

Tesis de Doctorado

---

ESPECTRO COMPLEMENTARIO DE DIGRAFOS

---

Florencia Cubría

*Orientadores:*

*Diego Bravo, PEDECIBA*

*Vilmar Trevisan, Universidad Federal de Rio Grande do Sul*

Doctorado en Matemática  
Universidad de la República  
Uruguay

## Resumen

El espectro complementario de una matriz real cuadrada  $A$  es el conjunto compuesto sus valores propios complementarios, concepto introducido por Seeger en 1999. Este conjunto, además de ser invariante en la familia de matrices de adyacencia de un grafo, reúne valiosa información espectral del mismo y de todos sus subgrafos inducidos conexos; al día de hoy el problema de caracterizar los grafos conexos mediante su espectro complementario se mantiene abierto. En este trabajo introduciremos el concepto de espectro complementario de un digrafo y generalizaremos resultados conocidos para grafos. A su vez, abordaremos el problema de caracterizar en términos estructurales e identificar aquellos digrafos fuertemente conexos con  $t = 1, 2, 3$  valores propios complementarios, que denotaremos  $SCD_t$ . Finalmente, estableceremos que los digrafos en  $SCD_1 \cup SCD_2$  quedan determinados por su espectro complementario y exhibiremos familias de digrafos no isomorfos, del mismo orden y complementariamente coespectrales en  $SCD_3$ .

## Abstract

The complementarity spectrum of a real square matrix  $A$  is the set of its complementarity eigenvalues, concept introduced by Seeger in 1999. This set is invariant among the family of adjacency matrices of a graph, moreover, contains valuable spectral information of the graph and all the induced connected subdigraphs; the characterization of graphs through this spectrum is an open problem. In this thesis we introduce the concept of complementarity spectrum of a digraph and generalize some known results for graphs. Furthermore, we characterize and identify strongly connected digraphs with one, two and three complementarity eigenvalues, which will be denoted  $SCD_t$  with  $t = 1, 2, 3$ . Finally, we establish that digraphs in  $SCD_1 \cup SCD_2$  are determined by its complementarity spectrum, while examples of non-isomorphic digraphs in  $SCD_3$  with the same order and complementarity spectrum will be shown.

Palabras Clave: matriz, grafos, digrafos, espectro, espectro complementario. Key Words: matrix, graphs, digraphs, spectra, complementarity spectra.

## **Agradecimientos**

A mi familia. A mi papá que fue el primero en impulsar mis estudios y que entre sus (cada vez más frecuentes) olvidos siempre recuerda preguntarme por “la matemática”. A mi mamá que confió en mí siempre, mucho. A mis hermanas que celebraron conmigo cada logro en los contextos más adversos.

A mis amigxs. A Marce y Javi, que además de aconsejarme, acompañarme y animarme en esta etapa, la hicieron mucho más feliz. A Guille por escuchar, bancar y compartir la alegría. A Marti, Ele, Lu, Ceci, Chime, Memé, Flor, Noe, Marian, Pao y Mari por estar, preguntar y festejar siempre. A Fiera y Carito por estar, preguntar y festejar siempre, además de hacerme los “jeroglíficos”. A Agus, Marce, Magda y Eli, por compartir la parte más difícil de este recorrido y quedarse en mi vida. A Marquitos y Frodo, por ser los mejores compañeros de sala del mundo.

A mis compañerxs de estudio Annabella, Horacio, Debo, Pilar y Cecile. A mis compañerxs del IMERL, instituto del que disfruto ser parte y donde siempre me sentí valorada.

A mis tutores por recibirme y animarme durante todo de este proceso.

A lxs integrantes del tribunal por su lectura atenta, sus correcciones, sus sugerencias y sus preguntas que dejan el camino abierto.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Conceptos preliminares</b>	<b>3</b>
2.1. Grafos y digrafos . . . . .	3
2.2. Teoría espectral de digrafos . . . . .	10
2.3. Espectro complementario de una matriz . . . . .	20
2.4. Espectro complementario de un grafo . . . . .	24
<b>3. Espectro complementario de un digrafo</b>	<b>32</b>
3.1. Aspectos generales . . . . .	32
3.2. Digrafos con uno y dos valores propios complementarios . . . . .	34
3.3. Digrafos fuertemente conexos con tres valores propios complementarios	36
<b>4. Identificación de los digrafos fuertemente conexos con tres valores   propios complementarios</b>	<b>38</b>
4.1. Ejemplos . . . . .	38
4.2. Identificación de la Familia Infinito . . . . .	47
4.3. Identificación de la Familia Theta . . . . .	49
4.4. Identificación de digrafos fuertemente conexos con tres valores propios complementarios . . . . .	59
<b>5. Espectro complementario de la Familia Theta y la Familia Infinito</b>	<b>61</b>
5.1. Clases de digrafos con espectro complementario único en la Familia Infinito . . . . .	61
5.2. Clases de digrafos con espectro complementario único en la Familia Theta . . . . .	66
<b>6. Conclusiones</b>	<b>73</b>
<b>Referencias</b>	<b>74</b>

## 1. Introducción

La teoría espectral de digrafos asocia a cada digrafo  $D$  una familia de matrices y estudia un invariante en particular: su espectro. Si bien este objeto algebraico describe muchas de las propiedades estructurales de un digrafo, es sabido que existen digrafos coespectrales no isomorfos; incluso restringiéndonos a los digrafos simétricos (grafos), conexos y regulares. Esto nos permite afirmar que el espectro no caracteriza a los digrafos en general, al menos para las familias de matrices conocidas.

Una familia de matrices naturalmente asociada a un digrafo  $D = (V, E)$  es la de matrices de adyacencia  $A(D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , cuyas entradas  $a_{ij}$  se definen como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in E, \\ 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin E, \end{cases}$$

donde  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Entre los elementos del espectro de un digrafo, se destaca uno en particular: el radio espectral. La importancia de este elemento, que denotaremos  $\rho(D) = \rho(A(D))$ , radica en el Teorema de Perron-Frobenius.

El concepto de valor propio complementario de una matriz  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es introducido por Seeger en 1999 [19], y tiene múltiples aplicaciones en distintas áreas del conocimiento. Se dice que  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un valor propio complementario si existe un vector  $x$  no nulo tal que

$$x \geq \mathbf{0}, \quad Ax \geq \lambda x \quad \text{y} \quad \langle Ax - \lambda x, x \rangle = 0.$$

El conjunto de valores propios complementarios de una matriz, que será denotado  $\Pi(A)$ , además de ser invariante en la familia de matrices de adyacencia de un grafo [], reúne valiosa información espectral de  $G$  y de todos sus subgrafos inducidos conexos [7] dada por la siguiente igualdad

$$\Pi(G) = \Pi(A(G)) = \{\rho(H) : H \text{ subgrafo inducido conexo de } G\}. \quad (1)$$

Con estos antecedentes, Fernandes et al. en 2017 [7] proponen representar los grafos mediante su espectro complementario y hasta el día de hoy, no se conocen ejemplos de grafos conexos no isomorfos del mismo orden complementariamente coespectrales; más aún, se sabe que ciertos grafos quedan caracterizados a partir de este conjunto [20].

En este trabajo abordaremos el problema anterior para digrafos. Comenzaremos por introducir el concepto de valor propio complementario de un digrafo y generalizar a digrafos aquellos resultados que nos brinden información estructural, tal como se tenía para grafos. En particular, será posible generalizar la igualdad dada por (1), cuya demostración original utilizaba el hecho de que la matriz  $A(G)$  fuera simétrica, propiedad que para digrafos no se verifica.

El principal logro de este trabajo es, a partir de la mencionada generalización, no solo caracterizar en términos estructurales, sino también identificar aquellos digrafos fuertemente conexos con uno, dos y tres valores propios complementarios, que denotaremos  $\mathcal{SCD}_1$ ,  $\mathcal{SCD}_2$  y  $\mathcal{SCD}_3$  respectivamente.

Esto será lo que nos permita establecer que tanto los digrafos en  $\mathcal{SCD}_1$  como en  $\mathcal{SCD}_2$  quedan caracterizados por su espectro complementario, así como exponer pares de digrafos no isomorfos del mismo orden, complementariamente coespectrales en  $\mathcal{SCD}_3$ . Parte de estos resultados fueron publicados en 2021 [4].

Vale la pena destacar que la identificación de los digrafos en  $\mathcal{SCD}_3$ , requerirá un profundo análisis que cobrará valor en sí mismo, más allá del hallazgo de pares de digrafos no isomorfos con las características antes mencionadas.

Esta tesis se organiza de la siguiente forma: el primer capítulo está dedicado a repasar los resultados de Teoría espectral de digrafos más destacados [11, 3, 6] así como resultados de espectro complementario de matrices [19] y espectro complementario de grafos [7]. En particular, queda planteado el problema que motivó este trabajo. En el siguiente capítulo se introduce el concepto de espectro complementario de un digrafo y se generalizan a digrafos resultados relevantes de espectro complementario de grafos, a partir de los cuales se establecen caracterizaciones estructurales de los conjuntos  $\mathcal{SCD}_1$ ,  $\mathcal{SCD}_2$  y  $\mathcal{SCD}_3$ . Si bien la identificación de los digrafos en  $\mathcal{SCD}_1$  y  $\mathcal{SCD}_2$  se desprende naturalmente de la caracterización estructural, la de los digrafos en  $\mathcal{SCD}_3$  requiere un detallado análisis, del que nos ocuparemos en el tercer capítulo. En el último capítulo, a partir de la identificación de los digrafos en  $\mathcal{SCD}_3$ , se estudia el espectro complementario de los mismos, lo que permite hallar ejemplos de pares de digrafos fuertemente conexos de tamaño arbitrario, complementariamente coespectrales y no isomorfos; entre otros resultados.

## 2. Conceptos preliminares

En este capítulo introduciremos definiciones básicas y presentaremos resultados fundamentales, algunos de ellos con sus respectivas demostraciones, que se utilizarán a lo largo de todo este trabajo y que darán contexto al problema que presentaremos en el capítulo siguiente.

### 2.1. Grafos y digrafos

Cualquiera de los resultados a continuación pueden encontrarse en [11].

**Definición 2.1.1.** Un *grafo dirigido* (o *digrafo*)  $D$  es un par  $(V, E)$  donde  $V$  es un conjunto finito no vacío cualquiera y  $E$  es un subconjunto de  $V \times V$ . Los elementos de  $V$  se denominan *vértices* y los de  $E$  *arcos*; los arcos de la forma  $(x, x)$  se denominan *lazos*.

Decimos que un digrafo es un *grafo* si  $E$  es simétrico, es decir,

$$(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E,$$

en este caso, identificamos  $(x, y)$  con  $(y, x)$  y denotamos  $\{x, y\}$  a los elementos del conjunto  $E$  que denominaremos *aristas*.

A lo largo de este trabajo consideraremos digrafos sin lazos,  $n$  denotará la cantidad de vértices del mismo (diremos que el digrafo es *de orden  $n$* ),  $a$  la cantidad de arcos y para grafos denotaremos  $e$  a la cantidad de aristas.

**Observación 2.1.2.** Si  $G$  es un grafo tenemos que  $a = 2e$ .

Existe una representación gráfica natural de los digrafos en la cual los vértices se representan como puntos y los arcos de la forma  $(x, y)$  como segmentos dirigidos o flechas de  $x$  a  $y$ . En el caso de los grafos las aristas se representan como segmentos que unen los puntos que la componen en lugar de segmentos dirigidos.

### Ejemplos 2.1.3.

1. Sea  $V$  un conjunto finito no vacío cualquiera,  $G = (V, \emptyset)$  se denomina *grafo vacío*.
2. Sean  $V = \{1, \dots, n\}$  y  $E = \{\{i, j\} : i, j \in V, i \neq j\}$ ,  $K_n = (V, E)$  se denomina *grafo completo de  $n$  vértices*.



Figura 1: Representación gráfica de  $K_5$ .

3. Sean  $V = \{1, \dots, n\}$  y  $E = \{(i, i+1) : i = 1, \dots, n-1\} \cup \{(n, 1)\}$ ,  $C_n = (V, E)$  se denomina *n-ciclo*.



Figura 2: Representación gráfica de  $C_5$ .

4. Sean  $V = \{1, \dots, n\}$  y  $E = \{(i, i+1) : i = 1, \dots, n-1\} \cup \{(n, 1)\}$ ,  $\vec{C}_n = (V, E)$  se denomina *n-ciclo dirigido*.

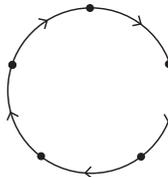


Figura 3: Representación gráfica de  $\vec{C}_5$ .

5. Sean  $V = \{1, \dots, n\}$  y  $E = \{(i, i+1) : i = 1, \dots, n-1\}$ ,  $P_n = (V, E)$  se denomina *camino de n vértices*.



Figura 4: Representación gráfica de  $P_5$ .

6. Sean  $V = \{1, \dots, n\}$  y  $E = \{(i, i+1) : i = 1, \dots, n-1\}$ ,  $\vec{P}_n = (V, E)$  se denomina *camino dirigido de n vértices*.



Figura 5: Representación gráfica de  $\vec{P}_5$ .

7. Sean  $V = \{1, \dots, n\}$  y  $E = \{\{1, i\} : i = 2, \dots, n\}$ ,  $S_n = (V, E)$  se denomina *estrella de  $n$  vértices*.

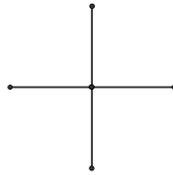


Figura 6: Representación gráfica de  $S_5$ .

8. Sean  $r \geq 3$  natural y  $m_i \geq 2$  naturales para todo  $i = 1, \dots, r$ . Se denomina *grafo tipo estrella* y se denota  $S_{m_1, \dots, m_r}$  al grafo que se obtiene de identificar un vértice terminal de cada uno de los caminos  $P_{m_1}, \dots, P_{m_r}$ .

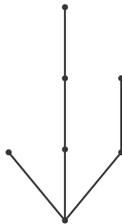


Figura 7: Representación gráfica de  $S_{2,4,3}$ .

9. Sean  $l, r$  naturales. Sean  $V = \{1, \dots, l, l + 1, \dots, l + r\}$  y  $E = \{\{x, y\} : x \in \{1, 2, \dots, l\}, y \in \{l + 1, \dots, l + r\}\}$ ,  $K_{l,r} = (V, E)$  se denomina *grafo completo bipartito*.



Figura 8: Representación gráfica de  $K_{3,2}$ .

10. Se denomina *grafo lollipop de  $n$  vértices y ciclo  $k$*  y se denota  $H_{n,k}$  al grafo que se obtiene de identificar un vértice de  $C_k$  con un vértice terminal de  $P_{n-k+1}$ .



Figura 9: Representación gráfica de  $H_{5,3}$ .

11. Sean  $V = \{1, 2, 3\}$  y  $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ ,  $D = (V, E)$  es un grafo dirigido.

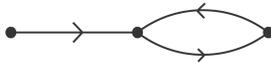


Figura 10: Representación gráfica de  $D$ .

12. Sean  $r, s \geq 2$  naturales. El *digrafo Infinito* [13, 4]  $\infty = \infty(r, s)$  consiste en dos ciclos dirigidos  $\vec{C}_r$  y  $\vec{C}_s$  con un vértice de  $\vec{C}_r$  y uno de  $\vec{C}_s$  identificados, como se ilustra en la Figura 11 adoptando la siguiente convención gráfica: dos flechas de un vértice a sí mismo representa un ciclo dirigido.

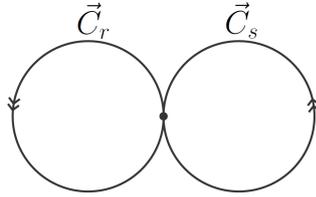


Figura 11: Representación gráfica del digrafo  $\infty(r, s)$ .

13. Sean  $a, b, c$  enteros no negativos. El *digrafo Theta* [13, 4]  $\theta = \theta(a, b, c)$  consiste en tres caminos dirigidos  $\vec{P}_{a+2}, \vec{P}_{b+2}, \vec{P}_{c+2}$  con las siguientes identificaciones:

- los vértices iniciales de  $\vec{P}_{a+2}$  y  $\vec{P}_{b+2}$  con el vértice final de  $\vec{P}_{c+2}$ ,
- el vértice inicial de  $\vec{P}_{c+2}$  con los vértices finales de  $\vec{P}_{a+2}$  y  $\vec{P}_{b+2}$ ,

como se ilustra en la Figura 12 adoptando la siguiente convención gráfica: dos flechas entre dos vértices representan un camino dirigido.

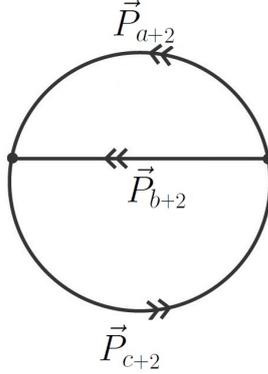


Figura 12: Representación gráfica del digrafo  $\theta(a, b, c)$ .

**Definición 2.1.4.** Sea  $D = (V, E)$  un digrafo y  $x$  un vértice en  $V$ .

El *grado de entrada* y el *grado de salida* de  $x$  se definen respectivamente como

$$gr^-(x) = \#\{y \in V : (y, x) \in E\}, \quad gr^+(x) = \#\{y \in V : (x, y) \in E\}.$$

Decimos que un digrafo  $D$  es *r-salida (entrada) regular* si el grado de salida (entrada) de todos los vértices  $x$  en  $V$  es igual a  $r$ .

Sea  $G = (V, E)$  un grafo, decimos que dos vértices  $x$  e  $y$  en  $V$  son *adyacentes* o *vecinos* y escribimos  $x \sim y$ , si  $\{x, y\}$  es una arista. El *grado de un vértice*  $x$ , que denotaremos  $gr(x)$ , es el grado de entrada del vértice (que coincide con el de salida). Decimos que un grafo  $G$  es *r-regular* si el grado de todos los vértices  $x$  en  $V$  es igual a  $r$ .

**Proposición 2.1.5.** Sea  $D = (V, E)$  un digrafo con  $a$  arcos, entonces se cumple que

$$\sum_{x \in V} gr^+(x) = \sum_{x \in V} gr^-(x) = a.$$

*Demostración.* Cada arco aporta 1 unidad a las sumatorias consideradas.  $\square$

**Corolario 2.1.6.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo con  $e$  aristas, entonces se cumple que

$$\sum_{x \in V} gr(x) = 2e.$$

**Definición 2.1.7.** Sea  $D$  un digrafo y  $x$  e  $y$  vértices del digrafo. Denominamos *camino de  $x$  a  $y$*  a una sucesión de vértices  $(x_0, x_1, \dots, x_r)$  donde  $x_0 = x$ ,  $x_r = y$  y se cumple que  $(x_i, x_{i+1}) \in E$  para todo  $i = 0, \dots, r-1$ , decimos que el *largo* del camino es  $r \geq 1$ . Si  $x = y$  decimos que el camino es *cerrado*. Decimos que dos vértices  $x$  e  $y$  están *fuertemente conectados* si son el mismo vértice o existen caminos de  $x$  a  $y$  y de  $y$  a  $x$ .

**Observación 2.1.8.** La relación “estar fuertemente conectado con” sobre los vértices de un digrafo es una relación de equivalencia.

**Definición 2.1.9.** Sea  $D$  un digrafo. Las clases de equivalencia de la relación anterior se denominan *componentes fuertemente conexas* del digrafo y decimos que el digrafo es *fuertemente conexo* si existe una única clase de equivalencia.

Si  $G$  es un grafo llamamos *componentes conexas* a las componentes fuertemente conexas y grafo *conexo* a un grafo con una única componente conexas. Denominamos *vértice de corte* a un vértice cuya remoción incrementa la cantidad de componentes conexas del grafo.

Denotaremos  $\mathcal{C}$  al conjunto de grafos conexos y  $\mathcal{C}_n$  al conjunto de grafos conexos de orden  $n$ .

**Definición 2.1.10.** Sean  $D_1 = (V_1, E_1)$  y  $D_2 = (V_2, E_2)$  dos digrafos con conjuntos de vértices disjuntos. La *suma directa* de los digrafos  $D_1$  y  $D_2$  es el digrafo dado por el par

$$D_1 \oplus D_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2).$$

Inductivamente podemos definir la suma directa de un número finito  $l$  de digrafos  $\bigoplus_{i=1}^l D_i$ .

Sean  $D = (V, E)$  y  $e \in V \times V$ . El digrafo unión del digrafo  $D$  con el arco  $e$  que denotaremos  $D \cup \{e\}$  se define como  $(V, E \cup \{e\})$ .

**Definición 2.1.11.** Sea  $D$  un digrafo. Decimos que el digrafo  $D' = (V', E')$  es *subdigrafo* de  $D$  si  $V' \subset V$  y  $E' \subset E$ . El *subdigrafo generado* por un subconjunto de vértices  $V'$  es el digrafo  $\langle V' \rangle = (V', E')$  donde  $E' = \{(x, y) \in E : x, y \in V'\} = E \cap (V' \times V')$ . El *subdigrafo generado por la remoción de un vértice*  $v$  que denotaremos  $G \setminus \{v\}$  es el digrafo generado por  $V \setminus \{v\}$ , es decir,  $G \setminus \{v\} = \langle V \setminus \{v\} \rangle$ . Un subdigrafo  $D'$  de un digrafo  $D$  se dice *inducido* si existe  $V' \subset V$  tal que  $\langle V' \rangle = D'$ .

El ejemplo a continuación muestra que no todo subdigrafo es un subdigrafo inducido.

**Ejemplo 2.1.12.**

Sean  $V = V' = \{1, 2, 3\}$ ,  $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 1)\}$  y  $E' = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ . El digrafo  $D' = (V', E')$  es un subdigrafo de  $D = (V, E)$  no inducido (ver Figura 13) ya que en caso de ser inducido  $D' = \langle V' \rangle = \langle V \rangle = D$  lo cual es absurdo.

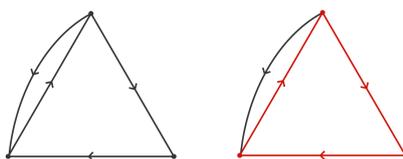


Figura 13: Representación gráfica de  $D$  (izquierda). Representación gráfica de  $D$  y en rojo el digrafo no inducido  $D'$  (derecha).

**Definición 2.1.13.** Sean  $D_1 = (V_1, E_1)$  y  $D_2 = (V_2, E_2)$  dos digrafos. Decimos que  $D_1$  y  $D_2$  son *isomorfos* y escribimos  $D_1 \cong D_2$ , si existe una función biyectiva  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$  que cumple que

$$(x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (\phi(x), \phi(y)) \in E_2.$$

**Observación 2.1.14.** Un camino de  $x$  a  $y$  que no repite vértices puede verse como un subdigrafo de  $D$  isomorfo a un camino dirigido  $\vec{P}_{r+1}$  con vértice inicial  $x$  y vértice final  $y$ .

**Definición 2.1.15.** Decimos que un digrafo  $D$  posee un  $n$ -ciclo o un ciclo de longitud  $n$  si existe un subdigrafo isomorfo a un ciclo dirigido  $\vec{C}_n$ .

Decimos que un digrafo  $D$  es *lineal* si es isomorfo a la suma directa de un número finito de ciclos dirigidos  $\oplus_{i=1}^l \vec{C}_{n_i}$ .

**Definición 2.1.16.** Decimos que un digrafo  $D = (V, E)$  es *bipartito* si existen  $V_1$  y  $V_2$  subconjuntos de  $V$  tales que

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset, \quad V_1 \cup V_2 = V,$$

$$E \subset (V_1 \times V_2) \cup (V_2 \times V_1).$$

En otras palabras, un digrafo es bipartito si cumple que podemos particionar el conjunto de vértices  $V$  en conjuntos  $V_1$  y  $V_2$  de modo tal que los arcos en el digrafo van de un vértice en  $V_1$  a un vértice en  $V_2$  o viceversa.

**Observación 2.1.17.**  $\vec{C}_n$  es bipartito si, y solo si,  $n$  es par.

**Observación 2.1.18.** Sean  $D$  y  $D'$  digrafos,  $D'$  subdigrafo de  $D$ .

1. Si  $D$  es bipartito entonces  $D'$  también lo es.
2. Si  $D'$  no es bipartito entonces  $D$  tampoco lo es.

**Definición 2.1.19.** Sea  $D$  un digrafo fuertemente conexo. La “distancia” de un vértice  $x$  a un vértice  $y$  es una función  $\tilde{d} : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$  definida como

$$\tilde{d}(x, y) = \begin{cases} \min\{r : \text{existe un camino de largo } r \text{ de } x \text{ a } y\} & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Debemos observar que en general, la función “distancia” no es simétrica por lo cual no define una métrica en  $V$ .

**Proposición 2.1.20.** Sea  $D$  un digrafo fuertemente conexo.  $D$  es bipartito si, y solo si, no posee ciclos de longitud impar.

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Si existiera un ciclo dirigido de longitud impar en  $D$  entonces  $D$  no sería bipartito por la parte 2. de la Observación 2.1.18, lo cual es absurdo.

( $\Leftarrow$ ) Sea  $y$  un vértice fijo, y consideremos la siguiente partición en  $V$ :

$$V_1 = \{x \in V : d(x, y) = 0 \pmod{2}\} \quad V_2 = \{x \in V : d(x, y) \neq 0 \pmod{2}\}.$$

Tenemos que  $V_1 \cup V_2 = V$  por ser  $D$  fuertemente conexo, también es claro que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Veamos ahora que  $E \subset (V_1 \times V_2) \cup (V_2 \times V_1)$ . Comencemos por observar que

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 \pmod{2} &\Rightarrow d(y, x) = 0 \pmod{2}, \\ d(x, y) \neq 0 \pmod{2} &\Rightarrow d(y, x) \neq 0 \pmod{2}, \end{aligned}$$

pues de lo contrario podríamos construir un ciclo dirigido de longitud impar. Luego, si existiera un arco en  $V_1 \times V_1$  (o en  $V_2 \times V_2$ ) también podríamos construir un ciclo dirigido de longitud impar, lo que termina la prueba.  $\square$

### Ejemplo 2.1.21.

Sean  $V = \{1, 2, 3\}$  y  $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ ,  $D = (V, E)$  (ver Figura 14) no es bipartito a pesar de no contener ciclos dirigidos de longitud impar, lo que muestra que la hipótesis de conexión fuerte es necesaria.

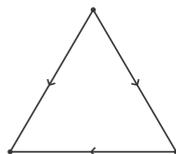


Figura 14: Representación gráfica del digrafo  $D$ .

## 2.2. Teoría espectral de digrafos

Los resultados de esta sección pueden encontrarse en [11] y [6].

Comencemos introduciendo algo de notación.

Notación	Descripción
$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$	matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$
$\mathbf{0}$	matriz nula en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$
$I_n$ ó $I$	matriz identidad en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$a_{ij}$ ó $(A)_{ij}$	entrada $(i, j)$ de la matriz $A$ en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$
$N$	el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ para $n$ dado
$a_{ij}^{(k)}$ ó $(A^k)_{ij}$	entrada $(i, j)$ de la matriz $A^k$ en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$e_i$	$i$ -ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$
$\mathbf{1}$	vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas entradas son todas iguales a 1
$A \leq B$	$A, B$ en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ con $a_{ij} \leq b_{ij}$ para todo $(i, j)$
$A < B$	$A, B$ en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ con $a_{ij} < b_{ij}$ para todo $(i, j)$
$A^J$	$A$ en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , $\emptyset \neq J \subset \{1, \dots, n\}$ $A^J$ submatriz principal correspondiente a filas y columnas en $J$
$H \leq D$	$H, D$ digrafos, $H$ subdigrafo de $D$

Como mencionamos anteriormente, la teoría espectral de digrafos consiste en estudiar el espectro de una familia de matrices asociada a un digrafo dado, en este trabajo consideraremos exclusivamente la familia de matrices de adyacencia.

**Definición 2.2.1.** Sea  $D = (V, E)$  un digrafo y enumeremos los vértices de modo que  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

Denominamos *matriz de adyacencia* del digrafo  $D$  a la matriz  $A(D) = A$  de tamaño  $n \times n$  y entradas

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in E, \\ 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin E. \end{cases}$$

Es claro que la matriz de adyacencia de un digrafo  $D$  puede no ser única ya que dependerá de la enumeración de los vértices. Sin embargo, para dos matrices de adyacencia  $A$  y  $A'$  de un mismo digrafo correspondientes a distintas enumeraciones de los vértices, existe una matriz de permutación  $P$  tal que

$$A' = PAP^t.$$

Más precisamente, a cada digrafo  $D$  se le asocia una familia de matrices que denominaremos *familia de matrices de adyacencia* dada por

$$\mathcal{F}(D) = \{PA_0P^t : P \text{ matriz de permutación}\}$$

donde  $A_0$  es una matriz de adyacencia fija.

**Observación 2.2.2.** Sea  $D = (V, E)$  un digrafo y enumeremos los vértices de modo que  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ , sea  $A = A(D)$  la matriz de adyacencia correspondiente.  $H$  es un subdigrafo inducido (por el conjunto de vértices  $V'$ ) de  $D$  si, y solo si,  $A(H) = A^J$  donde  $J$  está compuesto por los subíndices correspondientes a los vértices en  $V'$ .

**Observación 2.2.3.** Sea  $D = (V, E)$  un digrafo y enumeremos los vértices de modo que  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ , sea  $A = A(D)$  la matriz de adyacencia correspondiente. La suma de los elementos de la fila  $i$  de  $A$  es el grado de salida del vértice  $x_i$  y la suma de los elementos de la columna  $j$  es el grado de entrada del vértice  $x_j$ , es decir,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = gr^+(x_i), \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = gr^-(x_j).$$

**Proposición 2.2.4.** Sea  $D = (V, E)$  un digrafo y enumeremos los vértices de modo que  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ , sea  $A = A(D)$  la matriz de adyacencia correspondiente. Se cumple que

$$(A^k)_{ij} = \#\{\text{camino en } D \text{ de largo } k \text{ de } x_i \text{ a } x_j\}.$$

*Demostración.* Aplicaremos inducción completa en  $k$ . Si  $k = 1$  tenemos que

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in E \Leftrightarrow \text{existe un camino de largo 1 de } x_i \text{ a } x_j, \\ 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin E \Leftrightarrow \text{no existe un camino de largo 1 de } x_i \text{ a } x_j, \end{cases}$$

lo que prueba el paso base.

Supongamos que vale para  $k$  y veamos que vale para  $k + 1$ . Tenemos que

$$(A^{k+1})_{ij} = (A^k A)_{ij} = \sum_{l=1}^n (A^k)_{il} (A)_{lj} =$$

$$= \sum_{l=1}^n (\#\{\text{caminos de longitud } k \text{ de } x_i \text{ a } x_l\})(A)_{lj}.$$

Dado que todos los caminos de longitud  $k + 1$  de  $x_i$  a  $x_j$  pueden descomponerse en un camino de longitud  $k$  de  $x_i$  a  $x_l$  y un camino de longitud 1 (una arista) de  $x_l$  a  $x_j$  para algún  $x_l$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n (\#\{\text{caminos de longitud } k \text{ de } x_i \text{ a } x_l\})(A)_{lj} = \\ & = \#\{\text{caminos de longitud } k + 1 \text{ de } x_i \text{ a } x_j\} \end{aligned}$$

lo que prueba el paso inductivo.  $\square$

**Definición 2.2.5.** Llamamos *espectro del digrafo*  $D$  al espectro de cualquier matriz  $A$  en  $\mathcal{F}(D)$ , es decir, el multiconjunto  $Sp_D = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$  compuesto por las raíces (contadas con su multiplicidad) del polinomio característico de cualquier matriz  $A$  en  $\mathcal{F}(D)$  que denominaremos *polinomio característico del digrafo*, a saber,

$$p_D(x) = p_A(x) = \det(xI - A) = x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}.$$

Llamamos *índice o radio espectral del digrafo*  $D$  al radio espectral de cualquier matriz  $A$  en  $\mathcal{F}(D)$ , es decir,

$$\rho(D) = \rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in Sp_A\}.$$

Decimos que dos digrafos  $H$  y  $D$  son *coespectrales* si  $Sp_H = Sp_D$ .

**Observación 2.2.6.** Un digrafo  $D$  es un grafo si, y solo si,  $A(D)$  es simétrica. Tenemos entonces que cualquiera de sus matrices de adyacencia resulta simétrica y en consecuencia, ortogonalmente diagonalizable con valores propios reales, los cuales ordenaremos de la siguiente forma

$$\rho(D) = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

**Observación 2.2.7.** Sea  $D = (V, E)$  un digrafo y  $A = A(D)$  una matriz de adyacencia; sea  $Sp_D = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ . Como la traza de una matriz es invariante por semejanza obtenemos que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^k = tr(A^k) = \#\{\text{caminos cerrados en } D \text{ de largo } k\}.$$

En particular  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = tr(A) = 0$  y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = tr(A^2) = 2c_2$ , donde  $c_2$  denota la cantidad de ciclos dirigidos de largo 2 en  $D$ , que en caso de que  $D$  sea un grafo coincide con  $e$ .

La siguiente proposición nos permitirá, en muchos casos, reducir el estudio de ciertas propiedades espectrales del digrafo al de sus componentes fuertemente conexas.

**Proposición 2.2.8.** *Sea  $D$  un digrafo y  $D_1, \dots, D_k$  los subdigrafos generados por los vértices de cada componente fuertemente conexas. Entonces,  $p_D = \prod_{i=1}^k p_{D_i}$  y  $Sp_D = \sqcup_{i=1}^k Sp_{D_i}$ .*

*Demostración.* Sea  $V_i$  el conjunto de vértices de la  $i$ -ésima componente fuertemente conexas y  $A_i = A(D_i)$ , podemos suponer que las componentes están ordenadas de modo tal que no existan arcos de un vértice en  $V_i$  a uno en  $V_j$  para todo  $j < i$ , luego la matriz de adyacencia tiene la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ \mathbf{0} & A_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_k \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que  $p_D = \prod_{i=1}^k p_{D_i}$  y  $Sp_D = \sqcup_{i=1}^k Sp_{D_i}$ . □

**Observación 2.2.9.** Es claro que para digrafos con más de una componente fuertemente conexas la igualdad de los espectros no implica que los digrafos sean isomorfos. Esto se debe a que el espectro no captura información de lo que sucede fuera de los digrafos generados por las componentes fuertemente conexas como se muestra en el ejemplo a continuación.

### Ejemplo 2.2.10.

Sean  $D_1 = (V_1, E_1)$  y  $D_2 = (V_2, E_2)$  digrafos fuertemente conexas con conjuntos de vértices disjuntos. Sea  $D = D_1 \oplus D_2 = (V, E) = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ , sea  $A \subset E_1 \times E_2$  y  $D_A = (V, E \cup A)$ . Las componentes fuertemente conexas de  $D_A$  son  $V_1$  y  $V_2$ , luego,

$$Sp_{D_A} = Sp_{D_1} \sqcup Sp_{D_2} \text{ para todo } A \subset E_1 \times E_2.$$

En la Figura 15 se ven distintos digrafos  $D_A$  (donde los arcos de  $A$  están señalados en verde) todos ellos no isomorfos pero coespectrales.





Figura 15: Ejemplos de distintos digrafos  $D_A$ .

La siguiente proposición permite traducir la propiedad de conexión fuerte de un digrafo en términos de irreducibilidad de su matriz de adyacencia.

**Proposición 2.2.11.** *Sea  $D = (V, E)$  un digrafo y  $A = A(D)$  una matriz de adyacencia.  $D$  es fuertemente conexo si, y solo si,  $A(D)$  es irreducible.*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Supongamos  $A(D)$  reducible, luego, existe una matriz de permutación  $P$  tal que  $PAP^t = A'$  tiene la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ \mathbf{0} & Z \end{pmatrix}$$

donde  $X$  tiene tamaño digamos  $r \times r$  y  $Z$  tamaño  $(n - r) \times (n - r)$ . Luego, para cierta enumeración de los vértices  $\{x'_1, \dots, x'_n\}$ , tenemos que no existen arcos (ni caminos) de un vértice en  $\{x'_{r+1}, \dots, x'_n\}$  a uno en  $\{x'_1, \dots, x'_r\}$  por lo que  $D$  no es fuertemente conexo, lo cual es absurdo.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos ahora que  $D$  posee  $k \geq 2$  componentes conexas. Sea  $V_i$  el conjunto de vértices de la  $i$ -ésima componente fuertemente conexa y  $A_i = A(D_i)$ . Ordenando los vértices según la componente fuertemente conexa a la que pertenecen y las componentes de modo tal que no existan arcos de un vértice en  $V_i$  a uno en  $V_j$  para todo  $j < i$ , se obtiene que

$$PAP^t = \begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ \mathbf{0} & A_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_k \end{pmatrix}.$$

Considerando  $X = A_1$  y  $Z = \begin{pmatrix} A_2 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & A_k \end{pmatrix}$  obtenemos que  $PAP^t = \begin{pmatrix} X & Y \\ \mathbf{0} & Z \end{pmatrix}$

lo que contradice que  $A$  sea irreducible. □

El Teorema de Perron-Frobenius que presentamos a continuación no solo es de vital importancia en la teoría espectral de digrafos, sino que también es reconocido por sus múltiples aplicaciones entre las cuales se destaca el *pagerank* de Google [14]. Dicho Teorema fue probado por Perron para matrices positivas en [15] y generalizado a matrices no negativas irreducibles por Frobenius en [8, 9, 10].

**Teorema 2.2.12.** [15, 8, 9, 10] Sea  $A$  en  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $A \geq \mathbf{0}$  e irreducible. Sea  $\rho = \rho(A)$  su radio espectral, entonces se cumple que:

1.  $\rho > 0$  valor propio simple de  $A$ .
2. Existe  $z > \mathbf{0}$  vector propio asociado a  $\rho$ .
3. Si  $Ax = \lambda x$  con  $x \geq \mathbf{0}$  y  $x \neq \mathbf{0}$  entonces  $\lambda = \rho$  y  $x > \mathbf{0}$ .
4. El espectro de la matriz es invariante por la rotación en el plano complejo de centro en el origen y ángulo  $\frac{2\pi}{l}$  siendo  $l = \#\{\lambda : |\lambda| = \rho\}$ , esto es,

$$R_{0, \frac{2\pi}{l}}(Sp_A) = Sp_A.$$

5. Si  $B$  en  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  verifica que  $\mathbf{0} \leq B \leq A$  entonces  $\rho(B) \leq \rho(A)$  y la igualdad se da si, y solo si,  $B = A$ .

Observemos que las matrices de adyacencia de un digrafo fuertemente conexo verifican las hipótesis del Teorema de Perron-Frobenius, luego, tenemos que el radio espectral del digrafo es un valor propio simple y posee un vector propio asociado estrictamente positivo. También tenemos que al considerar un subdigrafo propio de un digrafo fuertemente conexo, su radio espectral resultará estrictamente menor que el del digrafo. Recordemos además que la Proposición 2.2.8 nos permite reducir el estudio del espectro de un digrafo al de sus componentes fuertemente conexas.

El siguiente Teorema constituye un pilar fundamental en la teoría espectral de digrafos, ya que nos permite calcular los coeficientes del polinomio característico a partir de su estructura cíclica. Este resultado, probado por Horst Sachs en [18], nos permitirá a su vez establecer un vínculo entre el espectro del digrafo y su estructura toda.

**Teorema 2.2.13.** (Coeficientes de Sachs)

Sea  $D$  un digrafo y  $a_i$  con  $i = 1, \dots, n$  los coeficientes de su polinomio característico, es decir,  $p_D(x) = x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}$ . Se cumple que

$$a_i = \sum_{L \in \mathcal{L}_i} (-1)^{p(L)},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i &= \{\text{subdigrafos lineales de } D \text{ con } i \text{ vértices}\}, \\ p(L) &= \#\{\text{componentes fuertemente conexas de } L\}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Comencemos por probar la igualdad para  $a_n$ , tenemos que

$$a_n = p_D(0) = \det(-A(D)) = (-1)^n \det(A(D)).$$

Por la regla de Leibniz sabemos que

$$\det(A(D)) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)},$$

donde  $S_n$  denota el grupo de las permutaciones de  $n$  elementos. Luego,

$$a_n = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^n \text{sg}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n+e(\sigma)} \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)},$$

donde  $e(\sigma)$  es la cantidad de ciclos pares que componen  $\sigma$ . Sea  $p(\sigma)$  la cantidad de ciclos que componen  $\sigma$ , luego  $p(\sigma) - e(\sigma)$  es la cantidad de ciclos impares que componen  $\sigma$ .

Por otro lado se tiene que

$$n = \sum_{i=1}^{e(\sigma)} 2r_i + \sum_{i=1}^{p(\sigma)-e(\sigma)} 2s_i + 1 = p(\sigma) - e(\sigma) \pmod{2},$$

donde  $e(\sigma)$  denota la cantidad de ciclos pares que componen  $\sigma$  cuya longitud es  $2r_i$  y  $p(\sigma) - e(\sigma)$  denota la cantidad de ciclos impares que componen  $\sigma$  cuya longitud es  $2s_i + 1$ . Luego,

$$a_n = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{p(\sigma)} \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}.$$

Estudiemos aquellas permutaciones para las cuales  $\prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \neq 0$ ,

$$\prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \neq 0 \Leftrightarrow \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} = 1 \Leftrightarrow a_{i, \sigma(i)} = 1 \text{ para todo } i.$$

Luego,  $(i, \sigma(i)) \in E$  para todo  $i$ , por lo que el subdigrafo generado por estos arcos es un digrafo lineal (los ciclos que componen el digrafo lineal son los ciclos de la permutación). Tenemos entonces una biyección entre los conjuntos

$$F = \{\sigma \in S_n : \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} = 1\} \text{ y } \mathcal{L}_n$$

y además,  $p(\sigma) = p(L)$ .

Finalmente obtenemos que

$$a_n = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{p(\sigma)} \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} = \sum_{\sigma \in F} (-1)^{p(\sigma)} = \sum_{L \in \mathcal{L}_n} (-1)^{p(L)}.$$

Probemos ahora la igualdad para  $a_i$  con  $i < n$ . Por propiedades de la función determinante sabemos que

$$a_i = (-1)^i \sum_{J \subset N: |J|=i} \det(A^J) = \sum_{J \subset N: |J|=i} (-1)^i \det(A^J).$$

Dada la correspondencia entre las submatrices principales de una matriz de adyacencia y los subdigrafos generados del digrafo, obtenemos:

$$a_i = \sum_{\substack{\tilde{D} < D \\ \text{de orden } i}} \tilde{a}_i = \sum_{\substack{\tilde{D} < D \\ \text{de orden } i}} \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}_i} (-1)^{p(L)} = \sum_{L \in \mathcal{L}_i} (-1)^{p(L)},$$

donde  $\tilde{D} < D$  denota  $\tilde{D}$  subdigrafo generado de  $D$  y  $\tilde{a}_i$  el  $i$ -ésimo coeficiente de  $p_{\tilde{D}}$ , lo que finaliza la prueba.  $\square$

Calculemos los polinomios característicos de dos digrafos utilizando el Teorema de Sachs.

Mantendremos la siguiente convención gráfica para el resto del trabajo: dos flechas entre dos vértices distintos representa un camino simple dirigido que los une y dos flechas de un vértice a sí mismo un ciclo dirigido.

#### Ejemplo 2.2.14.

Sea  $\infty(r, s)$  el digrafo Infinito, definido en 2.1.3. Se puede ver que los únicos ciclos en el digrafo  $\infty(r, s)$ , que a su vez resultan no disjuntos, son los ciclos  $\vec{C}_r$  y  $\vec{C}_s$  señalados en verde en la figura Figura 16.

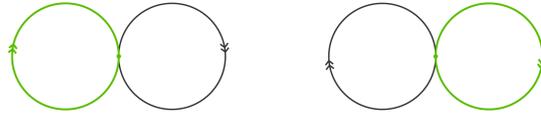


Figura 16: Los ciclos  $\vec{C}_r$  y  $\vec{C}_s$  en el digrafo Infinito.

Tenemos entonces que

$$\mathcal{L}_i = \emptyset \text{ para todo } i \neq r, s, \quad \mathcal{L}_r = \{\vec{C}_r\} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_s = \{\vec{C}_s\}.$$

Luego, por el Teorema de Sachs 2.2.13 tenemos que  $a_i = 0$  para todo  $i \neq r, s$  y  $a_r = a_s = -1$ . Como a su vez tenemos que  $n = r + s - 1$ , el polinomio característico resulta

$$p_{\infty}(x) = x^n - x^{n-r} - x^{n-s} = x^n - x^{s-1} - x^{r-1}.$$

Sea  $\theta(a, b, c)$  el digrafo Theta, definido en 2.1.3. Se puede ver que los únicos ciclos en el digrafo  $\theta(a, b, c)$ , que a su vez resultan no disjuntos, son los ciclos  $\vec{C}_r$  y  $\vec{C}_s$  señalados en verde en la figura Figura 17 donde  $r = a + c + 2$  y  $s = b + c + 2$ .



Figura 17: Los ciclos  $\vec{C}_r$  y  $\vec{C}_s$  en el digrafo Theta.

Tenemos entonces que

$$\mathcal{L}_i = \emptyset \text{ para todo } i \neq r, s, \quad \mathcal{L}_r = \{\vec{C}_r\} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_s = \{\vec{C}_s\}.$$

Luego, por el Teorema de Sachs 2.2.13 tenemos que  $a_i = 0$  para todo  $i \neq r, s$  y  $a_r = a_s = -1$ . Como a su vez tenemos que  $n = a + b + c + 2$ , el polinomio característico resulta

$$p_\theta(x) = x^n - x^{n-r} - x^{n-s} = x^n - x^b - x^a.$$

**Proposición 2.2.15.** *Si  $D$  es un digrafo  $r$ -salida regular entonces  $\rho(D) = r$ .*

*Demostración.* Tenemos que la matriz  $A = A(D)$  es irreducible y sus entradas son no negativas por ser la matriz de adyacencia de un digrafo.

Sea  $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)^t$ , se tiene que

$$A\mathbb{1} = r\mathbb{1}.$$

Luego,  $\mathbb{1}$  es vector propio de  $A$  asociado al valor propio  $r$ . Por el Teorema 2.2.12 de Perron-Frobenius tenemos que el único valor propio que posee un vector propio asociado de entradas no negativas es el índice, luego,  $\rho(D) = \rho(A) = r$ .

□

**Observación 2.2.16.** Sea  $D$  es un digrafo,  $\mathbb{1}$  es vector propio de  $A = A(D)$  si, y solo si,  $D$  es salida regular.

**Proposición 2.2.17.** *Sea  $D$  fuertemente conexo. Equivalen:*

1.  $D$  es bipartito,
2.  $Sp_D$  es invariante por  $-Id$  ( $\lambda \in Sp_D \Leftrightarrow -\lambda \in Sp_D$ ),
3.  $-\rho \in Sp_D$ .

*Demostración.* Sea  $p_D(x) = x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}$ . En primer lugar observemos que  $Sp_D$  es invariante por  $-Id$  si, y solo si,

$$p_D(x) = x^\delta q(x^2), \text{ con } \delta = 0, 1 \text{ y } q \text{ polinomio,}$$

esto es, si  $a_i = 0$  para todo  $i$  impar.

(1.  $\Rightarrow$  2.) Si  $D$  es bipartito tenemos que no posee ciclos impares, por lo cual  $\mathcal{L}_i = \emptyset$  y como consecuencia  $a_i = 0$  para todo  $i$  impar, luego,  $Sp_D$  resulta invariante por  $-Id$ .

(2.  $\Rightarrow$  1.) Si  $Sp_D$  es invariante por  $-Id$  tenemos que  $a_i = 0$  para todo  $i$  impar.

*Afirmación.* No existen ciclos impares en  $D$ .

Supongamos que existen ciclos impares y sea  $i_0$  la menor longitud entre los ciclos impares, luego,  $a_{i_0} = -\#\mathcal{L}_{i_0} \neq 0$  lo cual es absurdo.

Como además  $D$  es un digrafo fuertemente conexo tenemos que  $D$  resulta bipartito por la Proposición 2.1.20, como queríamos probar.

(2.  $\Rightarrow$  3.) Sabemos que  $\rho \in Sp_D$ , luego,  $-\rho \in Sp_D$ .

(3.  $\Rightarrow$  2.) Si  $-\rho \in Sp_D$ , por el ítem 4. del Teorema de Perron-Frobenius 2.2.12 se cumple que  $Sp_D$  es invariante por  $R_{0,\pi} = -Id$ . □

**Proposición 2.2.18.** *Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Se cumple que*

$$\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}{n} \leq \rho.$$

*Además, la igualdad se da si, y solo si,  $G$  es regular.*

*Demostración.* Por ser  $G$  un grafo tenemos que  $A(G)$  es simétrica y vale el principio de Rayleigh, luego,

$$\frac{u^t Au}{u^t u} \leq \rho \text{ para todo } u \neq \mathbf{0} \text{ en } \mathbb{R}^n$$

y la igualdad vale si, y solo si,  $u$  es un vector propio asociado a  $\rho$ .

Considerando  $u = \mathbf{1}$  tenemos que

$$\frac{\sum_{i,j} a_{ij}}{n} = \frac{\mathbf{1}^t A \mathbf{1}}{\mathbf{1}^t \mathbf{1}} \leq \rho$$

Por otro lado sabemos que por el Corolario 2.1.6 se verifica  $\sum_{i,j} a_{ij} = \sum_{x \in V} gr(x) = 2e$  y por la Observación 2.2.7  $2e = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ . Sustituyendo en la desigualdad anterior obtenemos

$$\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}{n} \leq \rho.$$

Además la igualdad se da si, y solo si  $\mathbf{1}$  vector propio asociado a  $\rho$ , es decir, si, y solo si  $G$  regular. □

A la luz de los resultados expuestos, podemos afirmar que el espectro describe muchas de las propiedades estructurales de un digrafo y que el radio espectral es un valor propio que se destaca entre todos los elementos del espectro de un digrafo. Su importancia está dada por el Teorema de Perron-Frobenius 2.2.12 para lo cual es requisito que la matriz considerada (en nuestro caso, la matriz de adyacencia) sea no negativa.

En un inicio, se pensaba que los digrafos podían ser *caracterizados por su espectro*, es decir, digrafos coespectrales serían necesariamente isomorfos; sin embargo, en 1966 Baker [1] exhibe un ejemplo de grafos conexos no isomorfos coespectrales además de probar que son los de menor orden posible con estas características y en 1971 Harary et al. [12] exhiben ejemplos tanto de digrafos fuertemente conexos como de grafos conexos no isomorfos coespectrales.

Vale la pena observar que otras matrices asociadas podrían ser consideradas como la matriz Laplaciana o la matriz Laplaciana sin signo. Sin embargo, es sabido que sus respectivos espectros no logran caracterizar al conjunto de digrafos en su totalidad, incluso restringiéndonos al conjunto de grafos conexos y regulares.

### 2.3. Espectro complementario de una matriz

La definición de espectro complementario de una matriz cuadrada real fue introducida por Seeger en el año 1999 y está motivada por la solución de un sistema de equilibrio [19].

**Definición 2.3.1.** Sea  $A$  en  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Decimos que  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un *valor propio complementario de  $A$*  si existe  $x \in \mathbb{R}^n$  no nulo y no negativo denominado *vector propio complementario* que verifica que  $Ax \geq \lambda x$  y

$$x^t(Ax - \lambda x) = 0. \quad (2)$$

Si escribimos  $w = Ax - \lambda x \geq \mathbf{0}$ , la condición (2) resulta

$$x^t w = 0$$

lo que equivale a pedir

$$x_i = 0 \quad \text{o} \quad w_i = 0 \quad \text{para todo } i = 1 \dots, n.$$

Esta condición se denomina *condición de complementariedad*.

El conjunto conformado por todos los valores propios complementarios de una matriz será denominado *espectro complementario* de  $A$  y denotado  $\Pi(A)$ . A diferencia del espectro de una matriz, que es un multiconjunto, el espectro complementario es un conjunto.

Seeger [19] prueba la existencia de al menos un valor propio complementarios para cualquier matriz cuadrada.

**Observación 2.3.2.**  $1 \leq \#\Pi(A)$  para toda  $A$  en  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

El siguiente es un primer ejemplo que muestra que la cota inferior para  $\#\Pi(A)$  es alcanzada, en las secciones que siguen aparecerán nuevos ejemplos.

**Ejemplo 2.3.3.**  $\Pi(\alpha I_n) = \{\alpha\}$  para todo  $\alpha$  en  $\mathbb{R}$ . En particular,  $\#\Pi(\alpha I_n) = 1$ .

**Definición 2.3.4.** Sea  $\lambda$  un valor propio de  $A$ . Si existe  $x \geq \mathbf{0}$  vector propio asociado decimos que  $\lambda$  es un *valor propio de Perron*, si existe  $x > \mathbf{0}$  vector propio asociado decimos que  $\lambda$  es un *valor propio de Perron estricto*.

**Observación 2.3.5.** Si  $\lambda$  es un valor propio de Perron entonces  $\lambda$  es un valor propio complementario.

**Teorema 2.3.6.** [19] Sea  $A$  en  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  $\lambda$  es un valor propio complementario de  $A$  si, y solo si existe  $J$ ,  $\emptyset \neq J \subset N = \{1, \dots, n\}$  tal que  $\lambda$  es un valor propio de Perron estricto de  $A^J$  y se verifica la siguiente desigualdad para todo  $i \in N \setminus J$ ,

$$\sum_{j \in J} a_{ij} y_j \geq 0, \quad (3)$$

donde  $y > \mathbf{0}$  es un vector propio de  $A^J$  asociado a  $\lambda$ .

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Sea  $x$  vector propio complementario asociado a  $\lambda$  y  $J = \{i \in N : x_i > 0\} \neq \emptyset$ . Sea  $y \in \mathbb{R}^{|J|}$  definido como  $y = x|_J > \mathbf{0}$ . Para todo  $i \in N$  se cumple que

$$(Ax)_i = \sum_{j \in N} a_{ij} x_j = \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = \sum_{j \in J} a_{ij} y_j.$$

Si  $i \in J$  tenemos que  $x_i > 0$  y por la condición de complementariedad tenemos que

$$(Ax)_i = \lambda x_i = \lambda y_i.$$

Además sabemos que  $\sum_{j \in J} a_{ij} y_j = (A^J y)_i$  de donde se deduce que

$$\lambda y_i = (A^J y)_i \text{ para todo } i \in J \Leftrightarrow A^J y = \lambda y,$$

por lo cual  $\lambda$  es un valor propio de Perron estricto de  $A^J$ .

Si  $i \in N \setminus J$  tenemos que  $x_i = 0$ , luego,

$$(Ax)_i \geq \lambda x_i = 0.$$

de donde obtenemos que  $\sum_{j \in J} a_{ij} y_j \geq 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Sea  $y > \mathbf{0}$  vector propio de  $A^J$  asociado a  $\lambda$ . Definimos  $x \in \mathbb{R}^n$  como

$$x_i = \begin{cases} y_i & \text{si } i \in J, \\ 0 & \text{si } i \in N \setminus J. \end{cases}$$

Es fácil ver que  $x \geq \mathbf{0}$ . Por otro lado tenemos que,

$$(Ax)_i = \sum_{j \in N} a_{ij} x_j = \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = \sum_{j \in J} a_{ij} y_j.$$

Luego, si  $i \in J$ , se cumple que  $(Ax)_i = (A^J y)_i = \lambda y_i = \lambda x_i$ , mientras que si  $i \in N \setminus J$  se cumple que  $(Ax)_i \geq 0 = \lambda x_i$ . Finalmente obtenemos que

$$Ax \geq \lambda x.$$

Veamos por último que  $x^t(Ax - \lambda x) = 0$ . Tenemos que  $x_i \neq 0 \Leftrightarrow i \in J$ , veamos entonces que  $(Ax - \lambda x)_i = 0$  para todo  $i \in J$ . Efectivamente,  $(Ax)_i = \lambda x_i$  lo que termina la prueba. □

**Observación 2.3.7.** Si  $A$  en  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es no negativa fuera de la diagonal, es decir,

$$a_{ij} \geq 0 \text{ para todo } i \neq j,$$

entonces se cumple que los valores propios complementarios de la matriz  $A$  son los valores propios de Perron estrictos de las submatrices principales.

**Proposición 2.3.8.** [19] Sea  $A$  en  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , entonces

$$\#\Pi(A) \leq n2^{n-1}.$$

*Demostración.* Por el Teorema 2.3.6 sabemos que todo valor propio complementario debe ser valor propio de Perron estricto de una submatriz principal de  $A$ . Luego, sabemos que cada submatriz principal de  $A$  de orden  $k$  dará lugar, a lo sumo, a  $k$  valores propios complementarios. Tenemos entonces la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \#\Pi(A) &\leq \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \\ &n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n2^{n-1} \end{aligned}$$

□

**Proposición 2.3.9.** [19] Sea  $A$  en  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  simétrica, entonces posee (a lo sumo) un valor propio de Perron estricto.

*Demostración.* Supongamos por absurdo que existen  $\lambda \neq \mu$  valores propios de Perron estrictos de  $A$  y  $v, w > \mathbf{0}$  son vectores propios asociados. Por ser  $A$  simétrica tenemos que los subespacios propios distintos son ortogonales, luego  $\langle v, w \rangle = 0$  lo cual es absurdo. □

**Corolario 2.3.10.** [19] Sea  $A$  en  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  simétrica, entonces

$$\#\Pi(A) \leq 2^n - 1.$$

*Demostración.* Por el Teorema 2.3.6 sabemos que todo valor propio complementario debe ser valor propio de Perron estricto de una submatriz principal de  $A$ , mientras que por la proposición anterior tenemos que, dada la simetría de toda submatriz principal de una matriz simétrica, las mismas no poseen más de un valor propio de Perron estricto. Luego, sabemos que cada submatriz principal de  $A$  dará lugar, a lo sumo, a un valor propio complementario. Tenemos entonces que la cantidad de valores propios complementarios debe ser menor o igual a la cantidad de submatrices principales, esto es

$$\#\Pi(A) \leq \binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = 2^n - 1.$$

□

La siguiente proposición prueba que el espectro complementario es un invariante en la familia de matrices conjugadas por una matriz de permutación.

**Proposición 2.3.11.** [16] Si  $A$  en  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y  $\lambda$  es un valor propio complementario de  $A$ , entonces  $\lambda$  es un valor propio complementario de  $P^tAP$  para cualquier matriz de permutación  $P$ .

*Demostración.* Sea  $x$  vector propio complementario de  $A$  asociado a  $\lambda$ , veamos que  $P^tx$  es un vector propio complementario de  $P^tAP$  asociado a  $\lambda$ . Tenemos que  $P^tx$  es no negativo por serlo  $x$ , a su vez, tenemos que  $(P^tAP)(P^tx) - \lambda(P^tx) = P^t(Ax - \lambda x)$  que es no negativo por serlo  $Ax - \lambda x$ . Falta chequear que se verifique la condición de complementariedad, efectivamente,

$$(P^tx)^t(P^tAPP^tx - \lambda P^tx) = (x^tP)P^t(Ax - \lambda x) = x^t(Ax - \lambda x) = 0.$$

□

El siguiente Teorema generaliza un resultado probado en [7] para matrices de adyacencia de un grafo, las cuales son además de no negativas, simétricas.

**Teorema 2.3.12.** [4] Sea  $A$  en  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  no negativa.  $\lambda$  valor propio complementario de  $A$  si, y solo si  $\lambda = \rho(A^J)$  donde  $A^J$  es una submatriz principal de  $A$  irreducible o nula.

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Por la Observación 2.3.7 sabemos que  $\lambda$  es un valor propio complementario de  $A$  si, y solo si existe  $\emptyset \neq J \subset \{1, \dots, n\}$  tal que  $\lambda$  es valor propio de Perron estricto de  $A^J$ .

Supongamos en primer lugar  $A^J$  irreducible. El Teorema de Perron-Frobenius nos permite afirmar que  $\lambda = \rho(A^J)$  por ser  $\lambda$  un valor propio de Perron estricto de  $A^J$ . Supongamos ahora  $A^J$  reducible, por la Proposición 2.3.11 sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$A^J = \begin{pmatrix} X & Y \\ \mathbf{0} & Z \end{pmatrix}$$

con  $X$  en  $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ ,  $Y$  en  $\mathcal{M}_{r \times s}(\mathbb{R})$  y  $Z$  en  $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$  no negativas y  $Z$  irreducible o nula. Consideremos  $K \subset J$  tal que  $A^K = Z$ . Es fácil ver que  $\lambda$  es un valor propio de Perron estricto de  $A^K$ . Si  $A^K$  es la matriz nula se tiene que  $\lambda = 0 = \rho(A^K)$ , mientras que si  $A^K$  es irreducible por Perron-Frobenius tenemos que  $\lambda = \rho(A^K)$ .

( $\Leftarrow$ ) Tenemos que  $\lambda = \rho(A^J)$ , donde  $A^J$  es una submatriz principal de  $A$  irreducible o nula. Si  $A^J$  es irreducible, por Perron-Frobenius sabemos que  $\lambda$  es un valor de Perron estricto de  $A^J$ , y por la Observación 2.3.7 podemos afirmar que  $\lambda$  es un valor propio complementario de  $A$ . Si  $A^J$  es nula tenemos que  $\rho(A^J) = 0$  es un valor propio de Perron estricto de  $A^J$  y nuevamente la Observación 2.3.7 muestra que  $\rho(A^J)$  es un valor propio complementario de  $A$ . □

**Observación 2.3.13.** Una forma alternativa de enunciar el anterior resultado es la siguiente: sea  $A$  en  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  no negativa, entonces

$$\Pi(A) = \{\rho(A^J) : A^J \text{ irreducible o nula}\}.$$

**Corolario 2.3.14.** [7] *El conjunto de valores propios complementarios de una matriz no negativa es un conjunto no negativo.*

*Demostración.* Si bien es inmediato de la anterior observación que el conjunto de los valores propios complementarios es un conjunto no negativo, también podría deducirse del hecho de que todo valor propio complementario  $\lambda$  verifica que existe  $x$  no negativo tal que

$$x^t(Ax - \lambda x) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{x^t Ax}{x^t x} \geq 0.$$

□

## 2.4. Espectro complementario de un grafo

En el año 2017 Fernandes et al.[7] proponen representar un grafo mediante el espectro complementario de la familia de matrices de adyacencia. Recordemos que en esta familia el espectro complementario resulta invariante por la Proposición 2.3.11.

**Definición 2.4.1.** [7] Sea  $G$  un grafo, el *espectro complementario* de  $G$  se define como el espectro complementario de cualquiera de sus matrices de adyacencia,  $\Pi(G) = \Pi(A)$  con  $A$  en  $\mathcal{F}(G)$ .

El siguiente Teorema es una consecuencia directa del Teorema 2.3.12 (que en su versión original [7] alcanzaba a matrices de adyacencia de un grafo) y muestra que el espectro complementario reúne información espectral de un grafo, así como de todos los subgrafos inducidos conexos.

**Teorema 2.4.2.** [7] *Sea  $G$  un grafo, entonces*

$$\Pi(G) = \{\rho(F) : F \text{ subgrafo inducido de } G \text{ conexo}\}.$$

*Lo que puede reescribirse como  $\Pi(G) = \{\rho(F) : F \in \mathcal{S}(G)\}$  donde  $\mathcal{S}(G)$  es el conjunto de los grafos inducidos conexos de un grafo  $G$  dado.*

El siguiente ejemplo muestra que el espectro complementario logra diferenciar grafos conexos no isomorfos que el espectro usual no distingue.

**Ejemplo 2.4.3.** [1]

Los grafos conexos  $G$  y  $F$  representados gráficamente en la Figura 18 son no isomorfos pero sí coespectrales, ya que  $p_G(x) = p_F(x) = x^6 - 7x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 4x - 1$ .

Veamos que sí difieren en su espectro complementario. Los subgrafos inducidos conexos no isomorfos del grafo  $G$  (distintos de  $P_2$  y  $P_1$ ) se señalan en rojo en la Figura 19. Además, todos poseen distinto radio espectral ya que cada uno de ellos es subgrafo propio del siguiente, por lo tanto  $\#\Pi(G) = 7$ .

Los subgrafos inducidos conexos no isomorfos del grafo  $F$ , distintos de  $P_2$  y  $P_1$ , se señalan en rojo en la Figura 20. En este caso también puede chequearse que todos poseen distinto radio espectral, luego sabemos que  $\#\Pi(G) = 8$ .

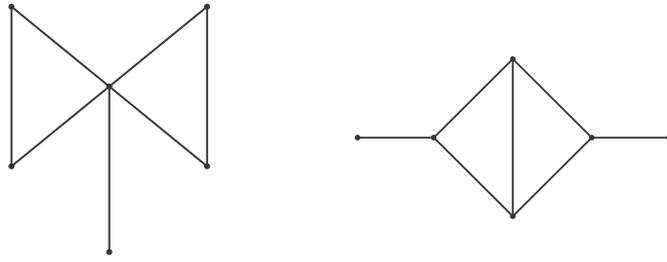


Figura 18: Grafos  $G$  y  $F$ .

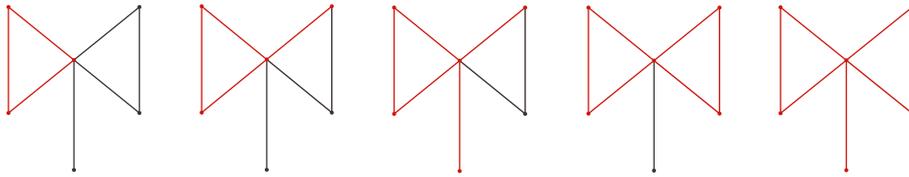


Figura 19: Subgrafos inducidos conexos no isomorfos del grafo  $G$ , distintos de  $P_3$ ,  $P_2$  y  $P_1$ .

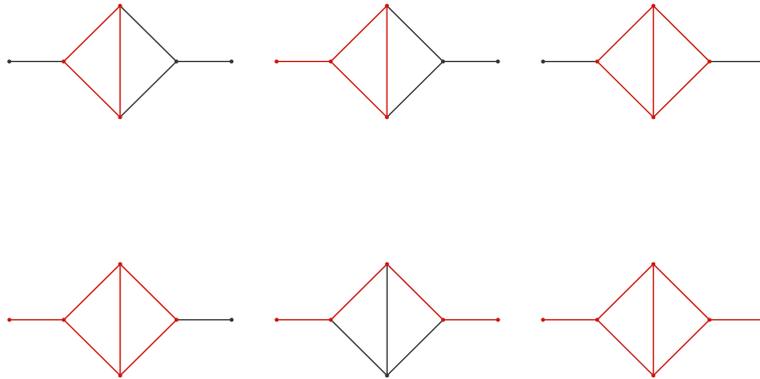


Figura 20: Subgrafos inducidos conexos no isomorfos del grafo  $F$  distintos de  $P_3$ ,  $P_2$  y  $P_1$ .

Tenemos que  $\#\Pi(G) \neq \#\Pi(F)$  lo que prueba que  $\Pi(G) \neq \Pi(F)$ .

La cantidad de elementos en el espectro complementario de un grafo juega un papel importante ya que no queda dada por el orden del grafo a priori.

**Definición 2.4.4.** [7] Sea  $G$  un grafo. Denotaremos  $\mathfrak{c}(G)$  a la cantidad de elementos en el espectro complementario de un grafo, es decir,

$$\mathfrak{c}(G) = \#\Pi(G).$$

Denotaremos  $\mathfrak{b}(G)$  a la cantidad de subgrafos inducidos conexos no isomorfos de un

grafo, es decir,

$$\mathfrak{b}(G) = \#\mathcal{S}(G).$$

**Observación 2.4.5.**  $\mathfrak{c}(G) \leq \mathfrak{b}(G)$ .

El siguiente ejemplo muestra que la desigualdad puede ser estricta, lo cual se debe a que grafos no isomorfos conexos pueden poseer igual radio espectral.

**Ejemplo 2.4.6.**

Sea  $G$  el grafo representado gráficamente en la Figura 21.

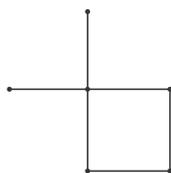


Figura 21: Grafo  $G$

Los subgrafos inducidos conexos no isomorfos del grafo  $G$  (distintos de  $P_2$  y  $P_1$ ) se señalan en rojo en la Figura 22. Tenemos que

$$\mathcal{S}(G) = \{G, H_{5,4}, S_{2,2,3}, S_5, C_4, P_4, P_3, P_2, P_1\}.$$

Luego  $\mathfrak{b}(G) = 9$ , sin embargo  $\rho(S_5) = 2 = \rho(C_4)$ , por lo cual,  $\Pi(G) = \{\rho(F) : F \in \mathcal{S}(G)\}$ , luego  $\mathfrak{c}(G) \leq 8 < \mathfrak{b}(G)$ .

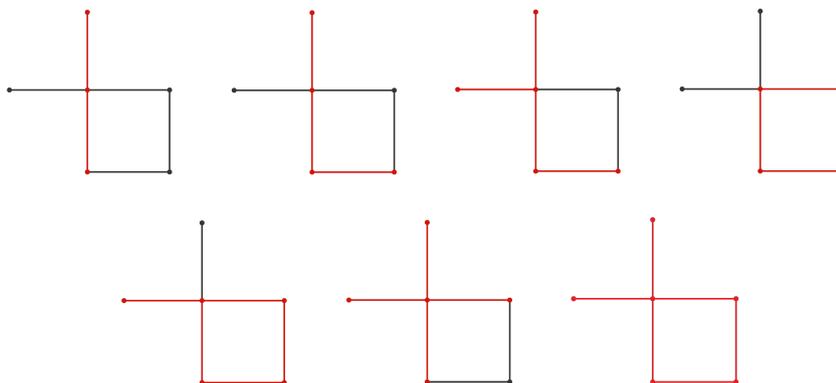


Figura 22: Subgrafos inducidos conexos no isomorfos del grafo  $G$ , distintos de  $P_2$  y  $P_1$ .

Dada la simetría de  $A(G)$ , el Corolario 2.3.10 permite probar que  $\mathfrak{c}(G) \leq 2^n - 1$ , cota que podrá ser mejorada como se muestra a continuación.

**Proposición 2.4.7.** [7, 20] Si  $G$  es un grafo de orden  $n \geq 2$  conexo se cumple que

$$n \leq \mathfrak{c}(G) \leq \mathfrak{b}(G) < 2^n - 1.$$

*Demostración.* Veamos en primer lugar que  $n \leq \mathfrak{c}(G)$ . Dado que siempre es posible extraer un vértice de un grafo conexo manteniendo la conexión, podemos construir

una sucesión de grafos inducidos conexos  $G_i$  con  $i$  vértices, que verifican que  $G_i$  es un subgrafo estricto de  $G_{i+1}$  para todo  $i = 1, \dots, n-1$ , luego

$$\rho(G_1) < \rho(G_2) < \rho(G_3) < \dots < \rho(G_{n-1}) < \rho(G_n).$$

Por el Teorema 2.4.2 tenemos que  $\rho(G_i) \in \Pi(G)$ , entonces  $n \leq \#\Pi(G) = \mathfrak{c}(G)$ . Resta probar que  $\mathfrak{b}(G) < 2^n - 1$ . Existe un único grafo conexo con un vértice, así como un único grafo conexo con dos vértices:  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente. Los grafos con más de dos vértices inducidos conexos del grafo  $G$  se obtienen a partir de un subconjunto de vértices de  $V$ . Como la cantidad de subconjuntos posibles es

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n - 1 - n - \frac{n(n-1)}{2},$$

tenemos que para todo  $n \geq 2$  se cumple que

$$\mathfrak{b}(G) \leq 2 + 2^n - 1 - n - \frac{n(n-1)}{2} < 2^n - 1.$$

□

Existen grafos conexos de orden  $n$  que satisfacen la igualdad  $\mathfrak{c}(G) = n$  como se muestra a continuación:

### Ejemplo 2.4.8.

#### 1. Grafos completos

Tenemos que  $\mathcal{S}(K_n) = \{K_n, K_{n-1}, K_{n-2}, \dots, K_3, K_2, K_1\}$ . Luego,

$$\Pi(K_n) = \{n-1, n-2, n-3, \dots, 2, 1, 0\},$$

por lo cual  $\mathfrak{c}(K_n) = n$ .

#### 2. Caminos simples

Tenemos que  $\mathcal{S}(P_n) = \{P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, \dots, P_3, P_2, P_1\}$ . Luego

$$\Pi(P_n) = \{\omega_n, \omega_{n-1}, \omega_{n-2}, \dots, \omega_3, \omega_2, \omega_1\}, \quad \text{donde } \omega_n = 2 \cos \frac{\pi}{n+1}.$$

Finalmente  $\mathfrak{c}(P_n) = n$ .

#### 3. Ciclos

Tenemos que  $\mathcal{S}(C_n) = \{C_n, P_{n-1}, P_{n-2}, \dots, P_3, P_2, P_1\}$ . Luego

$$\Pi(C_n) = \{2, \omega_{n-1}, \omega_{n-2}, \dots, \omega_3, \omega_2, \omega_1\},$$

por lo cual  $\mathfrak{c}(C_n) = n$ .

#### 4. Grafos estrella

Tenemos que  $\mathcal{S}(S_n) = \{S_n, S_{n-1}, S_{n-2}, \dots, S_3, S_2, S_1\}$ . Luego

$$\Pi(S_n) = \{\sqrt{n-1}, \sqrt{n-2}, \sqrt{n-3}, \dots, \sqrt{2}, 1, 0\},$$

por lo cual  $\mathfrak{c}(S_n) = n$ .

Decimos que un grafo es *elemental* si es un grafo completo, un camino simple, un ciclo o un grafo estrella de  $n$  vértices. Denotaremos  $\mathcal{E}_n$  al conjunto de grafos elementales con  $n$  vértices.

**Observación 2.4.9.** El radio espectral permite distinguir los grafos elementales de orden  $n \geq 6$  dado que

$$\omega_n < 2 < \sqrt{n-1} < n-1.$$

Nos dirigimos a probar un resultado de Seeger [20] que establece que  $\mathcal{E}_n$  puede caracterizarse como el conjunto de grafos conexos de orden  $n$  cuyo espectro complementario posee  $n$  elementos. Para ello será necesario probar en primer lugar el siguiente resultado.

**Lema 2.4.10.** *Sea  $G$  en  $\mathcal{C}_n$  con  $n \geq 5$ . Si existe  $E$  en  $\mathcal{E}_{n-1}$  tal que  $G \setminus \{v\} \cong E$  para todo vértice  $v$  en  $V$  que no sea de corte, entonces  $G$  pertenece a  $\mathcal{E}_n$ .*

*Demostración.* Por ser  $G$  conexo sabemos que existe  $x$  vértice de  $E$  adyacente a  $v$  en  $G$ . Estudiaremos separadamente los casos en los cuales  $E$  es un grafo completo, un camino simple, un ciclo o una estrella.

Si  $E = P_{n-1}$  veremos que  $x \in \{1, n-1\}$ . En efecto, si  $x \neq 1$  y  $x \neq n-1$ , considerando  $G \setminus \{1\}$  (si  $x \sim n-1$ ) tendremos que  $gr_{G \setminus \{1\}}(x) = 3$  lo cual es absurdo ya que  $G \setminus \{1\} \cong P_{n-1}$ ; análogamente, considerando  $G \setminus \{n-1\}$  (si  $x \sim 1$ ) tendremos que  $gr_{G \setminus \{n-1\}}(x) = 3$  lo cual es absurdo ya que  $G \setminus \{n-1\} \cong P_{n-1}$ . Finalmente, si  $v \sim 1$  y  $v \not\sim n-1$  obtenemos que  $G \cong P_n$ , al igual que si  $v \not\sim 1$  y  $v \sim n-1$ . Si  $v \sim 1$  y  $v \sim n-1$  obtenemos que  $G \cong C_n$ . En cualquiera de los casos obtenemos un grafo elemental.

Si  $E = S_{n-1}$  veremos que  $x = 1$ . En efecto, si  $x \neq 1$ , considerando  $G \setminus \{y\}$  con  $y \neq x$ ,  $y \neq 1$  tendremos que  $gr_{G \setminus \{y\}}(x) = 2$  lo cual es absurdo ya que  $G \setminus \{y\} \cong S_{n-1}$ . Luego,  $G \cong S_n$ .

Si  $E = K_{n-1}$  veremos que  $v \sim x$  para todo vértice  $x$  de  $K_{n-1}$ . En efecto, si existe  $y \not\sim v$ , considerando  $G \setminus \{z\}$  con  $z \notin \{v, y\}$ , tendremos que  $gr_{G \setminus \{z\}}(y) \leq n-3$  lo cual es absurdo ya que  $G \setminus \{z\} \cong K_{n-1}$ . Luego,  $G \cong K_n$ .

Si  $E = C_{n-1}$  veremos que no puede existir tal vértice  $x$ ; lo que significa que este no es un caso posible. En efecto, si existiera  $x \sim v$  considerando  $y$  vértice en  $C_{n-1}$  no adyacente a  $x$  y el digrafo  $G \setminus \{y\}$  tendremos que  $gr_{G \setminus \{y\}}(x) \geq 3$  lo cual es absurdo ya que  $G \setminus \{y\} \cong C_{n-1}$ .

□

**Teorema 2.4.11.** [20] *Un grafo conexo de orden  $n$  posee  $n$  valores propios complementarios si, y solo si, es un grafo elemental.*

*Demostración.* Podemos reescribir nuestra tesis como

$$\{G \in \mathcal{C}_n : \#\Pi(G) = n\} = \mathcal{E}_n.$$

Por el ejemplo anterior sabemos que  $\mathcal{E}_n \subset \{G \in \mathcal{C}_n : \#\Pi(G) = n\}$ . Probemos que  $\{G \in \mathcal{C}_n : \#\Pi(G) = n\} \subset \mathcal{E}_n$  para todo  $n \geq 6$  por inducción completa en  $n$ . Para  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  puede chequearse manualmente.

Paso base Existen 143 grafos conexos no isomorfos de orden  $n \leq 6$  y puede chequearse que los únicos que verifican que  $\#\Pi(G) = n$  son los grafos elementales de orden  $n$  (ver Tablas 3, 4 y 5 en [20]).

Paso inductivo Probemos que si  $\{G \in \mathcal{C}_n : \#\Pi(G) = n\} \subset \mathcal{E}_n$  entonces  $\{G \in \mathcal{C}_{n+1} : \#\Pi(G) = n+1\} \subset \mathcal{E}_{n+1}$ .

Sea  $G \in \mathcal{C}_{n+1}$  tal que  $\#\Pi(G) = n+1$ , consideremos los grafos conexos generados por la remoción de algún vértice en  $G$  (que no sea de corte) que denotaremos  $F_1, F_2, \dots, F_r$ . Veamos en primer lugar que  $\#\Pi(F_i) = n$ , luego, por hipótesis inductiva tendremos que  $F_i \in \mathcal{E}_n$  para todo  $i = 1, \dots, r$ . En efecto, si  $\#\Pi(F_i) \geq n+1$  para algún  $i$  entonces  $n+1+1 \leq \#\Pi(G)$  dado que  $\{\rho(G)\} \cup \Pi(F_i) \subset \Pi(G)$  lo que contradice que  $\#\Pi(G) = n+1$ . Veamos ahora que  $F_i \cong F_j$  para todo  $i, j$ . En efecto, si existieran grafos elementales de  $n$  vértices,  $E \not\cong E'$  tales que  $F_i \cong E$  y  $F_j \cong E'$  luego  $\rho(F_i) \neq \rho(F_j)$  dado que los grafos elementales con seis o más vértices pueden distinguirse de acuerdo a su radio espectral (ver Observación 2.4.9). Luego, tenemos que  $G \setminus \{v\} \cong E$  para todo vértice  $v$  en  $V$  que no sea de corte y por el Lema 2.4.10,  $G$  resulta un grafo elemental, lo que termina la prueba del paso inductivo.  $\square$

**Definición 2.4.12.** [7] Sea  $\mathcal{C}_n$  el conjunto de grafos conexos de orden  $n$ . Denotamos por  $\mathbf{c}_n$  al valor

$$\mathbf{c}_n = \max_{G \in \mathcal{C}_n} \mathbf{c}(G),$$

y por  $\mathbf{b}_n$  al valor

$$\mathbf{b}_n = \max_{G \in \mathcal{C}_n} \mathbf{b}(G).$$

Es claro que  $n \leq \mathbf{c}_n \leq \mathbf{b}_n < 2^n - 1$ , y además, Fernandes et al.[7] prueban que  $\mathbf{c}_n$  crece más rápido que cualquier polinomio en  $n$ .

**Definición 2.4.13.** [17] Decimos que dos grafos  $G$  y  $F$  son *complementariamente coespectrales* si  $\Pi(G) = \Pi(F)$ . Decimos que un grafo conexo  $G$  queda *determinado por su espectro complementario* (lo que abreviaremos como DCS por sus siglas en inglés) si cualquier otro grafo conexo  $F$  complementariamente coespectral, es isomorfo al grafo  $G$  o de distinto orden.

**Ejemplo 2.4.14.** [17] *Los grafos elementales quedan determinados por su espectro complementario.*

En efecto, dado un grafo elemental con  $n$  vértices, sabemos que su espectro complementario posee exactamente  $n$  elementos, luego, por el Teorema 2.4.11 cualquier grafo complementariamente coespectral y del mismo orden debe ser elemental, para finalizar, por la Observación 2.4.9 puede verse que los distintos grafos elementales pueden distinguirse por su espectro.

**Definición 2.4.15.** [17] Sea  $\mathcal{G}$  una clase de grafos conexos del mismo orden. Decimos que la clase  $\mathcal{G}$  *posee espectro complementario único* (o abreviadamente que  $\mathcal{G}$  es DCS) si el espectro complementario de cada elemento en la clase es único. Es decir, para todo  $F$  y  $G$  en  $\mathcal{G}$  se cumple que

$$\Pi(F) = \Pi(G) \Leftrightarrow F \cong G.$$

Si bien una clase de grafos con espectro complementario único puede no estar compuesta por grafos determinados por su espectro complementario, sí se cumple que un conjunto de grafos DCS debe conformar una clase de grafos DCS. Luego, la definición de clase DCS se vuelve una condición necesaria para que un conjunto de grafos sea efectivamente DCS.

En 2020 Pinheiro et al. [17] prueban que las clases de los grafos completos bipartitos de  $n$  vértices entre otras son clases DCS.

**Definición 2.4.16.** [20, 17] Denotemos  $\rho_i(G)$  con  $i = 1, \dots, \mathfrak{c}(G)$  a los elementos de  $\Pi(G)$  de modo tal que  $\rho(G) = \rho_1(G) > \rho_2(G) > \dots > \rho_{\mathfrak{c}(G)}(G) = 0$ . Sea  $q \geq 1$  natural. La función que definimos a continuación recoge la siguiente información del grafo: su cantidad de vértices y los  $q$  valores propios complementario más grandes. Definimos la función  $\Psi_q : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^{q+1}$  como

$$(\Psi_q(G))_i = \begin{cases} |G| & \text{si } i = 1, \\ \rho_{i-1}(G) & \text{si } 2 \leq i \leq \min\{\mathfrak{c}(G) + 1, q + 1\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definimos entonces la relación  $\preceq_q$  en  $\mathcal{C}$  como

$$F \preceq_q G \Leftrightarrow \Psi_q(F) \preceq_{\text{lex}} \Psi_q(G),$$

donde  $\preceq_{\text{lex}}$  refiere al orden lexicográfico en  $\mathbb{R}^{q+1}$ .

La función  $\Psi_q$  busca distinguir grafos mediante (algunos elementos de) su espectro complementario, lo cual cobra sentido entre grafos del mismo orden, razón por la cual se considera  $|G|$  como la primera coordenada de  $\Psi_q$ . Alternativamente podríamos definir  $\Psi_q^{(n)} : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbb{R}^q$  como

$$(\Psi_q^{(n)}(G))_i = \begin{cases} \rho_i(G) & \text{si } 1 \leq i \leq \min\{\mathfrak{c}(G), q\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Seeger [20] prueba que  $\preceq_2$  define un orden total en el conjunto de los grafos con no más de 6 vértices. Por otra parte, Pinheiro et al. [17] prueban que  $\preceq_4$  define un orden total en el conjunto de los grafos con no más de 7 vértices. Si la restricción de la relación  $\preceq_q$  en  $\mathcal{C}$  a una clase de grafos  $\mathcal{G}$  resulta de orden, nos referiremos a ella también como *orden lexicográfico* (en  $\mathcal{G}$ ). Puede observarse que cualquier clase de grafos ordenada lexicográficamente, resultará DCS. En particular, los grafos con no más de 7 vértices componen una clase DCS.

Al día de hoy no se conocen ejemplos de grafos conexos no isomorfos complementariamente coespectrales. A su vez, los resultados citados dan cuenta de que el espectro complementario permite representar a los grafos conexos de forma adecuada. Sin embargo, el hecho de que la cantidad de elementos que en él crezca -con la cantidad de vértices- mas rápido que cualquier polinomio, resulta algo desalentador.

### 3. Espectro complementario de un digrafo

Como mencionamos anteriormente, el problema de establecer si los grafos quedan determinados o no por su espectro complementario se mantiene abierto hasta hoy. En este trabajo ampliamos el objeto de estudio del mencionado problema al conjunto de los digrafos en busca de un contraejemplo. Para ello comenzamos por estudiar los digrafos más “simples”, es decir, aquellos con pocos elementos en su espectro complementario. Concretamente, analizamos los digrafos con uno, dos y tres valores propios complementarios, lo cual carece de sentido en el contexto de grafos por la Proposición 2.4.7 que limita el análisis a grafos con uno, dos y tres vértices. En esta sección, además de introducir el concepto de espectro complementario de un digrafo, caracterizaremos estructuralmente los digrafos con uno, dos y tres valores propios complementarios fuertemente conexos, hipótesis adicional que resulta natural en este contexto. A su vez, probaremos que aquellos digrafos fuertemente conexos con uno y dos valores propios complementarios efectivamente quedan determinados por su espectro complementario, mientras que la tarea de identificar los digrafos fuertemente conexos con tres valores propios complementarios a partir de la caracterización establecida requerirá un estudio minucioso del que nos ocuparemos en la siguiente sección y que darán lugar a distintas familias de contraejemplos.

#### 3.1. Aspectos generales

Los resultados a continuación, ya conocidos para grafos [7], fueron generalizados a digrafos en este trabajo. Los mismos son consecuencia directa del Teorema 2.3.12 que como mencionamos anteriormente, generaliza a matrices no negativas un resultado probado para matrices de adyacencia de un grafo.

**Teorema 3.1.1.** *Sea  $D$  un digrafo y  $\Pi(D)$  su espectro complementario. Entonces*

$$\Pi(D) = \{\rho(H) : H \text{ subdigrafo inducido de } D \text{ fuertemente conexo}\}.$$

*Demostración.* Por el Teorema 2.3.12 tenemos que

$$\Pi(D) = \Pi(A(D)) = \{\rho(A(D)^J) : A(D)^J \text{ irreducible o nula}\}.$$

Luego, por la Observación 2.2.2 podemos reescribir lo anterior como

$$\Pi(D) = \{\rho(A(H)) : A(H) \text{ irreducible o nula}\}.$$

Si  $A(H)$  irreducible, esto equivale a que  $H$  sea fuertemente conexo y si  $A(H)$  nula, esto equivale a que  $H$  sea vacío, sin embargo, como se tiene que  $\rho(H) = 0 = \rho(H_0)$  donde  $H_0$  es un vértice aislado (digrafo fuertemente conexo) se obtiene que

$$\Pi(D) = \{\rho(H) : H \text{ subdigrafo inducido fuertemente conexo}\}.$$

□

**Proposición 3.1.2.** *Sea  $D$  un digrafo y sean  $D_1, \dots, D_k$  los digrafos generados por las componentes fuertemente conexas de  $D$ . Luego,*

$$\Pi(D) = \cup_{i=1}^k \Pi(D_i),$$

*Demostración.* Por el Teorema anterior, tenemos que probar que

$$\{\rho(H) : H \leq D, H \text{ inducido y fuertemente conexo}\} = \cup_{i=1}^k \{\rho(H) : H \leq D_i, H \text{ inducido y fuertemente conexo}\}$$

( $\supset$ ) Es consecuencia de que si  $H$  es subdigrafo de  $D_i$  fuertemente conexo, entonces también lo es de  $D$ .

( $\subset$ ) Consideremos  $\rho(H)$  con  $H$  subdigrafo de  $D$  fuertemente conexo, luego,  $H$  subdigrafo de  $D_i$  para algún  $i$  lo que termina la prueba.  $\square$

**Observación 3.1.3.** Es claro que para digrafos con más de una componente fuertemente conexa la igualdad de los espectros complementarios no implica que los digrafos sean isomorfos, dado que el espectro complementario (al igual que el espectro usual) no captura información de lo que sucede fuera de los digrafos generados por las componentes fuertemente conexas. El Ejemplo 2.2.10 puede ser utilizado nuevamente en este contexto.

**Ejemplo 3.1.4.**

Sean  $D_1 = (V_1, E_1)$  y  $D_2 = (V_2, E_2)$  digrafos fuertemente conexas con conjuntos de vértices disjuntos. Sea  $D = D_1 \oplus D_2 = (V, E) = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ , sea  $A \subset E_1 \times E_2$  y  $D_A = (V, E \cup A)$ . Las componentes fuertemente conexas de  $D_A$  son  $V_1$  y  $V_2$ . Luego, tenemos que

$$\Pi(D_A) = \Pi(D_1) \cup \Pi(D_2) \text{ para todo } A \subset E_1 \times E_2,$$

siendo los distintos digrafos  $D_A$  no isomorfos si consideramos  $D_1, D_2$  y  $A$  adecuadamente.

Extendamos a digrafos los conceptos de: grafo determinado por su espectro complementario, clase con espectro complementario único y orden lexicográfico de una clase de grafos.

**Definición 3.1.5.** Decimos que dos digrafos  $D$  y  $H$  son *complementariamente coespectrales* si  $\Pi(D) = \Pi(H)$ . Decimos que un digrafo fuertemente conexo  $D$  queda *determinado por su espectro complementario* (lo que abreviaremos como DCS por sus siglas en inglés) si cualquier otro digrafo fuertemente conexo complementariamente coespectral  $H$  es isomorfo a  $D$  o de distinto orden.

**Definición 3.1.6.** Sea  $\mathcal{D}$  una clase de grafos fuertemente conexas del mismo orden. Decimos que la clase  $\mathcal{D}$  posee *espectro complementario único* (o abreviadamente que  $\mathcal{D}$  es DCS) si el espectro complementario de cada elemento en la clase es único. Es decir, para todo  $H$  y  $D$  en  $\mathcal{D}$  se cumple que

$$\Pi(H) = \Pi(D) \Leftrightarrow H \cong D.$$

Al igual que para grafos, una clase de digrafos con espectro complementario único puede no estar compuesta por grafos determinados por su espectro complementario, pero sí se cumple que un conjunto de grafos DCS debe conformar una clase de

digrafos DCS.

En lo que sigue, denotaremos por  $\mathcal{SCD}$  al conjunto de digrafos fuertemente conexos.

**Definición 3.1.7.** Denotemos  $\rho_i(D)$  con  $i = 1, \dots, \mathfrak{c}(D)$  a los elementos de  $\Pi(D)$  de modo tal que  $\rho(D) = \rho_1(D) > \rho_2(D) > \dots > \rho_{\mathfrak{c}(D)}(D) = 0$ . Sea  $q \geq 1$  natural. Nuevamente, la función que definimos a continuación recoge la siguiente información del digrafo: su cantidad de vértices y los  $q$  valores propios complementario más grandes. Definimos la función  $\Psi_q : \mathcal{SCD} \rightarrow \mathbb{R}^{q+1}$  como

$$(\Psi_q(D))_i = \begin{cases} |D| & \text{si } i = 1, \\ \rho_{i-1}(D) & \text{si } 2 \leq i \leq \min\{\mathfrak{c}(D) + 1, q + 1\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definimos entonces la relación  $\preceq_q$  en  $\mathcal{SCD}$  como

$$H \preceq_q D \Leftrightarrow \Psi_q(H) \preceq_{\text{lex}} \Psi_q(D),$$

donde  $\preceq_{\text{lex}}$  refiere al orden lexicográfico en  $\mathbb{R}^{q+1}$ .

Cuando la relación definida restringida a una clase de digrafos resulte de orden, nos referiremos a ella también como *orden lexicográfico*. Puede observarse que cualquier clase de digrafos donde la relación resulte de orden, resultará DCS.

### 3.2. Digrafos con uno y dos valores propios complementarios

En esta sección caracterizaremos aquellos digrafos con uno y dos valores propios complementarios, sean o no fuertemente conexos. Comenzaremos con la prueba del siguiente Lema que será de utilidad.

**Lema 3.2.1.** *Sea  $D$  un digrafo. Si  $D$  posee un ciclo entonces  $D$  posee un ciclo como subdigrafo inducido.*

*Demostración.* Utilizaremos inducción fuerte en la cantidad de vértices  $r$  del ciclo presente en el digrafo.

Paso base Si  $r = 2$  entonces el  $\vec{C}_2$  es un subdigrafo por los vértices del ciclo.

Paso inductivo Veamos que si vale para  $k = 1, \dots, r - 1$  entonces vale para  $k = r$ . Sea  $\vec{C}_r$  subdigrafo de  $D$ , si  $\vec{C}_r$  es un subdigrafo inducido queda probada la tesis, de lo contrario, existe  $\vec{C}_l$  subdigrafo de  $D$  con  $l < r$  y por hipótesis inductiva sabemos existe un ciclo como subdigrafo inducido de  $D$ .  $\square$

**Proposición 3.2.2.** *Sea  $D$  un digrafo.  $D$  posee un ciclo si, y solo si 1 es valor propio complementario de  $D$ .*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Si  $D$  posee un ciclo, por el lema anterior tenemos que existe un ciclo como subdigrafo inducido  $\vec{C}_r$ , luego  $\rho(\vec{C}_r) = 1$  es valor propio complementario. ( $\Leftarrow$ ) Si  $D$  fuera acíclico, entonces las componentes fuertemente conexas en  $D$  serían vértices aislados, luego  $\Pi(D) = \{0\}$  lo cual es absurdo.  $\square$

**Proposición 3.2.3.** *Sea  $D$  un digrafo y  $\Pi(D)$  su espectro complementario. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i.*  $\Pi(D) = \{0\}$ ,
- ii.*  $\#\Pi(D) = 1$ ,
- iii.*  $D$  acíclico.

*Demostración.* (*i.*  $\Rightarrow$  *ii.*) Obvio.

(*ii.*  $\Rightarrow$  *iii.*) Si  $\#\Pi(D) = 1$  tenemos que  $\Pi(D) = \{0\}$ , luego, 1 no es valor propio complementario lo que prueba que  $D$  es acíclico.

(*iii.*  $\Rightarrow$  *i.*) Si  $D$  es acíclico los digrafos generados por las componentes fuertemente conexas de  $D$  son vértices aislados, luego  $\Pi(D) = \{0\}$ .  $\square$

**Corolario 3.2.4.** *Sea  $D$  un digrafo fuertemente conexo y  $\Pi(D)$  su espectro complementario. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i.*  $\Pi(D) = \{0\}$ ,
- ii.*  $\#\Pi(D) = 1$ ,
- iii.*  $D$  es un vértice aislado.

**Proposición 3.2.5.** *Sea  $D$  un digrafo fuertemente conexo y  $\Pi(D)$  su espectro complementario. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- i.*  $\Pi(D) = \{0, 1\}$ ,
- ii.*  $\#\Pi(D) = 2$ ,
- iii.*  $D = \vec{C}_n$ .

*Demostración.* (*i.*  $\Rightarrow$  *ii.*) Obvio.

(*ii.*  $\Rightarrow$  *iii.*) Por ser  $D$  fuertemente conexo, sabemos que posee un ciclo como subdigrafo y por el lema anterior obtenemos que existe un ciclo  $\vec{C}_r$  como subdigrafo inducido. Si  $\vec{C}_r$  es distinto de  $D$  por el ítem 5. del Teorema de Perron-Frobenius 2.2.12 tenemos que  $1 = \rho(\vec{C}_r) < \rho(D)$ , luego,  $\{0, 1, \rho(D)\} \subset \Pi(D)$  lo cual es absurdo. Obtenemos entonces que  $r = n$  y  $D = \vec{C}_n$ .

(*iii.*  $\Rightarrow$  *i.*)  $\Pi(\vec{C}_n) = \{0, \rho(\vec{C}_n)\} = \{0, 1\}$   $\square$

**Corolario 3.2.6.** *Sea  $D$  digrafo y  $D_1, \dots, D_k$  los digrafos generados por las componentes fuertemente conexas de  $D$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- i.*  $\Pi(D) = \{0, 1\}$ ,
- ii.*  $\#\Pi(D) = 2$ ,
- iii.*  $D$  no es acíclico y los digrafos generados por sus componentes fuertemente conexas son ciclos ó vértices aislados.

En lo que sigue denotaremos  $\mathcal{SCD}_t$  al conjunto de digrafos fuertemente conexos con exactamente  $t$  valores propios complementarios. Por el Corolario 3.2.4 tenemos que el conjunto  $\mathcal{SCD}_1$  está compuesto únicamente por un vértice aislado. Análogamente, por la Proposición 3.2.5 tenemos que  $\mathcal{SCD}_2$  está compuesto por ciclos de cualquier tamaño.

**Proposición 3.2.7.** *Todo digrafo en  $\mathcal{SCD}_1 \cup \mathcal{SCD}_2$  queda determinado por su espectro complementario.*

*Demostración.* Debemos ver que los vértices aislados y los ciclos son digrafos DCS. Sea  $D$  un digrafo fuertemente conexo con el mismo espectro complementario que un vértice aislado, es decir  $\Pi(D) = \{0\}$ ; por la Proposición 3.2.3 tenemos que  $D$  es necesariamente un vértice aislado como queríamos probar. Sea  $D$  un digrafo fuertemente conexo con el mismo espectro complementario que un ciclo de  $n$  vértices, es decir  $\Pi(D) = \{0, 1\}$ ; por la Proposición 3.2.5 tenemos que  $D$  es necesariamente un ciclo, si la cantidad de vértices en  $D$  es igual a  $n$  entonces los digrafos son isomorfos, lo que termina la prueba.  $\square$

Hasta aquí, hemos logrado identificar los digrafos fuertemente conexos cuyo espectro complementario tiene uno o dos elementos, además de probar que son digrafos DCS. A continuación, presentaremos un primer resultado de caracterización estructural de los digrafos en  $\mathcal{SCD}_3$  que luego nos permitirá identificarlos, estudiar su espectro complementario y establecer si quedan o no determinados por él.

### 3.3. Digrafos fuertemente conexos con tres valores propios complementarios

Comenzaremos por presentar una caracterización estructural de los digrafos en  $\mathcal{SCD}_3$  que nos conducirá a la identificación de los mismos.

**Teorema 3.3.1.** *Un digrafo  $D$  pertenece al conjunto  $\mathcal{SCD}_3$  si, y solo si, los subdigrafos propios inducidos fuertemente conexos son ciclos y vértices aislados. Además,  $\Pi(D) = \{0, 1, \rho(D)\}$ .*

*Demostración.* Sea  $D$  un digrafo en  $\mathcal{SCD}_3$ , veamos en primer lugar que los ciclos y vértices aislados son subdigrafos propios inducidos fuertemente conexos y en segundo lugar que son los únicos posibles. Es claro que los vértices aislados son subdigrafos propios inducidos fuertemente conexos. A su vez, por ser  $D$  fuertemente conexo sabemos que existe un ciclo en él y por el Lema 3.2.1 podemos afirmar que existe un ciclo inducido. Resta ver entonces que el ciclo no es el digrafo  $D$ , en efecto, si  $D = \vec{C}_n$  por el Teorema 3.2.5 tendríamos que  $D$  posee dos valores propios complementarios lo que contradice nuestras hipótesis. Supongamos ahora que existe un subdigrafo propio inducido  $D'$  fuertemente conexo distinto de un ciclo y de un vértice aislado. Sabemos que  $D'$  posee un ciclo como subdigrafo propio inducido y por Perron-Frobenius se tiene que  $1 < \rho(D') < \rho(D)$ . Luego,  $\{0, 1, \rho(D'), \rho(D)\} \subset \Pi(D)$  y en consecuencia  $4 \leq \#\Pi(D)$  lo cual es absurdo.

Recíprocamente, si  $D$  es un digrafo fuertemente conexo cuyos subdigrafos propios inducidos fuertemente conexos son ciclos y vértices aislados, por el Teorema 3.1.1 se

tiene que  $\Pi(D) = \{0, 1, \rho(D)\}$  y en consecuencia  $\#\Pi(D) = 3$ . □

Vale la pena observar que si bien puede haber más de un ciclo inducido, incluso de distintos tamaños, cualquiera de ellos dará lugar al mismo elemento en el espectro complementario:  $\rho(\vec{C}_r) = 1$ .

Una forma alternativa de enunciar el resultado anterior acorde con las equivalencias planteadas en 3.2.5 y 3.2.3 es la siguiente

**Proposición 3.3.2.** *Sea  $D$  un digrafo fuertemente conexo y  $\Pi(D)$  su espectro complementario. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- i.  $\Pi(D) = \{0, 1, \rho(D)\}$  con  $\rho(D) > 1$ .*
- ii.  $\#\Pi(D) = 3$*
- iii. Los subdigrafos propios inducidos fuertemente conexos son ciclos y vértices aislados.*

A diferencia de las equivalencias 3.2.4 3.2.5 en las que en el ítem *iii.* pudimos identificar a qué digrafos nos referíamos, en esta equivalencia hemos obtenido una propiedad que los caracteriza. El problema de identificar qué digrafos exactamente satisfacen dicha propiedad será abordado en la siguiente sección dado que requerirá un análisis más exhaustivo.

## 4. Identificación de los digrafos fuertemente conexos con tres valores propios complementarios

En esta sección nos ocuparemos de identificar el conjunto  $\mathcal{SCD}_3$ , a partir de la caracterización estructural del Teorema 3.3.1. Comenzaremos dando ejemplos de grafos que cumplen con dicha propiedad, agrupados en dos familias, y finalmente probaremos que son los únicos que la verifican. Los resultados de esta sección pueden encontrarse en [5].

### 4.1. Ejemplos

En primer lugar, presentaremos dos ejemplos de digrafos en  $\mathcal{SCD}_3$ : el *digrafo Infinito* y el *digrafo Theta*. Luego, introduciremos dos familias de digrafos que surgen de efectuar modificaciones a estos digrafos, con la restricción de que se preserve la cantidad de valores propios complementarios, es decir, la propiedad de que sus subdigrafos propios inducidos fuertemente conexos sean ciclos y vértices aislados.

#### Digrafo Infinito

Veamos que el digrafo Infinito definido en 2.1.3 y representado gráficamente en la Figura 23, posee exactamente tres valores propios complementarios.

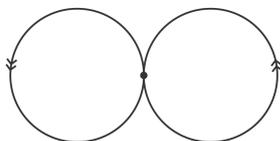


Figura 23: Representación esquemática del digrafo  $\infty(r, s)$ .

En efecto, puede verse que los únicos subdigrafos propios inducidos fuertemente conexos son (además de los vértices aislados) los ciclos  $\vec{C}_r$  y  $\vec{C}_s$ , señalados en verde en la Figura 24. Luego, por el Teorema 3.3.1, tenemos que

$$\Pi(\infty) = \{0, 1, \rho(\infty)\}.$$

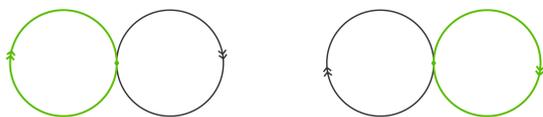


Figura 24: Los ciclos  $\vec{C}_r$  y  $\vec{C}_s$  en el digrafo Infinito.

Como vimos en el Ejemplo 2.2.14 como consecuencia del Teorema de Sachs tenemos que

$$p_\infty(x) = x^n - x^{s-1} - x^{r-1}.$$

Dado que  $\infty(r, s)$  y  $\infty(s, r)$  son isomorfos podemos asumir sin pérdida de generalidad  $r \leq s$ .

## Digrafo Theta

Veamos que el digrafo Theta definido en 2.1.3 representado gráficamente en la Figura 25 posee exactamente tres valores propios complementarios.

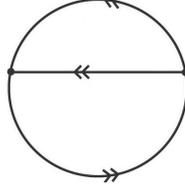


Figura 25: Representación esquemática del digrafo  $\theta(a, b, c)$ .

En efecto, puede verse que los únicos subdigrafos propios inducidos fuertemente conexos son (además de los vértices aislados) los ciclos  $\vec{C}_r$  y (si  $a \geq 1$ )  $\vec{C}_s$ , señalados en verde en la Figura 26, donde  $r = a + c + 2$  y  $s = b + c + 2$ .

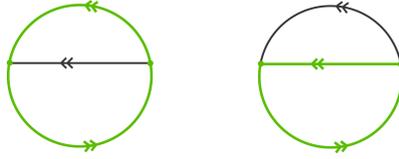


Figura 26: Los ciclos  $\vec{C}_r$  y  $\vec{C}_s$  en el digrafo Theta.

Luego, por el Teorema 3.3.1

$$\Pi(\theta) = \{0, 1, \rho(\theta)\}.$$

Como vimos en el Ejemplo 2.2.14 como consecuencia del Teorema de Sachs tenemos que

$$p_\theta(x) = x^n - x^{n-r} - x^{n-s} = x^n - x^b - x^a.$$

Dado que  $\theta(a, b, c)$  y  $\theta(b, a, c)$  son isomorfos y que los digrafos son simples podemos asumir sin pérdida de generalidad  $a \leq b$  y  $b > 0$ .

Los digrafos Infinito y Theta [13], son los únicos digrafos fuertemente conexos bicíclicos [2]. Ambos digrafos jugarán un rol fundamental en la identificación de los digrafos en  $\mathcal{SCD}_3$  dado que necesariamente alguno de ellos se encuentra (como subdigrafo) en un digrafo de estas características. La siguiente Proposición también puede ser vista como consecuencia del Teorema 7.2.2 en [2].

**Proposición 4.1.1.** *Si  $D$  es un digrafo fuertemente conexo distinto de un ciclo y de un vértice aislado, entonces posee un digrafo Infinito o un digrafo Theta como subdigrafo.*

*Demostración.* Dado que  $D$  es fuertemente conexo y distinto de un vértice aislado, tenemos que existe un ciclo  $\vec{C}_r$  subdigrafo de  $D$ . Por ser  $D$  distinto de un ciclo, existen vértices  $x, y$  en el ciclo y un camino simple no trivial de  $x$  a  $y$ , con todas sus aristas fuera del ciclo. Si  $x = y$ , tenemos que  $D$  posee un subdigrafo Infinito, mientras que si  $x \neq y$  tenemos  $D$  posee un subdigrafo Theta. □

**Observación 4.1.2.** Por la caracterización de los digrafos fuertemente conexos con uno y dos valores propios complementarios 3.2.4 3.2.5, tenemos que un digrafo fuertemente conexo distinto de un ciclo y de un vértice aislado verifica que su espectro complementario posee al menos tres elementos. Luego, si  $D$  es fuertemente conexo y su espectro complementario posee tres o más elementos, tendremos que posee un digrafo Infinito o un digrafo Theta como subdigrafo.

Presentaremos a continuación ejemplos de digrafos fuertemente conexos que poseen un digrafo Infinito como subdigrafo propio y cuyo espectro complementario posee cardinal igual a tres.

Por simplicidad nos referiremos a los vértices de  $\vec{C}_r$  como  $1, 2, \dots, r$ , y a los de  $\vec{C}_s$  como  $1', 2', \dots, s'$ , identificando  $1$  con  $1'$ .

### Digrafo Tipo 1

Sean  $r, s \geq 2$  naturales, llamaremos *digrafo Tipo 1* al digrafo  $D_1(r, s) = \infty(r, s) \cup \{e\}$ , donde  $e$  denota el arco  $(r, 2')$  representado gráficamente en la Figura 27.

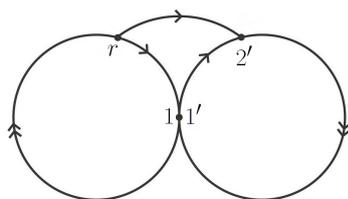


Figura 27: Digrafo Tipo 1.

Los únicos subdigrafos propios inducidos fuertemente conexos son (además de los vértices aislados) los ciclos  $\vec{C}_r$  y  $\vec{C}_s$  señalados en verde en la Figura 28. Luego por el Teorema 3.3.1 tenemos que,

$$\Pi(D_1) = \{0, 1, \rho(D_1)\}.$$

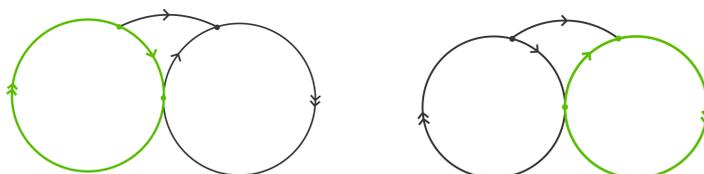


Figura 28: Ciclos  $\vec{C}_r$  y  $\vec{C}_s$  en el digrafo Tipo 1.

En este digrafo existe un único ciclo con  $n$  vértices como se muestra en la Figura 29, además de los ciclos  $\vec{C}_r$  y  $\vec{C}_s$ , todos ellos no disjuntos.

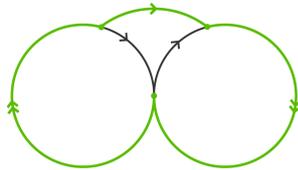


Figura 29: Ciclo  $\vec{C}_n$  en el digrafo Tipo 1.

Tenemos entonces que

$$\mathcal{L}_i = \emptyset \text{ para todo } i \neq r, s, n, \quad \mathcal{L}_r = \{\vec{C}_r\} \quad \mathcal{L}_s = \{\vec{C}_s\} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_n = \{\vec{C}_n\}.$$

Luego, por el Teorema de Sachs 2.2.13 tenemos que  $a_i = 0$  para todo  $i \neq r, s, n$  y  $a_r = a_s = a_n = -1$ . Como a su vez tenemos que  $n = r + s - 1$ , el polinomio característico resulta

$$p_{D_1}(x) = x^n - x^{n-r} - x^{n-s} - 1 = x^n - x^{s-1} - x^{r-1} - 1$$

donde  $n = r + s - 1$ .

Observemos que en un digrafo Tipo 1 el arco  $e$  distingue el ciclo  $\vec{C}_r$  del ciclo  $\vec{C}_s$  como se muestra en la Figura 30 por lo que no podremos suponer  $r \leq s$  como lo hicimos para el digrafo Infinito.

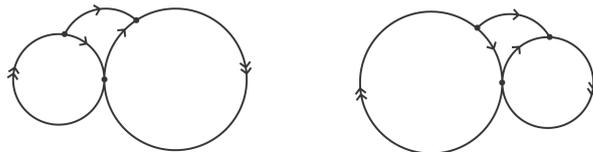


Figura 30: Digrafos  $D_1(r, s) \not\cong D_1(s, r)$  si  $r < s$ .

Sin embargo, el digrafo  $\infty(r, s) \cup \{e\}$ , con  $e = (s', 2)$  resulta isomorfo a  $D_1(s, r)$  (ver Figura 31). Luego, considerando  $D_1(r, s) = \infty(r, s) \cup \{e\}$ , donde  $e$  denota el arco  $(r, 2')$  o el arco  $(s', 2)$ , podemos hacer la suposición  $r \leq s$ .

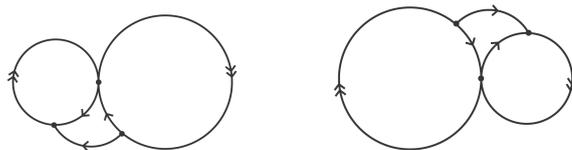


Figura 31: Los digrafos  $\infty(s, r) \cup \{(s', 2)\} \cong D_1(s, r)$ .

Sean  $2 \leq r \leq s$  naturales, llamaremos digrafo *Tipo 1a* a los digrafos de la forma  $\infty(r, s) \cup \{(r, 2')\}$  que serán denotados  $D_{1a}(r, s)$  y digrafos *Tipo 1b* a los digrafos de la forma  $\infty(r, s) \cup \{(s', 2)\}$  que serán denotados  $D_{1b}(r, s)$ .

### Digrafo Tipo 2

Sean  $r, s \geq 2$  naturales, llamaremos *digrafo Tipo 2* al digrafo  $D_2(r, s) = \infty(r, s) \cup \{e, \tilde{e}\}$ , donde  $e = (r, 2')$  y  $\tilde{e} = (s', 2)$ , representado gráficamente en la Figura 32.

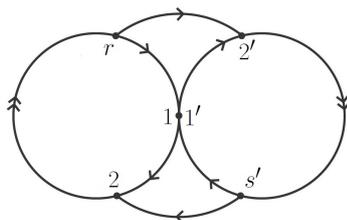


Figura 32: Digrafo Tipo 2.

Este digrafo también cumple que sus únicos subdigrafos propios inducidos fuertemente conexos son (además de los vértices aislados) los ciclos  $\vec{C}_r$ ,  $\vec{C}_s$  y  $\vec{C}_{n-1}$  (que se obtiene de eliminar el vértice  $1 = 1'$ ) señalados en verde en la Figura 33. Análogamente obtenemos

$$\Pi(D_2) = \{0, 1, \rho(D_2)\}.$$

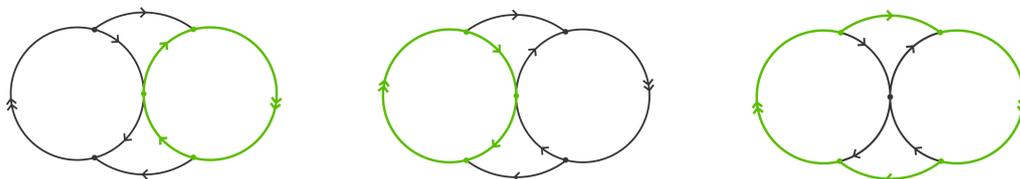


Figura 33: Subdigrafos propios inducidos fuertemente conexos del digrafo Tipo 2.

En este digrafo existen dos ciclos con  $n$  vértices señalados en verde en la Figura 34, además de los ciclos  $\vec{C}_r$ ,  $\vec{C}_s$  y  $\vec{C}_{n-1}$ , todos ellos no disjuntos.

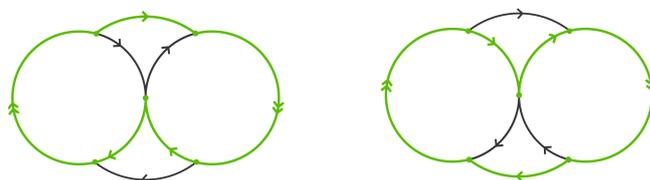


Figura 34: Ciclos  $\vec{C}_n$  y  $\vec{C}'_n$  en el digrafo Tipo 2.

Tenemos entonces que

$$\mathcal{L}_i = \emptyset \text{ para todo } i \neq r, s, n-1, n,$$

$$\mathcal{L}_r = \{\vec{C}_r\} \quad \mathcal{L}_s = \{\vec{C}_s\} \quad \mathcal{L}_{n-1} = \{\vec{C}_{n-1}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_n = \{\vec{C}_n, \vec{C}'_n\}.$$

Luego, por el Teorema de Sachs 2.2.13 tenemos que  $a_i = 0$  para todo  $i \neq r, s, n - 1, n$ ,  $a_r = a_s = a_{n-1} = -1$  y  $a_n = -2$ . Como a su vez tenemos que  $n = r + s - 1$ , el polinomio característico resulta

$$p_{D_2}(x) = x^n - x^{n-r} - x^{n-s} - x - 2 = x^n - x^{s-1} - x^{r-1} - x - 2.$$

Dado que  $D_2(r, s) \cong D_2(s, r)$  podemos suponer  $r \leq s$ .

**Observación 4.1.3.** Dados  $r \leq s$ , se verifica que  $\infty(r, s)$  es un subdigrafo propio de  $D_1(r, s)$  y  $D_1(r, s)$  es un subdigrafo propio de  $D_2(r, s)$ , además, todos los digrafos fuertemente conexos. Luego, por el Teorema 2.2.12 de Perron-Frobenius se tiene que

$$\rho(\infty(r, s)) < \rho(D_1(r, s)) < \rho(D_2(r, s)),$$

lo que nos permite afirmar que el espectro complementario distingue estos tres digrafos para todo  $r, s$ , con  $r \leq s$ .

Observemos que los digrafos Tipo 1 y Tipo 2 poseen, además del digrafo Infinito, un digrafo Theta como subdigrafo, señalados en violeta en la Figura 35.

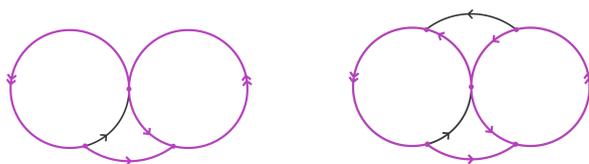


Figura 35: Subdigrafos Theta en los digrafos Tipo 1 y 2

Análogamente a lo que hicimos anterioremente, presentaremos ejemplos de digrafos fuertemente conexos que poseen un Theta subdigrafo propio y cuyo espectro complementario posee cardinal igual a tres, pero en esta ocasión pediremos a su vez que no posean un subdigrafo Infinito.

### Digrafo Tipo 3

Sean  $2 < i < j \leq n$  naturales, llamaremos *digrafo Tipo 3* al digrafo  $D_3(i, j) = \vec{C}_n \cup \{e, \tilde{e}\}$  donde  $e = (1, i)$  y  $\tilde{e} = (i - 1, j)$ , como se muestra en la Figura 36.

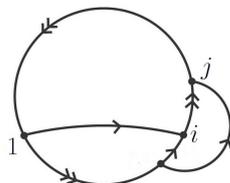


Figura 36: Digrafo Tipo 3.

Los únicos subdigrafos propios inducidos fuertemente conexos de  $D_3$  son (además de los vértices aislados) los ciclos  $\vec{C}_{n-(j-i)}$  y  $\vec{C}_{n-(i-2)}$  señalados en verde en la Figura 37.



Figura 37: Subdigrafos propios inducidos fuertemente conexos en el digrafo Tipo 3.

Luego, por el Teorema 3.3.1 tenemos que

$$\Pi(D_3) = \{0, 1, \rho(D_3)\}.$$

En este digrafo existe un único ciclo con  $n$  vértices señalado en verde en la Figura 38 además de los ciclos  $\vec{C}_{n-(i-2)}$  y  $\vec{C}_{n-(j-i)}$ , todos ellos no disjuntos.

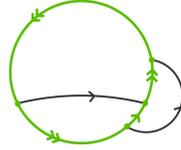


Figura 38: Ciclo  $\vec{C}_n$  en el digrafo Tipo 3.

Luego, por el Teorema de Sachs 2.2.13 tenemos que

$$p_{D_3}(x) = x^n - x^{i-2} - x^{j-i} - 1.$$

#### Digrafo Tipo 4

Sean  $n \geq 4$  y  $\frac{n}{2} \geq k \geq 2$  naturales. Consideremos el digrafo  $D_4 = \vec{C}_n \cup \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  donde  $e_i = (x_i, y_i)$  con  $1 < y_i < x_i < y_{i+1} < x_{i+1} \leq n$  para todo  $i = 1, \dots, k-1$ . Observemos que la condición  $1 < y_i$  así como  $y_i < x_i$  previene la aparición de un subdigrafo Infinito. La Figura 39 muestra un ejemplo de digrafo Tipo 4 con  $k = 3$ .

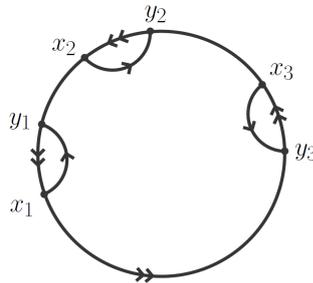


Figura 39: Digrafo tipo 4.

Los únicos subdigrafos propios inducidos de  $D_4$  fuertemente conexos son los ciclos  $\vec{C}_{r_1}, \dots, \vec{C}_{r_k}$  (donde  $C_{r_i}$  es el digrafo inducido por lo vértices entre  $y_i$  y  $x_i$  para todo  $i = 1, \dots, k$ ) señalados en verde en la Figura 40 además de los vértices aislados.

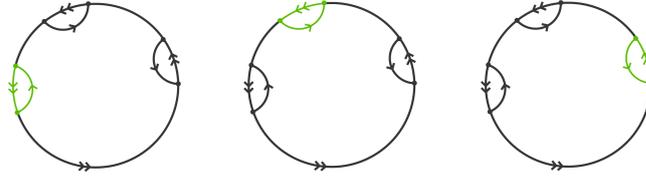


Figura 40: Subdigrafos propios inducidos fuertemente conexos en el digrafo Tipo 4.

Aplicando nuevamente el Teorema 3.3.1 tendremos que

$$\Pi(D_4) = \{0, 1, \rho(D_4)\}.$$

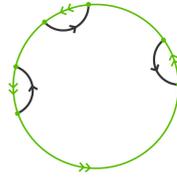


Figura 41: Ciclo  $\vec{C}_n$  en el digrafo Tipo 4.

Si bien podemos identificar fácilmente los digrafos lineales de un digrafo Tipo 4, el planteo de su polinomio característico resulta muy engorroso. Dado que los únicos ciclos en  $D_4$  son  $\vec{C}_n$  señalado en verde en la Figura 41 y los ciclos disjuntos  $\vec{C}_{r_1}, \dots, \vec{C}_{r_k}$ ; tenemos que los digrafos lineales estarán compuestos por un único ciclo  $\vec{C}_n$  o por  $l$  de los  $k$  ciclos  $\vec{C}_{r_i}$  variando  $l$  entre 1 y  $k$ .

### Digrafo Tipo 5

Sean  $3 < i < i + 1 < j \leq n$  naturales, llamaremos *digrafo Tipo 5* al digrafo  $D_5(i, j) = \vec{C}_n \cup \{e, e', e''\}$  donde  $e = (1, i)$ ,  $e' = (i - 1, j)$  y  $e'' = (j - 1, 2)$ , como se muestra en la Figura 42.

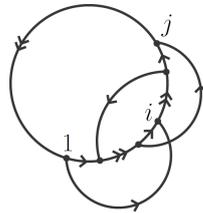


Figura 42: Digrafo Tipo 5.

Observar que tanto la condición  $3 < i$  como la condición  $i + 1 < j$  impide la aparición de un subdigrafo Infinito.

Los únicos subdigrafos propios inducidos de  $D_5$  fuertemente conexos son (además de los vértices aislados) los ciclos  $\vec{C}_{j-2}$ ,  $\vec{C}_{n-(j-i)}$  y  $\vec{C}_{n-(i-2)}$  señalados en verde en la Figura 43.

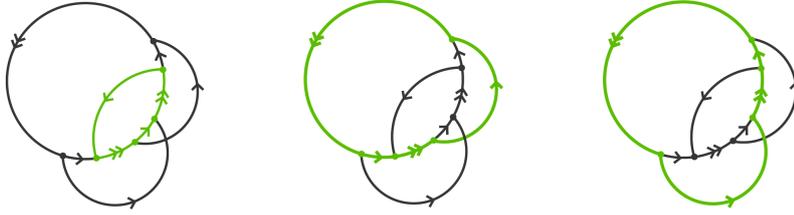


Figura 43: Subdigrafos propios inducidos fuertemente conexos en el digrafo Tipo 5

Aplicando nuevamente el Teorema 3.3.1 tendremos que

$$\Pi(D_5) = \{0, 1, \rho(D_5)\}.$$

En este digrafo existen dos ciclos con  $n$  vértices señalados en verde en la Figura 44 además de los ciclos  $\vec{C}_{n-(i-2)}$ ,  $\vec{C}_{n-(j-i)}$  y  $\vec{C}_{j-2}$ , todos ellos no disjuntos.

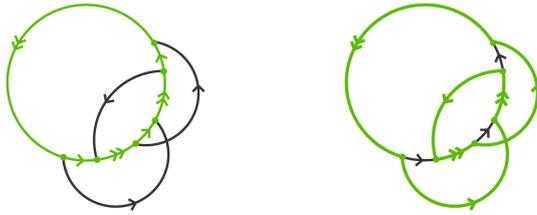


Figura 44: Ciclos  $\vec{C}_n$  y  $\vec{C}'_n$  en el digrafo Tipo 5.

Luego, por el Teorema de Sachs 2.2.13 tenemos que

$$p_{D_5}(x) = x^n - x^{i-2} - x^{j-i} - x^{n-(j-2)} - 2.$$

En cualquiera de los tres tipos de digrafos, el subdigrafo Theta se puede identificar considerando un ciclo con  $n$  vértices y cualquier otro arco, se muestran algunos ejemplos de subdigrafos Theta señalados en violeta en la Figura 45. Notar que al igual que el digrafo Theta, cualquiera de los tres tipos de digrafos no poseen un subdigrafo Infinito.

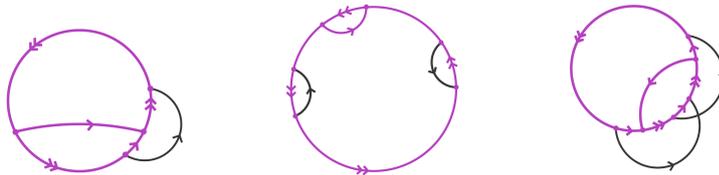


Figura 45: Subdigrafo Theta en los digrafos Tipo 3, 4 y 5.

Por conveniencia nos referiremos por *Familia Infinito* a los digrafos Infinito, Tipo 1 y Tipo 2, definidos en la sección anterior cuyas representaciones aparecen en las Figuras 23, 27 y 32. Análogamente, nos referiremos por *Familia Theta* a los digrafos

Theta, Tipo 3, Tipo 4 y Tipo 5, definidos en la sección anterior cuyas representaciones aparecen en las Figuras 25, 36, 39 y 42. Es fácil ver que los siete tipos de digrafos definidos son no isomorfos.

Nos dirigimos a probar que  $\mathcal{SCD}_3 = F_\infty \cup F_\theta$ . Para ello, comenzaremos por caracterizar parcialmente a los digrafos en  $\mathcal{SCD}_3$  que poseen un subdigrafo Infinito en primer lugar y a los que poseen un subdigrafo Theta, y no poseen un subdigrafo Infinito, en segundo lugar. Finalmente, utilizando la Proposición 4.1.1 obtendremos la caracterización general.

En lo que sigue, *subdigrafo fuertemente conexo generado por la remoción de un vértice  $v$*  referirá al subdigrafo de  $V \setminus \{v\}$  fuertemente conexo, maximal en el sentido de la inclusión entre todos los subdigrafos con estas características.

## 4.2. Identificación de la Familia Infinito

Comenzaremos por probar que los digrafos en  $\mathcal{SCD}_3$  que poseen un subdigrafo Infinito, pertenecen a la Familia Infinito, obteniendo un primer resultado de caracterización parcial.

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $D$  un digrafo en  $\mathcal{SCD}_3$ . Si  $D$  posee un subdigrafo Infinito, entonces pertenece a la Familia Infinito, es decir, es necesariamente un digrafo Infinito, un digrafo Tipo 1 o un digrafo Tipo 2.*

*Demostración.* Sea  $\infty(r, s)$  el subdigrafo Infinito de  $D$ . Supongamos en primer lugar que existe un vértice  $v$  en  $D$  exterior al subdigrafo  $\infty(r, s)$  (i.e. existen vértices además de aquellos en la coalescencia de ciclos) y sea  $D'$  el subdigrafo generado por los vértices en  $\infty(r, s)$ . Podemos observar que  $D'$  es un subdigrafo propio fuertemente conexo distinto de un ciclo y de un vértice aislado, lo que contradice el Teorema 3.3.1. Tenemos entonces que los vértices en  $D$  son precisamente los vértices de  $\infty(r, s)$ .

Estudiemos aquellos arcos en  $D$  distintos de los de  $\infty(r, s)$ . Supongamos que existe un arco entre los vértices de  $\vec{C}_r$ , considerando el digrafo  $D'$  generado por los vértices del ciclo en cuestión obtenemos un subdigrafo propio de  $D$  inducido fuertemente conexo, distinto de un ciclo y de un vértice aislado, lo que contradice el Teorema 3.3.1. La Figura 46 ilustra todos los posibles arcos entre los vértices de  $\vec{C}_r$  y un subdigrafo de  $D'$  en rojo que garantiza que  $D'$  es distinto de un ciclo y de un vértice aislado.

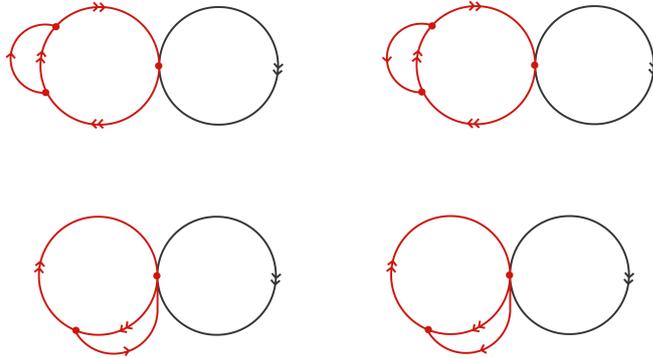


Figura 46: Representación esquemática de todos los posibles arcos  $(x, y)$  con  $x, y \in V(\vec{C}_r)$ .

Es claro que el mismo argumento permite descartar arcos entre los vértices de  $\vec{C}_s$ . Luego, los únicos arcos que podremos agregarle a la coalescencia de ciclos son aquellos con un vértice en cada ciclo.

Sea  $(x, y)$  un arco con  $x \in V(\vec{C}_r)$  e  $y \in V(\vec{C}_s)$ . Probaremos en primer lugar que para no incrementar la cantidad de valores propios complementarios, los arcos deben comenzar en el “último” vértice de  $\vec{C}_r$ , es decir,  $x = r$ .

En efecto, si  $x \neq r$ , podemos considerar el digrafo  $D'$  fuertemente conexo generado por la remoción de  $r$ .  $D'$  es un subdigrafo propio de  $D$  fuertemente conexo, distinto de un ciclo y de un vértice aislado ya que posee un subdigrafo distinto de un ciclo que se representa en rojo en la Figura 47 lo que contradice el Teorema 3.3.1 por lo que concluimos que  $x = r$ .

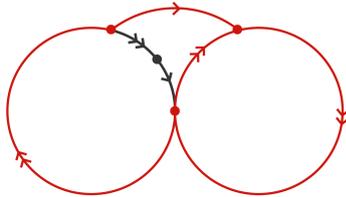


Figura 47: Arco añadido  $(x, y)$  con  $x \in \vec{C}_r$ ,  $y \in \vec{C}_s$  y  $x \neq r$ .

Un argumento análogo permite probar que el arco debe culminar en el segundo vértice de  $\vec{C}_s$ , es decir,  $y = 2'$  (ver Figura 48).

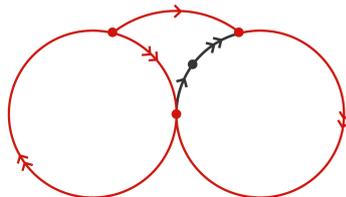


Figura 48: Arco añadido  $(x, y)$  con  $x \in \vec{C}_r$ ,  $y \in \vec{C}_s$  e  $y \neq 2'$ .

En conclusión, el único arco que podemos agregar de  $\vec{C}_r$  a  $\vec{C}_s$  es el arco  $(x, y) =$

$(r, 2')$ .

Analogamente, el único arco  $(x, y)$  que puede agregarse con  $x \in V(\vec{C}_s)$  e  $y \in V(\vec{C}_r)$  es  $(s', 2)$ .

Tenemos entonces tres posibilidades:

- ningún arco es agregado, obteniendo un digrafo Infinito,
- se agrega el arco  $(r, 2')$  o el arco  $(s', 2)$ , obteniendo un digrafo Tipo 1,
- se agregan ambos arcos  $(r, 2')$  y  $(s', 2)$ , obteniendo un digrafo Tipo 2.

□

**Corolario 4.2.2.** *Sea  $D$  un digrafo en  $\mathcal{SCD}_3$  con  $n$  vértices. Si  $D$  posee un digrafo isomorfo a  $\infty(r, s)$  entonces  $n = r + s - 1$ .*

### 4.3. Identificación de la Familia Theta

Al igual que hicimos en la subsección 4.2 con la Familia Infinito, ahora probaremos que los digrafos en  $\mathcal{SCD}_3$ , que poseen un subdigrafo Theta y no poseen un subdigrafo Infinito, pertenecen a la Familia Theta; de modo de obtener un segundo resultado de caracterización parcial.

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $D$  un digrafo en  $\mathcal{SCD}_3$ , que posee un subdigrafo Theta y no posee un subdigrafo Infinito. Entonces  $D$  pertenece a la Familia Theta, es decir,  $D$  es un digrafo Theta, un digrafo Tipo 3, Tipo 4 o Tipo 5.*

*Demostración.* Sea  $\theta(a, b, c)$  el subdigrafo Theta de  $D$ . Supongamos en primer lugar que existe un vértice  $v$  en  $D$  exterior a  $\theta(a, b, c)$  (i.e. existen otros vértices además de los del subdigrafo Theta). Sea  $D'$  el digrafo generado por los vértices en  $\theta(a, b, c)$ . Podemos observar que  $D'$  es un subdigrafo propio fuertemente conexo distinto de un ciclo y de un vértice aislado, lo que contradice el Teorema 3.3.1. Tenemos entonces que los vértices en  $D$  son precisamente los vértices de  $\theta(a, b, c)$ .

Analizaremos qué arcos pueden agregarse al digrafo  $\theta(a, b, c)$  usando la siguiente estrategia: para cada arco  $(x, y)$  que se agregue al digrafo  $\theta(a, b, c)$  intentaremos hallar un subdigrafo propio  $D'$  inducido, fuertemente conexo distinto de un ciclo y de un vértice aislado, como lo hicimos en la sección anterior. En las figuras que ilustren cada caso, un subdigrafo del digrafo  $D'$  será representado con color rojo. Cuando sea posible hallar tal digrafo, el arco  $(x, y)$  no podrá agregarse dado que contradeciría el Teorema 3.3.1. De lo contrario, tendremos que ver que el digrafo obtenido es uno de los cuatro digrafos en la Familia Theta. Más aún, tendremos que probar que cuando sea posible combinar arcos “permitidos”, también obtendremos uno de los cuatro digrafos de esta familia.

Por simplicidad distinguiremos ciertos vértices del digrafo  $\theta(a, b, c)$ . Denotaremos por  $v_a = \text{pred}_{\vec{P}_a}(v)$  y  $v_b = \text{pred}_{\vec{P}_b}(v)$  al vértice predecesor de  $v$  en los caminos  $\vec{P}_a$  y  $\vec{P}_b$

respectivamente. Denotaremos  $v_c = \text{suc}_{\vec{P}_c}(v)$  al sucesor de  $v$  en  $\vec{P}_c$ . Análogamente, denotaremos por  $w_a = \text{suc}_{\vec{P}_a}(w)$  y  $w_b = \text{suc}_{\vec{P}_b}(w)$  al sucesor de  $w$  en los caminos  $\vec{P}_a$  y  $\vec{P}_b$ . Denotaremos  $w_c = \text{pred}_{\vec{P}_c}(w)$  al predecesor de  $w$  en  $\vec{P}_c$ . Ver Figura 49.

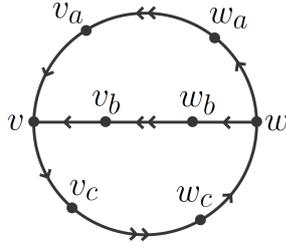


Figura 49: Digrafo Theta y algunos vértices distinguidos en él.

Para este análisis será útil estudiar los casos  $a \geq 1$  y  $a = 0$  separadamente.

**Caso 1**  $a \geq 1$

Separaremos a su vez en los siguientes cinco subcasos

1.  $x, y \in V(\vec{P}_{a+2}) \cup V(\vec{P}_{c+2})$ ,
2.  $x, y \in V(\vec{P}_{b+2})$ ,
3.  $x \in V(\vec{P}_{b+2})$  e  $y \in V(\vec{P}_{c+2})$  o viceversa,
4.  $x \in V(\vec{P}_{a+2})$  e  $y \in V(\vec{P}_{b+2})$ ,
5.  $x \in V(\vec{P}_{b+2})$  e  $y \in V(\vec{P}_{a+2})$ .

**Subcaso (1).** Probaremos que no pueden agregarse arcos  $(x, y)$  con  $x, y \in V(\vec{P}_{a+2}) \cup V(\vec{P}_{c+2})$ .

En efecto, supongamos que un arco de esa forma es agregado. Considerando  $D'$  digrafo generado por los vértices de  $V(\vec{P}_{a+2}) \cup V(\vec{P}_{c+2})$  (ver Figura 50 donde un subdigrafo de  $D'$  se señala en rojo) obtenemos un subdigrafo propio de  $D$  inducido y fuertemente conexo, distinto de un ciclo y de un vértice aislado lo que contradice el Teorema 3.3.1.

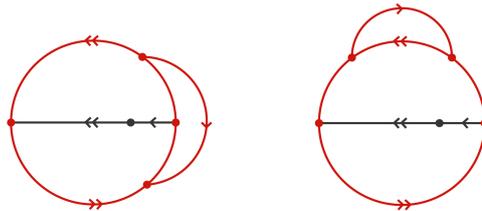


Figura 50: Arcos añadidos  $(x, y)$  con  $x, y \in V(\vec{P}_{a+2}) \cup V(\vec{P}_{c+2})$

Hemos probado que no pueden existir arcos entre vértices de  $\vec{P}_{a+2}$  o  $\vec{P}_{c+2}$ . Observemos que la misma prueba puede realizarse para  $a = 0$ .

**Subcaso (2).** Probaremos que tampoco pueden agregarse arcos  $(x, y)$  con  $x, y \in V(\vec{P}_{b+2})$ .

En efecto, supongamos que agregamos un arco de esa forma, luego considerando el digrafo  $D'$  generado por  $V(\vec{P}_{b+2}) \cup V(\vec{P}_{c+2})$  (ver Figura 51 donde un subdigrafo de  $D'$  se señala en rojo) obtenemos que existe un subdigrafo propio inducido fuertemente conexo distinto de un ciclo y de un vértice aislado lo que contradice el Teorema 3.3.1.

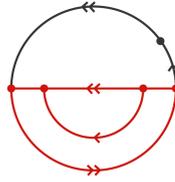


Figura 51: Arco añadido  $(x, y)$  con  $x, y \in V(\vec{P}_{b+2})$ .

Hemos probado que no existen arcos entre vértices de  $\vec{P}_{b+2}$ . Observemos que hemos usado el hecho de que  $a \geq 1$ .

**Subcaso (3)** Probaremos que tampoco pueden agregarse arcos  $(x, y)$  con  $x \in V(\vec{P}_{b+2})$  e  $y \in V(\vec{P}_{c+2})$  ni viceversa.

En efecto, si agregáramos un arco de esa forma, considerando el digrafo  $D'$  generado por  $V(\vec{P}_{b+2}) \cup V(\vec{P}_{c+2})$  (ver Figura 52 donde un subdigrafo de  $D'$  se señala en rojo) obtenemos que existe un subdigrafo propio inducido fuertemente conexo distinto de un ciclo y de un vértice aislado lo que contradice el Teorema 3.3.1.

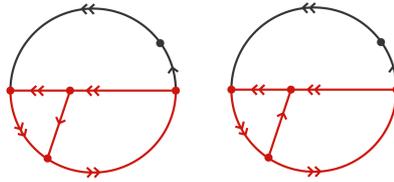


Figura 52: Arco añadido  $(x, y)$  con  $x \in V(\vec{P}_{a+2})$  e  $y \in V(\vec{P}_{c+2})$ , y viceversa.

Hemos probado que no existen arcos  $(x, y)$  con  $x \in V(\vec{P}_{b+2})$  e  $y \in V(\vec{P}_{c+2})$  ni viceversa.

**Subcaso (4).** Probaremos que el único arco  $(x, y)$  con  $x \in V(\vec{P}_{a+2})$  e  $y \in V(\vec{P}_{b+2})$  que puede agregarse es  $(v_a, w_b)$  (los vértices  $v, w, v_a$  y  $w_b$  pueden verse en la Figura 49).

Podemos asumir que  $x \neq v$  e  $y \neq w$  pues de lo contrario obtendríamos un caso

anteriormente estudiado.

Veamos en primer lugar que el vértice inicial  $x$  no puede ser otro que  $v_a$ . En efecto, si  $x \neq v_a$  considerando el digrafo fuertemente conexo  $D'$  generado por la remoción de  $v_a$  obtenemos un subdigrafo propio fuertemente conexo distinto de un ciclo y de un vértice aislado (ver Figura 53 en la que un subdigrafo de  $D'$  se señala en rojo) lo que contradice el Teorema 3.3.1. Luego, tenemos que  $x = v_a$ .

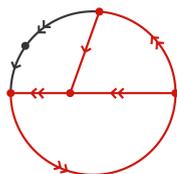


Figura 53: Arco añadido  $(x, y)$ , con  $x \in V(\vec{P}_{a+2})$ ,  $x \neq v_a$  e  $y \in V(\vec{P}_{b+2})$ .

Análogamente, el vértice final  $y$  no puede ser otro que  $w_b$ . En efecto, si  $x = v_a$  e  $y \neq w_b$  considerando el digrafo fuertemente conexo  $D'$  generado por la remoción de  $w_b$  obtenemos un subdigrafo propio fuertemente conexo distinto de un vértice y de un vértice aislado (ver Figura 54 en la que un subdigrafo de  $D'$  se señala en rojo) lo que contradice el Teorema 3.3.1. Luego, tenemos que  $y = w_b$ .

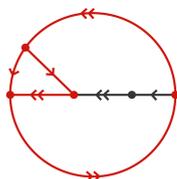


Figura 54: Arco añadido  $(v_a, y)$ , con  $y \in V(\vec{P}_{b+2})$  e  $y \neq w_b$ .

Concluimos entonces que el único arco que puede ser agregado en este subcaso es  $(v_a, w_b)$ . Observar que el digrafo  $\theta(a, b, c) \cup \{(v_a, w_b)\}$  es un digrafo Tipo 3 como lo muestra la Figura 55).

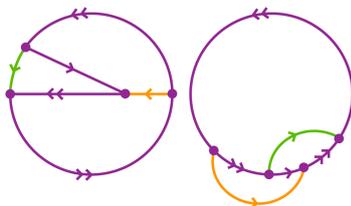


Figura 55: Arco añadido  $(v_a, w_b)$ , y su conversión en un digrafo Tipo 3.

**Subcaso (5).** Análogamente al subcaso anterior podemos probar que el único arco  $(x, y)$  con  $x \in V(\vec{P}_{b+2})$  e  $y \in V(\vec{P}_{a+2})$  que puede ser agregado es  $(v_b, w_a)$  obteniendo



con  $i = 1, \dots, k$  deben verificar que  $w < y_i < x_i < y_{i+1} < x_{i+1} < v$  para todo  $i = 1, \dots, k$ .

Si  $x < y$  existe  $z$  tal que  $x < z < y$ , ya que de lo contrario existirían multiaristas. Considerando el digrafo fuertemente conexo  $D'$  generado por la remoción del vértice  $z$  éste resulta distinto de un ciclo y de un vértice aislado (ver Figura 58 en la que un subdigrafo de  $D'$  se señala en rojo), lo que contradice que el Teorema 3.3.1.

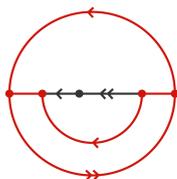


Figura 58: Arco añadido  $(x, y)$ , con  $x \in V(\vec{P}_{b+2})$ ,  $x < y$ .

Si  $y < x$  tenemos que  $w < y < x < v$  pues  $(x, y) = (v, w)$  se reduce al subcaso (1) y  $y = w$  o  $x = v$  implicaría la existencia de un subdigrafo Infinito, lo cual contradice nuestras hipótesis. Luego, obtendríamos un digrafo Tipo 4 como se muestra en la Figura 59.

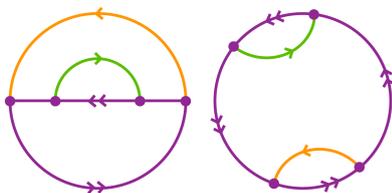


Figura 59: Arco añadido  $(x, y)$ , con  $x \in V(\vec{P}_{b+2})$ ,  $w < y < x < v$  y su conversión en un digrafo Tipo 4.

Analicemos ahora qué sucede si agregamos otro arco  $(x'y')$  con las mismas características. Los vértices de estos dos arcos debe verificar necesariamente una de las siguientes opciones

- $w < y \leq y' < x' \leq x < v$ ,
- $w < y < y' < x < x' < v$ ,
- $w < y < x < y' < x' < v$ .

Si  $w < y \leq y' < x' \leq x < v$ , al considerar el digrafo  $D'$  generado por los vértices entre  $y$  y  $x$  (ambos incluidos) obtenemos un digrafo fuertemente conexo distinto de un ciclo y de un vértice aislado (ver Figura 60 en la que un subdigrafo de  $D'$  se señala en rojo), lo que contradice el Teorema 3.3.1.

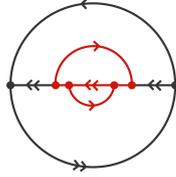


Figura 60: Arcos añadidos  $(x, y)$  y  $(x', y')$  con  $w < y \leq y' < x' \leq x < v$ .

Si  $w < y < y' < x < x' < v$  al considerar  $D'$  generado por los vértices entre  $y$  y  $x'$  (ambos incluidos) obtenemos un digrafo fuertemente conexo distinto de un ciclo y de un vértice aislado (ver Figura 61 en la que un subdigrafo de  $D'$  se señala en rojo), lo que contradice el Teorema 3.3.1.

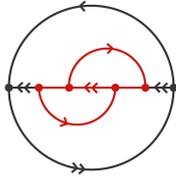


Figura 61: Arcos añadidos  $(x, y)$  y  $(x', y')$  con  $w < y < y' < x < x' < v$ .

Luego, tenemos que estos arcos necesariamente verifican que  $w < y < x < y' < x' < v$ . si agregamos  $k$  de estos arcos,  $(x_i, y_i)$  con  $i = 1, \dots, k$ , luego  $w < y_i < x_i < y_{i+1} < x_{i+1} < v$  para todo  $i = 1, \dots, k$  (reordenando en caso de ser necesario) lo que resulta ser un digrafo Tipo 4 como se muestra en la Figura 62.

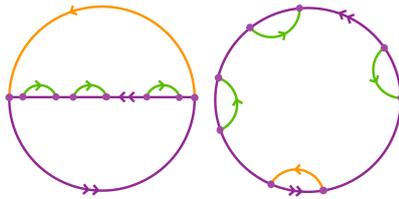


Figura 62: Arcos añadidos  $(x_i, y_i)$  con  $w < y_i < x_i < y_{i+1} < x_{i+1} < v$ ,  $i = 1, \dots, k$  y su conversión en un digrafo Tipo 4.

**Subcaso (3).** Este subcaso se reduce a los subcasos (1) o (2) pues por ser  $a = 0$ ,  $\vec{P}_{a+2}$  contiene únicamente dos vértices que pueden ser vistos como vértices de  $\vec{P}_{b+2}$ .

**Subcaso (4).** Probaremos que si un arco  $(x, y)$  con  $x \in V(\vec{P}_{b+2})$  e  $y \in V(\vec{P}_{c+2})$  puede agregarse, entonces  $x = v_b$  (ver Figura 49 para identificar  $v_b$ ) y solo un arco de este tipo puede ser agregado.

En efecto, supongamos que agregamos un arco  $(x, y)$  con  $x \neq v_b$ . luego, considerando el digrafo fuertemente conexo  $D'$  generado por la remoción de  $v_b$ , obtenemos un digrafo distinto de un ciclo y de un vértice aislado (ver Figura 63 en la que un subdigrafo de  $D'$  se señala en rojo) lo que contradice el Teorema 3.3.1. Luego,  $x = v_b$ .

Tenemos que  $x = v_b$ , luego  $y \neq v$  por ser  $D$  simple; por otra parte  $y \neq w$  dado

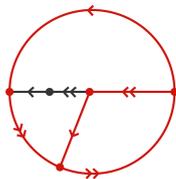


Figura 63: Arco añadido  $(x, y)$ , con  $x \in V(\vec{P}_{b+2})$ ,  $x \neq v_b$  e  $y \in V(\vec{P}_{c+2})$ .

que  $D$  no posee un subdigrafo Infinito. Finalmente, obtenemos un digrafo Tipo 3 como se muestra en la Figura 64.

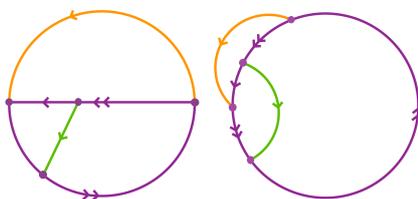


Figura 64: Arco añadido  $(v_b, y)$  con  $y \in \vec{P}_{c+2}$  y su conversión en un digrafo Tipo 3.

Observemos que solo uno de estos arcos puede ser añadido, de lo contrario, considerando el digrafo fuertemente conexo  $D'$  inducido por la remoción de  $v$ , obtenemos un digrafo distinto de un ciclo y de un vértice aislado (ver Figura 65 en la que un subdigrafo de  $D'$  se señala en rojo) lo que contradice el Teorema 3.3.1.

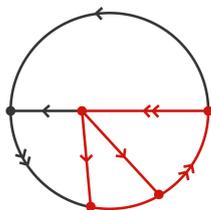


Figura 65: Arcos añadidos  $(v_b, y)$  y  $(v_b, y')$  con  $x \in V(\vec{P}_{c+2})$ .

**Subcaso (5).** Probaremos que si un arco  $(x, y)$  con  $x \in V(\vec{P}_{c+2})$  e  $y \in V(\vec{P}_{b+2})$  puede añadirse, entonces  $y = w_b$  y solo un arco de este tipo puede ser agregado.

En efecto, supongamos que agregamos un arco  $(x, y)$  con  $y \neq w_b$ . luego, considerando el digrafo fuertemente conexo  $D'$  generado por la remoción de  $w_b$ , obtenemos un digrafo distinto de un ciclo y de un vértice aislado (ver Figura 66 en la que un subdigrafo de  $D'$  se señala en rojo) lo que contradice el Teorema 3.3.1. Luego,  $y = w_b$ .

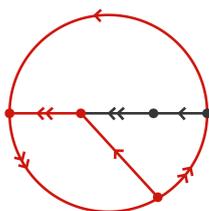


Figura 66: Arco añadido  $(x, y)$ , con  $x \in V(\vec{P}_{c+2})$ ,  $x \in V(\vec{P}_{b+2})$  y  $y \neq w_b$ .

Si  $y = w_b$  tenemos que  $y \neq v$  por ser  $D$  simple; por otra parte  $x \neq v$  dado que  $D$  no posee un subdigrafo Infinito. Finalmente, obtenemos un digrafo Tipo 3 como se muestra en la Figura 67.

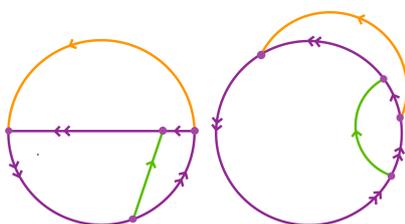


Figura 67: Arco añadido  $(x, w_b)$  y su conversión en un digrafo Tipo 3.

Observemos que solo uno de estos arcos puede ser añadido, de lo contrario, considerando el digrafo fuertemente conexo  $D'$  inducido por la remoción de  $v$ , obtenemos un digrafo distinto de un ciclo y de un vértice aislado (ver Figura 68 en la que un subdigrafo de  $D'$  se señala en rojo) lo que contradice el Teorema 3.3.1.

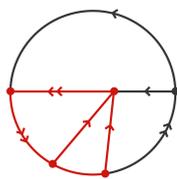


Figura 68: Arcos añadidos  $(x, w_b)$  y  $(x', w_b)$ .

Hasta ahora hemos probado que en caso de que  $D$  posea un  $\theta(0, b, c)$ -subdigrafo, los únicos arcos que podrán agregarse de modo de mantener los tres valores propios complementarios del digrafo son aquellos que se obtienen en los subcasos (2), (4)

y (5). Estudiemos ahora que sucede si intentamos añadir simultáneamente arcos provenientes de

- Subcasos (2) y (4),
- Subcasos (2) y (5),
- Subcasos (4) y (5).

En primer lugar veremos que no pueden agregarse simultáneamente arcos provenientes de los subcasos (2) y (4). Consideremos un arco  $(v_b, y)$  con  $y \in V(\vec{P}_{c+2})$  y un arco  $(x', y')$  con  $x', y' \in V(\vec{P}_{b+2})$  y  $w < y' < x' < v$ , luego, considerando el digrafo fuertemente conexo  $D'$  generado por la remoción de  $v$  (ver Figura 69 en la que un subdigrafo de  $D'$  se señala en rojo), obtenemos un digrafo distinto de un ciclo y de un vértice aislado lo que contradice el Teorema 3.3.1.

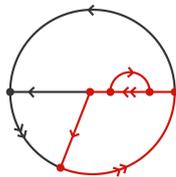


Figura 69: Arcos añadidos  $(v_b, y)$  y  $(x', y')$  con  $y' < x'$ .

En segundo lugar veremos que no pueden agregarse simultáneamente arcos provenientes de los subcasos (2) y (5). Consideremos un arco  $(x, y)$  con  $x, y \in V(\vec{P}_{b+2})$  con  $w < y < x < v$  y un arco  $(x', w_b)$  con  $x' \in V(\vec{P}_{c+2})$ . Luego, considerando el digrafo fuertemente conexo  $D'$  generado por la remoción de  $w$  (ver Figura 70 en la que un subdigrafo de  $D'$  se señala en rojo), obtenemos un digrafo distinto de un ciclo y de un vértice aislado lo que contradice el Teorema 3.3.1.

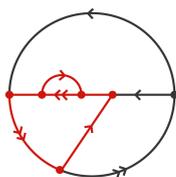


Figura 70: Arcos añadidos  $(x, w_b)$  y  $(x', y')$  con  $y' < x'$ .

Finalmente, analizaremos qué sucede si agregamos arcos provenientes de los subcasos (4) y (5) simultáneamente. Supongamos que tenemos un arco  $(v_b, y)$  con  $y \in V(\vec{P}_{c+2})$  y un arco  $(x, w_b)$  con  $x \in V(\vec{P}_{c+2})$ . Asumamos el orden natural en  $\vec{P}_{c+2}$  (creciente de izquierda a derecha).

Si  $y \leq x$ , considerando el digrafo fuertemente conexo  $D'$  generado por la remoción de  $v$  (ver Figura 71 en la que un subdigrafo de  $D'$  se señala en rojo) obtenemos un digrafo distinto de un ciclo y de un vértice aislado lo que contradice el Teorema 3.3.1.

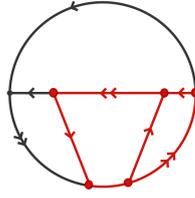


Figura 71: Arcos añadidos  $(v_a, y)$  y  $(x, w_b)$  con  $y \leq x$ .

Si  $x < y$  y existe  $z \in V(\vec{P}_{c+2})$  tal que  $x < z < y$ , considerando el digrafo fuertemente conexo  $D'$  generado por la remoción de  $z$  (ver Figura 72 en la que un subdigrafo de  $D'$  se señala en rojo) obtenemos un digrafo distinto de un ciclo y de un vértice aislado lo que contradice el Teorema 3.3.1.

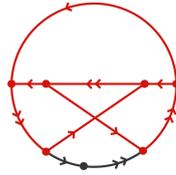


Figura 72: Arcos añadidos  $(v_a, y)$  y  $(x, w_b)$  con  $x < y$ .

Si  $x < y$  y no existe tal  $z$ , tenemos que  $y = \text{suc}_{\vec{P}_c}(x)$  y obtenemos un digrafo Tipo 5 como se muestra en la Figura 73.

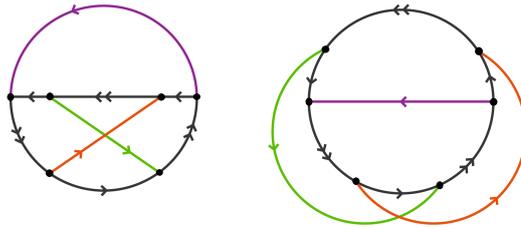


Figura 73: Arcos añadidos  $(v_a, y)$  y  $(x, w_b)$  con  $y = \text{suc}_{\vec{P}_c}(x)$  y su conversión en un digrafo Tipo 5.

Lo que termina la prueba. □

#### 4.4. Identificación de digrafos fuertemente conexos con tres valores propios complementarios

En esta subsección describiremos todos los digrafos en  $\mathcal{SCD}_3$  a partir de los resultados anteriores.

**Teorema 4.4.1.** *Si  $D$  un digrafo en  $\mathcal{SCD}_3$ , entonces  $D$  pertenece a la Familia Infinito o a la Familia Theta, es decir,  $D$  es alguno de los siguientes: un digrafo Infinito, un digrafo Theta, un digrafo Tipo 1, un digrafo Tipo 2, un digrafo Tipo 3, un digrafo Tipo 4 o un digrafo Tipo 5.*

*Demostración.* Dado que  $D$  es un digrafo en  $\mathcal{SCD}_3$ , sabemos que  $D$  es distinto de un ciclo y de un vértice aislado, luego, por la Proposición 4.1.1 tenemos que  $D$  posee un subdigrafo Infinito o un subdigrafo Theta.

Si  $D$  posee un subdigrafo Infinito por el Teorema 4.2.1 sabemos que  $D$  pertenece a la Familia Infinito, es decir,  $D$  es alguno de los siguientes: un digrafo Infinito, un digrafo Tipo 1 o un digrafo Tipo 2.

Si  $D$  no posee un subdigrafo Infinito entonces el digrafo  $D$  verifica las hipótesis del Teorema 4.3.1, por lo cual  $D$  pertenece a la Familia Theta, es decir,  $D$  es alguno de los siguientes: un digrafo Theta, un digrafo Tipo 3, un digrafo Tipo 4 o un digrafo Tipo 5.

□

En vista de la Proposición 3.1.2, podemos establecer la siguiente generalización para digrafos con tres valores propios complementarios.

**Corolario 4.4.2.** *Si  $D$  es un digrafo con tres valores propios complementarios entonces sus componentes fuertemente conexas son vértices aislados, ciclos o cualquiera de los siete tipos de digrafos presentados anteriormente. Más aún, al menos alguno de esos siete tipos de digrafos debe aparecer y en caso de que más de uno lo haga, deben poseer igual radio espectral.*

## 5. Espectro complementario de la Familia Theta y la Familia Infinito

El problema que motivó este trabajo fue establecer si los digrafos fuertemente conexos quedan o no determinados por su espectro complementario, pregunta que para grafos se mantiene abierta. En este sentido, comenzamos estudiando los digrafos en  $\mathcal{SCD}_1 \cup \mathcal{SCD}_2$  pero concluimos que su espectro complementario sí los determina, como se indica en la Proposición 3.2.7.

En esta sección nos ocuparemos de estudiar el espectro complementario de los digrafos en  $\mathcal{SCD}_3$  para poder dar respuesta al problema originalmente planteado. Vale la pena observar que, a diferencia de los digrafos en  $\mathcal{SCD}_1 \cup \mathcal{SCD}_2$ , el espectro complementario de estos digrafos es a priori desconocido, aunque se reduce al estudio de su radio espectral dado que  $\Pi(D) = \{0, 1, \rho(D)\}$  por el Teorema 3.3.2.

En primer lugar trabajaremos con la Familia Infinito y estableceremos clases de digrafos con espectro complementario único, siendo cada uno de los tipos de digrafos que la componen los candidatos naturales. Para algunos probaremos que constituyen una clase DCS, mientras que para otros ofreceremos ejemplos de pares de digrafos del mismo orden no isomorfos complementariamente coespectrales. Análogamente, realizaremos el análisis de la Familia Theta y para dos de los cuatro tipos de digrafos que la componen, exhibiremos familias de digrafos no isomorfos del mismo orden complementariamente coespectrales.

En esta sección daremos respuesta al problema inicial y concluiremos que los digrafos en general no quedan caracterizados por su espectro complementario, aún pidiendo conexión fuerte [4].

### 5.1. Clases de digrafos con espectro complementario único en la Familia Infinito

Comenzaremos con la prueba de un lema que será de utilidad.

**Lema 5.1.1.** *Sean  $2 \leq r \leq s$ ,  $2 \leq r' \leq s'$  naturales tales que  $r + s = r' + s'$ . Si  $r' > r$  entonces  $s \geq r + 2$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $s \geq r$  por lo cual bastará probar que  $s \neq r$  y  $s \neq r + 1$ . Observemos en primer lugar que  $r' > r$  implica  $s' < s$  ya que  $r + s = r' + s'$ . Si  $s = r$  tenemos que  $r' > r = s > s'$  lo cual contradice la desigualdad  $r' \leq s'$ . Por otro lado, si  $s = r + 1$  tenemos que  $s \leq r'$  lo que implica que  $r \geq s'$  ya que  $r + s = r' + s'$ , luego,  $s \leq r' \leq s' \leq r$ . Como además  $r \leq s$  tenemos que  $s = r' = s' = r$ , contradiciendo que  $r' > r$ .  $\square$

**Teorema 5.1.2.** Sean  $r, s$  naturales tales que  $2 \leq r \leq s$ ,  $3 \leq s$ ,  $r + s - 1 = n$ . Se cumple que  $\rho(\infty(r, s)) > \rho(\infty(r + 1, s - 1))$ .

*Demostración.* Sean  $p_1(x) = x^n - x^{n-r} - x^{n-s}$  y  $p_2(x) = x^n - x^{n-r-1} - x^{n-s+1}$ , los polinomios característicos de  $\infty(r, s)$  y  $\infty(r + 1, s - 1)$  respectivamente. Sean  $\rho_1 = \rho(\infty(r, s))$  y  $\rho_2 = \rho(\infty(r + 1, s - 1))$ . Consideremos  $h(x) = p_2(x) - p_1(x)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} h(x) &= -x^{n-r-1} + x^{n-r} - x^{n-s+1} + x^{n-s} = \\ &= x^{n-s}(-x^{s-r-1} + x^{s-r} - x + 1) = x^{n-s}(x - 1)(x^{s-r-1} - 1). \end{aligned}$$

Por el Lema 5.1.1 tenemos que  $s \geq r + 2$ , luego, es fácil ver que  $h(x) > 0$  para todo  $x > 1$  y  $h(\rho_2) > 0$  por ser  $\rho_2 > 1$ . Tenemos entonces que

$$0 < h(\rho_2) = p_2(\rho_2) - p_1(\rho_2) = -p_1(\rho_2).$$

Si probamos que  $p_1$  es estrictamente creciente en  $(1, +\infty)$ , habremos probado que  $\rho_2 < \rho_1$  pues  $p_1(\rho_2) < 0 = p_1(\rho_1)$ .

Efectivamente,  $p_1'(x) = nx^{n-1} - (n-r)x^{n-r-1} - (n-s)x^{n-s-1}$  que posee exactamente una raíz positiva por la regla de Descartes. Sabemos que  $p_1(0) = 0$  y  $p_1(1) = -1$ , por el Teorema del valor medio de Lagrange tenemos que existe  $c$  en el intervalo  $(0, 1)$  tal que  $p_1'(c) = -1$ . Por otro lado, tenemos que  $p_1'(1) = r - n + s = 1 > 0$ , luego, existe una raíz de  $p_1'$  en  $(c, 1)$  por Bolzano, que sabemos es la única en  $(0, \infty)$ . Luego,  $p_1'(x) > 0$  para todo  $x$  en  $(1, \infty)$  lo que termina de probar que  $p_1$  es estrictamente creciente y finaliza la prueba.  $\square$

**Corolario 5.1.3.** Sean  $3 \leq n$ , sean  $\rho$  y  $\rho'$  los radios espectrales de  $\infty(r, s)$  y  $\infty(r', s')$  respectivamente, ambos de  $n$  vértices. Si  $r < r'$  entonces se cumple que  $\rho > \rho'$ .

El resultado anterior permite establecer un orden (mediante su radio espectral) en la clase de digrafos Infinito de orden  $n$ .

La siguiente figura muestra los digrafos de orden 9 ordenados de acuerdo a su radio espectral (que es en definitiva el orden lexicográfico).

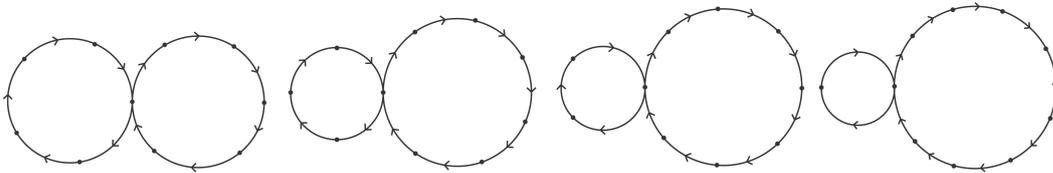


Figura 74:  $\infty(5, 5) \preceq_3 \infty(4, 6) \preceq_3 \infty(3, 7) \preceq_3 \infty(2, 8)$ .

Como mencionamos anteriormente, el estudio del espectro complementario de estos digrafos se reduce al de su radio espectral por lo que podemos enunciar el siguiente resultado.

**Corolario 5.1.4.** El orden lexicográfico define un orden total en la clase de digrafos Infinito. En particular, la clase de digrafos Infinito es DCS.

El siguiente ejemplo muestra que la clase de digrafos Tipo 1 no queda caracterizada por su espectro complementario.

**Ejemplo 5.1.5.**

Sean  $2 \leq r < s$  naturales. Los digrafos  $D_{1a}(r, s)$  y  $D_{1b}(r, s)$  representados gráficamente en la Figura 75, son no isomorfos, sin embargo, cumplen que  $P_{D_{1a}}(x) = x^n - x^{s-1} - x^{r-1} - 1 = P_{D_{1b}}(x)$ , lo que prueba que son coespectrales y en particular, complementariamente coespectrales dado que su radio espectral coincide.

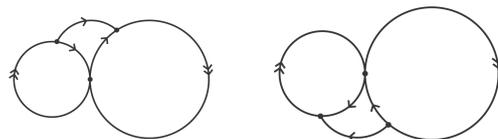


Figura 75: Los digrafos  $D_{1a}(r, s)$  y  $D_{1b}(r, s)$

El anterior ejemplo es el primero entre otros que veremos a continuación, que muestra que el espectro complementario no permite distinguir en general los digrafos fuertemente conexos del mismo orden no isomorfos. Estamos en condiciones de enunciar el siguiente resultado.

**Teorema 5.1.6.** *La clase de digrafos fuertemente conexos de orden  $n$  no es DCS para todo  $n \geq 4$ .*

Veamos que el espectro complementario sí distingue las clases de digrafos Tipo 1a y Tipo 1b separadamente.

**Teorema 5.1.7.** *Sean  $r, s$  naturales tales que  $2 \leq r \leq s$ ,  $3 \leq s$  y  $r + s - 1 = n$ . Se cumple que  $\rho(D_{1a}(r, s)) > \rho(D_{1a}(r + 1, s - 1))$ .*

*Demostración.* Sean  $p_1(x) = x^n - x^{n-r} - x^{n-s} - 1$  y  $p_2(x) = x^n - x^{n-r-1} - x^{n-s+1} - 1$  los polinomios característicos de los digrafos  $D_{1a}(r, s)$  y  $D_{1a}(r+1, s-1)$  respectivamente. Sean  $\rho_1 = \rho(D_{1a}(r, s))$  y  $\rho_2 = \rho(D_{1a}(r+1, s-1))$ . Consideremos  $h(x) = p_2(x) - p_1(x)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} h(x) &= -x^{n-r-1} + x^{n-r} - x^{n-s+1} + x^{n-s} = \\ &= x^{n-s}(-x^{s-r-1} + x^{s-r} - x + 1) = x^{n-s}(x-1)(x^{s-r-1} - 1). \end{aligned}$$

Por el Lema 5.1.1 tenemos que  $s \geq r + 2$ , luego, es fácil ver que  $h(x) > 0$  para todo  $x > 1$  y  $h(\rho_2) > 0$  por ser  $\rho_2 > 1$ . Tenemos entonces que

$$0 < h(\rho_2) = p_2(\rho_2) - p_1(\rho_2) = -p_1(\rho_2).$$

Si probamos que  $p_1$  es estrictamente creciente en  $(1, +\infty)$ , habremos probado que  $\rho_2 < \rho_1$  pues  $p_1(\rho_2) < 0 = p_1(\rho_1)$ .

Efectivamente,  $p_1'(x) = nx^{n-1} - (n-r)x^{n-r-1} - (n-s)x^{n-s-1}$  que posee exactamente una raíz positiva por la regla de Descartes.

Sabemos que  $p_1(0) = -1$  y  $p_1(1) = -2$ , por el Teorema del valor medio de Lagrange tenemos que existe  $c$  en  $(0, 1)$  tal que  $p_1'(c) = -1$ . Por otro lado, tenemos que  $p_1'(1) = r - n + s = 1 > 0$ , luego, existe una raíz de  $p_1'$  en  $(c, 1)$  por Bolzano, que sabemos es única en  $(0, \infty)$ . Luego,  $p_1'(x) > 0$  para todo  $x$  en  $(1, \infty)$  lo que termina de probar que  $p_1$  es estrictamente creciente.  $\square$

**Corolario 5.1.8.** Sean  $3 \leq n$ ,  $2 \leq r \leq s$ ,  $2 \leq r' \leq s'$ . Sean  $\rho$  y  $\rho'$  los radios espectrales de  $D_{1a}(r, s)$  y  $D_{1a}(r', s')$  respectivamente, ambos de  $n$  vértices. Si  $r < r'$  entonces se cumple que  $\rho > \rho'$ .

Al igual que para los digrafos Infinito, podemos establecer un orden (mediante el radio espectral) en la clase de digrafos Tipo 1a de orden  $n$ . La siguiente figura muestra los digrafos Tipo 1a de orden 9 ordenados de acuerdo a su radio espectral (que es en definitiva el orden lexicográfico).

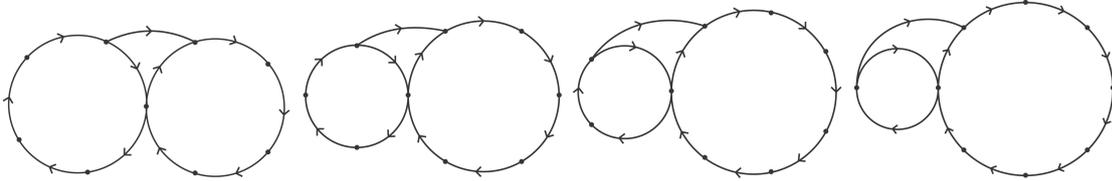


Figura 76:  $D_{1a}(5, 5) \preceq_3 D_{1a}(4, 6) \preceq_3 D_{1a}(3, 7) \preceq_3 D_{1a}(2, 8)$ .

Nuevamente, dado que el estudio del espectro complementario de estos digrafos se reduce al de su radio espectral, podemos enunciar el siguiente resultado.

**Corolario 5.1.9.** El orden lexicográfico define un orden total en la clase de digrafos Tipo 1a. En particular, la clase de digrafos Tipo 1a es DCS.

**Observación 5.1.10.** Los mismos resultados obtenidos para los digrafos Tipo 1a pueden probarse de forma análoga para los digrafos Tipo 1b.

Completaremos el estudio de los digrafos de la Familia Infinito con el de la clase de digrafos Tipo 2.

**Teorema 5.1.11.** Sean  $r, s$  naturales tales que  $2 \leq r \leq s$ ,  $3 \leq s$  y  $r + s - 1 = n$ . Se cumple que  $\rho(D_2(r, s)) > \rho(D_2(r + 1, s - 1))$ .

*Demostración.* Sean  $p_1(x) = x^n - x^{n-r} - x^{n-s} - x - 2$  y  $p_2(x) = x^n - x^{n-r-1} - x^{n-s+1} - x - 2$  los polinomios característicos de los digrafos  $D_2(r, s)$  y  $D_2(r + 1, s - 1)$  respectivamente. Sean  $\rho_1 = \rho(D_2(r, s))$  y  $\rho_2 = \rho(D_2(r + 1, s - 1))$ . Consideremos  $h(x) = p_2(x) - p_1(x)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} h(x) &= -x^{n-r-1} + x^{n-r} - x^{n-s+1} + x^{n-s} = \\ &= x^{n-s}(-x^{s-r-1} + x^{s-r} - x + 1) = x^{n-s}(x - 1)(x^{s-r-1} - 1). \end{aligned}$$

Por el Lema 5.1.1 tenemos que  $s \geq r + 2$ , luego, es fácil ver que  $h(x) > 0$  para todo  $x > 1$  y  $h(\rho_2) > 0$  por ser  $\rho_2 > 1$ . Tenemos entonces que

$$0 < h(\rho_2) = p_2(\rho_2) - p_1(\rho_2) = -p_1(\rho_2).$$

Si probamos que  $p_1$  es estrictamente creciente en  $(1, +\infty)$ , habremos probado que  $\rho_2 < \rho_1$  pues  $p_1(\rho_2) < 0 = p_1(\rho_1)$ .

Efectivamente,  $p_1'(x) = nx^{n-1} - (n-r)x^{n-r-1} - (n-s)x^{n-s-1} - 1$  que posee exactamente una raíz positiva por la regla de Descartes. A su vez sabemos que  $p_1'(1) = r - n + s - 1 = 0$ , luego,  $p_1'(x) > 0$  para todo  $x$  en  $(1, \infty)$  lo que termina de probar que  $p_1$  es estrictamente creciente.  $\square$

**Corolario 5.1.12.** Sean  $3 \leq n$ ,  $2 \leq r \leq s$ ,  $2 \leq r' \leq s'$  naturales. Sean  $\rho$  y  $\rho'$  los radios espectrales de  $D_2(r, s)$  y  $D_2(r', s')$  respectivamente, ambos de  $n$  vértices. Si  $r < r'$  entonces se cumple que  $\rho > \rho'$ .

Una vez más podemos establecer un orden (mediante el radio espectral) en la clase de digrafos Tipo 2 de orden  $n$ , la siguiente figura muestra los digrafos Tipo 2 de orden 9 ordenados de acuerdo a su radio espectral (que es en definitiva el orden lexicográfico).

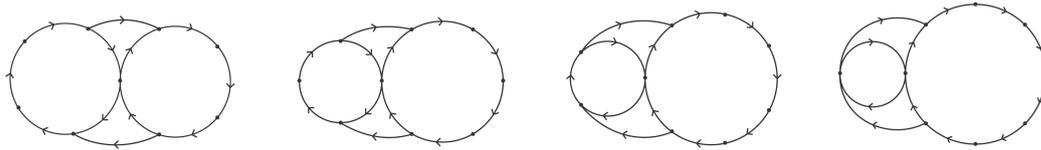
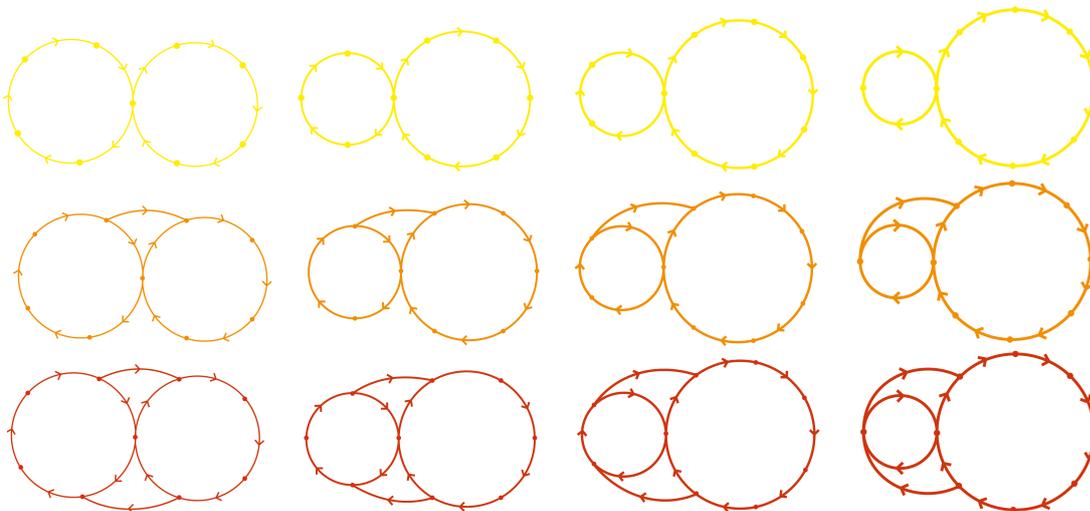


Figura 77:  $D_2(5, 5) \preceq_3 D_2(4, 6) \preceq_3 D_2(3, 7) \preceq_3 D_2(2, 8)$ .

**Corolario 5.1.13.** El orden lexicográfico define un orden total en la clase de digrafos Tipo 2. En particular, la clase de digrafos Tipo 2 es DCS.

Por la Observación 4.1.3 podemos comparar a su vez, los digrafos Infinito, Tipo 1a (o Tipo 1b) y los digrafos Tipo 2 con parámetros  $r$  y  $s$  dados. La siguiente figura muestra los digrafos ordenados de acuerdo a su radio espectral horizontalmente (por grosor) y verticalmente (por intensidad de color).



En esta subsección hemos logrado probar que cada una de las clases de digrafos Infinito, Tipo 1a, Tipo 1b y Tipo 2 son DCS. Sin embargo, hemos obtenido pares digrafos no isomorfos de orden arbitrario, complementariamente coespectrales, considerando ciertos digrafos en la clase Tipo 1a y la Tipo 1b. Esto muestra que los digrafos Tipo 1 no constituyen una clase DCS, menos aún, la clase de digrafos de la Familia Infinito. En particular, hemos dado respuesta (negativa) al problema de establecer si los digrafos fuertemente conexos quedan o no determinados por su espectro complementario.

## 5.2. Clases de digrafos con espectro complementario único en la Familia Theta

En esta sección no supondremos  $a \leq b$  sobre los parámetros del digrafo  $\theta(a, b, c)$  hasta que se explicita.

**Teorema 5.2.1.** *Sean  $a, b, c$  enteros no negativos tales que  $c \geq 1$  y  $a + b + c + 2 = n$ . Se cumple que  $\rho(\theta(a, b, c)) < \rho(\theta(a + 1, b, c - 1))$ .*

*Demostración.* Sean  $p_1(x) = x^n - x^b - x^a$  y  $p_2(x) = x^n - x^b - x^{a+1}$  los polinomios característicos de los digrafos  $\theta(a, b, c)$  y  $\theta(a + 1, b, c - 1)$  respectivamente. Sean  $\rho_1 = \rho(\theta(a, b, c))$  y  $\rho_2 = \rho(\theta(a + 1, b, c - 1))$ . Consideremos  $h(x) = p_1(x) - p_2(x)$ , tenemos que

$$h(x) = x^{a+1} - x^a = x^a(x - 1).$$

Es fácil ver que  $h(x) > 0$  para todo  $x > 1$ , luego,  $h(\rho_2) > 0$  por ser  $\rho_2 > 1$ . Tenemos entonces que

$$0 < h(\rho_2) = p_1(\rho_2) - p_2(\rho_2) = p_1(\rho_2).$$

Si probamos que  $p_1$  es estrictamente creciente en  $(1, +\infty)$ , habremos probado que  $\rho_1 < \rho_2$  pues  $p_1(\rho_1) = 0 < p_1(\rho_2)$ .

Efectivamente,  $p_1'(x) = nx^{n-1} - bx^{b-1} - ax^{a-1}$  que posee exactamente una raíz positiva por la regla de Descartes.

Sabemos que  $p_1(0) = 0$  y  $p_1(1) = -1$ , por el Teorema del valor medio de Lagrange tenemos que existe  $x_0$  en  $(0, 1)$  tal que  $p_1'(x_0) = -1$ . Por otro lado, tenemos que  $p_1'(1) = n - b - a = c + 2 > 0$ , luego, existe una raíz de  $p_1'$  en  $(x_0, 1)$  por Bolzano, que además debe ser única en  $(0, \infty)$ . Luego,  $p_1'(x) > 0$  para todo  $x$  en  $(1, \infty)$  lo que termina de probar que  $p_1$  es estrictamente creciente.  $\square$

**Corolario 5.2.2.** *Sea  $n \geq 3$ , sean  $\rho$  y  $\rho'$  los radios espectrales de los digrafos  $\theta(a, b, c)$  y  $\theta(a', b', c')$  respectivamente, ambos de  $n$  vértices. Si  $b = b'$  y  $a < a'$  entonces se cumple que  $\rho < \rho'$ .*

La siguiente figura muestra los digrafos Theta de 9 vértices con  $b = 1$  ordenados de acuerdo a su radio espectral (que es en definitiva el orden lexicográfico).

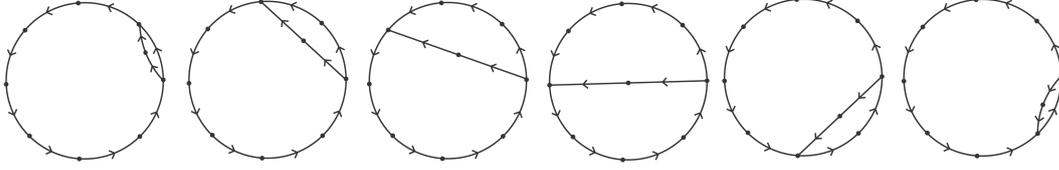


Figura 78:  $\theta(0, 1, 6) \preceq_3 \theta(1, 1, 5) \preceq_3 \theta(2, 1, 4) \preceq_3 \theta(3, 1, 3) \preceq_3 \theta(4, 1, 2) \preceq_3 \theta(5, 1, 1) \preceq_3 \theta(6, 1, 0)$ .

**Corolario 5.2.3.** *El orden lexicográfico define un orden total en la clase de digrafos  $\mathcal{D}(b_0)$  donde*

$$\mathcal{D}(b_0) = \{\theta(a, b_0, c) : a, c \text{ enteros no negativos}\}.$$

*En particular, esta clase de digrafos es DCS.*

Del isomorfismo entre  $\theta(a, b, c)$  y  $\theta(b, a, c)$ , del hecho que no estemos suponiendo  $a \leq b$  y del Teorema anterior se desprende el siguiente resultado:

**Corolario 5.2.4.** *Sea  $n \geq 3$ , sean  $\rho$  y  $\rho'$  los radios espectrales de los digrafos  $\theta(a, b, c)$  y  $\theta(a', b', c')$  respectivamente, ambos de  $n$  vértices. Si  $b < b'$  y  $a = a'$  entonces se cumple que  $\rho < \rho'$ .*

**Corolario 5.2.5.** *El orden lexicográfico define un orden total en la clase de digrafos  $\mathcal{D}(a_0)$  donde*

$$\mathcal{D}(a_0) = \{\theta(a_0, b, c) : b, c \text{ enteros no negativos}\}.$$

*En particular, esta clase de digrafos es DCS.*

En lo que sigue sí supondremos  $a \leq b$  para los parámetros del digrafo Theta.

**Teorema 5.2.6.** *Sean  $n \geq 3$ ,  $a \leq b$  y  $c$  enteros no negativos tales que  $a + b + c + 2 = n$ . Se cumple que  $\rho(\theta(a, b, c)) < \rho(\theta(a - 1, b + 1, c))$ . En particular, el espectro complementario distingue esta clase de digrafos  $\mathcal{D}(n, a_0) = \{\theta(a_0, b, c) : a_0 + b + c = n + 2\}$ .*

*Demostración.* Sean  $p_1(x) = x^n - x^b - x^a$  y  $p_2(x) = x^n - x^{b+1} - x^{a-1}$  los polinomios característicos de los digrafos  $\theta(a, b, c)$  y  $\theta(a - 1, b + 1, c)$  respectivamente. Sean  $\rho_1 = \rho(\theta(a, b, c))$  y  $\rho_2 = \rho(\theta(a - 1, b + 1, c))$ . Consideremos  $h(x) = p_1(x) - p_2(x)$ , tenemos que

$$h(x) = x^{b+1} - x^b - x^a + x^{a-1}.$$

Veamos que  $h(x) > 0$  para todo  $x > 1$ : sabemos que  $h(x)$  posee no más de dos raíces positivas (contadas con su multiplicidad) por la regla de Descartes, además,  $h(1) = 0$  y  $h'(1) = (b + 1) - b - a + (a - 1) = 0$  lo que prueba que 1 es raíz de  $h$  con multiplicidad 2. Dado que además  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = +\infty$  tenemos que  $h(x) > 0$  para todo  $x > 1$ . Luego,  $h(\rho_2) > 0$  por ser  $\rho_2 > 1$ . Tenemos entonces que

$$0 < h(\rho_2) = p_1(\rho_2) - p_2(\rho_2) = p_1(\rho_2).$$

Si probamos que  $p_1$  es estrictamente creciente en  $(1, +\infty)$ , habremos probado que  $\rho_1 < \rho_2$  pues  $p_1(\rho_1) = 0 < p_1(\rho_2)$ . Efectivamente,  $p_1'(x) = nx^{n-1} - bx^{b-1} - ax^{a-1}$  que posee exactamente una raíz positiva por la regla de Descartes. Sabemos que  $p_1(0) = 0$  y  $p_1(1) = -1$ , por el Teorema del valor medio de Lagrange tenemos que existe  $x_0$  en  $(0, 1)$  tal que  $p_1'(x_0) = -1$ . Por otro lado, tenemos que  $p_1'(1) = n - a - b = c + 2 > 0$ , luego, existe una raíz de  $p_1'$  en  $(x_0, 1)$  por Bolzano, que además debe ser única en  $(0, \infty)$ . Luego,  $p_1'(x) > 0$  para todo  $x$  en  $(1, \infty)$  lo que termina de probar que  $p_1$  es estrictamente creciente.  $\square$

**Corolario 5.2.7.** *Sea  $n \geq 3$ , sean  $\rho$  y  $\rho'$  los radios espectrales de los digrafos  $\theta(a, b, c)$  y  $\theta(a', b', c')$  respectivamente con  $a \leq b$  y  $a' \leq b'$ , ambos de  $n$  vértices. Si  $c = c'$  y  $b < b'$  entonces se cumple que  $\rho < \rho'$ .*

**Corolario 5.2.8.** *El orden lexicográfico define un orden total en la clase de digrafos  $\mathcal{D}(c_0)$  donde*

$$\mathcal{D}(c_0) = \{\theta(a, b, c_0) : a \leq b \text{ enteros no negativos}\}.$$

*En particular, esta clase de digrafos es DCS.*

La siguiente figura muestra los digrafos Theta de 10 vértices con  $c = 1$  ordenados de acuerdo a su radio espectral (que es en definitiva el orden lexicográfico).

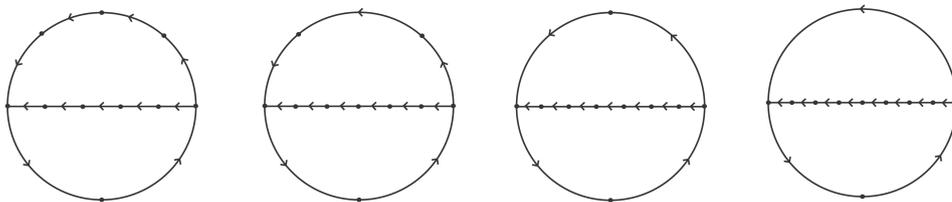


Figura 79:  $\theta(3, 4, 1) \preceq_3 \theta(2, 5, 1) \preceq_3 \theta(1, 6, 1) \preceq_3 \theta(0, 4, 1)$ .

A partir de los resultados 5.2.2 y 5.2.7 obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 5.2.9.** *Sea  $n \geq 3$ , sean  $\rho$  y  $\rho'$  los radios espectrales de los digrafos  $\theta(a, b, c)$  y  $\theta(a', b', c')$  respectivamente con  $a \leq b$  y  $a' \leq b'$ , ambos de  $n$  vértices. Si  $c' \leq c$  y  $b \leq b'$  entonces se cumple que  $\rho \leq \rho'$ .*

Sin embargo, hay grafos cuyos radios espectrales no son comparables según el corolario anterior como  $\theta(2, 2, 3)$  y  $\theta(3, 3, 1)$ .

A continuación presentaremos una familia de ejemplos que muestran que la clase de digrafos Tipo 3 no queda caracterizada por su espectro complementario, pero antes probaremos un Lema que será de utilidad.

**Lema 5.2.10.** *Sean  $D_3(i, j)$  y  $D_3(i', j')$  digrafos Tipo 3 de  $n$  vértices. Se cumple que  $D_3(i, j) \cong D_3(i', j')$  si, y solo si,  $(i, j) = (i', j')$ .*

*Demostración.* Comencemos por observar que en  $D_3(i, j)$  los únicos vértices  $x$  del digrafo que verifican

$$gr^-(x) = 1 \quad gr^+(x) = 2,$$

son 1 e  $i - 1$ . Además, podemos distinguir uno del otro debido a la existencia de un camino simple de uno a otro compuesto exclusivamente por vértices que verifican que  $gr^-(x) = gr^+(x) = 1$  (ver Figura 80). Luego,  $D_3(i, j) \cong D_3(i', j')$  implica que  $i = i'$ . A su vez, tendremos que  $p_{D_3(i, j)}(x) = p_{D_3(i, j')}(x)$ , esto es,  $x^n - x^{i-2} - x^{j-i} - 1 = x^n - x^{i-2} - x^{j'-i} - 1$ , por lo cual  $j = j'$ .

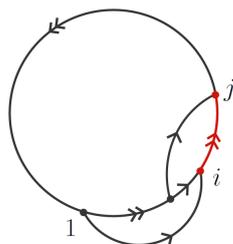


Figura 80: El digrafo  $D_3(i, j)$  y el camino simple al que se hace referencia señalado en rojo.

□

### Ejemplo 5.2.11.

Sea  $n \geq 5$ . Los digrafos  $D_3(3, n)$  y  $D_3(n - 1, n)$  (no isomorfos por el lema anterior) cumplen que

$$p_{D_3(3, n)}(x) = x^n - x^1 - x^{n-3} - 1 = p_{D_3(n-1, n)}(x).$$

lo que prueba que son coespectrales y en particular, complementariamente coespectrales.

Al igual que para los digrafos Tipo 3, presentaremos una familia de ejemplos de digrafos Tipo 4 no caracterizada por su espectro complementario, pero antes probaremos un Lema que será de utilidad.

**Lema 5.2.12.** Sea  $D_4(i)$  el digrafo Tipo 4 de  $n$  vértices definido como  $\vec{C}_n \cup \{(2, 1), (i+1, i)\}$  con  $i = 3, \dots, n - 1$ .  $D_4(i) \cong D_4(j)$  si, y solo si,  $i = j$  ó  $i + j = n + 2$ .

*Demostración.* Sea  $D_4(i)$  representado gráficamente en la Figura 81, donde también se señalan los caminos simples dirigidos  $\vec{P}_{i-1}$  y  $\vec{P}_{n-i+1}$ . Se tiene que para  $i \neq j$

$$D_4(i) \cong D_4(j) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{los largos de caminos } \vec{P}_{i-1} \text{ y } \vec{P}_{n-j+1} \text{ coinciden,} \\ \text{los largos de caminos } \vec{P}_{j-1} \text{ y } \vec{P}_{n-i+1} \text{ coinciden.} \end{cases}$$

Podemos ver que ambas condiciones se reducen a  $i + j = n + 2$ , por lo cual para  $j \neq i, n + 2 - i$  se tiene que  $D_4(i) \not\cong D_4(j)$ , mientras que

$$p_{D_4(i)}(x) = p_{D_4(j)}(x) = x^n - 2x^{n-2} + x^{n-4} - 1.$$

□

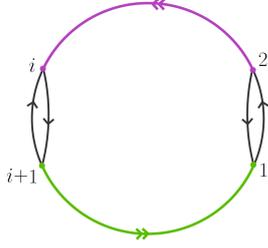


Figura 81: El digrafo  $D_4(i)$  con  $\vec{P}_{i-1}$  señalado en violeta y  $\vec{P}_{n-i+1}$  señalado en verde.

**Ejemplo 5.2.13.** [4]

Los digrafos  $D_4(3)$  y  $D_4(j)$  con  $j \neq 3, n-1$  (no isomorfos por el lema anterior) cumplen que

$$p_{D_4(3)}(x) = x^n - 2x^{n-2} + x^{n-4} - 1 = p_{D_4(j)}(x).$$

lo que prueba que son coespectrales y en particular, complementariamente coespectrales.

Antes de comenzar a analizar el espectro de los digrafos Tipo 5 observaremos que no quedan únicamente determinados por los parámetros  $i, j$  sino por los tamaños de los ciclos en él  $4 \leq r \leq s \leq t < n$  (ver Figura 43).

**Proposición 5.2.14.** Sean  $D$  y  $D'$  digrafos Tipo 5.  $D$  y  $D'$  son isomorfos si, y solo si son coespectrales.

*Demostración.* El directo es evidente, por lo cual nos concentraremos en el recíproco.

Sean  $r \leq s \leq t < n$  y  $r' \leq s' \leq t' < n$  los tamaños de los ciclos en  $D$  y  $D'$  respectivamente. Tenemos que  $p_D(x) = x^n - x^{n-r} - x^{n-s} - x^{n-t} - 2 = x^n - x^{n-r'} - x^{n-s'} - x^{n-t'} - 2 = p_{D'}(x)$ , luego, ser coespectral implica  $r = r', s = s'$  y  $t = t'$ . Veamos ahora que esas igualdades tienen como consecuencia el isomorfismo entre ambos digrafos. Probaremos que la longitud de los ciclos  $r, s$  y  $t$  da lugar a un único digrafo del quinto tipo constructivamente. Comencemos por observar que cada vértice de un digrafo del quinto tipo se encuentra exactamente en dos de estos ciclos, luego obtenemos la igualdad

$$r + s + t = 2n.$$

Consideremos los ciclos de tamaño  $r$  y  $s$  y el subdigrafo  $H$  que posee los arcos de ambos ciclos (ver Figura 82 donde los distintos posibles subdigrafos  $H$  se señalan en verde).

Supongamos que  $H$  es el primero de ellos (de lo contrario la prueba es análoga), puede verse por la Figura 83 que  $H = \theta(r+t-n, s+t-n, n-t-2)$  y por el caso 1 del Teorema 4.3.1 tenemos que los únicos arcos que pueden ser agregados al subdigrafo  $H$  son  $(v_a, w_b)$  y  $(v_b, w_a)$ , como conocemos la cantidad de arcos en  $H$  que es  $n+1$  y en un digrafo Tipo 5 que es  $n+3$  tenemos que ambos arcos deben agregarse lo que da lugar a un único digrafo Tipo 5.

□

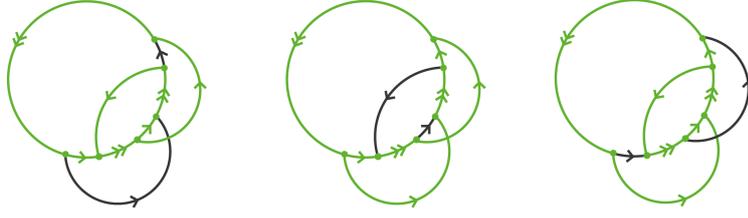


Figura 82: Posibles digrafos  $H$  señalados en verde.

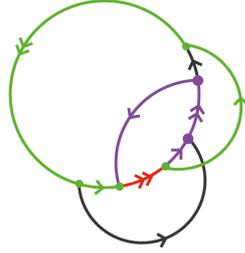


Figura 83: El digrafo  $H = \theta(a, b, c)$  donde  $\vec{P}_{a+2}$  y  $\vec{P}_{b+2}$  se señalan en rojo y violeta, mientras que  $\vec{P}_{c+2}$  se señala en verde.

De la demostración anterior se desprenden los siguientes corolarios:

**Corolario 5.2.15.** Sean  $D$  un digrafo Tipo 5, sean  $r \leq s \leq t < n$  los tamaños de los ciclos en él. Luego,

$$r + s + t = 2n.$$

**Corolario 5.2.16.** Sean  $D$  y  $D'$  digrafos Tipo 5. Sean  $r \leq s \leq t < n$  y  $r' \leq s' \leq t' < n$  los tamaños de los ciclos en  $D$  y  $D'$  respectivamente.

$D$  y  $D'$  son isomorfos si, y solo si  $r = r'$ ,  $s = s'$  y  $t = t'$ .

En lo que sigue, para los digrafos Tipo 5 haremos referencia a los tamaños de los ciclos  $r \leq s \leq t < n$  en vez de a los parámetros  $i, j$ .

**Ejemplo 5.2.17.**

Los digrafos de orden 10,  $D_5(4, 10)$  y  $D_5(8, 10)$  son coespectrales y por la Proposición 5.2.14 tenemos que  $D_5(4, 10) \cong D_5(8, 10)$

**Teorema 5.2.18.** Sea  $n \geq 3$ . Sean  $\rho_1$  y  $\rho_2$  los radios espectrales de  $D_5(r, s, t)$  y  $D_5(r', s', t')$ . Si sucede alguna de las siguientes:

- $r \leq r' \leq s' \leq t' \leq s \leq t$ ,
- $r \leq s \leq r' \leq s' \leq t' \leq t$ .

entonces se cumple que  $\rho_1 < \rho_2$ .

*Demostración.* Sean  $p_1(x) = x^n - x^{n-r} - x^{n-s} - x^{n-t} - 2$  y  $p_2(x) = x^n - x^{n-r'} - x^{n-s'} - x^{n-t'} - 2$  los polinomios característicos de los digrafos  $D$  y  $D'$  respectivamente. Consideremos  $h(x) = p_1(x) - p_2(x)$ , tenemos que

$$h(x) = -x^{n-r} - x^{n-s} - x^{n-t} + x^{n-r'} + x^{n-s'} + x^{n-t'}.$$

Veamos que  $h(x) < 0$  para todo  $x > 1$ : por la regla de Descartes sabemos que  $h(x)$  posee no más de dos raíces positivas (contadas con su multiplicidad), además,  $h(1) = 0$  y  $h'(1) = -(n-r) - (n-s) - (n-t) + (n-r') + (n-s') + (n-t') = 0$  lo que prueba que 1 es raíz de  $h$  con multiplicidad 2. Luego,  $h(x) < 0$  para todo  $x > 1$ . Luego,  $h(\rho_2) < 0$  por ser  $\rho_2 > 1$ . Tenemos entonces que

$$0 > h(\rho_2) = p_1(\rho_2) - p_2(\rho_2) = p_1(\rho_2).$$

Si probamos que  $p_1$  es estrictamente creciente en  $(1, +\infty)$ , habremos probado que  $\rho_1 > \rho_2$  pues  $p_1(\rho_1) = 0 > p_1(\rho_2)$ . Efectivamente,  $p_1'(x) = nx^{n-1} - (n-r)x^{n-r-1} - (n-s)x^{n-s-1} - (n-t)x^{n-t-1}$  que posee exactamente una raíz positiva por la regla de Descartes y debe ser igual a 1 ya que  $p_1'(1) = n - (n-r) - (n-s) - (n-t) = r + s + t - 2n = 0$ . Luego,  $p_1'(x) > 0$  para todo  $x$  en  $(1, +\infty)$  lo que termina de probar que  $p_1$  es estrictamente creciente en  $(1, +\infty)$ .  $\square$

De la demostración del Teorema anterior se desprende el siguiente resultado:

**Corolario 5.2.19.** *Sea  $n \geq 3$ , sean  $\rho = \rho(D_5(r, s, t))$  y  $\rho' = \rho(D_5(r', s', t'))$ , ambos de  $n$  vértices. Si  $r = r'$  y  $s < s'$  entonces se cumple que  $\rho < \rho'$ .*

**Corolario 5.2.20.** *El orden lexicográfico define un orden total en la clase de digrafos  $\mathcal{D}(r_0)$  donde*

$$\mathcal{D}(r_0) = \{D_5(r_0, s, t) : s, t \text{ no negativos}\}.$$

*En particular, esta clase de digrafos es DCS.*

Resultados análogos pueden enunciarse para las clases

$$\mathcal{D}(s_0) = \{D_5(r, s_0, t) : r, t \text{ no negativos}\} \quad \mathcal{D}(t_0) = \{D_5(r, s, t_0) : r, s \text{ no negativos}\}.$$

Sin embargo, hay grafos cuyos radios espectrales no son comparables según el Teorema anterior como los digrafos  $D_5(6, 10, 12)$  y  $D_5(8, 9, 11)$ , ambos de 14 vértices.

En esta subsección hemos exhibido ejemplos de pares de digrafos no isomorfos de orden arbitrario, complementariamente coespectrales en cada una de las clases de digrafos Tipo 3 y Tipo 4. Por otro lado, tanto para la clase de digrafos Theta como para la clase de digrafos Tipo 5 fue posible hallar clases de digrafos DCS estrictamente incluidas en cada una de ellas, lo que puede interpretarse como un indicio de que ambas constituyen clases DCS. Vale la pena observar que también fue posible caracterizar los digrafos Tipo 5 en función de nuevos parámetros: el tamaño de los ciclos en él.

## 6. Conclusiones

El primer logro de este trabajo fue generalizar a digrafos el concepto de espectro complementario de un grafo, lo cual no tenía antecedentes. La piedra angular de esta generalización fue el resultado 2.3.12 a partir del cual pudimos establecer que el espectro complementario de un digrafo se compone de los radios espectrales de sus subdigrafos inducidos fuertemente conexos, tal como se tenía para grafos. Este resultado nos permitió caracterizar estructuralmente e identificar los digrafos en  $\mathcal{SCD}_1$ ,  $\mathcal{SCD}_2$  y  $\mathcal{SCD}_3$ , lo que da cuenta del estrecho vínculo existente entre el espectro complementario y la estructura del digrafo. Si bien parece natural comenzar por el estudio de los digrafos con pocos valores propios complementarios, en el contexto de grafos esto carece de sentido dado que la Proposición 2.4.7 lo reduce al estudio de grafos con no más de tres vértices.

Como ya fue mencionado, el análisis que dio lugar a la identificación de los digrafos en  $\mathcal{SCD}_3$  cobró valor en sí mismo aunque entendemos que la estrategia empleada se agota aquí. Sucede que el estudio de  $\mathcal{SCD}_4$  requeriría identificar aquellos digrafos cuyos subdigrafos propios inducidos fuertemente conexos sean vértices aislados, ciclos o alguno (eventualmente más de uno, todos con igual radio espectral) de los siete tipos de digrafos en  $\mathcal{SCD}_3$  identificados en el Teorema 4.4.1, lo que amplía considerablemente posibilidades y vuelve esta estrategia algo engorrosa.

La identificación de los digrafos en  $\mathcal{SCD}_3$  nos permitió calcular el polinomio característico de cada uno de ellos y arrojó luz sobre su espectro complementario. Esto posibilitó el hallazgo de pares de digrafos del mismo orden, no isomorfos, complementariamente coespectrales; problema que motivó este trabajo. Vale la pena observar que todos los ejemplos exhibidos no solo son complementariamente coespectrales, sino también coespectrales. Estos ejemplos se encuentran en la clase Tipo 1, Tipo 3 y Tipo 4, lo que prueba que las mismas no constituyen clases DCS.

Por otro lado, fue posible establecer que cada una de las clases de digrafos Infinito, Tipo 1a, Tipo 1b y Tipo 2 sí quedan determinadas por su espectro mientras que para las clases de digrafos Theta y Tipo 5 fue posible hallar clases de digrafos DCS estrictamente incluidas en cada una de ellas.

Si bien el objetivo inicial del trabajo fue alcanzado, quedan planteados nuevos problemas:

- Determinar si cada una de las clases de digrafos Theta y Tipo 5 constituyen clases DCS. Vale la pena observar que para la clase de digrafos Tipo 5, el hallazgo de un par de digrafos del mismo orden no isomorfos complementariamente coespectrales implicaría el hallazgo de un par de digrafos no coespectrales (por la Proposición 5.2.14) complementariamente coespectrales.
- Explorar familias de digrafos en  $\mathcal{SCD}_t$  con  $t \geq 4$  que generalicen la estructura de los digrafos Infinito y Theta.
- Hallar ejemplos de digrafos  $D$  de orden  $n$  con la mayor cantidad de valores propios complementarios posible.

## Referencias

- [1] G.A. Baker, Drum Shapes and Isospectral Graphs, *J. Math. Phys.* 7 (1966) 2238–2242.
- [2] J. Bang-Jensen, G. Z. Gutin, *Digraphs: theory, algorithms and applications*, Springer, 2002.
- [3] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 1993.
- [4] D. Bravo, F. Cubría, M. Fiori, V. Trevisan, Complementarity spectrum of digraphs, *Linear Algebra and its Applications* 627 (2021) 24–40.
- [5] D. Bravo, F. Cubría, M. Fiori, V. Trevisan, Characterization of digraphs with three complementarity eigenvalues, *Journal of Algebraic Combinatorics* (2023) to appear.
- [6] D.M. Cvetcović, M. Doob, H.Sachs, *Spectra of graphs*, Academic Press, New York, 1979.
- [7] R. Fernandes, J. Júdice, V. Trevisan, Complementary eigenvalues of graphs, *Linear Algebra and its Applications* 527 (2017) 216–231.
- [8] G. Frobenius, Über Matrizen aus positiven Elementen, *Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin* (1908) 471–476.
- [9] G. Frobenius, Über Matrizen aus positiven Elementen II, *Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin* (1909) 514–518.
- [10] G. Frobenius, Über Matrizen aus nicht negativen Elementen, *Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin* (1912) 456–477.
- [11] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer, New York, 2001.
- [12] F. Harary, C. King, A. Mowshowitz, R.C. Read, Cospectral graphs and digraphs, *Bulletin of the London Mathematical Society* (1971) 321–328.
- [13] H. Lin, J. Shu, A note on the spectral characterization of strongly connected bicyclic digraphs, *Linear Algebra and its Applications* 436 (7) (2012) 2524–2530.
- [14] L. Page, S. Brin, R. Motwani, T. Winograd, *The PageRank citation ranking: Bringing order to the web*, Stanford InfoLab, 1999.
- [15] O. Perron, Zur Theorie der Matrices, *Math. Ann.*, 64 (1907) 248–263.
- [16] A. Pinto da Costa, A. Seeger, Cone-constrained eigenvalue problems: theory and algorithms, *Computational Optimization and Applications* 45 (2010) 25–57.
- [17] L. Pinheiro, B. Souza, V. Trevisan, Determining Graphs by the Complementary Spectrum, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 40 (2020) 607–620.
- [18] H. Sachs, Beziehungen zwischen den in einen Graphen enthaltenen Kreisen und seinem charakterischen Polynom, *Publ. Math. Debrecen* 11 (1964) 119–134.

- [19] A. Seeger, Eigenvalue analysis of equilibrium processes defined by linear complementarity conditions, *Linear Algebra and its Applications* 292 (1999) 1–14.
- [20] A. Seeger, Complementarity eigenvalue analysis of connected graphs, *Linear Algebra and its Applications* 543 (2018) 205–225.