$  respectivamente.*

De ahora en adelante si  $p$  es un punto periódico hiperbólico nos referiremos a  $W^s(p)$  y  $W^u(p)$  como variedades estable e inestable respectivamente.

Siempre usaremos  $\Omega(f)$  para el Conjunto No Errante de  $f$ .

### 3. Los Sistemas Simples y los Complejos

Para lo que sigue de la introducción el lector puede referirse a [PT94]. Definiremos ahora el conjunto  $MS \subset \mathcal{F}$  de los difeomorfismos Morse-Smale.

**DEFINICIÓN 3.1.** Si  $f \in \mathcal{F}$  diremos que  $f$  es Morse-Smale (i.e.  $f \in MS$ ) si y solo si:

1.  $\text{Per}(f)$  es finito y consiste únicamente de puntos hiperbólicos
2. Para todo par  $p, q \in \text{Per}(f)$  se tiene que  $W^s(p)$  y  $W^u(q)$  son transversales
3.  $\Omega(f) = \text{Per}(f)$

Recordemos los siguientes resultados:

**TEOREMA 3.1.**  *$MS$  es un conjunto abierto en  $\mathcal{F}$ .*

Los sistemas de  $MS$  se caracterizan por tener dinámica totalmente predecible. Podemos resumir esto en el siguiente enunciado.

**TEOREMA 3.2.** *Si  $f \in MS$ , toda órbita de  $f$ , o bien es periódica, o tiende en el futuro y en el pasado a órbitas periódicas distintas. Además  $f$  tiene entropía topológica cero.*

Definiremos ahora  $TRAN$ , el subconjunto de  $\mathcal{F}$  formado por los difeos que poseen un punto homoclínico transversal. Recordemos la siguiente definición:

**DEFINICIÓN 3.2.** Si  $f \in \mathcal{F}$  diremos que  $x$  es punto homoclínico de  $f$  si existe un punto periódico hiperbólico  $p \neq x$  tal que  $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$ . Diremos que  $x$  es un punto homoclínico transversal si  $W^s(p)$  y  $W^u(p)$  son transversales en  $x$ ; en caso contrario diremos que  $x$  es una tangencia homoclínica.

Los siguientes resultados respecto a  $TRAN$  son de interés para esta monografía.

**TEOREMA 3.3.**  *$TRAN$  es un conjunto abierto en  $\mathcal{F}$ .*

Los difeos de  $TRAN$  se caracterizan por tener dinámica totalmente caótica como muestra el siguiente teorema.

**TEOREMA 3.4 (Birkhoff-Smale).** *Si  $f \in TRAN$ , entonces  $f$  tiene puntos periódicos de período arbitrariamente grande, un horseshoe de Smale, y entropía no nula.*

**COROLARIO 3.5.**  *$TRAN$  es disjunto con  $MS$ .*

#### 4. Los Sistemas Estables y los Inestables

Definiremos ahora el conjunto AA de los sistemas llamados Axioma A. Para eso necesitaremos definir lo que es un conjunto hiperbólico.

DEFINICIÓN 4.1. Sea  $\Lambda \subset \mathcal{M}$  un conjunto compacto. Diremos que  $\Lambda$  es hiperbólico si existen  $E^s$  y  $E^u$  subfibrados de  $T_\Lambda \mathcal{M}$  continuos,  $C > 0$  y  $\lambda \in (0, 1)$ , tales que:

1.  $E_x^s \oplus E_x^u = T_x \mathcal{M}$  para todo  $x \in \Lambda$
2.  $E_{f(x)}^s = D_x f(E_x^s)$  y  $E_{f(x)}^u = D_x f(E_x^u)$  para todo  $x \in \Lambda$
3.  $\|D_x f^k|_{E_x^s}\| < C \cdot \lambda^k$  para todo  $k \geq 0$  y todo  $x \in \Lambda$
4.  $\|D_x f^k|_{E_x^u}\| < C \cdot \lambda^k$  para todo  $k \geq 0$  y todo  $x \in \Lambda$

Automáticamente todos los puntos periódicos de un conjunto hiperbólico son hiperbólicos.

DEFINICIÓN 4.2. Diremos que  $f$  es Axioma A (i.e.  $f \in \text{AA}$ ) si y solo si:

1.  $\Omega(f)$  es hiperbólico
2.  $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$

Una vez más repasaremos resultados conocidos. Se tiene que  $\text{MS} \subset \text{AA}$ . Los sistemas de AA con una condición adicional de transversalidad de las variedades estables e inestables cumplen la notable propiedad de ser estructuralmente estables. Esto significa que cada  $f \in \text{AA}$  con la propiedad de transversalidad tiene un entorno  $V \subset \mathcal{F}$  tal que si  $g \in V$  entonces  $g$  es conjugada a  $f$  (i.e. existe un homeomorfismo  $h$  de  $\mathcal{M}$  tal que  $f = hgh^{-1}$ ). Otra forma de decirlo es que las propiedades dinámicas de  $f$  no cambian si se realiza una pequeña perturbación.

El símbolo TAN significará el subconjunto de  $\mathcal{F}$  formado por aquellos difeomorfismos que poseen una tangencia homoclínica. Tenemos que  $\text{TAN} \subset \overline{\text{TRAN}}$ .

Si  $f \in \text{TAN}$  entonces (ver [PT94] en cualquier entorno  $V$  de  $f$ ):

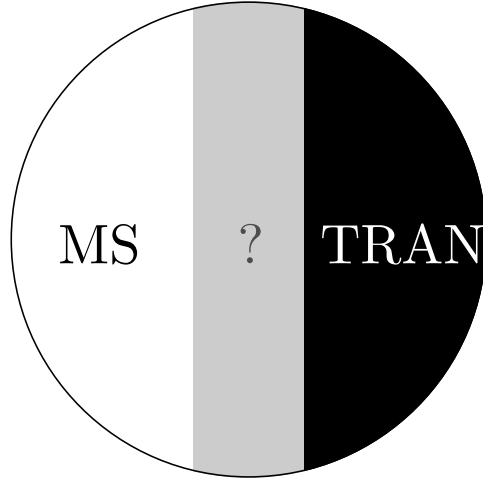
1. Existe una familia  $f_t$  que presenta una cascada de duplicación de período.
2. Existe  $g$  con infinitos puntos periódicos atractores o repulsores.
3. Existe  $g$  con infinitos atractores o repulsores extraños.

Es decir los difeos de TAN no solamente son inestables sino que en cualquier entorno presentan todos los diversos tipos conocidos de fenómenos caóticos. Cerca de TAN el caos está equidistribuido.

### 5. El Dualismo Dinámico: Las Conjeturas de Palis

Un objetivo ambicioso de la teoría de sistemas dinámicos es describir cualitativamente la dinámica de casi todos los sistemas de una clase amplia. En nuestro caso, la clase está dada por el conjunto  $\mathcal{F}$ . En principio tenemos dos conjuntos abiertos disjuntos: MS y TRAN, cuyos elementos poseen dinámicas totalmente distintas y relativamente

bien estudiadas. Pero tenemos también una zona gris afuera de estos dos abiertos que desconocemos.



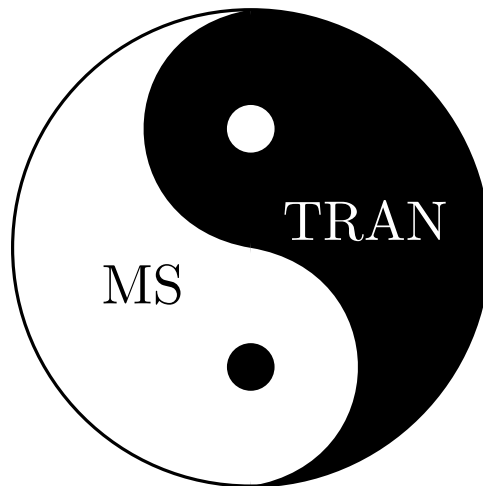
Las siguientes conjeturas de Jacob Palis apuntan a remover la zona gris.

**Conjetura Debil de Palis.**  $\overline{MS^c} \subset \overline{TRAN}$

La consecuencia de esta conjetura es que  $MS \cup TRAN$  es un abierto denso de  $\mathcal{F}$  y por lo tanto casi todo sistema es, o bien muy predecible, o totalmente caótico. Ambas partes del abierto son no vacías, lo cual hace más interesante la descripción.

**Conjetura Fuerte de Palis.**  $\overline{AA^c} \subset \overline{TAN}$

Esta conjetura nos dice que afuera de los difeomorfismos estables, los altamente inestables son densos. Otra forma de verlo es pensar que los distintos fenómenos caóticos están distribuidos uniformemente en el complemento de los difeomorfismos estables.



## 6. Objetivos

Enrique Pujals y Martín Sambarino demostraron en el año 2000 la conjetura fuerte  $C^1$  de Palis para superficies [PS00]. Recientemente Crovisier probó la conjetura débil  $C^1$  para cualquier dimensión.

El primer objetivo de esta monografía es demostrar la conjetura débil  $C^1$  en dimensión 2 siguiendo una prueba independiente debida a Martín Sambarino.

El objetivo secundario es presentar lo más posible los distintos requisitos previos para dicha demostración. El criterio en general ha sido relegar las partes del segundo objetivo que se desvian demasiado del primero a los apéndices.



## CAPÍTULO 2

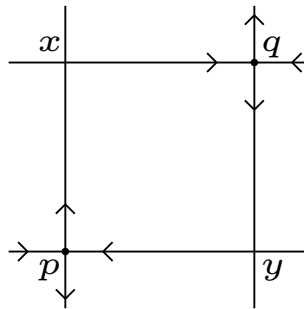
### Idea

El objetivo de la monografía es mostrar que en  $\overline{\mathcal{M}\mathcal{S}}^c$  los difeomorfismos con una órbita homoclínica transversal son densos. En este capítulo mostraremos una idea que permite encontrar puntos homoclínicos transversales para un difeomorfismo. Después expondremos las razones por las cuales esta idea no funciona para demostrar el teorema. El resto de la monografía estará dedicada a arreglar estos problemas del argumento.

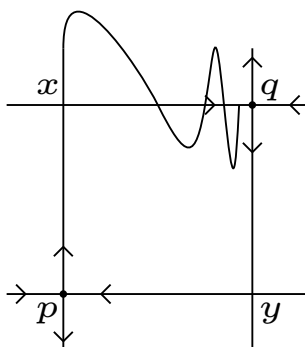
#### 1. ¿Como encontrar un punto homoclínico transversal?

Supongamos que  $f \in \overline{\mathcal{M}\mathcal{S}}^c$  tiene infinitos puntos silla. Entonces es fácil encontrar  $p, q \in \text{Per}_1(f)$  arbitrariamente cercanos, ya que  $\mathcal{M}$  es compacta. Supongamos además que  $E_p^s$  es casi paralela a  $E_q^s$  y lo mismo con  $E_p^u$  y  $E_q^u$ .

Tomaremos entonces una potencia de  $f$  bajo la cual  $p$  y  $q$  sean puntos fijos. Es razonable suponer que obtendremos algo similar al dibujo siguiente, formado por las curvas invariantes  $W^s(p)$ ,  $W^s(q)$ ,  $W^u(p)$ , y  $W^u(q)$ . El hecho importante es que habría dos puntos de corte transversal  $x \in W^u(p) \cap W^s(q)$ , e  $y \in W^u(q) \cap W^s(p)$ .



En estas condiciones encontraremos un punto homoclínico transversal. La idea geométrica es que  $W^u(p)$  está obligada a acumular sobre (y ponerse paralela a)  $W^u(q)$  continuando como en el dibujo siguiente.



Recordemos la siguiente definición que hace rigurosa la noción de “curvas cercanas y paralelas”.

**DEFINICIÓN 1.1.** Sean  $I, J$  dos intervalos encajados en  $\mathcal{M}$  se dice que están  $\epsilon - C^1$  cerca si existe  $\phi : I \rightarrow J$  una difeo  $C^1$  tal que, si  $i_I : I \rightarrow \mathcal{M}$  y  $i_J : J \rightarrow \mathcal{M}$  son los mapas inclusión, se tiene que  $d(i_I, i_J \circ \phi) < \epsilon$  donde  $d$  es la distancia  $C^1$ .

Tendremos que utilizar el siguiente teorema (ver [PT94] página 155).

**TEOREMA 1.1** ( $\lambda$ -lema de Palis). Sea  $f \in \mathcal{F}$ , y sean  $p$  y  $q$  puntos fijos tipo silla de  $f$  tales que existe un punto de corte transversal  $x \in W^u(p) \cap W^s(q)$ . Entonces para cada  $\epsilon > 0$ , cada intervalo  $I \subset W^u(p)$  tal que  $x \in I$  y cada intervalo  $J \subset W^u(q)$ , existe  $N > 0$  y un intervalo  $I_1 \subset I$  tal que  $f^N(I_1)$  está  $\epsilon - C^1$  cerca de  $J$ .

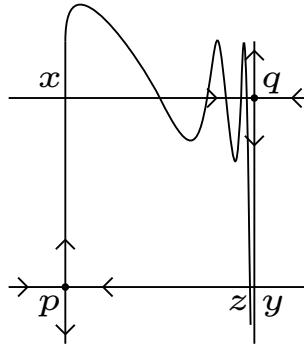
Estamos en condiciones de demostrar el teorema que nos permite encontrar órbitas homoclínicas transversales.

**TEOREMA 1.2.** Si  $p$  y  $q$  son puntos fijos hiperbólicos tipo silla de  $f$  y existen dos puntos de cortes transversales  $x \in W^u(p) \cap W^s(q)$  e  $y \in W^u(q) \cap W^s(p)$ , entonces  $f$  tiene un punto homoclínico transversal.

**DEMOSTRACIÓN.** El teorema es corolario casi inmediato del  $\lambda$ -lema.

Elegimos un segmento  $J \subset W^u(q)$  suficientemente grande para que  $y \in J$  (en particular  $J$  intersecta transversalmente a  $W^s(p)$ ) y tomamos  $\epsilon > 0$  tal que todo segmento  $\epsilon - C^1$  cerca de  $J$  intersecte transversalmente a  $W^s(p)$ .

Sea  $I$  un intervalo de  $W^u(p)$  que contiene a  $x$ . Por el  $\lambda$ -lema existe un iterado  $f^n(I)$  que está  $\epsilon - C^1$  cerca de  $J$ . Como  $W^u(p)$  es  $f$ -invariante  $f^n(I) \subset W^u(p)$ , y por lo tanto existe un punto homoclínico transversal  $z$  cerca de  $y$ .



□

El argumento heurístico previo a la demostración anterior presenta las siguientes carencias a la hora de intentar utilizarlo para demostrar la Conjetura Débil de Palis.

## 2. Problema 1: Garantizar Infinitos Puntos Silla

No hay ninguna garantía de que un difeomorfismo  $f \in \overline{MS}^c$  tenga infinitos puntos silla. Este problema lo arreglaremos mostrando que existe un conjunto  $SILL \subset \overline{MS}^c$  tal que:

1.  $SILL$  es denso en  $\overline{MS}^c$
2. si  $f \in SILL$  entonces  $Per_1(f)$  es infinito

Utilizaremos para lograr estos resultados conocidos en dinámica genérica, específicamente los teoremas siguientes (que se enunciarán con precisión en el capítulo 3):

1. Teorema de Kupka-Smale
2. Teorema de Densidad de Pugh
3. Toda función semicontinua inferiormente tiene un conjunto residual de puntos de continuidad.
4. Teorema de Pliss

## 3. Problema 2: Continuidad de las Direcciones Estables e Inestables

¿Porqué  $E_p^u$  debe ser casi paralela a  $E_q^u$ ? No es posible garantizar esto ni siquiera sabiendo que  $p$  y  $q$  son muy cercanos.

La solución a este problema viene dada por una demostración en [PS00] que nos dice que, o bien  $f$  es aproximable por difeomorfismos con tangencia homoclínica (y por lo tanto  $f \in \overline{TRAN}$ ), o  $f$  posee Descomposición Dominada en  $Per_1(f)$ .

La descomposición dominada garantiza que  $E^u$  y  $E^s$  varían continuamente en el conjunto de puntos silla. No solo eso, sino que será fundamental para resolver el tercer y último problema.

Mientras que las ideas que resuelven el Problema 1 eran conocidas desde la década del 60, la descomposición dominada fue introducida mucho más tarde por Mañé para probar

la conjetura de estabilidad. Adaptar esta idea para atacar las conjeturas de Palis fue uno de los aportes más originales de [PS00].

#### 4. Problema 3: Longitud de las Variedades Invariantes

Las variedades  $W^s$  y  $W^u$  que aparecen en el argumento heurístico no tienen por qué ser suficientemente largas, ni mantenerse paralelas lo suficiente como para cortarse. Es fácil ver que una variedad estable puede “morir” en un punto repulsor, y una inestable en un atractor. Para hacer peor el problema, no es posible garantizar una longitud uniforme utilizando la compacidad de  $\mathcal{M}$  y la continuidad de  $Df$ .

El problema se resuelve utilizando la Descomposición Dominada, un teorema debido a Hirsch, Pugh, y Shub, y un teorema de variedad estable fuerte.

#### 5. Resumen

Tenemos un teorema que, dadas algunas condiciones, asegura la existencia de un punto homoclínico transversal para un difeo dado. El trabajo ahora consiste en demostrar que los difeos a los cuales es aplicable el teorema, son suficientes como para probar la conjetura de Palis. Alcanzaría con saber que dicho conjunto de difeos es denso en  $\overline{MS^c}$ .

## CAPÍTULO 3

### Resultados Genéricos

Enunciaremos ahora varios resultados importantes y conocidos de dinámica diferenciable. Los aplicaremos para resolver el Problema 1 enunciado en el anterior capítulo. Es decir mostraremos que existe  $SILL \subset \overline{MS}^c$  denso tal que todo difeo  $f \in SILL$  tiene infinitos puntos silla.

#### 1. Dinámica Genérica

El conjunto de difeos  $\mathcal{F}$  con la distancia  $C^1$  es un espacio de Baire (ver apéndice). Esto significa que si  $A \subset \mathcal{F}$  es la intersección numerable de abiertos densos (i.e.  $A$  es residual) entonces  $A$  es denso en  $\mathcal{F}$ .

Esto nos permite dar un sentido preciso a la expresión “casi todos los sistemas de  $\mathcal{F}$  cumplen la propiedad P”.

DEFINICIÓN 1.1. Diremos que P es una propiedad genérica para los difeos de  $\mathcal{F}$  si existe un conjunto residual  $A \subset \mathcal{F}$  tal que, si  $f \in A$ , entonces  $f$  cumple la propiedad P.

Lo principal es que todas las propiedades genéricas se realizan en un conjunto denso de  $\mathcal{F}$ . No sólo esto, sino que cualquier cantidad numerable de propiedades de este tipo también se realizan simultáneamente en un conjunto denso. En particular no puede haber dos propiedades genéricas contradictorias.

Enunciaremos ahora varios resultados genéricos y un Teorema debido a Pliss.

#### 2. Kupka-Smale

El siguiente teorema fue probado independientemente por Smale (ver [Sma63]), y Kupka. Es válido en la topología  $C^r$  para  $r \geq 1$  y es central al estudio genérico de la dinámica.

TEOREMA 2.1. *Existe un conjunto residual  $KS \subset \mathcal{F}$  tal que si  $f \in KS$ :*

1. *todos los puntos periódicos de  $f$  son hiperbólicos*
2. *para todo par  $p, q \in Per(f)$  se tiene que  $W^s(p)$  y  $W^u(q)$  son transversales*

#### 3. Densidad de Pugh

El siguiente teorema clásico debido a Pugh es una consecuencia del famoso  $C^1$  closing lemma difeos que él mismo probó [Pug67].

TEOREMA 3.1 (Pugh). *Existe un conjunto residual DENSE tal que si  $f \in DENSE$ :*

$$\Omega(f) = \overline{Per(f)}$$

Por razones técnicas en la prueba de un teorema fundamental del capítulo 5 será necesario utilizar la siguiente generalización del teorema anterior demostrada por Bonatti y Crovisier en el 2004 [BC04]. El teorema es consecuencia de un sorprendente resultado: un  $C^1$  closing lemma para  $\epsilon$ -cadenas.

TEOREMA 3.2 (Bonatti-Crovisier). *Existe un conjunto residual DENSE tal que si  $f \in DENSE$ :*

$$R(f) = \overline{Per(f)}$$

donde  $R(f)$  es el conjunto recurrente por cadenas de  $f$

Dado que  $\Omega(f) \subset R(f)$  se obtiene el teorema de Pugh como corolario (utilizando el mismo conjunto residual DENSE).

#### 4. Semicontinuidad Inferior

Por ser un desvío del argumento principal, el autor decidió tratar los siguientes temas en el apéndice:

1. Definición de la Métrica de Hausdorff entre dos conjuntos compactos.
2. Definición de Semicontinuidad Inferior de una función con valores en los subconjuntos compactos de  $\mathcal{M}$
3. Demostración de que toda función semicontinua inferiormente posee un conjunto residual de puntos de continuidad

A continuación utilizaremos los resultados en cuestión para probar un resultado genérico interesante.

Sea  $\mathcal{H}$  la familia de subconjuntos compactos de  $\mathcal{M}$ , con la métrica de Hausdorff.

Definimos  $\Lambda : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$  de la siguiente manera:

$$\Lambda(f) = \overline{Per_1(f)}$$

LEMA 4.1.  $\Lambda$  es semicontinua inferiormente

DEMOSTRACIÓN. Fijemos  $f \in \mathcal{F}$ . Debemos mostrar que para todo  $\epsilon > 0$  existe un entorno  $V$  de  $f$  tal que si  $g \in V$  entonces  $\max_{x \in \Lambda(f)} \{d(x, \Lambda(g))\} < \epsilon$ .

Observemos que, dado que  $\Lambda(f)$  es compacto, existen finitos puntos  $x_1 \dots x_n \in \Lambda(f)$  tales que  $\max_{x \in \Lambda(f)} \{\min_k \{d(x, x_k)\}\} < \frac{\epsilon}{2}$ . Podemos además tomar los  $x_k$  puntos periódicos tipo silla, ya que dichos puntos son densos en  $\Lambda(f)$ .

Sea  $B_k$  la bola de radio  $\frac{\epsilon}{2}$  de centro  $x_k$ . Por la persistencia de los puntos hiperbólicos existe un entorno  $V$  de  $f$  tal que si  $g \in V$ , entonces  $g$  tiene un punto silla en  $B_k$  para todo  $k$ .

Este entorno  $V$  cumple lo deseado. □

Por lo tanto tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 4.2. *Existe un conjunto residual  $CONT \subset \mathcal{F}$  tal que si  $f \in CONT$ :*

*$f$  es un punto de continuidad de  $\Lambda$*

### 5. Teorema de Pliss

El siguiente resultado es el único de esta sección que no es de carácter genérico. Pero enseguida lo utilizaremos para probar un resultado genérico. Utilizaremos una versión modificada del enunciado que se encuentra en [PS00].

TEOREMA 5.1. *Si  $f \in \mathcal{F}$  y  $f$  tiene infinitos atractores o repulsores, entonces para todo  $\epsilon > 0$  existen  $g \in \mathcal{F}$  y  $p \in \mathcal{M}$  tales que:*

1.  $d(f, g) < \epsilon$  (recordemos que  $d$  denota la distancia  $C^1$  en  $\mathcal{F}$ )
2.  $p$  es un punto periódico atractor o repulsor para  $f$
3.  $p$  es un punto periódico tipo silla para  $g$
4.  $f^k(p) = g^k(p)$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$

El Teorema de Pliss nos permite perturbar  $f$  para aumentar el número de puntos silla. En particular tenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 5.2. *Si  $f \in CONT$  y  $f$  tiene infinitos puntos periódicos hiperbólicos, entonces  $Per_1(f)$  es infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $Per_1(f)$  es finito. Entonces como todos los puntos periódicos son hiperbólicos  $f$  tiene infinitos puntos periódicos atractores o repulsores de modo que estamos en condiciones de aplicar el teorema de Pliss.

Supongamos que  $Per_1(f) = \{O(q_1), \dots, O(q_k)\}$  existen entornos  $U_i$  de  $O(q_i)$ ,  $i = 1 \dots k$  tal que:

1.  $f(U_i) \cap U_j = \emptyset$  si  $i \neq j$
2. Si  $p \in Per(f)$  y  $O(p) \subset U_i$  entonces  $O(p) = O(q_i)$  (i.e. la órbita de  $q_i$  es la única órbita periódica totalmente contenida en  $U_i$ ).

La persistencia de los puntos periódicos hiperbólicos implica que existe un entorno  $V$  de  $f$  tal que toda  $g \in V$  tiene puntos periódicos tipo silla  $q'_1, \dots, q'_k$  tales que la órbita de  $q'_i$  está contenida en  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Además, utilizando el teorema de Pliss se consigue una  $g$  con un punto periódico tipo silla distinto de los  $q'_i$ , ya que su órbita coincide con la órbita de un punto periódico atractor para  $f$  y por lo tanto (por la propiedad 2) no está contenida en ningún  $U_i$ .

Esto implica que  $g$  tiene estrictamente más puntos periódicos silla que  $f$  lo cual contradice que  $f \in CONT$ .

□

## 6. Infinitos Puntos Silla

Tenemos todas las herramientas para resolver el primer problema del capítulo anterior. Definamos el siguiente conjunto:

$$SILL = \overline{MS}^c \cap \text{CONT} \cap \text{KS} \cap \text{DENS}$$

TEOREMA 6.1. *SILL es denso en  $\overline{MS}^c$  y si  $f \in SILL$  entonces  $Per_1(f)$  es infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $A = \text{CONT} \cap \text{KS} \cap \text{DENS}$ .

$A$  es un residual de  $\mathcal{F}$ . Como  $\overline{MS}^c$  es abierto se tiene que  $SILL = A \cap \overline{MS}^c$  es residual en  $\overline{MS}^c$ . En particular  $SILL$  es denso en  $\overline{MS}^c$ .

Supongamos  $f \in A$ .

Si  $Per(f)$  es finito se tiene:

1. Todos periódicos son hiperbólicos con variedades estables e inestables transversales porque  $f \in \text{KS}$ .
2. Como  $f \in \text{DENS}$  se tiene  $\Omega(f) = \overline{Per(f)} = Per(f)$  (la clausura de un conjunto finito es el propio conjunto).

Por lo tanto  $f \in \text{MS}$ .

Si  $Per(f)$  es infinito, por el Teorema 5.2 de la sección anterior  $Per_1(f)$  también lo es. Esto concluye la demostración.  $\square$

## 7. Resumen

Hemos definido la función  $\Lambda(f) = \overline{Per_1(f)}$  y el conjunto  $SILL \subset \mathcal{F}$ . Ambos conceptos serán usados en los siguientes capítulos.

Lo central es que hemos probado que  $SILL$  está formado por difeos con infinitos puntos silla, y es un conjunto denso en  $\overline{MS}^c$ . También utilizaremos en el capítulo 5 que los difeos de  $SILL$  pertenecen a  $\text{DENS}$ .

Hemos resuelto por lo tanto el Problema 1 del capítulo anterior.

## Descomposición Dominada

A continuación expondremos el concepto de Descomposición Dominada, que será central en la resolución de los problemas 2 y 3 enunciados en el capítulo 2. Las definiciones y los teoremas dados en este capítulo tienen generalizaciones a dimensiones más grandes que 2 y a subfibrados de otras dimensiones, pero hemos elegido exponer todo en el contexto más sencillo posible.

### 1. Descomposición Dominada, Conos Invariantes, y Entornos Admisibles

Sean  $f \in \mathcal{F}$  y  $\Lambda$  un subconjunto compacto de  $\mathcal{M}$  invariante por  $f$  (más adelante nos interesará exclusivamente el caso  $\Lambda = \Lambda(f) = \overline{Per_1(f)}$ ).

DEFINICIÓN 1.1. Diremos que  $f$  tiene descomposición dominada en  $\Lambda$  si y solo si existen  $E$  y  $F$  subfibrados continuos de dimensión 1 de  $T_\Lambda \mathcal{M}$ , y  $\lambda \in (0, 1)$  tales que:

1.  $E_x \oplus F_x = T_x \mathcal{M}$
2.  $E_{f(x)} = D_x f(E_x)$
3.  $F_{f(x)} = D_x f(F_x)$
4.  $\frac{\|D_x f v_E\|}{\|v_E\|} < \lambda \cdot \frac{\|D_x f v_F\|}{\|v_F\|}$

para todo  $x \in \Lambda$ , y todo par de vectores no nulos  $v_F \in F_x$  y  $v_E \in E_x$ .

OBSERVACIÓN 1.1. *En realidad, en la definición usual de descomposición dominada, se pide que exista  $C > 0$  y  $\lambda \in (0, 1)$  tal que  $\frac{\|D_x f^n v_E\|}{\|v_E\|} < C \lambda^n \cdot \frac{\|D_x f^n v_F\|}{\|v_F\|}$ . Sin embargo, sustituyendo  $f$  por una potencia (siendo que alcanza demostrar el teorema que nos interesa para una potencia de  $f$ ) se puede suponer que  $C = 1$ . Por otra parte, recientemente se ha demostrado que siempre hay una métrica adaptada, es decir, que hay una métrica riemanniana para la cual la descomposición dominada es como en nuestra definición.*

La definición es similar a la de hiperbolicidad. Intuitivamente quiere decir que hay dos direcciones  $E$  y  $F$ , una de las cuales domina a la otra, en el sentido de que si  $f$  no contrae en  $E$  debe expandir mucho en  $F$ , y si  $f$  no expande en  $F$  debe contraer mucho en  $E$ . Los vectores de  $T_x \mathcal{M}$  (excepto los de  $E$ ) tienden a “pegarse” a  $F$  por  $D_x f^k$ .

Esta noción geométrica puede formalizarse productivamente (lo cual haremos a continuación), y nos permite averiguar con precisión qué nos dice la descomposición dominada en  $\Lambda$  respecto a los puntos cuyas órbitas futuras, pasadas, o ambas, se mantienen cerca de  $\Lambda$ .

DEFINICIÓN 1.2. Si  $\mathbb{R}^2 = E \oplus F$  donde  $E$  y  $F$  son subespacios de dimensión 1, definiremos el cono de  $C_a(E, F)$  de la siguiente forma:

$$C_a(E, F) = \{v = v_E + v_F : v_E \in E, v_F \in F, \|v_F\| \leq a \cdot \|v_E\|\}$$

Fijando una norma en cada espacio tangente de  $\mathcal{M}$  queda definida la noción de cono en cada  $T_x\mathcal{M}$ . Podemos pensar, por ejemplo, que la norma viene dada por una métrica riemanniana que puede ser la heredada de un encaje de  $\mathcal{M}$  en algún espacio euclídeo.

Daremos ahora una definición de descomposición dominada que cambia la invariancia de los subfibrados  $E$  y  $F$  (i.e. las propiedades 2 y 3 de la definición anterior) por la invariancia de una familia de conos.

TEOREMA 1.1. *Sea  $\Lambda$  un subconjunto compacto  $f$ -invariante.  $f$  tiene descomposición dominada en  $\Lambda$  si y solo si existen dos subfibrados continuos  $E$  y  $F$  de  $T_\Lambda\mathcal{M}$  de dimensión 1,  $\lambda \in (0, 1)$ , y  $a > 0$  tales que:*

1.  $E_x \oplus F_x = T_x\mathcal{M}$
2.  $C_a(F_x, E_x) \cap C_a(E_x, F_x) = \emptyset$
3.  $D_x f(C_a(F_x, E_x)) \subset C_a(F_{f(x)}, E_{f(x)})$
4.  $D_{f(x)} f^{-1}(C_a(E_{f(x)}, F_{f(x)})) \subset C_a(F_x, E_x)$
5.  $\frac{\|D_x f v_s\|}{\|v_s\|} < \lambda \cdot \frac{\|D_x f v_u\|}{\|v_u\|}$

para todo  $x \in \Lambda$ , y todo par de vectores no nulos  $v_s \in C_a(E_x, F_x)$  y  $v_u \in C_a(F_x, E_x)$ .

DEMOSTRACIÓN. Si tenemos descomposición dominada, sean  $E$  y  $F$  los subfibrados y  $\mu \in (0, 1)$  tales que se cumple:

$$\frac{\|D_x f v_E\|}{\|v_E\|} < \mu \cdot \frac{\|D_x f v_F\|}{\|v_F\|}$$

para todo  $v_F \in F_x$  y  $v_E \in E_x$ .

Tomando  $\lambda \in (\mu, 1)$  por continuidad existe  $a > 0$  tal que se cumpla la propiedad 5 para los conos  $C_a(E, F)$  y  $C_a(F, E)$ . Además podemos elegir  $a > 0$  suficientemente chico como para que 2 también se cumpla.

Si  $v \in C_a(F_x, E_x)$  un vector no nulo. Si lo escribimos como  $v = v_E + v_F$  con  $v_E \in E_x$  y  $v_F \in F_x$ , sabemos que  $\|v_E\| \leq a \cdot \|v_F\|$  y que  $v_F \neq 0$ . Por la invariancia de  $E$  y  $F$  se tiene que  $D_x f v = D_x f v_E + D_x f v_F$  con  $D_x f v_E \in E_{f(x)}$  y  $D_x f v_F \in F_{f(x)}$ . Además por la condición de dominación:

$$\|D_x f v_E\| < \lambda \cdot \frac{\|v_E\|}{\|v_F\|} \cdot \|D_x f v_F\| < \lambda \cdot a \cdot \|D_x f v_F\|$$

de modo que se cumple la propiedad 3. Análogamente se demuestra 4.

Mostraremos ahora el recíproco del teorema. Supongamos que tenemos  $E, F, \lambda > 0$ , y  $a > 0$  de modo que se cumple 1-4. El único problema es que  $E$  y  $F$  no son invariantes. Para arreglar esto los redefinimos de la siguiente forma:

$$\hat{E}_x = \bigcap_{n \geq 0} D_{f^n(x)} f^{-n} C_a(E_{f^n(x)}, F_{f^n(x)})$$

$$\hat{F}_x = \bigcap_{n \geq 0} D_{f^{-n}(x)} f^n C_a(F_{f^{-n}(x)}, E_{f^{-n}(x)})$$

Evidentemente los conjuntos  $\hat{E}_x$  y  $\hat{F}_x$  son invariantes y cumplen la condición de dominación (por estar incluidos en conos en los cuales sabíamos se cumplía tal condición). El problema es que podrían llegar a ser conos en lugar de subespacios de dimensión 1.

Tomemos  $\tilde{E}_x \subset \hat{E}_x$  y  $\tilde{F}_x \subset \hat{F}_x$  subespacios de dimensión 1. Claramente  $\tilde{E}_x \oplus \tilde{F}_x = T_x \mathcal{M}$ . Debemos mostrar que  $\tilde{E}_x = \hat{E}_x$  y  $\tilde{F}_x = \hat{F}_x$ .

Tomemos  $v \in \hat{E}_x$  con  $v \notin \tilde{E}_x$ . Se tiene que  $v = v_s + v_u$  donde  $v_s \neq 0$ ,  $v_u \in \tilde{F}_x$  y  $v_s \in \tilde{E}_x$ . Por hipótesis.

$$\frac{\|D_x f v_s\|}{\|v_s\|} < \lambda \cdot \frac{\|D_x f v_u\|}{\|v_u\|}$$

entonces

$$\frac{\|D_x f v_s\|}{\|D_x f v_u\|} < \lambda \cdot \frac{\|v_s\|}{\|v_u\|}$$

iterando se obtiene  $k > 0$  tal que

$$\frac{\|D_x f^k v_s\|}{\|D_x f^k v_u\|} < \lambda^k \cdot \frac{\|v_s\|}{\|v_u\|} < a$$

lo cual implica que  $D_x f^k v \in C_a(F_{f^k(x)}, E_{f^k(x)})$ . Por la definición de  $\hat{E}$  se tiene además que  $D_x f^k v \in C_a(E_{f^k(x)}, F_{f^k(x)})$ , lo cual es absurdo, ya que ambos conos son disjuntos.  $\square$

Las propiedades relativas a los conos se extienden por continuidad a un entorno del conjunto en cuestión. Esto nos permite obtener inmediatamente el siguiente corolario.

**COROLARIO 1.2.** *Si  $\Lambda$  tiene descomposición dominada, entonces existe un entorno  $V$  de  $\Lambda$  tal que, si  $U$  es abierto con  $\Lambda \subset U \subset \bar{U} \subset V$ , se tiene:*

1.  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\bar{U})$  tiene descomposición dominada.
2.  $B = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(\bar{U})$  tiene una familia de conos que cumplen las propiedades 1-5 del teorema anterior. Además  $E_x = \bigcap_{n \geq 0} D_{f^n(x)} f^{-n} C_a(E_{f^n(x)}, F_{f^n(x)})$  es invariante a futuro.

**DEMOSTRACIÓN.** Tomamos  $\lambda \in (0, 1)$  mayor que el de la descomposición dominada en  $\Lambda$  y extendemos los subfibrados  $E$  y  $F$  de forma continua a un entorno de  $\Lambda$ . Por continuidad existe  $V$  un entorno de  $\Lambda$  y  $a > 0$  tal que se tiene la familia de conos en

condiciones del teorema anterior, con la salvedad de que debemos asumir que  $f(x) \in V$  para las condiciones 3 y 4.

El punto 1 se deduce de que  $A$  es invariante y está incluido en  $V$ . El punto 2 se deduce de que  $B$  es invariante a futuro.  $\square$

DEFINICIÓN 1.3. A un entorno en las condiciones del corolario anterior le llamaremos Entorno Admisible.

## 2. Teorema de Hirsch, Pugh, y Shub

Sea  $\text{Emb}((-1,1),\mathcal{M})$  el conjunto de los encajes  $C^1$  de  $(-1,1)$  en  $\mathcal{M}$ . La topología en  $\text{Emb}((-1,1),\mathcal{M})$  está dada por la distancia  $C^1$ .

El siguiente teorema provee un análogo a  $W^s$  y  $W^u$  para los puntos de un conjunto con descomposición dominada. Utilizamos una versión similar a la enunciada en [PS00].

TEOREMA 2.1 (Hirsch-Pugh-Shub). *Si  $f$  tiene descomposición dominada en  $\Lambda$ , entonces existen dos funciones continuas  $W^{cs} : \Lambda \rightarrow \text{Emb}((-1,1),\mathcal{M})$  y  $W^{cu} : \Lambda \rightarrow \text{Emb}((-1,1),\mathcal{M})$  tales que:*

1.  $W^{cs}(x)(0) = W^{cu}(x)(0) = x$  para todo  $x \in \Lambda$
2.  $\frac{\partial}{\partial t} W^{cs}(x)(t)|_{t=0} = E_x$  para todo  $x \in \Lambda$  y análogamente para  $W^{cu}$  y  $F_x$
3. para todo  $\epsilon \in (0,1)$  existe  $\delta \in (0,1)$  tal que  $f(W^{cs}(x)((-\delta,\delta))) \subset W^{cs}(f(x))((-\epsilon,\epsilon))$  y  $f^{-1}(W^{cu}(x)((-\delta,\delta))) \subset W^{cu}(f^{-1}(x))((-\epsilon,\epsilon))$  para todo  $x \in \Lambda$

$W^{cs}(x)$  y  $W^{cu}(x)$  son curvas  $C^1$  con  $x$  como punto interior. Las grandes diferencias con  $W^s(x)$  y  $W^u(x)$  son:

1.  $W^{cs}$  y  $W^{cu}$  tienen longitud uniforme en  $\Lambda$ . Es decir existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|W^{cs}(x)| > \epsilon$  y  $|W^{cu}(x)| > \epsilon$  para todo  $x \in \Lambda$  (donde  $|\alpha|$  significa la longitud de la curva  $\alpha$ ).
2. Mientras que  $W^s$  y  $W^u$  son invariantes,  $W^{cs}$  y  $W^{cu}$  son solo localmente invariantes. Esto significa que  $f(W^{cs}(x)) \subset W^{cs}(f(x))$  NO siempre es cierto, pero para todo segmento  $W^{cs}(f(x))(-\epsilon,\epsilon)$  existe un segmento  $W^{cs}(x)(-\delta,\delta)$  cuya imagen está incluida en el primero. La propiedad análoga se cumple para  $W^{cu}$  para iterados de  $f^{-1}$ .

La primera propiedad es consecuencia inmediata de la continuidad de  $W^{cs}$  y  $W^{cu}$  y la compacidad de  $\Lambda$ . Esta propiedad es mejor que la que poseen  $W^s$  y  $W^u$ .

La segunda propiedad es simplemente la propiedad 4 de la definición. Esta propiedad es peor que la que poseen  $W^s$  y  $W^u$  que son invariantes. En el capítulo 5 encontraremos variedades invariantes largas para algunos puntos de  $\Lambda$ . Todo esto intenta solucionar el Problema 3 del capítulo 2.

## 3. Reparametrización

En principio tenemos  $W^{cs} : \Lambda \rightarrow \text{Emb}((-1,1),\mathcal{M})$  pero es claro que podemos reparametrizar las funciones de  $\text{Emb}((-1,1),\mathcal{M})$  por longitud de arco. De esta forma obtenemos

$W^{cs}$  con codominio cambiado a las curvas  $C^1$  inyectivas con derivada no nula definidas de algún abierto  $(-a, a)$  con  $a > 0$  a  $\mathcal{M}$ . Se mantienen las propiedades del enunciado del teorema Hirsch-Pugh-Shub.

Definimos  $W_\epsilon^{cs} = W^{cs}((-\epsilon, \epsilon))$ .

Hacemos todo esto tambien para  $W^{cu}$ .

Recordemos que tenemos garantizado  $a > 0$  tal que  $W^{cs}(x)$  y  $W^{cu}(x)$  están definidos para todo  $t \in (-a, a)$  para todo  $x \in \Lambda$ .

**OBSERVACIÓN 3.1.** *Dado  $\epsilon > 0$  (suficientemente pequeño) existe  $\delta > 0$  tal que si  $x, y \in \Lambda$  y  $d(x, y) < \delta$  entonces  $W_\epsilon^{cs}(x)$  se interseca transversalmente con  $W_\epsilon^{cu}(y)$  (y en un único punto).*

**DEMOSTRACIÓN.** Fijado  $x \in \Lambda$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $W_\epsilon^{cu}(x)$  y  $W_\epsilon^{cs}(x)$  se intersecan (transversalmente) sólo en  $x$  porque  $E_x \cap F_x = \{0\}$ .

Por la continuidad  $C^1$  de las variedades existe un entorno  $V$  de  $x$  de modo que toda  $y \in V$  cumple la misma propiedad. Tomando una cobertura finita por estos entornos suponiendo que  $\epsilon$  es menor al de cada uno de los entornos, continuaremos con la prueba.

Se tiene que  $W_\epsilon^{cs}(x) \cap W_\epsilon^{cu}(x) = \{x\}$  y la intersección es transversal para todo  $x \in \Lambda$ . La propiedad de que dos curvas se intersecan solo una vez, y con intersección transversal es  $C^1$  abierta. Por lo tanto cada  $x \in \Lambda$  tiene un entorno  $V$  tal que si  $z, y \in V$  entonces  $z$  e  $y$  cumplen el enunciado (notemos que el enunciado es simétrico). Tomando  $\delta$  igual al epsilon de Lebesgue del cubrimiento se obtiene el enunciado.  $\square$

**LEMA 3.1.** *Dado  $0 < \rho < 1$  existe  $\epsilon > 0$  tal que si  $x \in \Lambda$  verifica  $\|Df_{/E_x}^n\| < \rho^n$  entonces  $W_\epsilon^{cs}(x) \subset W^s(x)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Fijemos  $\mu \in (\rho, 1)$ .

La continuidad de las variedades centro implica que existe  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $x \in \Lambda$  si  $z \in W_\epsilon^{cs}(x)$  y  $E_z = T_z W_\epsilon^{cs}(x)$  se tiene que  $\|D_z f_{/E_z}\| < \frac{\mu}{\rho} \cdot \|D_x f_{/E_x}\|$ .

Tomemos ahora  $\delta < \epsilon$  tal que  $f(W_\delta^{cs}(x)) \subset W_\epsilon^{cs}(f(x))$  para todo  $x \in \delta$ .

Si  $x$  está en las hipótesis entonces para todo  $z \in W_\delta^{cs}(x)$  se tiene por inducción que  $f^n(z) \in W_\epsilon^{cs}(f^n(x))$  y  $\|D_z f_{/E_z}^n\| < \mu^n$ . Por lo tanto  $W_\delta^{cs}(x) \subset W^s(x)$ .  $\square$

#### 4. Teorema de Variedad Estable Fuerte

Enunciaremos ahora otro teorema que provee variedades invariantes [Sam06].

**TEOREMA 4.1.** *Sea  $x \in \mathcal{M}$  tal que  $T_x \mathcal{M} = E_x \oplus F_x$  con las siguientes condiciones:*

*Si definimos  $E_{f^n(x)} = D_x f^n E_x$  y  $F_{f^n(x)} = D_x f^n F_x$  existe  $\lambda \in (0, 1)$  tal que  $\|Df_{/E_{f^n(x)}}\| < \lambda \cdot \|Df_{/F_{f^n(x)}}\|$ . Además existe  $\rho \in (0, 1)$  tal que  $\|Df_{/E_x}^n\| < \rho^n$ .*

*Entonces existe  $\epsilon > 0$  dependiente solamente de  $f$ ,  $\lambda$  y  $\rho$ ; y  $W_\epsilon^{ss}$  subvariedad encajada tales que:*

1.  $x \in W_\epsilon^{ss}$
2.  $T_x W_\epsilon^{ss} = E_x$
3. Si  $\alpha$  es una componente de  $W_\epsilon^{ss}(x) - \{x\}$  entonces  $|\alpha| > \epsilon$
4. si  $y \in W_\epsilon^{ss}$  entonces  $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \rho^n \cdot d(x, y)$

En particular sabemos que  $W_\epsilon^{ss}(x) \subset W^s(x)$  de modo que si  $x \in Per(f)$  se tiene que  $W_\epsilon^{ss}(x)$  es invariante por  $f^{\pi(x)}$ . Además se sabe en este caso que que ambas ramas de  $W^s(x)$  tienen longitud mayor que  $\epsilon$ .

### 5. Descomposición Dominada en $Per_1(f)$

El siguiente teorema conecta lo anterior con la conjetura de Palis. Se encuentra en [PS00].

**TEOREMA 5.1.** *Si  $f \in \overline{MS^c} \cap \overline{TAN}$  entonces  $f$  tiene descomposición dominada en  $\Lambda(f) = \overline{Per_1(f)}$*

En el caso  $x \in Per_1(f)$  se tiene que  $E_x$  y  $F_x$  serán las direcciones estables e inestables de  $x$ , ya que son las únicas invariantes por  $D_x f^{\pi(x)}$ .

Recordemos que nuestro objetivo era probar  $\overline{MS^c} \subset \overline{TRAN}$ . El caso  $f \in \overline{TAN}$  está resuelto, ya que sabemos que  $TAN \subset \overline{TRAN}$ . El lema anterior nos dice que en el caso restante podemos utilizar la descomposición dominada, y el teorema Hirsch-Pugh-Shub en  $\Lambda(f)$ .

### 6. Resumen

Definimos la noción de descomposición dominada, enunciamos el teorema de Hirsch, Pugh, y Shub, y el teorema de la variedad estable fuerte.

A los efectos de demostrar  $\overline{MS^c} \subset \overline{TRAN}$  nos falta probar  $\overline{MS^c} \cap \overline{TAN^c} \subset \overline{TRAN}$ . En este caso sabemos ahora que podemos suponer descomposición dominada para  $f$  en  $\Lambda(f)$ .

Introducimos las curvas localmente invariantes  $W^{cs}$  y  $W^{cu}$  tangentes a las direcciones  $E$  y  $F$  de la descomposición dominada. Y las notaciones  $W_\epsilon^{cs}$  y  $W_\epsilon^{cu}$ . También para ciertos puntos con contracción exponencial en la dirección estable tenemos una variedad  $W_\epsilon^{ss}(x)$ .

## CAPÍTULO 5

### Longitud de las Variedades Invariantes

En este capítulo daremos condiciones que garantizan variedades estables y centro estables largas. Siempre supondremos  $f \in \mathcal{F}$  y  $p \in \mathcal{M}$ . Dado que nuestro objetivo es probar la existencia de puntos homoclínicos transversales, tenemos derecho en las demostraciones a cambiar  $f$  por algún iterado  $f^k$  si es necesario.

#### 1. Lema Numérico

En esta sección probaremos un lema de carácter numérico que aplicaremos inmediatamente al problema de encontrar muchos puntos con variedades invariantes largas para  $f$ .

En toda esta sección  $k \in \mathbb{Z}_N$  y  $a_k$  será un número real positivo para todo  $k$ . Asumiremos también que  $\lambda \in (0, 1)$ .  $\mathbb{N}$  es el conjunto de los números enteros positivos (notemos que está explícitamente excluido el 0).

**TEOREMA 1.1.** *Si  $\prod_{k \in \mathbb{Z}_N} a_k \leq \lambda^N$  entonces existe  $k \in \mathbb{Z}_N$  tal que  $\prod_{i=0}^{n-1} a_{k+i} \leq \lambda^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$*

**DEMOSTRACIÓN.** Lo demostraremos por el absurdo.

Supongamos que para todo  $k$  podemos encontrar un  $i_k \geq 1$  tal que no se cumpla la tesis. Es decir

$$\prod_0^{i_k-1} a_{k+i} > \lambda^{i_k}$$

Como los  $k$  son finitos, tomando mínimo se tiene que existe  $\mu > \lambda$  tal que:

$$\prod_0^{i_k-1} a_{k+i} > \mu^{i_k}$$

Tomemos  $k_0 = 0$ ,  $k_1 = i_{k_0}$ ,  $k_2 = k_1 + i_{k_1}$ , y siguiendo así de modo que en general  $k_{n+1} = k_n + i_{k_n}$ . Entonces se tiene que:

$$\prod_0^{k_n-1} a_i > \mu^{k_n}$$

Por otro lado  $k_n$  está a menos de  $N$  del siguiente múltiplo de  $N$ , de modo que existe  $0 \leq r_n < N$  tal que:

$$\prod_0^{k_n+r_n-1} a_i < \lambda^{k_n+r_n}$$

Dividiendo estas dos se deduce:

$$\prod_{k_n}^{k_n+r_n-1} a_i < \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k_n} \cdot \lambda^{r_n}$$

El lado derecho tiende a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$  mientras que el lado izquierdo es el producto de menos de  $N$  de los  $a_i$  que son todos positivos. Lo cual es absurdo.  $\square$

## 2. Infinitos Puntos con Variedades Estables Largas

**TEOREMA 2.1.** *Si  $f$  tiene descomposición dominada en  $\Lambda(f)$  y  $Per_1(f)$  es infinito entonces (tal vez cambiando  $f$  por  $f^{-1}$ ) existe  $\mu \in (0, 1)$  tal que  $\{p \in Per_1 : \|D_p f_{E_p}^k\| < \mu^k \text{ para todo } k > 0\}$  es infinito.*

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $p \in Per_1(f)$  se tiene que:

$$\|D_p f_{E_p}^{\pi(p)}\| < \lambda^{\pi(p)} \cdot \|D_p f_{F_p}^{\pi(p)}\|$$

Entonces o bien  $\|D_p f_{E_p}^{\pi(p)}\| < \sqrt{\lambda}^{\pi(p)}$  o  $\frac{1}{\|D_p f_{F_p}^{\pi(p)}\|} = \|D_p f_{F_p}^{-\pi(p)}\| < \sqrt{\lambda}^{\pi(p)}$ .

Supongamos que estamos en el primer caso. Este caso se da infinitas veces o bien para  $f$  o para  $f^{-1}$ .

Tomando  $\mu = \sqrt{\lambda}$  aplicamos el lema numérico anterior con  $a_k = \|D_{f^k(p)} f_{E_{f^k(p)}}\|$ ; se demuestra por lo tanto que existe  $q$  en la órbita de  $p$  de forma tal que:  $\|D_q f_{E_q}^k\| < \mu^k$  para todo  $k > 0$   $\square$

Observemos que por el lema 3.1 del capítulo anterior existe  $\epsilon > 0$  tal que para todos los puntos obtenidos en este último teorema se tiene  $W_\epsilon^{cs}(x) \subset W^s(x)$ .

## 3. Resultados para $W^{cu}$

El objetivo próximo es demostrar que existe  $\epsilon > 0$  e infinitos puntos  $x \in Per_1(f)$  con porciones de longitud  $\epsilon$  de sus variedades centro inestables que son invariantes por  $f^{-\pi(x)}$ . Luego mostraremos que podemos encontrar estos infinitos puntos de forma que además cumplan las condiciones finales de la sección anterior (i.e. tendrán variedades estables largas). Con estas dos cosas concluiríamos los preliminares a la demostración de la conjetura de Palis.

Esta es la sección de carácter más técnico de la monografía. Vamos a usar el teorema de Hirsch-Pugh-Shub (le llamaremos HPS) y esto implica tener en mente diversas sutilezas. La principal es que puede pasar para  $\epsilon > 0$  que  $f^{-1}(W_\epsilon^{cu}(x))$  no esté incluido en  $W_\gamma^{cu}(f^{-1}(x))$  para ningún  $\gamma > 0$ .

Fijemos ahora algunos conceptos para esta sección.

Supondremos a partir de ahora que  $f \in \text{SILL} \cap \overline{\text{MS}}^c \cap \overline{\text{TAN}}^c$ . En particular tendremos ocasión de utilizar el hecho de que  $f \in \text{DENS}$  y por supuesto la descomposición dominada en  $\text{Per}_1(f)$ .

Elijamos un entorno admisible  $V$  de  $\text{Per}_1(f)$  al cual extendemos la descomposición dominada. Tomemos  $\tilde{\gamma} > 0$  de forma que existe  $W_{\tilde{\gamma}}^{cu}(x)$  para todo  $x \in \overline{\text{Per}_1(f)}$ . Tomemos también  $\gamma_0 > 0$  tal que  $f^{-1}(W_{\gamma_0}^{cu}(x)) \subset W_{\tilde{\gamma}}^{cu}(f^{-1}(x))$  para todo  $x \in \overline{\text{Per}_1(f)}$ .

Supondremos que  $\gamma$  es siempre un número en el intervalo  $(0, \gamma_0)$ .

Fijado  $\gamma$  para cada  $x \in \text{Per}_1(f)$  definimos  $I_x \subset W_\gamma^{cu}(x)$  como el intervalo abierto maximal que cumple las siguientes propiedades:

1.  $x \in I_x$
2.  $f^{-k}(I_x) \subset W_\gamma^{cu}(f^{-k}(x))$  para todo  $k \geq 0$

$I_x$  siempre existe por ser  $x$  periódico hiperbólico tipo silla (siempre un pequeño segmento de  $W^{cu}(x)$  coincide con  $W^u(x)$ ).

Utilizaremos  $\alpha_x$  para una de las dos componentes de  $I_x - \{x\}$  (a especificar según el caso). Y  $\beta_x$  será una de las componentes de  $W_\gamma^{cu}(x) - \{x\}$ .

**OBSERVACIÓN 3.1.** *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1.  $f^{-k}(I_x) \subset I_{f^{-k}(x)}$  para todo  $k \geq 0$
2. si  $\overline{f^{-1}(\alpha_x)} \subset I_{f^{-1}(x)}$  entonces  $|\alpha_x| = \gamma$

**DEMOSTRACIÓN.** La propiedad 1 es consecuencia inmediata de la maximalidad de  $I_{f^{-k}(x)}$ . La propiedad 2 es consecuencia de la maximalidad de  $I_x$ ; si no fuera cierto que  $|\alpha_x| = \gamma$  podríamos agrandar  $I_x$  manteniendo  $f^{-1}(I_x) \subset I_{f^{-1}(x)}$ .  $\square$

Podemos ahora definir exactamente nuestro objetivo. Queremos obtener  $\epsilon > 0$  tal que  $W_\epsilon^{cu}(x) \subset I_x$  para todo  $x \in \text{Per}_1(f)$ . Dado que  $f^{-\pi(x)}(I_x) \subset I_x$ , tendríamos una porción invariante de  $W_\gamma^{cu}(x)$  de longitud al menos  $\epsilon$  para cada lado. Sin embargo el camino hacia esta meta es relativamente sinuoso; se recomienda por lo tanto al lector que se tome un café antes de empezar.

**LEMA 3.1.** *Si  $x \in \text{Per}_1(f)$  y  $|f^{-k}(\alpha_x)| < \gamma$  para todo  $k \geq 0$  entonces existe  $y \in O(x)$  y  $\beta_y$  tales que:*

$$f^k(\beta_y) \subset W_\gamma^{cu}(f^k(y)) \text{ para todo } k \geq 0$$

DEMOSTRACIÓN. En la componente de  $W_\gamma^{cu}(x) - \{x\}$  que contiene a  $\alpha_x$  tomamos un intervalo abierto  $\alpha'_x \supset \alpha_x$  estrictamente más grande que  $\alpha_x$ . Como  $|f^{-k}(\alpha_x)| < \gamma$  para todo  $k \geq 0$  se puede elegir  $\alpha'_x$  para que  $|f^{-k}(\alpha'_x)| < \gamma$  para todo  $k \leq 2 \cdot \pi(x)$ .

Es importante notar que como  $\gamma < \gamma_0$  se tiene que si  $f^{-k}(\alpha'_x) \subset W_\gamma^{cu}(x)$  entonces  $f^{-(k+1)}(\alpha'_x) \subset W_{\tilde{\gamma}}^{cu}$ , si además  $|f^{-(k+1)}(\alpha'_x)| < \gamma$  entonces  $f^{-(k+1)}(\alpha'_x) \subset W_\gamma^{cu}(f^{-(k+1)}(x))$

Tomemos ahora  $K$  el primer entero positivo tal que  $|f^{-K}(\alpha'_x)| \geq \gamma$  se tiene que  $K < \infty$  por la maximalidad de  $I_x$ , y además  $K > 2 \cdot \pi(x)$  por lo anterior.

Sea  $y = f^{-K}(x)$ . Como  $\gamma < \gamma_0$  sabemos que  $f^{-K}(\alpha'_x) \subset W_{\tilde{\gamma}}^{cu}(y)$ . Tomemos  $\beta_y$  la componente de  $W_\gamma^{cu}(y) - \{y\}$  que está contenida en  $f^{-K}(\alpha'_x)$ . Se tiene que  $f^k(\beta_y) \subset f^{k-K}(\alpha'_x) \subset W_\gamma^{cu}(f^k(y))$  para  $k \leq K$ . En particular  $f^{2 \cdot \pi(x)}(\beta_y) \subset \beta_y$  (el  $2 \cdot \pi(x)$  es necesario en lugar de  $\pi(x)$  porque  $D_y f_{/F_y}^{\pi(x)}$  puede revertir orientación). De lo anterior se deduce que  $\beta_y$  cumple la tesis.  $\square$

LEMA 3.2. *Existe  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $\gamma$  suficientemente pequeño si  $x \in \overline{Per_1(f)}$  y  $\beta_x$  es tal que  $f^k(\beta_x) \subset W_\gamma^{cu}(f^k(x))$  para todo  $k \geq 0$ , entonces se tiene que existe  $W_\epsilon^s(y)$  para todo  $y \in \beta_x$ .*

En el caso de que  $x$  sea periódico, este lema implica la existencia de una caja de área aproximada  $\epsilon \cdot \gamma$  con un atractor en su interior, hecho que se explotará enseguida.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\lambda$  el de la descomposición dominada en el entorno admisible  $V$ , y tomemos:

$$0 < \lambda < \lambda_1 < \rho < 1 \text{ donde } \lambda_1 = \sqrt{\lambda}$$

Tomemos  $c = \frac{\rho}{\lambda_1}$ . Supongamos ahora que  $\gamma$  es suficientemente pequeño para que se cumpla que:

1.  $d(x, y) < \gamma$  implica  $\|Df_{/E_x}\| < c \cdot \|Df_{E_y}\|$  donde  $x, y \in V$
2.  $\|Df_{F_1(y)}^{-1}\| < c \cdot \|Df_{F_x}^{-1}\|$  donde  $x \in Per_1(f)$ ,  $y \in W_\gamma^{cu}(x)$  y  $F_1(y) = T_y W_\gamma^{cu}(x)$

Si  $\beta_x$  y  $x$  son como en el enunciado probaremos que  $\|Df_{F_x}^k\| \leq (\frac{1}{\lambda_1})^k$  para todo  $k \geq 0$ .

Supongamos lo contrario, es decir que para algún  $K > 0$  se tiene  $\|Df_{F_x}^K\| > (\frac{1}{\lambda_1})^K$ . Se tendría entonces que  $\|Df_{F_{f^K(x)}}^{-K}\| < \lambda_1^K$ . De lo cual se deduce que  $\|Df_{F_1(y)}^{-K}\| < (c \cdot \lambda_1)^K < \rho^K$  para todo  $y \in f^K(\beta_x)$ . De esto se obtiene:

$$\gamma = |\beta_x| < \rho^K \cdot |f^K(\beta_x)| < \rho^K \cdot \gamma < \gamma$$

lo cual es absurdo.

Usando el resultado anterior y la descomposición dominada se obtiene:

$$\|Df_{E_x}^k\| < \lambda^k \cdot \|Df_{F_x}^k\| < (\frac{\lambda}{\lambda_1})^k = \lambda_1^k$$

De modo que  $x$  está en las hipótesis del teorema de la variedad estable fuerte. Pero no solo eso, sino que para todo  $y \in \beta_x$  se obtiene:

$$\|Df_{E_y}^k\| \leq (c \cdot \lambda_1)^k = \rho^k$$

Lo que por el teorema de la variedad estable fuerte demuestra lo pedido. Notemos que como  $\rho$  es independiente de  $\gamma$  se tiene que  $\epsilon$  es el mismo para todo  $\gamma$  suficientemente pequeño.  $\square$

**LEMA 3.3.** *Si  $\gamma$  es suficientemente pequeño entonces para todo  $x \in Per_1(f)$  salvo una cantidad finita, se tiene que para cada  $\alpha_x$  existe  $k \geq 0$  tal que  $|f^{-k}(\alpha_x)| = \gamma$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Si no es cierta la tesis aplicando el lema 3.1 se obtienen una sucesión  $y_n$  de puntos periódicos tipo silla, ninguno en la órbita de otro, tales que:  $f^k(\beta_{y_n}) \subset W_\gamma^{cu}(f^k(y_n))$  para todo  $k \geq 0$ .

Por el lema 3.2 existe  $\epsilon > 0$  tal que si  $\gamma$  es suficientemente pequeño existe  $W_\epsilon^s(z)$  para todo  $z \in \beta_{y_n}$  para todo  $n$ .

Sea  $B_n = \bigcup_{z \in \beta_{y_n}} W^s(z)$ ,  $B_n$  contiene una bola de tamaño uniforme (independiente de  $n$ ) y además como  $y_n$  es periódico y  $f^{2\pi(y_n)}(\beta_{y_n}) \subset \beta_{y_n}$  se tiene  $\beta_{y_n}$  contiene un atractor cuya cuenca incluye a  $B_n$ .

Como  $\mathcal{M}$  es compacta existe  $n_1 \neq n_2$  tales que:

1.  $B_{n_1} \cap B_{n_2} \neq \emptyset$
2.  $\pi(y_{n_1}) < \pi(y_{n_2})$  y  $2\pi(y_{n_1}) \neq \pi(y_{n_2})$  (recordemos que solo hay finitos puntos periódicos de cada período por ser todos hiperbólicos).

La propiedad 2 implica que  $\beta_{y_{n_1}} \cap \beta_{y_{n_2}} = \emptyset$ .

Tomemos  $z \in B_{n_1} \cap B_{n_2}$ ; se tiene que  $f^{k \cdot \pi(y_{n_1})}(z) \rightarrow \beta_{y_{n_1}}$  y  $f^{k \cdot \pi(y_{n_2})}(z) \rightarrow \beta_{y_{n_2}}$  entonces si  $m$  es el menor múltiplo común entre los dos períodos  $f^{k \cdot m}(z) \rightarrow \beta_{y_{n_1}} \cap \beta_{y_{n_2}} \neq \emptyset$ . Esto contradice lo anterior.  $\square$

**TEOREMA 3.4.** *Para todo  $\gamma$  suficientemente pequeño existe  $\epsilon > 0$  tal que  $W_\epsilon^{cu}(x) \subset I_x$  para todo  $x \in Per_1(f)$*

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que existe una sucesión de puntos  $x_n \in Per_1(f)$  de modo que si  $\alpha_n = \alpha_{x_n}$  se tiene que  $|\alpha_n| \rightarrow 0$ .

Por el lema 3.3 existe una sucesión  $k_n$  de enteros positivos tales que  $|f^{-k_n}(\alpha_n)| = \gamma$  (tomaremos  $k_n$  el mínimo positivo con dicha propiedad). Además como  $\|Df\|$  está acotada por ser  $\mathcal{M}$  compacta, se tiene que  $k_n \rightarrow +\infty$ .

Sea  $y_n = f^{-k_n}(x_n)$  podemos suponer que  $y_n \rightarrow y$  tomando una subsucesión porque  $\mathcal{M}$  es compacta.

Por el teorema HPS se tiene que  $W_\gamma^{cu}(y_n) \rightarrow W_\gamma^{cu}(y)$  donde la convergencia es en distancia  $C^1$ . Por lo tanto  $f^{-k_n}(\alpha_n) \rightarrow \alpha$ , donde  $\alpha$  es una componente de  $W_\gamma^{cu}(y) - \{y\}$ .

De el hecho de que la anterior convergencia es  $C^1$  y de que  $k_n \rightarrow +\infty$  se obtiene que  $|f^k(\alpha)| < \gamma$  para todo  $k > 0$ . Como además  $|f^{-k}(\alpha_n)| \leq \gamma$  para todo  $k \geq 0$  se obtiene que  $|f^k(\alpha)| \leq \gamma$  para todo  $k$ . Como  $\gamma < \gamma_0$  se deduce que  $f^{-k}(\alpha) \subset W_\gamma^{cu}(f^{-k}(y))$  para todo  $k \geq 0$ .

El lema 3.2 implica que existe  $\epsilon > 0$  tal que para todo punto  $z \in \alpha$  existe  $W_\epsilon^s(z)$ . Tomemos  $B = \bigcup_{z \in \alpha} W_\epsilon^s(z)$ ,  $B$  es un abierto foliado por variedades estables.

Mostraremos ahora que todo punto de  $\alpha$  es recurrente por cadenas, lo cual como  $f \in \text{DENS}$  implica que  $\alpha \subset \overline{\text{Per}(f)}$  y nos da la existencia de infinitos puntos periódicos en el interior de  $B$ . De esto último deduciremos un absurdo.

Supongamos  $n$  suficientemente grande como para que  $|\alpha_n| < \epsilon'$ . Afirmamos que los puntos de  $f^{-k_n}(\alpha_n)$  poseen  $\epsilon'$ -cadenas periódicas. Observemos que  $f^{-2\pi(x_n)+k_n}(f^{-k_n}(\alpha_n)) \subset \alpha_n$ . Por lo tanto si  $z \in f^{-k}(\alpha_n)$ , se tiene que  $z, f(z), \dots, f^{k_n-1}(z), f^{-2\pi(x_n)+k_n}(z), \dots, f^{-1}(z), z$  es una  $\epsilon'$ -cadena para  $z$ . Como  $f^{-k_n}(\alpha_n) \rightarrow \alpha$  se tiene que existen  $2\epsilon'$ -cadenas periódicas para los puntos de  $\alpha$ . Como el razonamiento anterior es válido para todo  $\epsilon' > 0$  se tiene que los puntos de  $\alpha$  son recurrentes por cadenas. Por lo tanto todos los puntos de  $\alpha$  son acumulados por puntos periódicos.

Resultados de [PS00] que están expuestos en [Pot06] implican que el omega límite de  $\alpha$  o bien es un punto periódico atractor (que en este caso no puede ser), o contiene un intervalo o círculo periódico. Dicho intervalo o círculo periódico debería contener infinitos puntos periódicos (i.e. aquellos que están en la variedad estable de puntos de  $\alpha$ ). Esto implicaría que tendríamos infinitos puntos periódicos con período acotado, lo cual contradice que todos los puntos periódicos de  $f$  son hiperbólicos.  $\square$

#### 4. Resumen

Hemos demostrado el siguiente teorema:

**TEOREMA 4.1.** *Si  $f \in \text{SILL} \cap \overline{\text{MS}}^c \cap \overline{\text{TAN}}^c$  entonces existe  $\epsilon > 0$ ,  $\gamma > 0$ , y un conjunto infinito  $P \subset \text{Per}_1(f)$  tales que para todo  $x \in P$ :*

1.  $W_\epsilon^{cs}(x) \subset W^s(x)$
2.  $W_\epsilon^{cu}(x) \subset I_x$

Los difeos en las hipótesis del teorema anterior tienen infinitos puntos sillars, descomposición dominada en  $\text{Per}_1(f)$  y variedades invariantes de longitud uniforme. Esto significa que hemos solucionado los problemas 1, 2, y 3 del capítulo 2. La única dificultad es que en lugar de mostrar que dichos difeos tienen variedades inestables largas, solo mostramos que tienen porciones invariantes de sus variedades centro inestables largas.

Por lo tanto habrá que modificar un poco el argumento del capítulo 2 para lidiar con esta complicación. Esto se hace en el siguiente capítulo terminando de esa forma la demostración de la Conjetura Débil de Palis.

## CAPÍTULO 6

### Demostración

Este es el capítulo final de la monografía. Se utilizan las herramientas expuestas anteriormente para dar una demostración de la Conjetura Débil de Palis.

#### 1. Demostración de la Conjetura Débil de Palis

TEOREMA 1.1.  $\overline{MS^c} \subset \overline{TRAN}$

DEMOSTRACIÓN. Alcanza probar que un conjunto denso de difeomorfismos en  $\overline{MS^c}$  o bien tienen una órbita homoclínica o son aproximables por difeos que la tienen. Por los resultados del capítulo 3 sabemos que SILL es denso.

Sea  $f \in \overline{MS^c} \cap \text{SILL}$ .

Si  $f \in \overline{\text{TAN}}$  entonces  $f \in \overline{\text{TRAN}}$  porque  $\overline{\text{TRAN}} \supset \text{TAN}$ .

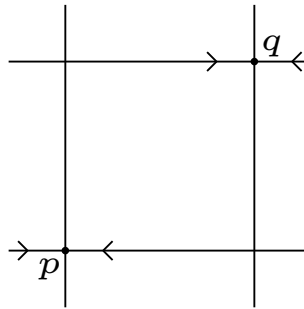
Si  $f \notin \overline{\text{TAN}}$  por el lema de descomposición dominada (capítulo 4 sección 5)  $f$  tiene descomposición dominada en  $\Lambda(f) = \overline{\text{Per}_1(f)}$ . Además  $\text{Per}_1(f)$  es infinito ya que  $f \in \text{SILL}$ . Encontraremos a continuación una órbita homoclínica transversal de  $f$ .

Recordemos que el teorema 4.1 del capítulo 5 implica la existencia de  $\epsilon > 0$  y un conjunto infinito  $P \subset \text{Per}_1(f)$  tal que  $W_\epsilon^{cs}(p) \subset W^s(p)$  y  $W_\epsilon^{cs}(p) \subset I_p$  para todo  $p \in P$ .

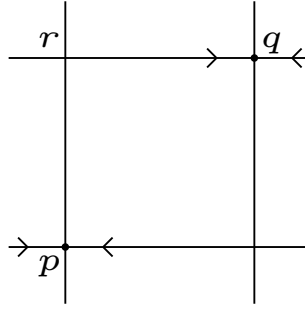
Tomemos entonces  $p, q \in P$  suficientemente cercanos como para que

$$W_\epsilon^{cu}(p) \cap W_\epsilon^{cs}(q) = r \text{ y } W_\epsilon^{cu}(q) \cap W_\epsilon^{cs}(p) = w$$

(ver la observación 3.1 del capítulo 4) como muestra el siguiente dibujo:



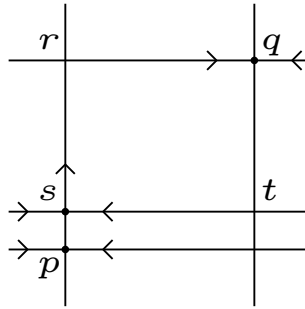
Sea  $[p, r]$  el segmento cerrado entre  $p$  y  $r$  en  $W_\epsilon^{cu}(p)$  consideremos  $m = 2\pi(p)\pi(q)$  y consideremos  $g = f^m$



Tomemos  $s = \lim_{k \rightarrow +\infty} g^{-k}(r) \in W_\gamma^{cu}(p)$ . Además,  $s$  es un punto fijo de  $g$  que no puede ser atractor, ya que  $r \in W^u(s)$ . Tenemos también que  $g([p, s]) = [p, s]$  y por lo tanto  $[p, s] \subset [p, r]$  ya que  $g^k(r) \rightarrow q$  cuando  $k \rightarrow +\infty$ . Como además  $s \in I_p$ , se tiene que  $d(f^k(p), f^k(s)) < \gamma$  para todo  $k$  y por lo tanto (usando 3.2 del capítulo anterior) concluimos que

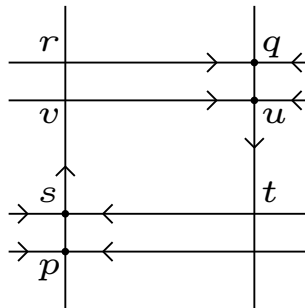
$$\|Df_{E_s}^n\| \leq \rho^n, \quad \forall n \geq 0$$

De esto se tiene que  $s \in Per_1(f)$  y por (4.1) concluimos que  $W_\epsilon^{cs}(s) \subset W^s(p)$ . Además  $[s, r] \subset W^u(s)$ .



Se deduce también (ver 3.1 capítulo 4) que  $W_\epsilon^{cs}(s) \cap W_\epsilon^{cu}(q) = t$  y esta intersección es transversal.

Razonando exactamente igual que antes conseguimos  $u = \lim_{k \rightarrow +\infty} g^{-k}(t) \in W_\gamma^{cu}(q)$ . Como antes,  $u$  es un punto fijo tipo silla de  $f$ ,  $W_\epsilon^{cs}(u) \subset W^s(u)$  y  $[u, t] \subset W^u(u)$ . Además  $W_\epsilon^{cs}(u) \cap [s, r] = v$  y esta intersección es transversal.



Hemos conseguido  $u$  y  $s$  dos puntos periódicos tipo silla y dos puntos de intersección transversal  $t \in W^s(s) \cap W^u(u)$  y  $v \in W^s(u) \cap W^u(s)$ . En estas condiciones el Teorema del capítulo 1 nos da una órbita homoclínica transversal para  $f$ .  $\square$



## Apéndice 1: Métrica de Hausdorff

En este apéndice se definen las nociones de *Métrica de Hausdorff* y *Semicontinuidad Inferior*. El principal resultado es que una función semicontinua inferiormente tiene un conjunto residual de puntos de continuidad.

El libro de Hausdorff [Hau62] tiene una exposición muy recomendable de todos los prerequisites relativos a la métrica que él mismo definió. En [Cho66] hay una sección dedicada a la semicontinuidad de funciones numéricas que es de gran ayuda para entender este tema, aún en el caso un poco más complejo que manejamos aquí.

### 2. Métrica de Hausdorff

Sea  $\mathcal{M}$  un Espacio Métrico Compacto con una métrica  $d$ , y sean  $A$  y  $B$  subconjuntos compactos de  $\mathcal{M}$ .

Definimos las siguientes dos funciones de  $A$  y  $B$ .

DEFINICIÓN 2.1.

$$d_A(B) = \max_{b \in B} d(A, b) \text{ distancia inferior de } A \text{ a } B$$

DEFINICIÓN 2.2.

$$d(A, B) = \max(d_A(B), d_B(A)) \text{ distancia de Hausdorff entre } A \text{ y } B$$

La distancia inferior no es una métrica por dos razones: la primera es que puede valer cero sin que los conjuntos coincidan; la segunda es que las dos formas de distancia inferior entre  $A$  y  $B$  por lo general no coinciden. Sí es verdad la desigualdad triangular.

La distancia de Hausdorff sí es una métrica. Y la familia de los subconjuntos compactos de  $\mathcal{M}$  con dicha métrica es un espacio métrico compacto que llamaremos  $\mathcal{H}$ .

### 3. Semicontinuidad Inferior

Supongamos que tenemos una función  $\Gamma$  de un espacio métrico  $\mathcal{F}$  en  $\mathcal{H}$ . Usaremos las notaciones  $f, f_n, g, g_n$  para elementos de  $\mathcal{F}$ , y  $A, A_n, B, B_n$  para sus imágenes por  $\Gamma$ .

DEFINICIÓN 3.1. Diremos que  $\Gamma$  es semicontinua inferiormente si:

$$f_n \rightarrow f \text{ implica que } d_{A_n} A \rightarrow 0$$

La semicontinuidad inferior significa que el conjunto  $A$  no puede implotar. Los conjuntos  $A_n$  deben tener puntos cercanos a cada punto de  $A$  pero pueden tener también puntos distantes. Podemos imaginar por ejemplo que cada  $A_n$  contiene a  $A$ , en ese caso  $d_{A_n}A = 0$  para todo  $n$ .

**TEOREMA 3.1.** *Si  $\Gamma$  es semicontinua inferiormente, los puntos de continuidad de  $\Gamma$  forman un conjunto residual en  $\mathcal{F}$*

**DEMOSTRACIÓN.** Para que  $f$  sea un punto de continuidad hace falta solamente saber que  $f_n \rightarrow f$  implica que  $d_A A_n \rightarrow 0$ ; la otra mitad está dada por la semicontinuidad inferior.

Tomemos la siguiente definición como una medida de la discontinuidad de  $\Gamma$  en  $f$ :

$$S(f) = \sup\{s \geq 0 \text{ tal que existe } f_n \rightarrow f \text{ con } d_A A_n \rightarrow s\}$$

$f$  es un punto de continuidad si y solo si  $S(f) = 0$ .

Consideremos la siguiente familia de conjuntos cuya unión da los puntos de discontinuidad.

$$E_k = \{f \text{ tal que } S(f) \geq \frac{1}{k}\}$$

Probaremos que cada  $E_k$  es cerrado y tiene interior vacío y con esto se deduce que los puntos de continuidad forman un residual.

Para probar que  $E_k$  es cerrado supongamos que tenemos  $f_n \rightarrow f$  con cada  $f_n$  en  $E_k$ . Puedo tomar  $g_n$  suficientemente cerca de  $f_n$  para que  $g_n \rightarrow f$  y  $d_{A_n}(B_n) > \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$  (recordemos que  $f_n$  esta en  $E_k$ ). Ahora la triangular de la distancia inferior nos da:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{n} < d_{A_n}(B_n) \leq d_{A_n}(A) + d_A(B_n)$$

Pero  $d_{A_n}(A) \rightarrow 0$  por la semicontinuidad inferior. Por lo tanto tomando límite se obtiene que  $d_A(B_n)$  acumula por encima de  $\frac{1}{k}$  lo cual implica que  $f$  está en  $E_k$ .

Probaremos ahora que  $E_k$  no contiene ningún abierto.

Supongamos que existe un abierto contenido en  $E_k$  y tomemos  $\epsilon < \frac{1}{2k}$ . Dentro de este abierto podemos construir una sucesión  $f_n$  tal que  $d_{A_n}A_{n-1} < \frac{\epsilon}{2^n}$  (esto se consigue tomando  $f_n$  muy cercana a  $f_{n-1}$  por la semicontinuidad inferior) y  $d_{A_{n-1}}(A_n) > \frac{1}{k} - \epsilon > 0$  (esto es porque  $f_{n-1}$  esta en  $E_k$ ). Supongamos que  $i < j$ , utilizando la triangular se obtiene:

$$d_{A_j}(A_i) < \epsilon$$

Y a partir de esto con la triangular una vez más (con  $A_{j-1}$ ) se obtiene:

$$d_{A_i}(A_j) > \frac{1}{k} - 2\epsilon > 0$$

Esto significa que  $d(A_i, A_j) > \frac{1}{k} - 2\epsilon > 0$  siempre que  $i$  sea distinto de  $j$ , lo cual viola la compacidad de  $\mathcal{H}$ .  $\square$



## Apéndice 2: Topología $C^1$

Supondremos conocidas las nociones básicas de topología diferencial tal y cual están definidas en las primeras hojas del libro de Milnor [Mil97]. Otra referencia muy linda es [GP74].

Nótese en particular que trabajaremos con variedades compactas, sin borde, encajadas siempre en algún  $\mathbb{R}^n$ .

En este apéndice definiremos una métrica en el espacio de los difeomorfismos (de ahora en adelante les diremos difeos)  $C^1$  de una variedad compacta. Con esta métrica dicho espacio se convierte en un espacio métrico que además resulta ser un espacio de Baire.

### 4. Métrica $C^1$

Sea  $\mathcal{M}$  una Variedad Compacta, conexa, sin borde, encajada en  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $f$  es una función de  $\mathcal{M}$  en  $\mathbb{R}^n$ .

DEFINICIÓN 4.1. Diremos que  $f$  es  $C^1$  si para cada  $x \in \mathcal{M}$  existe un entorno de  $x$  en  $\mathbb{R}^n$ , que llamaremos  $V$ , tal que  $f$  tiene una extensión a  $V$  que tiene derivadas direccionales continuas en todas las direcciones de  $\mathbb{R}^n$ .

Llamaremos  $\mathcal{D}$  al conjunto de todas las funciones  $C^1$  de  $\mathcal{M}$  en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $f$  y  $g$  son dos funciones de  $\mathcal{D}$ , definiremos la siguiente función de  $f$  y  $g$ .

DEFINICIÓN 4.2.

$$d(f, g) = \max_{x \in \mathcal{M}} \|f(x) - g(x)\| + \max_{x \in \mathcal{M}} \|D_x f - D_x g\| \text{ distancia } C^1 \text{ entre } f \text{ y } g$$

Con esta métrica  $\mathcal{D}$  es un espacio métrico completo. Y por lo tanto es un espacio de Baire (la intersección numerable de abiertos densos es un conjunto denso).

Llamaremos  $\mathcal{F}$  al subconjunto de  $\mathcal{D}$  formado por los difeos de  $\mathcal{M}$ , con la misma métrica. Lamentablemente, este conjunto no es cerrado en  $\mathcal{D}$  (la razón de esto puede verse notando que la función  $x^3$  puede aproximarse por difeos  $\mathbb{R}$  y este hecho no tiene que ver con la no compacidad de  $\mathbb{R}$ ). De todos modos, probaremos que  $\mathcal{F}$  es un espacio de Baire.

### 5. $\mathcal{F}$ es un Espacio de Baire

TEOREMA 5.1. *El conjunto  $\mathcal{F}$  de los difeos de  $\mathcal{M}$  con la métrica  $C^1$  es un Espacio de Baire*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathcal{E}$  el subconjunto de  $\mathcal{D}$  formado por aquellas funciones cuya imagen está contenida en  $\mathcal{M}$ .  $\mathcal{E}$  es un subconjunto cerrado de  $\mathcal{D}$  (porque  $\mathcal{M}$  es cerrada). Y por lo tanto es un espacio de Baire.

Usaremos  $f$  para denotar un elemento de  $\mathcal{F}$  y  $g$  para un elemento de  $\mathcal{E}$ .

Probaremos primero que  $\mathcal{F}$  es un conjunto abierto en  $\mathcal{E}$ .

Sabemos que  $\|D_x f\|$  tiene un mínimo positivo en  $\mathcal{M}$  porque  $\mathcal{M}$  es compacta. Entonces existe un  $\epsilon$  positivo tal que si  $d(f, g) < \epsilon$ ,  $g$  tiene diferencial inyectivo en todos los puntos de  $\mathcal{M}$ .

Por otro lado, existe un  $\epsilon_1$  positivo tal que si  $d(f, g) < \epsilon_1$  se tiene que  $f$  y  $g$  son homotópicas y por lo tanto tienen el mismo grado.

Para una  $g$  que cumpla ambas desigualdades se tiene que, todo valor es regular, y todo valor regular tiene exactamente una preimagen. Es decir  $g$  es un difeomorfismo.

Si  $A \cap \mathcal{F}$  es un abierto denso en  $\mathcal{F}$ . Puede tomarse  $A$  de modo que sea abierto y denso en  $\mathcal{E}$ . Esto se logra uniéndole el complemento de la clausura de  $\mathcal{F}$  en  $\mathcal{E}$ . Como todo denso en  $\mathcal{E}$  debe ser denso en  $\mathcal{F}$  (por ser  $\mathcal{F}$  abierto); esto concluye la prueba de que  $\mathcal{F}$  es un espacio de Baire.  $\square$

## Bibliografía

- [BC04] Christian Bonatti and Sylvain Crovisier, *Récurrence et genericité*, Invent. Math. **158** (2004), 33–104.
- [Cho66] Gustave Choquet, *Topology*, Academic Press. New York and London., 1966.
- [FW99] George K. Francis and Jeffrey R. Weeks, *Conway's Zip Proof*, The American Mathematical Monthly **106** (1999), 393–399.
- [GP74] Victor Guillemin and Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [Hau62] Felix Hausdorff, *Set Theory*, Chelsea Publishing Company. New York, N.Y., 1962.
- [KH95] Anatole Katok and Boris Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Mil97] John Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997.
- [Pot06] Rafael Potrie, *Monografía de Licenciatura*.
- [PS00] Enrique Pujals and Martín Sambarino, *Homoclinic Tangencies and Hyperbolicity for Surface Diffeomorphisms*, Annals of Mathematics **151** (2000), 961–1023.
- [PT94] Jacob Palis and Floris Takens, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, Cambridge University Press, 1994.
- [Pug67] Charles Pugh, *An improved closing lemma and a general density theorem.*, Amer. J. Math. **89** (1967), 1010–1021.
- [Sam06] Martín Sambarino, *Teorema de Variedad Estable Fuerte*, Comunicación Personal (2006).
- [Sma63] S. Smale, *Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **17** (1963), 97–116.