



Facultad de Ciencias
Universidad de la República

TESIS DE DOCTORADO

Modelos estocásticos en tasas de interés y aplicaciones en la deuda soberana en Uruguay

Con enfoque en riesgo de incumplimiento de pago

Andrés Sosa

Director Académico:

Ernesto Mordecki

Directores de Tesis:

Ernesto Mordecki
José Fajardo (co-Director)

Revisor de Tesis:

Elvio Accinelli

Tribunal de Tesis:

Juan Dubra
José Fajardo
Ricardo Fraiman
José León
Marco Scavino

*Tesis sometida a evaluación del
Programa PEDECIBA-UdelaR para la obtención
del título de Doctor en Matemática*

SETIEMBRE 2018

MAMÁ

Resumen

En la tesis se considera el problema de estimación de las curvas de rendimiento en la deuda soberana mediante un enfoque dinámico. El objetivo es realizar un análisis diferente al que predomina en la industria financiera mediante la inclusión de una gran cantidad de información histórica. Los modelos se fundamentan en la evolución de la tasa de interés mediante cierta clase de procesos estocásticos y se deduce el precio del activo que se denomina bono cupón cero. En el avance de la tesis se incrementa tanto la complejidad de los modelos como de las técnicas de estimación de los parámetros. Las aplicaciones de la tesis son en la deuda soberana en Uruguay en sus tres principales monedas. Los resultados presentan diferentes fines, entre ellos se destaca la valuación de derivados financieros. La tesis finaliza con el estudio del riesgo de incumplimiento de pago presente en la deuda soberana mediante el enfoque de modelos de intensidad, lo que permite generar un nuevo índice de riesgo país.

Abstract

The problem studied in this thesis is the estimation of the term structure for sovereign debt using a dynamic approach. The objective is to perform an analysis that includes a large amount of historic information, which is not the usual approach in the financial industry. The models are based in the evolution of the interest rate by a certain type of stochastic processes, and the price of the zero coupon bond is obtained. The complexity of both the different models used and the parameter estimation techniques increases through the thesis. As an application of this methods, the Uruguayan sovereign debt for its three main currencies is studied. The obtained results can be applied to different ends, such as valuation of financial derivatives. In the last part of the thesis, the default rate for the sovereign debt is studied using intensity models, which allows the construction of a new country risk index.

Índice general

Prólogo	9
1 Introducción	11
1.1 Deuda Soberana	11
1.2 Curvas de Rendimiento	15
1.3 Modelos Estáticos	16
1.4 Estimación de Modelos Estáticos en Uruguay	19
2 Modelos Dinámicos Gaussianos	23
2.1 Definiciones Previas	23
2.2 Diferentes Enfoques de Modelación de Tasas de Interés	27
2.3 Modelos en Tasas de Interés Spot Instantánea	29
2.4 Métodos de Estimación	39
2.5 Datos y Resultados	40
3 Modelos en Varias Dimensiones y Aplicaciones	45
3.1 Clase de Modelos Afines	45
3.2 Modelos de Vasicek en Varias Dimensiones	49
3.3 Filtro de Kalman	52
3.4 Esperanza Maximización	55
3.5 Implementación del Modelo	58
3.6 Datos	60
3.7 Resultados	62
3.8 Aplicación: Precios de Opciones Europeas	69
4 Modelos con Riesgo de Incumplimiento de Pago	75
4.1 Modelos Estáticos	76
4.2 Marco Teórico	77
4.3 Tiempos Aleatorios y Procesos de Poisson Condicionales	86
4.4 Modelos de Riesgo de Incumplimiento de Pago	89
4.5 Datos	90
4.6 Resultados	92
4.7 Aplicación: Generación del Índice de Riesgo País	96
5 Conclusiones	99
Bibliografía	103
Apéndice	107

Prólogo

Desde mis inicios en la formación académica universitaria me encuentro interesado en temas relacionados a la aplicación de la matemática en la economía, fundamentalmente en el área de finanzas.

De manera general, es posible establecer que la matemática financiera se basa en disciplinas como la teoría de la probabilidad, estadística, programación y ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para proporcionar modelos y derivar relaciones entre las variables fundamentales como lo son el precio de activos, los movimientos del mercado y las tasas de interés. Estas herramientas permiten obtener conclusiones que de otra manera son difíciles de encontrar, en especial al utilizar nuevas técnicas computacionales que almacenan grandes cantidades de datos y modelan diversas variables al mismo tiempo, al brindar la resolución de sistemas complejos.

En cuanto a los trabajos de investigación que desarrollé en el área, en la tesis de Licenciatura en Matemática me propuse estudiar uno de los resultados teóricos más importantes en finanzas, en el cual se establece, bajo ciertas hipótesis, la valuación de un derivado financiero que se denomina opción europea. El resultado teórico se obtuvo en 1973 por Fisher Black y Myron Scholes y se publicó en el trabajo [10]. El modelo junto a sus extensiones, presentan el cometido de valorar una opción europea en el cual existe un activo subyacente (activo sujeto a riesgo) cuya evolución del precio no es conocida en ningún instante de tiempo futuro. Se asume además, como contraposición a la evolución incierta del precio, la existencia de un activo sin riesgo (cuenta de ahorro) con una tasa de interés constante, lo que resulta en una evolución determinista respecto al tiempo. Esta hipótesis se basa en el argumento de que la variación en las tasas de interés sólo genera un efecto de segundo orden en comparación a la variación del precio del activo.

En la tesis de Maestría en Ingeniería Matemática, me propuse generalizar la tesis de la Licenciatura en Matemática, a un modelo que proporcione la posibilidad de discontinuidades en la evolución futura del precio del activo. En el trabajo se estudia la evolución del dólar en el mercado uruguayo en el cual existe un riesgo inherente de devaluación (aumento abrupto en su precio) en algún momento del tiempo. Los modelos estocásticos utilizados fueron los procesos de Lévy, los cuales son una herramienta importante para construir modelos en tiempo continuo con trayectorias discontinuas. El enfoque del trabajo permitió estimar el riesgo cambiario crediticio, que se define como la pérdida esperada al otorgar préstamos en moneda extranjera a agentes que tienen sus ingresos en moneda nacional.

De manera general, los activos financieros en el mercado se clasifican en dos categorías. Los activos que se definen como *renta variable*, que son aquellos que se caracterizan por no existir certeza en los precios en ningún instante de tiempo. Esta situación provoca que no se conozcan las ganancias o las pérdidas (la tasa de rendimiento de la inversión) que genera el activo. La ausencia de certeza en la evolución del precio se debe a diversos factores, tanto internos como externos al propio activo. Vale destacar que los activos analizados en la tesis de Licenciatura y en la tesis de Maestría corresponden a esta categoría.

En la segunda categoría se encuentran los activos que se denominan de *renta fija*. Estos activos financieros se caracterizan por la obligación del emisor a realizar una cierta cantidad de pagos, de montos conocidos en determinados períodos de tiempo establecidos con anterioridad. Estos pagos se conciben como la devolución del capital junto a sus intereses.

Introducción

El objetivo principal de la tesis de Doctorado en Matemática se basa en el análisis de un activo financiero que pertenece a la categoría de renta fija. De manera muy simplificada es posible establecer que los activos de renta fija presentan similares características que los préstamos, con la diferencia de que la deuda total del emisor se reparte entre una gran cantidad de agentes que poseen parte de ella.

Es de destacar, que el nombre de esta categoría se debe a que la tasa de rendimiento que se obtiene en la inversión es determinista si se conserva el activo financiero hasta su vencimiento. Sin embargo en el transcurso del tiempo, el precio del activo en el mercado presenta incertidumbre ya que depende de la evolución de diferentes variables. Por lo cual, existe un riesgo asociado a este tipo de activos debido a desconocer el precio en cualquier tiempo anterior a su vencimiento, por lo cual se torna necesario obtener métodos de valuación.

En la categoría de renta fija existen diversas clasificaciones de los activos financieros que la integran, la más destacada para la tesis es la que divide según la característica del emisor entre deuda pública y deuda privada.

Deuda Soberana

La tesis se centra en los activos financieros de renta fija que emite un país. Se define la *deuda soberana* como el conjunto de la deuda pública que mantiene un país con respecto a sus acreedores.

Los países al elaborar sus presupuestos nacionales, establecen tanto los ingresos como los egresos esperados en cierto período de tiempo. De manera general es posible establecer que la principal causa de ingresos es el cobro de impuestos y de egresos es el gasto vinculado a los servicios brindados por el estado. Es muy frecuente que se produzcan desajustes entre ellos y en el caso que los egresos sobrepasan a los ingresos sucede lo que se denomina *déficit fiscal*. Este déficit es necesario que se asimile de alguna manera, una de las posibles medidas que se aplica es recurrir al endeudamiento público.

En cada país existen entidades que se encargan de gestionar la emisión de deuda, al establecer los tipos de contratos a emitir, las fechas de emisiones, los plazos de vencimientos, la cantidad de deuda neta y las condiciones en el repago. Esto se debe a que es necesario que el gobierno controle la evolución de su endeudamiento para equilibrar sus metas y los niveles de

deuda presentes y futuros.

En cuanto a la gestión de la deuda soberana, el estado tiene una variedad de activos financieros disponibles para emitir, destacándose la emisión del activo que se denomina *bono soberano*. Estos activos de renta fija se dividen principalmente en dos categorías: bono cupón cero y bono con cupón. En el primero se determina un único pago en el vencimiento y en el segundo el emisor se compromete a pagar una cierta cantidad que se denomina *cupón* en determinados períodos de tiempo y una cantidad final denominada *principal* o *valor nominal*.

El mercado financiero en que se emite la deuda soberana se denomina *mercado primario*, siendo el único momento en el que los países emisores adquieren los fondos. Los mecanismos para la emisión de la deuda soberana son diversos, actualmente *la subasta pública* es una de las principales, en la cual cada agente realiza ofertas al emisor y se adjudica a los mejores oferentes procurando minimizar el costo total. Existen procesos específicos en diferentes países pero de manera general se establece que en la subasta pública se pueden presentar dos clases de solicitudes de compra por parte de los agentes: las competitivas y las no competitivas. En la primera se presenta el precio al que está dispuesto a comprar el activo y el emisor decreta el precio mínimo que acepta recibir y rechaza todas las propuestas a precios inferiores. En la segunda se acepta el precio promedio ponderado que resulte de la emisión. Por mayor información en este mecanismo de emisión de deuda soberana ver [21].

Los activos soberanos que se emitieron con anterioridad se transan en el *mercado secundario*. En este mercado, el precio de los activos varía en cada transacción lo que provoca cambios en la tasa de rendimiento de la inversión. Esta circunstancia es la que da origen a la tesis al proponer analizar de manera dinámica la evolución de las tasas de interés de los activos financieros de renta fija.

Los factores que inciden en la evolución de las tasas de interés resultan tanto del análisis de las variables en el mercado primario como secundario. La demanda de activos soberanos de renta fija es influenciada por el nivel crediticio del emisor, la liquidez de los activos que la integran, el nivel de incertidumbre en la evolución del repago por parte del emisor, el tipo de cambio y las tasas de interés esperadas en las diferentes inversiones. En cuanto a la oferta de activos soberanos se destacan las finanzas de los estados, las oportunidades de costos y beneficios en el momento de emisión y el valor esperado de diversas variables macroeconómicas como lo pueden ser la tasa de inflación y el tipo de cambio.

Una de las características más importantes del mercado secundario es el nivel de liquidez que presenta por la relevancia que genera en el avance del mercado primario. En el mercado secundario existen diferentes agentes involucrados, diferentes regulaciones y plataformas para realizar la transacción de los activos. De manera general es posible establecer que existen dos clases de mercados: el mercado organizado y el mercado no organizado (*over the counter*). En el primero, las transacciones se realizan a través de cierta institución financiera denominada *cámara de compensación* que es la encargada de realizar los pagos y la liquidación de las transacciones. En el segundo caso, generalmente existen contratos de carácter individual entre dos agentes.

Deuda soberana en Uruguay

Desde el origen como estado la deuda soberana en Uruguay tiene una gran importancia en las finanzas públicas. El endeudamiento público se comenzó a utilizar para la reconstrucción de los daños provocados por guerras civiles y de financiación de los grandes déficit fiscales que se generaron especialmente por la existencia de un sistema tributario frágil. Existen registros que en 1864 y en 1871 se realizaron préstamos en Londres, pero fue a partir de 1883 que la deuda soberana pasó a ser la principal forma de endeudamiento público. La cronología histórica de la deuda desde los inicios se describe en varios trabajos académicos, entre ellos se destacan [4], [21] y [50].

En la historia reciente de la evolución de la deuda, el análisis se enfoca posterior a la crisis económica de 2002. Durante esta crisis, el endeudamiento neto se desplazó desde los 9100 a 11400 millones de dólares, valor que representaba aproximadamente el 120 % en relación al Producto Bruto Interno (PBI). La elaboración de políticas públicas de gestión de deuda permitieron mejorar estos umbrales, las cuales se examinan en el trabajo [47].

En los cambios que se generan en el perfil de la deuda en los últimos 15 años se destacan fundamentalmente dos características: la nueva estructura de deuda soberana a vencimientos largos, ver figura 1.1, y el cambio en la composición de la deuda por moneda, ver figura 1.2. La primera se debe a las grandes emisiones de deuda a mediano y largo plazo y la segunda a las emisiones de los últimos años en activos en moneda nacional. Si se adiciona al análisis la cantidad de reservas que preserva el estado y la disponibilidad de créditos contingentes con organismos internacionales se vislumbra que la deuda soberana presenta bajo riesgo de liquidez en la actualidad. Es decir, se encuentran disponibles los activos necesarios para hacer frente al pago de los intereses y las amortizaciones de la deuda.

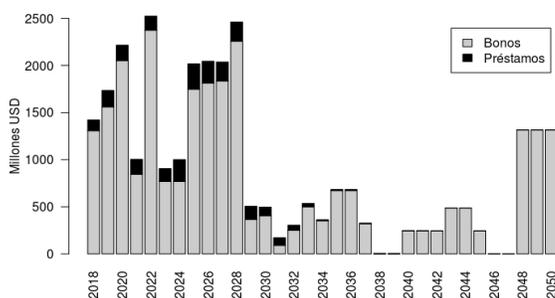


Figura 1.1: Perfil de la deuda soberana en Uruguay en marzo de 2018.

Con el fin de comprender la situación actual de la deuda soberana, se destaca que Uruguay presenta un alto déficit fiscal, el cual es persistente en los últimos años y provoca un aumento en la deuda soberana. En los últimos 10 años, la deuda bruta creció más del doble de manera nominal. Sin embargo, la evolución de referencia para el análisis no es la deuda nominal sino que es la deuda en relación al PBI. En 2005, la deuda neta representó el 64.7 % del PBI y en setiembre de 2017 el 42.0 %, lo que se justifica en parte por el crecimiento del PBI en estos

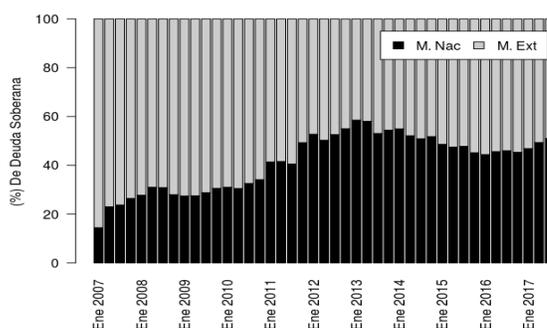


Figura 1.2: Evolución trimestral de la composición de la deuda soberana por moneda desde 2007.

años que evolucionó desde 17403 a 57047 millones de dólares. Este valor presentó su mínimo en 2013 al alcanzar el 33.5 % y en los últimos años aumentó de manera regular.

A su vez, según el reporte publicado en marzo de 2018 por la Unidad de Deuda del Ministerio de Economía, el monto de la deuda uruguaya alcanza los 29364 millones de dólares. La deuda está compuesta por 2505 millones de dólares en préstamos (9 %) y 26859 millones de dólares en la emisión de activos soberanos (91 %). Sólo el 25 % de la deuda uruguaya se encuentra bajo la jurisdicción uruguaya, el restante 75 % de la deuda se encuentra en una jurisdicción distinta, básicamente en Estados Unidos. También se establece en el reporte que 1.788 millones de dólares se amortizan en el año 2018 y se pagan de intereses 1.724 millones de dólares. En lo que refiere a la composición de la deuda por moneda, el 52 % está nominada en moneda nacional (Pesos, Unidades Indexadas y Unidades Reajustables) mientras que el restante 48 % se encuentra en monedas extranjeras (Dólares, Euros y Yenes). Otras referencias a la deuda soberana se encuentran en la figura 1.3.

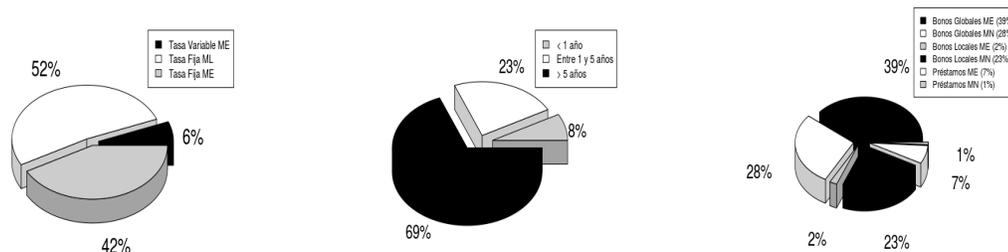


Figura 1.3: Diferentes clasificaciones de la deuda soberana en Uruguay. A la izquierda mediante tipo de tasa de interés, al centro mediante plazo de vencimiento y a la derecha mediante instrumento.

Bolsa de Valores en Uruguay

A partir de la ley No 18.627 (Ley de Mercado de Valores), las bolsas de valores se encuentran reguladas y supervisadas por la Superintendencia de Servicios Financieros del Banco Central del Uruguay (BCU). De acuerdo a la ley, las Bolsas de Valores son entidades que tienen por objeto proveer a sus miembros los medios necesarios para que puedan realizar de manera eficaz las transacciones de valores.

En la actualidad, las bolsas de valores autorizadas en el Uruguay son la Bolsa de Valores de Montevideo (BVM) y la Bolsa Electrónica de Valores del Uruguay Sociedad Anónima (BEVSA). Estas instituciones presentan como principal función la de brindar la plataforma necesaria para la realización de los procesos de colocación, transacción y custodia de valores públicos y privados.

Curvas de Rendimiento

En la sección 1.1, se establece que la evolución temporal en las tasas de interés depende tanto de las nuevas emisiones en el mercado primario, como de las transacciones de activos financieros que integran la deuda soberana en el mercado secundario. En cada mercado financiero existen una gran cantidad de activos que se diferencian entre sí esencialmente por la moneda de emisión y el vencimiento. Los activos que presentan el mismo riesgo crediticio, misma liquidez y mismas características en las cláusulas del contrato tienen diferentes tasas de rendimiento lo que se debe principalmente a sus diferentes vencimientos. Por esta razón, el vencimiento del activo se percibe como un importante determinante en la tasa de rendimiento.

Se establece que la *curva de rendimiento* (term structure) es la función que relaciona la tasa de rendimiento con el vencimiento en el bono soberano en una determinada moneda. En este caso, se entiende tasa de rendimiento (yield to maturity) como aquella tasa de interés que iguala el valor presente del flujo futuro del activo al precio que se transa en el mercado.

La utilidad de la curva de rendimiento presenta varias perspectivas. Desde el análisis macroeconómico, las autoridades monetarias extraen información sobre las expectativas de tasas de interés y tasas de inflación futuras del mercado con el fin de planificar políticas públicas. Desde el análisis financiero existen diferentes alternativas, entre ellas se destacan los estudios de sensibilidad en activos dentro de un portafolio de renta fija y la valuación de otros activos como son los derivados financieros.

La curva de rendimiento es una función con respecto al vencimiento que de manera empírica se observa sólo en ciertas fechas específicas de vencimiento. En las últimas décadas, la profundización en los modelos teóricos y los métodos de estimación se transformó en un área de desarrollo matemático. La pregunta natural es, si existen modelos que presentan propiedades específicas con respecto a los demás. La respuesta general es que no existen tales modelos y que dependen de su utilidad y de la naturaleza de los datos que son utilizados en la estimación. Esta situación presenta como consecuencia que si bien los agentes financieros tienen su modelo de referencia para el análisis, se encuentran interesados en la investigación en estos temas.

En una exploración del mercado uruguayo, las bolsas de valores en Uruguay publican estimaciones diarias de curvas de rendimiento en el mercado. Cada institución, presenta un informe técnico en el cual se establece la metodología de estimación y ciertos criterios que emplean en la construcción de las curvas de rendimiento. También existe una metodología implementada en el Banco Central del Uruguay, que si bien no se comporta como una habitual curva de rendimiento, es un criterio de fijación de precios para todos los activos emitidos por el estado uruguayo. Los precios se publican de manera diaria y presentan una vital importancia en el mercado financiero uruguayo debido a que las Administradoras de Ahorro Previsional (Afap) y las empresas de Seguros y Reaseguros se encuentran obligadas a utilizar tales precios para la valuación contable de los activos que se forman parte de sus portafolios de inversión.

Existe evidencia empírica de relación entre la fijación de precios y la eficiencia que presenta el mercado financiero debido a que criterios adecuados en la valuación de los activos permiten comprender los riesgos asociados. La propuesta de la tesis se basa en realizar un análisis profundo tanto en los modelos como en los métodos de estimación de las curvas de rendimiento en el Uruguay. Por este motivo, la tesis se fundamenta en una amplia búsqueda de modelos y de métodos de estimación.

Modelos Estáticos

En las últimas décadas, el estudio en temas relacionados a la estimación de las curvas de rendimiento se generalizó en busca de diferentes alternativas. El problema principal radica en que en el mercado de renta fija no existen activos para todos los vencimientos posibles, por lo cual se transforma en un problema de interpolación.

La perspectiva más utilizada en los mercados financieros es la *estimación estática* en la cual se analiza de manera transversal a todos los activos transados en un determinado momento. Es decir, no se explora la evolución histórica de las tasas de interés

Dentro de los modelos estáticos existen diferentes enfoques para abordar el problema. En la presente sección se analizan los dos métodos más utilizados en la industria, que a su vez coinciden con los utilizados por las bolsas de valores en Uruguay. Es importante destacar que cada uno de los modelos se desarrolla en el contexto de todas las diferentes definiciones de tasas de interés aunque, en esta sección, se establece la teoría de cada método en su entorno más habitual. En el primer método, los modelos se desarrollan con respecto a su función de descuento (en el precio de los bonos cupón cero) y en el segundo método con respecto a las tasas forward instantáneas.

Métodos de estimación mediante splines

En el inicio de la investigación en esta área se utilizaron técnicas de ajuste de curvas (splines) con el fin de extender a todos los tiempos lo que sucede en el mercado. Estas técnicas presentan gran valor por su carácter general aunque ellas tienen como crítica que en ciertas circunstancias cuanto mayor ajuste a los precios de mercado se obtiene menor regularidad en las diferentes curvas asociadas de tasas de interés. Los movimientos bruscos que pueden producirse en las curvas de rendimiento no tienen sentido económico, es decir se espera que todas

las curvas de rendimiento presenten movimientos graduales con respecto a los vencimientos.

El método es general y se basa en encontrar una función $d(T)$ desconocida desde un conjunto de $N + 1$ coordenadas $\{t_0, \dots, t_N\}$ (puntos vértices) con sus correspondientes valores $\{d(t_0), \dots, d(t_N)\}$ al imponer ciertas restricciones de suavidad en el intervalo $[t_0, t_N]$. En este análisis, la función $d(T)$ representa la función de descuento del mercado, es decir, el precio de un bono cupón cero para todos los vencimientos.

Existen diferentes técnicas para abordar el problema desde esta perspectiva, las más simple es considerar a la función d como aquel polinomio de grado N que pasa por todos los puntos considerados. Esta opción tiene como crítica principal la forma de la función que se obtiene en muchos casos estimados. Debido a esto, la propuesta es ajustar varios polinomios de menor grado que pasen por determinados puntos, que en principio pueden ser diferentes a las coordenadas de los puntos de los datos. En el caso en que estos conjuntos de puntos coincidan, lo que hace los splines es unir los valores de la función en esos puntos mediante polinomios de grado k ($k = 1$ lineales, $k = 2$ cuadráticos, $k = 3$ cúbicos, entre otros). De acuerdo a la cantidad de parámetros establecidos en la función, es necesario agregar ciertas condiciones, que tienen el objetivo de suavizar las funciones en los puntos vértices.

Si se considera un conjunto de gran dimensión de puntos vértices el número de parámetros a estimar es excesivo, por lo cual con el fin de reducir dicho número se desarrolla el método que se denomina *B-splines cúbicos*. En este método se fija con anterioridad una base de polinomios de grado 3 y se establece que la función $d(T)$ es una combinación lineal entre los polinomios. Se consideran $q + 1$ puntos diferentes $t_0 < t_1 < \dots < t_q$ en el período de tiempo de análisis y se agregan tres puntos más antes del inicio $t_{-3} < t_{-2} < t_{-1}$ y tres puntos más después del final $t_{q+1} < t_{q+2} < t_{q+3}$. Los $q + 3$ polinomios que forman parte de la base B-spline son las funciones ψ_k en el intervalo $[t_0, t_q]$ dadas mediante

$$\psi_k(T) = \sum_{j=k}^{k+4} \left(\prod_{i=k, i \neq j} \frac{1}{t_i - t_j} \right) (T - t_j)_+^3, \quad k = -3, -2, \dots, q - 1.$$

El elemento ψ_k de la base de B-splines es un polinomio cúbico que toma valores estrictamente positivos en el intervalo $[t_k, t_{k+4}]$ y es cero fuera de él. En cada valor de T del dominio $[t_0, t_q]$ existen sólo cuatro polinomios diferentes de cero. Por más detalles en el método de B-spline cúbicos, ver [28] y [35].

Se establece que la curva de descuento del mercado se obtiene mediante una combinación lineal de las funciones de la base, es decir la función

$$d(T) = \sum_{k=-3}^{q-1} a_k \psi_k(T).$$

Si se denota a P como el vector de precios del mercado de los n activos que se utilizan en la estimación; a C como la matriz de dimensión $n \times N$ (N es la cantidad total de tiempos de pagos entre todos los activos) en la cual la fila j establece los flujos de fondos del activo j ; a Ψ como la matriz de dimensión $N \times m$ ($m = q + 3$) donde la columna i es la función ψ_k

evaluada en cada tiempo y a Θ como el vector de dimensión $m \times 1$ de parámetros del modelo. El problema resultante es estimar los parámetros mediante la optimización

$$\min_{\Theta \in \mathbb{R}^m} |P - C\Psi\Theta|^2.$$

En el caso de Uruguay, la mayoría de los activos son bonos soberanos de vencimientos a largo plazo que presentan pagos intermedios mediante los cupones, por lo cual se obtiene que $q < N$. Si se aumenta la cantidad de puntos q la capacidad de ajuste mejora no obstante no sólo se agregan más parámetros en la estimación sino que se repite el compromiso entre ajuste y suavidad en las curvas de rendimiento.

Métodos de estimación mediante funciones

El segundo método que se establece es el que considera el ajuste de la función desconocida a curvas paramétricas predeterminadas. Estos modelos no utilizan varios polinomios para el ajuste sino que existe una única función definida en todos los vencimientos. Las dos ventajas que presentan estos modelos frente a los modelos de splines es la menor cantidad de parámetros involucrados en la estimación y la suavidad de la curva de rendimientos que se obtiene. El desarrollo de estos modelos se realiza en la tasa de interés forward instantánea (se define matemáticamente en la sección 2.1), la cual es la tasa de interés que genera una inversión que se realiza en un tiempo futuro con horizonte temporal que tiende a cero.

La diferencia entre los modelos en este método de estimación radica en la elección de la función. En esta sección se desarrollan los dos modelos más utilizados en la estimación de curvas de rendimiento mediante este enfoque. La estimación de los parámetros se realiza mediante la minimización de diferencia entre las tasas de interés del mercado y las tasas de interés del modelo, que se ejecuta a través de algoritmos de optimización no lineales.

En el trabajo [51], Charles Nelson y Andrew Siegel asumen que la forma de la función de la tasa de interés forward instantánea $f(t, T)$ en el momento t para tiempo T es dada mediante

$$f(t, T) = \alpha + \beta e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \gamma \frac{T}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}}; \quad (1.1)$$

donde los parámetros α , β , γ y τ_1 son coeficientes que cumplen $\tau_1 > 0$.

La función que se determina mediante la ecuación (1.1) es capaz de capturar una variada gama de formas de curvas de rendimiento que se observan en el mercado. Esto se debe a que la función $f(t, T)$ consta de tres sumandos en el cual cada uno aporta diferentes características. El primer sumando es una función constante que tiene su mayor importancia en el largo plazo; el segundo sumando es una función exponencial decreciente que tiene importancia en la pendiente de la función y el tercer sumando es una función positiva que comienza en cero, tiene límite cero en infinito y que presenta un único máximo el cual tiene importancia en la curvatura.

Al analizar el rol de cada parámetro, se examina la ecuación (1.1). Cuando el vencimiento T tiende a infinito, la pendiente y la curvatura tienden a cero, por lo cual se observa que el

parámetro α se interpreta como la tasa de rendimiento de largo plazo. En cambio, cuando el vencimiento tiende a cero sólo la curvatura tiende a cero y se obtiene que la suma de los parámetros $(\alpha + \beta)$ se interpreta como el rendimiento a corto plazo. Por lo tanto, si es negativo tiene pendiente inicial positiva y si es positivo tiene pendiente inicial negativa. La curvatura se controla a través del parámetro γ y el máximo o mínimo de la función a través el parámetro τ_1 . En general, si se cumple $|\beta| \geq |\gamma|$ la función es monótona y en caso contrario existe un punto estacionario, el cual cuanto mayor sea la diferencia en valor absoluto entre $|\gamma|$ y $|\beta|$ más se realiza la curvatura (concavidad o convexidad) de la función.

Desde la existencia de este modelo, varios otros han sido propuestos al incorporar mayor flexibilidad. La extensión más popular es el modelo propuesto por Lars Svensson en el trabajo [52] bajo el costo de agregar dos parámetros más al modelo. En el modelo propuesto, a la ecuación (1.1) se le agrega un sumando responsable de permitir otro punto de inflexión adicional. Es decir,

$$f(t, T) = \alpha + \beta e^{-\frac{T}{\tau_1}} + \gamma \frac{T}{\tau_1} e^{-\frac{T}{\tau_1}} + \delta \frac{T}{\tau_2} e^{-\frac{T}{\tau_2}};$$

donde los parámetros α , β , γ , δ , τ_1 y τ_2 son coeficientes que cumplen $\tau_1 > 0$ y $\tau_2 > 0$.

Los roles que cumplen los parámetros en este nuevo modelo son similares a los que cumplen en el modelo de Nelson-Siegel. A causa de la gran flexibilidad que presentan las funciones exponenciales el modelo tiene como consecuencia la posibilidad de obtener resultados de curvas monótonas crecientes, decrecientes, formas de U y formas de S.

Estimación de Modelos Estáticos en Uruguay

En la sección 1.3 se establece que existen diferentes métodos de estimación estática de las curvas de rendimiento y se desarrollan los dos enfoques que utilizan las bolsas de valores para la publicación de las curvas de rendimiento en el mercado uruguayo.

En el caso de la BEVSA se publican a diario las curvas de rendimientos en las tres principales monedas de emisión de la deuda soberana en Uruguay (dólares, unidades indexadas y pesos uruguayos). El enfoque de estimación que utilizan es el método de spline, en particular B-spline. En el caso de la BVM, la única la curva de rendimiento diaria que se publica es en unidades indexadas. El enfoque de estimación que utiliza es el método mediante funciones, en particular el método de Svensson. A su vez, el BCU publica de manera diaria los precios de todos los activos que circulan en el mercado mediante la aplicación de un criterio de valuación preestablecido, en el denominado *Vector de Precios*.

Para analizar las dos curvas de rendimiento publicadas en el mercado en Uruguay y las tasas de rendimiento inducidas por los precios publicados por el BCU se considera el caso de la deuda soberana en unidades indexadas el día viernes 09 de marzo de 2018. En esta fecha, existen en circulación 5 bonos globales con vencimiento entre los años 2018 y 2037 y 11 notas de tesorería con vencimiento entre los años 2018 y 2030. En la figura 1.4, se encuentran las curvas publicadas por ambas bolsas de valores y las tasas de rendimiento derivadas de los precios de los activos publicados por el BCU.

Como se deduce de la figura 1.4, existe una gran disparidad entre las curvas de rendimientos publicadas en ambas bolsas de valores para un mismo día. Las tasas de rendimiento de los precios publicados por el BCU se encuentran en niveles razonables salvo la nota de tesorería serie 16 que presenta un alto rendimiento para su vencimiento el 27 de enero de 2019 (menos de un año).

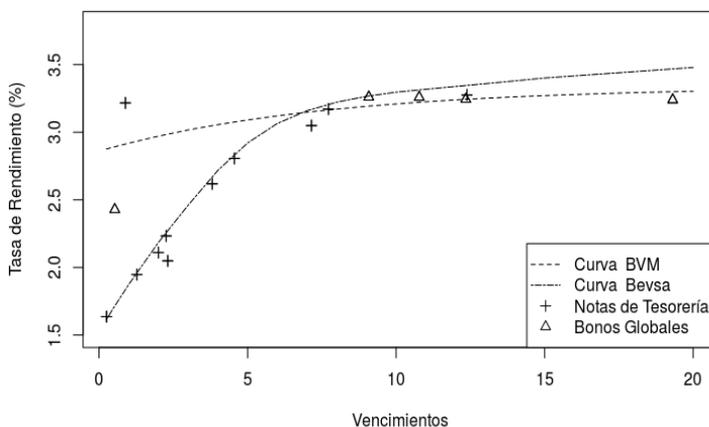


Figura 1.4: Información publicada en el mercado uruguayo por distintos agentes el día viernes 09 de marzo de 2018.

En el mercado uruguayo existe el portal *Mercado Bursátil del Uruguay*, el cual tiene como propósito la consolidación de la información que se genera en ambas bolsas de valores. El portal establece que en el día analizado, los únicos activos en unidades indexadas que se transaron en el mercado local fueron cuatro bonos globales de vencimientos en los años 2018, 2027, 2028 y 2037 y la nota de tesorería serie 19 (vencimiento en el año 2022).

En la actual sección se implementan el método de B-spline, el método de Nelson-Siegel y el método de Svensson con el fin de comparar los resultados con la información publicada en el mercado. Se estiman en diferentes casos las curvas de rendimiento en los tres modelos implementados. En todas las estimaciones se utilizan los cinco activos transados en el mercado y se adicionan otros en cada caso. En la primera estimación, se agregan las cinco notas de tesorería que presentan mayor circulante (sin utilizar la serie 16). En la segunda estimación, se agregan el bono global de vencimiento en el año 2030 y cuatro notas de tesorería que si bien no son las de mayor circulante son las que generan mejor distribución de vencimientos en los activos utilizados. En la tercera estimación, se utilizan todas las tasas de rendimiento inducidas por el Vector de Precios publicadas por el BCU (sin utilizar la serie 16).

Las curvas de rendimiento estimadas se encuentran en la figura 1.5 y los parámetros asociados a las estimaciones mediante funciones se encuentran en el cuadro 1.1. Las conclusiones que se obtienen en la implementación de las estimaciones realizadas en los tres modelos es que las curvas de rendimiento mediante el método estático dependen fuertemente de los activos utilizados sin importar cual sea el método que se aplique y que las diferencias en magnitud en

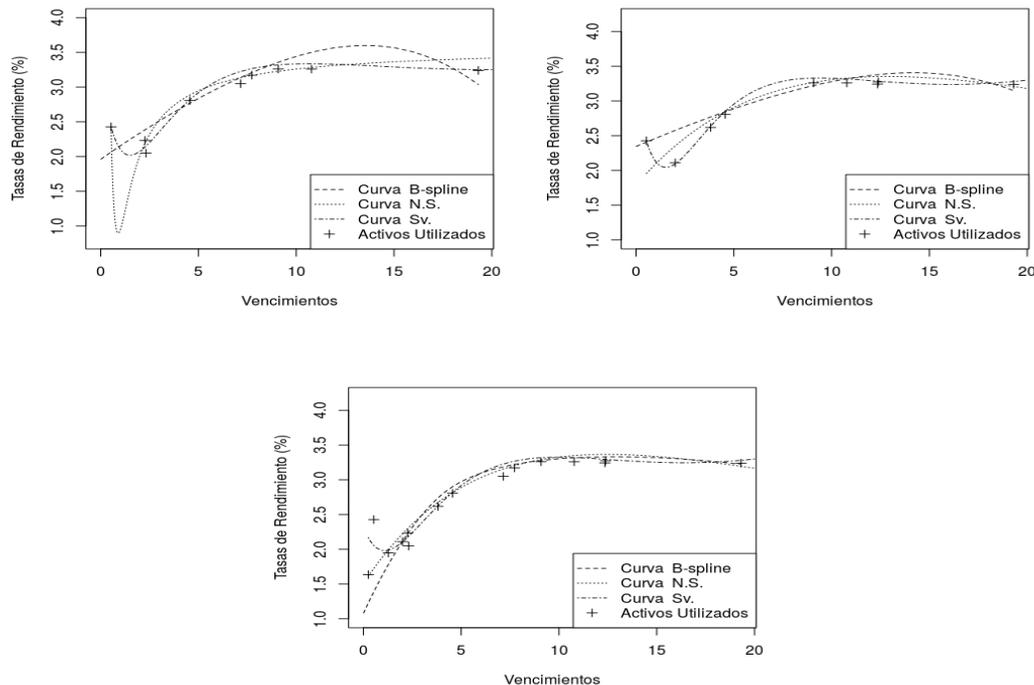


Figura 1.5: Estimaciones de curvas de rendimiento en modelos estáticos para el día 09/03/2018. A la izquierda la primera estimación, a la derecha la segunda estimación y abajo la tercera estimación.

ciertas tasas de rendimiento son notorias en todos los casos. Vale destacar que la forma de las curvas de rendimiento se conservan tanto en el modelo de B-spline como en el modelo de Svensson. A su vez, los parámetros estimados en los métodos mediante funciones se encuentran en el cuadro 1.1 y se obtiene una gran variabilidad entre ellos dentro del mismo modelo. Los cuales no coinciden con la interpretación teórica de cada parámetro que se establece en la sección 1.3.

Para finalizar, al comparar las estimaciones en el modelo de B-spline con la curva de rendimiento publicada por BEVSA (que se estima mediante este modelo) se advierte que si bien la forma es la misma, ninguna de las tres estimaciones presentan tasas de rendimiento similares en todos los vencimientos. En el caso de las estimaciones en el modelo de Svensson con la curva de rendimiento publicada por BVM, se obtiene que ni la forma ni las magnitudes coinciden en ningún caso. Esto se debe a que si bien las bolsas de valores establecen los criterios generales que son utilizados en la construcción de las curvas de rendimiento, existen aspectos en la elaboración que no son aportados; motivo por el cual no es posible reconstruir sus curvas publicadas. Uno de los inconvenientes más visible que se presenta y que genera variabilidad en las curvas de rendimiento, es no establecer de manera certera cuales son y bajo que circunstancias se utilizan los diferentes activos del mercado.

	N.S. 1	Sv. 1	N.S. 2	Sv. 2	N.S. 3	Sv. 3
α	3.572	7.251	0.046	11.564	0.673	14.067
β	35.793	-3.981	1.738	-8.353	0.835	-11.751
γ	-50.421	-8.595	8.124	-11.631	7.662	-10.501
τ_1	0.213	1.213	9.613	1.413	8.013	1.813
δ	—	-11.322	—	-23.171	—	-29.836
τ_2	—	15.613	—	13.013	—	13.813

Cuadro 1.1: Estimación de parámetros en los modelos de Nelson-Siegel y Svensson.

Modelos Dinámicos Gaussianos

En el desarrollo de la temática en curvas de rendimiento es importante abordar el problema desde el punto de vista dinámico. Existen grandes desarrollos teóricos que intentan captar el comportamiento dinámico de las tasas de interés desde diferentes enfoques. La valuación dinámica de activos de renta fija se denomina *modelos de curva de rendimiento dinámicos* o *modelos de tasas de interés*.

El objetivo general es establecer modelos teóricos estocásticos que tiendan a representar el comportamiento de las diferentes curvas de rendimiento respecto al vencimiento. La comprensión en los procesos estocásticos que se utilizan se torna de vital importancia para interpretar la evolución en cada uno de los modelos, lo que permite tal vez establecer ventajas comparativas en alguna clase de modelos.

Este análisis implica el estudio de algunas series de tiempo de tasas de rendimiento de ciertos activos financieros en contraposición a los modelos estáticos en los cuales se analizan las tasas de rendimiento de varios activos de manera transversal. El objetivo es que la estimación de las curvas de rendimiento no dependa de manera considerable de los activos seleccionados; lo que se aspira mediante el aumento de la información que se utiliza.

En el capítulo se introducen de manera gradual una variedad de modelos de tasas de interés que permiten valuar desde precios de bonos cupón cero a derivados financieros exóticos que presenten como activo subyacente las tasas de interés. El capítulo se inicia con la investigación sobre que características en los modelos son posibles aplicar en el mercado uruguayo. Se plantea una primera aproximación al problema de modelación de manera estocástica, el cual se restringe a los modelos gaussianos que presentan fórmulas cerradas para los precios de los bonos cupón cero. La principal ventaja que presentan estos modelos es su tratabilidad analítica pero la principal desventaja es la probabilidad no nula de que las tasas de rendimientos sean negativas. Parte de los resultados que se presentan en el capítulo dieron origen al trabajo [48].

Definiciones Previas

Para desarrollar la teoría sobre las tasas de interés es necesario brindar el marco matemático adecuado para realizar varias definiciones básicas que deben ser introducidas de manera consistente las cuales se originan desde un activo financiero base que se denomina *bono cupón*

cero. Estas definiciones permiten utilizar herramientas de cálculo estocástico en los modelos.

Definición 1. *Un bono cupón cero de vencimiento en tiempo T es un activo financiero que garantiza a su propietario el pago de una unidad de dinero en tiempo T sin pagos intermedios. El precio de este activo en tiempo $t \leq T$ se denota mediante $P(t, T)$.*

Desde la definición 1 se obtiene que el bono cupón cero es una función de dos variables que son t y T , en el cual cada uno juega un rol diferente. Al fijar el tiempo t , la función $P(t, T)$ es una función que cumple ciertas propiedades de regularidad. En cambio al fijar T , $P(t, T)$ es un proceso aleatorio cuya trayectoria es irregular.

Se destaca que el bono cupón cero se considera la base de la teoría de las tasas de interés debido a que es muy importante para establecer el valor presente de cualquier otro activo financiero. Para que las definiciones tengan sentido, es necesario establecer tres hipótesis que garantizan la existencia de un mercado teórico de bonos cupón cero:

- existen bonos con vencimiento en tiempo T , para cada $T > 0$;
- la relación $p(t, t) = 1$ se cumple para todo $t > 0$;
- para cada t fijo, el precio $p(t, T)$ es diferenciable con respecto al vencimiento T .

La primera hipótesis se establece para que las definiciones tengan sentido en todos los vencimientos, la segunda hipótesis es necesaria para evitar el arbitraje en el mercado que se genera y la tercera hipótesis se considera con el fin de que las curvas de precios cumplan propiedades de regularidad.

Desde este mercado de bonos cupón cero es posible establecer las definiciones de tasas de interés. Las tasas de interés se clasifican de varias maneras pero en el capítulo se utilizan dos distintas. La primera es de acuerdo al tiempo en que se realiza la inversión (spot o forward) y la segunda es de acuerdo a si los intereses que se obtienen se agregan o no al capital para generar nuevos intereses (simple o compuesta). Las definiciones se establecen al respetar la primera clasificación, aunque también la segunda presenta un importante rol. En cada una, se incluye entre paréntesis una forma alternativa que en varias oportunidades es de gran utilidad para comprender su origen.

Definición 2. *La tasa de interés spot simple $L(S, T)$ en tiempo S con vencimiento en tiempo $T > S$ cumple*

$$L(S, T) := \frac{1}{T - S} \frac{1 - p(S, T)}{p(S, T)}; \quad \left(1 + L(S, T)(T - S) = \frac{1}{p(S, T)} \right).$$

Definición 3. *La tasa de interés spot compuesta anualmente $Y(S, T)$ en tiempo S con vencimiento en tiempo $T > S$ cumple*

$$Y(S, T) := \frac{1}{[p(S, T)]^{\frac{1}{T-S}}} - 1; \quad \left((1 + Y(S, T))^{(T-S)} = \frac{1}{p(S, T)} \right).$$

Definición 4. La tasa de interés spot compuesta k veces en el año $Y^k(S, T)$ en tiempo S con vencimiento en tiempo $T > S$ cumple

$$Y^k(S, T) := \frac{k}{[p(S, T)]^{\frac{1}{k(T-S)}}} - k; \quad \left(\left(1 + \frac{Y^k(S, T)}{k} \right)^{k(T-S)} = \frac{1}{p(S, T)} \right).$$

Definición 5. La tasa de interés spot compuesta $R(S, T)$ en tiempo S con vencimiento en tiempo $T > S$ cumple

$$R(S, T) := -\frac{\log p(S, T)}{T - S}; \quad \left(e^{R(S, T)(T-S)} = \frac{1}{p(S, T)} \right).$$

Existen relaciones entre las definiciones de las tasas de interés, entre ellas se destaca que la tasa de interés spot compuesta es posible alcanzarla como el límite de la tasa de interés spot compuesta k veces en el año al hacer k tender a infinito.

Al progresar en las definiciones de otras tasas de interés, se establece una estrategia basada en argumentos de arbitraje al agregar un tiempo adicional t que cumple $t < S < T$. La estrategia se construye mediante cuatro pasos los cuales consisten en comprar y vender bonos cupón cero de distintos vencimientos sin invertir ningún capital inicial:

- en tiempo t se vende un S -bono por el cual se obtiene $p(t, S)$ dólares;
- se invierte el ingreso para comprar $p(t, S)/p(t, T)$ T -bonos;
- en tiempo S se paga 1 dólar;
- en tiempo T se recibe $p(t, S)/p(t, T)$ dólares.

Definición 6. La tasa de interés forward simple $L(t, S, T)$ en tiempo t para el tiempo inicial S con vencimiento en tiempo T cumple

$$L(t, S, T) := -\frac{1}{(T - S)} \frac{p(t, T) - p(t, S)}{p(t, T)}; \quad \left(1 + L(t, S, T)(T - S) = \frac{p(t, S)}{p(t, T)} \right).$$

Definición 7. La tasa de interés forward compuesta $R(t, S, T)$ en tiempo t para el tiempo inicial S con vencimiento en tiempo T cumple

$$R(t, S, T) := -\frac{\log p(t, T) - \log p(t, S)}{T - S}; \quad \left(e^{R(t, S, T)(T-S)} = \frac{p(t, S)}{p(t, T)} \right).$$

Las definiciones de las tasas de interés forward se consideran la generalización de las definiciones de las tasas de interés spot, debido a que estas coinciden cuando el tiempo t en las tasas de interés forward es el tiempo S en las tasas de interés spot, es decir por ejemplo $L(S, T) = L(S, S, T)$.

Para finalizar las definiciones de tasas de interés, se establecen las dos definiciones que son pilares fundamentales en la modelación que se aplica en la tesis. La primera corresponde a la categoría de tasa forward y la segunda a la categoría de tasa spot. Estas tasas de interés se obtienen cuando $S \rightarrow T$ en la definición 7 y en la definición 5 respectivamente. Las definiciones corresponden a las tasas de interés que se generan en inversiones a muy corto plazo.

Definición 8. La tasa de interés forward instantánea $f(t, T)$ en tiempo t con vencimiento en tiempo T cumple

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log p(t, T)}{\partial T}.$$

Definición 9. La tasa de interés spot instantánea $r(t)$ en tiempo t cumple

$$r(t) = f(t, t).$$

La tasa de interés spot instantánea del mercado (definición 9), permite definir *la cuenta de ahorro* que es de gran utilidad en la modelación. Este proceso representa las ganancias de las inversiones libres de riesgo que se realizan en el mercado, las cuales se acumulan de manera continua a la tasa de interés spot instantánea que prevalece en el mercado en cada instante.

Definición 10. La cuenta de ahorro en tiempo t , que se denota mediante $B(t)$, es aquel proceso cuya evolución es dada mediante la ecuación

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \quad B(0) = 1;$$

donde $r(t)$ es la tasa de interés spot instantánea del mercado en tiempo t .

A pesar de que todas las definiciones que se establecen se originan desde el activo financiero bono cupón cero (definición 1), de manera empírica se confronta que en los mercados financieros sólo una reducida proporción de la deuda soberana se encuentra emitida en este activo (se asocia fundamentalmente a vencimientos a corto plazo). La gran proporción de la deuda soberana se emite en el activo financiero que se denomina *bono con cupones*, en el cual existen pagos intermedios en el contrato y un pago final correspondiente al valor nominal.

Definición 11. Un bono con cupones es un activo financiero que garantiza a su propietario el pago de n cantidades c_i en tiempos T_i y un pago final en tiempo T_n . El precio de este activo en tiempo $t < T$ se denota como $p(t, T)$.

Los pagos intermedios c_i pueden ser fijos o variables. En la tesis se utilizan bonos con cupones fijos y que la diferencia de tiempo entre los pagos intermedios $\Delta_i = T_i - T_{i-1}$ es constante.

La generalización de algunas de las definiciones de tasas de interés al caso de bonos con cupones es compleja, debido a que los pagos intermedios tienen que ser descontados mediante diferentes tasas de interés en cada momento de tiempo. Sin embargo, es posible extender la definición tasa de interés spot compuesta (definición 5) en bonos con cupón.

Definición 12. El rendimiento al vencimiento $z(S, T_n)$ en tiempo S de un bono con cupones c_i que se pagan en tiempo T_i , con $i = 1, \dots, n$, cumple

$$p(S, T_n) = \sum_{i=1}^{i=n} c_i e^{-z(S, T_n)(T_i - S)}.$$

Es decir, la tasa de rendimiento de un bono con cupones es la tasa de interés constante $z(S, T_n)$ que iguala el precio del bono con el valor presente de los flujos futuros del activo. El concepto de valor presente del flujo de pagos futuros es de gran utilidad debido a que admite dividir un bono con cupones en n bonos cupón cero. Este atributo permite analizar los bonos con cupones en el marco teórico de los bonos cupón cero.

Diferentes Enfoques de Modelación de Tasas de Interés

La teoría de la modelación dinámica en tasas de interés evolucionó en el tiempo al adecuarse a los nuevos activos que se desarrollaron en el mercado. En esta sección, se destacan tres enfoques en la modelación que presentan características diferentes y utilizan distintas clases de datos del mercado para su estimación. En la actualidad, se avanza de manera profunda en los modelos que incluyen precios de derivados financieros en tasas de interés de acuerdo al gran progreso en los mercados internacionales de renta fija. Sin embargo, la presente tesis se basa fundamentalmente en los modelos de tasa de interés spot instantánea a causa de la naturaleza de los datos disponibles para analizar la deuda soberana en Uruguay.

En cada enfoque, es esencial entender el comportamiento en la dinámica de varios de los modelos que lo forman con el fin de comprender lo que engloba el mismo. Se desarrollan de manera breve cada uno de los enfoques.

Modelos de tasa de interés spot instantánea

Este enfoque fue el pionero, en el cual se modela la tasa de interés spot instantánea (definición 9) mediante una ecuación diferencial estocástica. La dinámica que presentan los modelos dependen de la complejidad de dicha ecuación. Los primeros modelos se desarrollaron en los trabajos [18] y [54]. En la sección 2.3 se extiende su desarrollo.

Modelos de tasa de interés forward instantánea

En este enfoque se consideran técnicas de cálculo estocástico con el fin de construir un modelo general para la evolución de la tasa de interés forward instantánea (definición 8). La principal característica que presentan los modelos en este enfoque es obtener la curva de rendimiento actual del mercado.

El modelo general considera un proceso estocástico de difusión que se define en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$

$$df(s, t) = \alpha(s, t) ds + \sigma(s, t) dW_s; \quad (2.1)$$

donde $\{W_s, s \geq 0\}$ es un movimiento browniano d -dimensional y los procesos $\alpha(s, t)$ y $\sigma(s, t)$ son procesos \mathcal{F}_s -adaptados .

En términos generales, el modelo genera procesos que cumplen la propiedad de no ser markovianos, ver [11]. Sin embargo, la importancia de este enfoque se intensifica en la publicación del trabajo [30], en el cual David Heath, Robert Jarrow y Andrew Morton establecen que la evolución estocástica de la tasa de interés forward instantánea se determina únicamente con la estructura de volatilidad $\sigma(s, t)$ al asumir que no existe oportunidad de arbitraje en el modelo. El resultado, en su versión elemental, se establece en el teorema 1.

Teorema 1. *Si la dinámica de la tasa instantánea forward es dada por la ecuación (2.1) y no existe oportunidad de arbitraje, entonces se cumple que*

$$\alpha(s, t) = \sigma(s, t) \int_s^t \sigma(s, u)' du. \quad (2.2)$$

donde $\sigma(s, u)'$ establece el vector traspuesto de $\sigma(s, u)$.

Demostración. A partir de la definición 8, se obtiene que

$$\log P(s, t) = - \int_s^t f(s, u) du;$$

por lo cual, al utilizar la ecuación (2.1) y las definiciones auxiliares $\alpha^*(s, t) := \int_s^t \alpha(s, u) du$ y $\sigma^*(s, t) := \int_s^t \sigma(s, u) du$ se cumple que

$$\begin{aligned} d \log P(s, t) &= f(s, s) ds - \int_s^t df(s, u) du \\ &= r_s ds - \int_s^t \left(\alpha(s, u) ds + \sigma(s, u) dW_s \right) du = r_s ds - \alpha^*(s, t) dt - \sigma^*(s, t) dW_s; \end{aligned}$$

en la cual se aplica el teorema de Fubini estocástico que intercambia el orden de las integrales. Dado que $P(s, t) = \exp(-\int_s^t f(s, u) du)$, mediante el lema de Itô se obtiene

$$\begin{aligned} dP(s, t) &= P(s, t) d \log P(s, t) + \frac{1}{2} P(s, t) (d \log P(s, t))^2 \\ &= P(s, t) (r_s - \alpha^*(s, t) + \frac{1}{2} (\sigma^*(s, t)' \sigma^*(s, t))) ds - P(s, t) \sigma^*(s, t) dW_s. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Al aplicar la hipótesis de que no existe oportunidad de arbitraje, se debe cumplir que la tasa de retorno instantánea esperada en la ecuación (2.3) es igual a la tasa de interés spot instantánea r_t . Por lo cual, se cumple que

$$\alpha^*(s, t) = \frac{1}{2} \sigma^*(s, t) \sigma^*(s, t)'. \quad (2.4)$$

Para obtener la ecuación (2.2) se debe diferenciar la ecuación (2.4) con respecto a la variable t . \square

Desde esta perspectiva es posible obtener una gran variedad de modelos en los cuales es necesario especificar solamente la curva forward inicial del mercado $f(0, t)$ y la estructura de volatilidad $\sigma(s, t)$ con $0 \leq s \leq t$.

Modelos de Mercado

El tercer enfoque en la modelación en tasas de interés se denomina *modelos de mercado*. Su objetivo es modelar la tasa de interés forward compuesta (definición 7) en contraposición a los dos enfoques anteriores en los cuales se modelan las tasas de interés instantáneas.

Este enfoque se origina en la búsqueda de un marco teórico adecuado para las prácticas habituales en la valuación de activos financieros que emplean los agentes en el mercado. Estas prácticas consisten en utilizar ciertos modelos de los enfoques anteriores y efectuar varias simplificaciones con el fin de aplicar la conocida “fórmula de Black” que permite valuar derivados financieros, ver el trabajo [7]. Por lo cual, este nuevo enfoque se destaca al proporcionar modelos en los cuales la valuación de los derivados se realiza mediante dicha fórmula.

Los modelos de mercado se utilizan principalmente para valorar opciones en renta fija como son los caps, floors y swaptions, los cuales son los derivados financieros más transados en los mercados internacionales. Estos derivados protegen al propietario del activo (brinda el derecho pero no obligación) frente a cambios en las tasas de interés porque el activo subyacente es el forward rate agreement o es el swap en tasas de interés. Las definiciones de estos activos se encuentran en [11].

Existen dos modelos de referencia en este enfoque que se denominan *modelos de mercado Libor* y *modelos de mercado swap*, en los cuales la idea principal es aplicar la técnica denominada cambio de numerario, ver [5]. Esta técnica propone modificar la utilización de la cuenta de ahorro (definición 10) por el precio de mercado de un determinado activo. El cambio a una nueva medida de probabilidad que se denomina *medida forward*, logra que la tasa de interés forward compuesta tenga distribución log-normal. En el modelo, cada tasa de interés tiene asociada una estructura de volatilidad determinista y existe correlación temporal entre las tasas de interés para diferentes tiempos.

Si se desarrolla de manera breve una versión general del modelo de mercado Libor, se asume un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ y un conjunto de tiempos $T_0 < \dots < T_M$ y se denota $\tau_k = T_k - T_{k-1}$. La tasa de interés forward compuesta $R(t, T_{k-1}, T_k)$ se modela mediante la ecuación diferencial estocástica

$$dR(t, T_{k-1}, T_k) = \sigma_k(t)\phi(R(t, T_{k-1}, T_k))dW_t^k, \quad t \leq T_{k-1}, \quad \forall k = 1, \dots, M;$$

donde $\{W_t^k, t \geq 0\}$ es un movimiento browniano bajo la medida de probabilidad que presenta como numerario al precio de un bono cupón cero de vencimiento en tiempo T_k . Es claro que la tasa forward $R(t, T_{k-1}, T_k)$ es una martingala bajo dicha medida de probabilidad. A su vez, se asume que la correlación es constante con respecto del tiempo

$$dW_t^i dW_t^k = \rho_{ij} dt; \quad \forall i, j = 1, \dots, M.$$

La elección de la función ϕ determina la distribución de la tasa de interés forward. En la mayoría de los casos se utiliza la función $\phi(x) = x$; mediante la cual se obtiene la distribución log-normal que permite aplicar la fórmula de Black. Es posible seleccionar también otras funciones, como por ejemplo $\phi(x) = x^p$ donde $p \in (0, 1)$ en el cual se obtiene una distribución chi-cuadrado no central.

Modelos en Tasas de Interés Spot Instantánea

Como se establece en la sección 2.2, este enfoque es el principal para el progreso de la tesis, el cual modela de forma dinámica la tasa de interés spot instantánea (definición 9) mediante un proceso estocástico. En esta sección, se desarrolla teóricamente el enfoque de modelos y se observa que al aplicar los principios de ausencia de arbitraje se arriba a una ecuación diferencial en derivadas parciales que debe cumplir el precio del bono cupón cero. Este marco teórico permite la generación de varios modelos que son utilizados en la literatura.

Este enfoque utiliza la noción que se emplea de manera frecuente en las prácticas de mercado que es la técnica del valor presente de los flujos de pagos futuros con el fin de valorar los

diferentes activos financieros. El precio de un activo se obtiene al descontar sus flujos mediante cierta tasa de interés que tiene la característica de no ser determinista.

Al desarrollar los modelos se asume que la tasa de interés spot instantánea $\{r_t, t \geq 0\}$ cumple la ecuación diferencial estocástica

$$dr_t = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)dW_t; \quad (2.5)$$

donde $\{W_t, t \geq 0\}$ es un movimiento browniano en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$.

El precio de un bono cupón cero $P(t, T)$ se considera que es una función de dos variables (r, t) así como un parámetro T que expresa el vencimiento del bono; es decir $P(t, T) = g_T(t, r)$ siendo $g_T(t, r)$ al menos dos veces diferenciable con respecto a ambas variables.

Al aplicar el lema de Itô a la función $g_T(t, r)$, se obtiene

$$\begin{aligned} dg_T(t, r) &= \frac{\partial g_T}{\partial t} dt + \frac{\partial g_T}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_T}{\partial r^2} (dr)^2 \\ &= \frac{\partial g_T}{\partial t} dt + \frac{\partial g_T}{\partial r} (\mu(t, r) dt + \sigma(t, r) dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_T}{\partial r^2} (\mu(t, r) dt + \sigma(t, r) dW_t)^2 \\ &= \left(\frac{\partial g_T}{\partial t} + \frac{\partial g_T}{\partial r} \mu(t, r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_T}{\partial r^2} \sigma^2(t, r) \right) dt + \frac{\partial g_T}{\partial r} \sigma(t, r) dW_t. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Si se consideran dos bonos cupón cero de vencimientos en tiempo S y tiempo T y se construye un portafolio dinámico que únicamente los incluye. Sea $\alpha_S(t)$ y $\alpha_T(t)$ la fracción respectiva de cada bono en tiempo t en el portafolio. La tasa de retorno V_t de este portafolio, es la suma proporcional de las tasas de retornos de cada bono, por lo cual se obtiene

$$\frac{dV_t}{V_t} = \alpha_S(t) \frac{dg_S(t, r)}{g_S(t, r)} + \alpha_T(t) \frac{dg_T(t, r)}{g_T(t, r)}. \quad (2.7)$$

Si se sustituye la ecuación (2.6) en la ecuación (2.7) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} &= \alpha_S(t) \hat{\mu}_S(t) dt + \alpha_S(t) \hat{\sigma}_S(t) dW_t + \alpha_T(t) \hat{\mu}_T(t) dt + \alpha_T(t) \hat{\sigma}_T(t) dW_t \\ &= \left(\alpha_S(t) \hat{\mu}_S(t) + \alpha_T(t) \hat{\mu}_T(t) \right) dt + \left(\alpha_S(t) \hat{\sigma}_S(t) + \alpha_T(t) \hat{\sigma}_T(t) \right) dW_t; \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_i(t) &= \frac{\left(\frac{dg_i}{dt}(t, r) + \frac{dg_i}{dr}(t, r) \mu(t, r) + \frac{1}{2} \frac{d^2 g_i}{dr^2}(t, r) \sigma^2(t, r) \right) dt}{g_i(t, r)}; \\ \hat{\sigma}_i(t) &= \frac{\frac{dg_i}{dr}(t, r) \sigma(t, r) dW_t}{g_i(t, r)}, \quad i = \{S, T\}. \end{aligned}$$

Al imponer la restricción que el portafolio dinámico sea considerado libre de riesgo en una medida de probabilidad de riesgo neutral, se debe cumplir que el factor con respecto al movimiento browniano sea cero. Además al asumir que se realizan estrategias autofinanciantes

(es decir, no ingresa ni egresa ningún dinero al portafolio), se cumple

$$\begin{aligned}\alpha_S + \alpha_T &= 1, \\ \alpha_S \hat{\sigma}_S + \alpha_T \hat{\sigma}_T &= 0.\end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones tienen como solución

$$\alpha_S(t) = \frac{-\hat{\sigma}_T(t)}{\hat{\sigma}_S(t) - \hat{\sigma}_T(t)}, \quad \alpha_T(t) = \frac{-\hat{\sigma}_S(t)}{\hat{\sigma}_S(t) - \hat{\sigma}_T(t)}.$$

Si se sustituye en la ecuación (2.7), se obtiene

$$\frac{dV_t}{V_t} = \left(\hat{\mu}_S(t) \frac{-\hat{\sigma}_T(t)}{\hat{\sigma}_S(t) - \hat{\sigma}_T(t)} + \hat{\mu}_T(t) \frac{\hat{\sigma}_S(t)}{\hat{\sigma}_S(t) - \hat{\sigma}_T(t)} \right) dt.$$

Como el portafolio es libre de riesgo, al asumir la condición de ausencia de arbitraje se debe cumplir que la tasa de retorno del portafolio es la misma que la tasa de retorno instantánea en la cuenta de ahorro. Por lo cual, se obtiene

$$r_t = \frac{\hat{\mu}_T(t) \hat{\sigma}_S(t) - \hat{\mu}_S(t) \hat{\sigma}_T(t)}{\hat{\sigma}_S(t) - \hat{\sigma}_T(t)}. \quad (2.8)$$

Al reescribir la ecuación (2.8), se alcanza

$$\frac{\hat{\mu}_S(t) - r_t}{\hat{\sigma}_S(t)} = \frac{\hat{\mu}_T(t) - r_t}{\hat{\sigma}_T(t)};$$

lo que permite definir el proceso $\lambda(t)$ que se denomina *el proceso de riesgo de mercado*, mediante la ecuación

$$\lambda(t) := \frac{\hat{\mu}_S(t) - r_t}{\hat{\sigma}_S(t)}. \quad (2.9)$$

En la ecuación (2.9), el proceso riesgo de mercado se interpreta como el exceso en la tasa de retorno que presenta el bono cupón cero con respecto al activo libre de riesgo (cuenta de ahorro) por unidad de volatilidad instantánea. Si se sustituyen los valores de $\hat{\mu}(t)$ y $\hat{\sigma}(t)$ en la ecuación (2.9) se obtiene que el proceso riesgo de mercado se expresa

$$\lambda(t) = \frac{\frac{\partial g}{\partial t}(t, r) + \frac{\partial g}{\partial r}(t, r) \mu(t, r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(t, r) \sigma^2(t, r)}{\frac{\partial g}{\partial r}(t, r) \sigma(t, r)} - \frac{r_t g(t, r)}{\frac{\partial g}{\partial r}(t, r) \sigma(t, r)}. \quad (2.10)$$

Si se reescribe la ecuación (2.10), se obtiene

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, r) + (\mu(t, r) - \lambda(t) \sigma(t, r)) \frac{\partial g}{\partial r}(t, r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(t, r) \sigma^2(t, r) - r_t g(t, r) = 0;$$

la cual al expresarse en función del precio del bono cupón cero de vencimiento en tiempo T , es la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, T) + (\mu(t, r) - \lambda(t) \sigma(t, r)) \frac{\partial P}{\partial r}(t, T) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(t, T) - r_t P(t, T) = 0. \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) presenta características similares a la que se obtiene en el modelo de Black-Scholes en la aplicación a activos de renta variable. En este caso, el activo subyacente

es la tasa de interés spot instantánea y el bono cupón cero es el derivado financiero. Para especificar de manera completa el modelo, es necesario establecer una condición de borde. En este caso se aplica una de las hipótesis en la generación del mercado de bonos, por lo cual para cualquier tasa de interés spot instantánea r se cumple que el precio del bono en el vencimiento coincide con su valor nominal, es decir $P(T, T) = 1$.

La ecuación diferencial en derivadas parciales (2.11) brinda la relación entre la valuación de derivados financieros en tasas de interés y el enfoque se denomina *riesgo neutral*. Es decir, la utilización del teorema de representación de Feynman-Kac (para más detalles, ver [5]) en la ecuación (2.11) nos permite obtener el precio del bono cupón cero en tiempo t con vencimiento en tiempo T como el valor esperado del pago final del bono (en este caso el valor nominal) que se descuenta a su valor presente al utilizar la dinámica de la tasa de interés spot instantánea. Es decir, se obtiene la fórmula de valuación

$$P(t, T) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(e^{-\int_t^T r_s ds} \times 1 | \mathcal{F}_t \right); \quad (2.12)$$

en la cual la medida de probabilidad \mathbf{Q} denominada de *riesgo neutral* es equivalente a la medida de probabilidad histórica \mathbf{P} y se establece mediante el teorema de Girsanov, ver [11], en el cual el proceso riesgo de mercado juega un rol fundamental en la derivada de Radon-Nikodym. Es decir, se obtiene que la dinámica de la tasa de interés spot instantánea r_t , bajo la nueva medida \mathbf{Q} se representa

$$dr_t = (\mu(t, r) - \lambda(t)\sigma(t, r)) dt + \sigma(r, t) d\hat{W}_t; \quad (2.13)$$

donde $\hat{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda(s) ds$ es un movimiento browniano bajo la medida \mathbf{Q} .

En la ecuación (2.13) se obtiene que el mercado que se genera de tasas de interés es incompleto, es decir existen diferentes maneras de valuar los bonos cupón cero que son consistentes con la dinámica estocástica de r_t y la medida de probabilidad \mathbf{P} . Estas formas de valuar los activos financieros de manera consistente entre ellos se encuentran unívocamente relacionadas con la manera de establecer el proceso de riesgo de mercado. Esto es a causa de que al fijar el proceso $\lambda(t)$ se establece un único cambio de medida de probabilidad \mathbf{Q} lo que produce una única manera de valuar los activos.

Al analizar en profundidad la ecuación (2.13), se obtiene que es irrelevante en la modelación la forma específica de los procesos $\mu(t, r)$ y $\lambda(t)$ siendo el término verdaderamente importante $\mu(t, r) - \lambda(t)\sigma(t, r)$, que es la tendencia de la ecuación. Por lo cual, en la tesis se utiliza el procedimiento denominado *modelación de martingala* que en vez de especificar $\mu(t, r)$ y $\lambda(t)$ en la medida de probabilidad \mathbf{P} , se establece únicamente $\mu(t, r)$ en la medida de riesgo neutral \mathbf{Q} .

Modelos a considerar

En este enfoque para la selección de un modelo particular lo que se debe determinar son las funciones paramétricas $\mu(t, r)$ y $\sigma(t, r)$ en la ecuación (2.5) en la medida de probabilidad \mathbf{Q} , de cuya consideración resultan las ventajas y desventajas que presentan los modelos. Es necesario comprender distintos aspectos que el enfoque permite tanto para el desarrollo de la teoría como para su implementación práctica. Entre las propiedades más destacables se encuentran

la existencia de fórmulas cerradas tanto para los precios de bonos como para los precios de ciertos derivados financieros; si las tasas de interés generadas para el instante inicial coinciden con las tasas de interés observadas en el mercado; el estudio de la estructura de volatilidad en la evolución; la posibilidad de generar tasas de interés que cumplan ser estrictamente positivas y establecer la disponibilidad de técnicas estadísticas que sean adecuadas para aplicar a causa de la naturaleza de los datos disponibles. Los modelos que se consideran en el capítulo comparten la propiedad de ser gaussianos. La literatura es amplia en estos temas, entre ellos se destacan los libros [11] y [49].

Modelo de Vasicek

El modelo propuesto por Oldrich Vasicek en el trabajo [54], modela la tasa de interés spot instantánea mediante un proceso de Ornstein-Uhlenbeck de parámetros constantes en una dimensión mediante

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad r(0) = r_0; \quad (2.14)$$

donde a, b, σ son constantes positivas y $\{W_t, t \geq 0\}$ es un movimiento browniano.

Como la tasa de interés instantánea $\{r_t, t \geq 0\}$ se modela mediante un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, es posible obtener la ecuación que describe la evolución r_u , dado el conjunto de información hasta el tiempo t que cumple $t < u$. Si se considera la función auxiliar $g(t, r) = re^{at}$ y se aplica el lema de Itô se obtiene

$$\begin{aligned} dg &= are^{at} dt + e^{at} dr \\ &= are^{at} dt + e^{at}(a(b - r)dt + \sigma dW) = e^{at}ab dt + \sigma e^{at} dW_t. \end{aligned}$$

Por lo cual, se cumple que

$$\begin{aligned} g(u, r_u) - g(t, r_t) &= ab \int_t^u e^{as} ds + \sigma \int_t^u e^{as} dW_s \\ e^{au}r_u - e^{at}r_t &= b(e^{au} - e^{at}) + \sigma \int_t^u e^{as} dW_s \\ r_u &= r_t e^{-a(u-t)} + b(1 - e^{-a(u-t)}) + \sigma \int_t^u e^{a(s-t)} dW_s. \end{aligned} \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) permite concluir que la tasa de interés spot instantánea r_u tiene distribución normal con los momentos

$$\mathbf{E}(r_u | \mathcal{F}_t) = r_t e^{-a(u-t)} + b(1 - e^{-a(u-t)}); \quad \mathbf{Var}(r_u | \mathcal{F}_t) = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(u-t)}). \quad (2.16)$$

Para analizar la incidencia de los parámetros en la evolución de la tasa de interés spot instantánea, es posible discretizar la ecuación (2.15) mediante el método de Euler y estudiar el efecto de modificarlos en cierta cantidad. Si se aumenta el parámetro a , no se modifica la tasa de interés de largo plazo pero se observa una modificación en la evolución en el corto plazo que depende si la tasa de interés se encuentra por debajo o por encima de la tasa de largo plazo. Si se considera un aumento en el parámetro b , en el tiempo posterior se incrementa la tasa de interés instantánea y se obtiene además que aumenta la tasa de interés en el largo

plazo. Si se considera un aumento en el parámetro σ , el cambio en el corto plazo puede ser positivo o negativo al depender del término aleatorio, sin embargo el efecto en el largo plazo no sucede sobre la esperanza de la tasa de interés pero si sobre la variabilidad en su evolución.

Al examinar la situación a largo plazo, una de las principales características que presenta este modelo es la reversión a la media. Esta propiedad establece que cuando la tasa de interés spot instantánea se encuentra por encima de la tasa de largo plazo, la tendencia toma el signo negativo lo cual genera estímulos para que la tasa disminuya hacia su valor b . Lo contrario ocurre, si la tasa de interés spot instantánea está por debajo de la tasa de largo plazo. La velocidad que presenta esta convergencia depende de la magnitud del parámetro a . En cuanto a la interpretación de la propiedad, existen argumentos económicos a favor de incluirla en los modelos a causa de que si no se considera, las tasas de interés pueden desviarse de manera permanente al alza o a la baja lo cual no se observa de manera empírica en el mercado en el largo plazo.

Al conocer la evolución de la tasa de interés spot instantánea r_t en el modelo de Vasicek mediante la ecuación (2.14), es posible derivar el precio del bono cupón cero. Existen diferentes enfoques para la valuación de este activo, en el trabajo [45] se proponen tres maneras distintas de abordar el problema. En este caso se considera a la tasa de interés spot instantánea r_t como una variable en la ecuación (2.15), por lo que se cumple

$$\frac{\partial r_u}{\partial r_t} = e^{-a(u-t)},$$

por lo tanto

$$\int_t^T \frac{\partial r_u}{\partial r_t} du = \int_t^T e^{-a(u-t)} du = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)}) := B(t, T).$$

Si se utilizan los precios de bonos cupón cero que se establecen en la ecuación (2.12), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(- \left(\int_t^T \frac{\partial r_u}{\partial r_t} du \right) e^{-\int_t^T r_u du} \right) \\ &= - \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)}) \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(e^{-\int_t^T r_u du} \right) = -B(t, T)P(t, T). \end{aligned}$$

Al resolver la ecuación diferencial el precio del bono cupón cero se expresa

$$P(t, T) = C(t, T)e^{-B(t, T) r_t}; \quad (2.17)$$

para cierta función $C(t, T)$. Al aplicar técnicas similares que en la deducción de la ecuación (2.11), se obtiene que la ecuación diferencial en derivadas parciales que cumple el precio del bono cupón cero en el modelo de Vasicek se expresa

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, T) + \frac{\partial}{\partial r_t} P(t, T)(a(b - r_t)) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r_t^2} P(t, T) - r_t P(t, T) = 0; \quad (2.18)$$

junto a la condición final $P(T, T) = 1$.

Desde la ecuación (2.17), las tres derivadas parciales que se necesitan en la deducción son

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial t} e^{-B(t,T)r_t} - C \frac{\partial B}{\partial t} r_t e^{-B(t,T)r_t}, \quad \frac{\partial P}{\partial r_t} = -BC e^{-B(t,T)r_t}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r_t^2} = B^2 C e^{-B(t,T)r_t},$$

por lo cual, se obtiene que la ecuación (2.18) se expresa

$$\frac{\partial C}{\partial t} e^{-Br_t} - C \frac{\partial B}{\partial t} r_t e^{-Br_t} - BC e^{-Br_t} (a(b - r_t)) + \frac{\sigma^2}{2} B^2 C e^{-Br_t} - r_t C e^{-Br_t} = 0;$$

la cual se simplifica

$$\frac{\partial C}{\partial t} - C \frac{\partial B}{\partial t} r_t - BC(a(b - r_t)) + \frac{\sigma^2}{2} B^2 C - r_t C = 0. \quad (2.19)$$

Si se cumple que $r_t = 0$ entonces $P(t, T) = C(t, T)$ y la ecuación (2.19) se reduce a

$$\frac{\partial C}{\partial t} - abBC + \frac{\sigma^2}{2} B^2 C = 0. \quad (2.20)$$

La solución de la ecuación (2.20) con condición final $C(T, T) = 1$ es la función

$$\begin{aligned} C(t, T) &= \exp\left(-\frac{ab}{a} \int_t^T (1 - e^{-a(T-u)}) du + \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_t^T (1 - e^{-a(T-u)})^2 du\right) \\ &= \exp\left(-b(T-t) + \frac{b}{a}(1 - e^{-a(T-t)}) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(T-t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-2a(T-t)}) - \frac{\sigma^2}{a^3}(1 - e^{-a(T-t)})\right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Si se denota a la función $A(t, T) = \log C(t, T)$ y se ordenan los términos en la ecuación (2.21), se obtiene que la fórmula del precio del bono cupón cero en el modelo de Vasicek es

$$P(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r_t}, \quad (2.22)$$

donde

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right) (B(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4a} B(t, T)^2; \\ B(t, T) &= \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}). \end{aligned}$$

Para analizar la incidencia de los parámetros en el precio del bono cupón cero se estudia la ecuación (2.22). Un incremento en el parámetro a disminuye el precio del bono, aunque la disminución se torna cada vez menos relevante al aumentar dicho parámetro. Se cumple además que la incidencia de este parámetro depende de la magnitud del parámetro σ . En cuanto al parámetro b , un aumento en su magnitud provoca el comportamiento esperable de disminuir el precio y un aumento en el parámetro σ provoca un aumento en el precio del bono aunque el cambio relativo en el precio depende de su magnitud.

Modelo Ho-Lee

Al analizar el modelo de Vasicek resulta que la curva de rendimiento inicial que genera el modelo no se ajusta de manera adecuada a las tasas de rendimiento observadas en el mercado. Esta propiedad se considera una desventaja relativa del modelo. La razón de que esto suceda es que con tres parámetros es imposible ajustar la curva en su totalidad, lo que motiva a ampliar la búsqueda a otros modelos gaussianos en una dimensión que incorporen esta propiedad.

En 1986, Thomas Ho y Sang Bin Lee desarrollan un modelo en el marco de un árbol binomial (modelo discreto) de precios de bonos, en el trabajo [31]. El modelo es uno de los primeros que se construye con el fin de replicar todos los precios de bonos observados en el mercado.

En 1998, Philip Dybvig extendió dicho modelo a tiempo continuo en el trabajo [26]. La evolución de la tasa de interés spot instantánea se expresa mediante

$$dr_t = \theta(t) + \sigma dW_t;$$

donde σ es la volatilidad de su evolución y $\theta(t)$ es una función que representa la tendencia del proceso. Esta función tiene el objetivo de ajustar la curva de rendimiento inicial del modelo a la que se observa en el mercado, la cual se determina de manera analítica desde la manipulación de los datos observados.

En el modelo, se demuestra que la ecuación (2.11) presenta como solución la ecuación (2.22), aunque en este caso las funciones involucradas cumplen las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(t, T)}{\partial t} &= \theta(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t, T); \\ \frac{\partial B(t, T)}{\partial t} &= -1; \end{aligned}$$

que tienen como soluciones a las funciones

$$A(t, T) = - \int_t^T \theta(s)(T-s)ds + \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3; \quad (2.23)$$

$$B(t, T) = T - t. \quad (2.24)$$

Mediante la ecuación (2.23), la ecuación (2.24) y la información del mercado es posible obtener la forma funcional de $\theta(t)$. Sin pérdida de generalidad, se asume que el tiempo inicial corresponde a $t = 0$, por lo cual la tasa de interés spot compuesta (definición 5) cumple

$$-TR(0, T) = A(0, T) - rB(0, T). \quad (2.25)$$

Si se deriva la ecuación (2.25) dos veces con respecto a la variable T , se obtiene

$$\theta(t) = f'_M(0, T) + \sigma^2 T;$$

donde $f_M(0, T)$ es la tasa de interés forward instantánea del mercado que resulta de la interpolación de los datos disponibles. Por lo cual la fórmula del precio del bono cupón cero en el modelo de Ho-Lee es

$$P(t, T) = \frac{P_M(0, T)}{P_M(0, t)} \exp\left((T-t)f_M(0, t) - \frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2 - (T-t)r_t\right).$$

Modelo Hull-White

En la búsqueda de modelos que cumplen el ajuste a la curva observada del mercado, John Hull y Alan White, en el trabajo [32], desarrollaron una propuesta que se percibe como la extensión natural del modelo de Vasicek que cumple dicha propiedad. Se asume que la dinámica de la tasa de interés spot instantánea es

$$dr_t = a(\theta(t) - r_t)dt + \sigma dW_t; \quad (2.26)$$

donde los parámetros a y σ cumplen el mismo rol que en el modelo de Vasicek y la diferencia consiste en que $\theta(t)$ es función del tiempo. En el modelo, la ecuación (2.11) presenta como solución la ecuación (2.22) en el que las funciones involucradas cumplen las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(t, T)}{\partial t} &= \theta(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t, T); \\ \frac{\partial B(t, T)}{\partial t} &= aB(t, T) - 1; \end{aligned}$$

que tienen como soluciones a las funciones

$$A(t, T) = - \int_t^T \theta(s)B(s, T)ds + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_t^T B(s, T)^2 ds; \quad (2.27)$$

$$B(t, T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)}). \quad (2.28)$$

Mediante la ecuación (2.27), la ecuación (2.28) y una deducción similar a la que se realiza en el modelo Ho-Lee, es posible obtener la función $\theta(t)$. Se asume que el tiempo inicial corresponde a $t = 0$ y a causa de la ecuación (2.22) la tasa de interés forward compuesta cumple la ecuación (2.25). Al derivar la ecuación dos veces con respecto a la variable T , se obtiene

$$\theta(t) = f'_M(0, T) + af(0, T) + \frac{\sigma}{2a}(1 - e^{-2aT});$$

donde $f_M(0, T)$ es la tasa de interés forward instantánea del mercado. Por lo cual la fórmula del precio del bono cupón cero en el modelo de Hull-White es

$$P(t, T) = \frac{P_M(0, T)}{P_M(0, t)} \exp \left(B(t, T)f_M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1 - e^{-2t})B(t, T)^2 - B(t, T)r_t \right).$$

Modelo G2++

Los tres modelos que se desarrollaron previamente comparten la propiedad de ser unidimensionales. Al considerar estos modelos, se asume de manera implícita que los cambios en las tasas de interés con vencimiento en tiempo S se encuentran perfectamente correlacionados con los cambios en las tasas de interés con vencimiento en tiempo T (para todo S y T). Esta situación provoca que una perturbación en alguna parte de la curva de rendimiento se expanda a todos los vencimientos de manera similar. Sin embargo, de manera empírica se observa que la correlación que existe entre los cambios en las tasas de rendimiento de bonos de distintos vencimientos no es perfecta. Lo que motiva a utilizar algún modelo que tenga en consideración esta circunstancia.

En el modelo G2++, ver [11], se propone incrementar la dimensión en la tasa de interés spot instantánea pero sin resignar la capacidad de ajuste inicial a la curva observada en el mercado. Este modelo se compone de dos procesos gaussianos y una función determinista que tiene como propósito el ajuste inicial.

La dinámica de la tasa de interés spot instantánea se modela mediante

$$r_t = x_t + y_t + \varphi(t);$$

donde los procesos $\{x_t, t \geq 0\}$, $\{y_t, t \geq 0\}$ y el vector (W_t^1, W_t^2) cumplen que

$$dx_t = -ax_t dt + \sigma dW_t^1; \quad dy_t = -by_t dt + \eta dW_t^2; \quad dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt;$$

siendo a, b, σ, η constantes positivas y $-1 \leq \rho \leq 1$.

Si se utilizan argumentos similares que en la deducción de la ecuación (2.15), se obtiene que la evolución de la tasa de interés spot instantánea r_u en el modelo es

$$r_u = x_t e^{-a(u-t)} + y_t e^{-b(u-t)} + \sigma \int_t^u e^{-a(u-s)} dW_s^1 + \eta \int_t^u e^{-b(u-s)} dW_s^2 + \varphi(u). \quad (2.29)$$

La ecuación (2.29) permite deducir que la tasa de interés spot instantánea r_u presenta distribución normal de momentos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r_u | \mathcal{F}_t) &= x_t e^{-a(u-t)} + y_t e^{-b(u-t)} + \varphi(u); \\ \mathbf{Var}(r_u | \mathcal{F}_t) &= \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(u-t)}) + \frac{\eta^2}{2b} (1 - e^{-2b(u-t)}) + \frac{2\rho\sigma\eta}{a+b} (1 - e^{-(a+b)(u-t)}). \end{aligned}$$

En el desarrollo se obtiene que la fórmula del precio del bono cupón cero en el modelo de G2++ es

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T \varphi(u) du - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x_t - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y_t + \frac{1}{2} V(t, T) \right); \quad (2.30)$$

donde

$$\begin{aligned} V(t, T) &= \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right) \\ &\quad + \frac{\eta^2}{b^2} \left(T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right) \\ &\quad + \frac{2\rho\sigma\eta}{ab} \left(T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Si bien la ecuación (2.30) es la deducción del precio del bono cupón cero mediante la utilización de la ecuación (2.29), no se concibe la manera de establecer a la función $\varphi(t)$. Si existe ajuste a las tasas de interés forward del mercado $f_M(0, t)$, se debe cumplir que

$$\varphi(t) = f_M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{-bt})^2 + \frac{\rho\sigma\eta}{ab} (1 - e^{-at})(1 - e^{-bt}).$$

Por lo cual, se obtiene que la fórmula del precio del bono cupón cero es

$$P(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp\left(A(t, T)\right); \quad (2.32)$$

donde $P^M(0, T)$ denota el precio de mercado del bono cupón cero en tiempo inicial $t = 0$ con vencimiento en T y la función $A(t, T)$ se expresa mediante

$$A(t, T) = \frac{1}{2}\left(V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)\right) - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}x_t - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b}yt.$$

Métodos de Estimación

Los modelos que se desarrollan en la sección 2.3 se basan en las definiciones de tasas de interés instantáneas. Al examinar el mercado financiero en Uruguay, no existen aquellas tasas de interés que presenten dicha característica salvo la denominada *tasa de interés overnight*. Esta tasa de interés se determina como el promedio ponderado de los préstamos en moneda nacional que se negocian entre los bancos con vencimiento al día hábil posterior. No obstante, la teoría económica sugiere que esta tasa de interés no es adecuada para ser considerada como la tasa de interés spot instantánea del mercado, a causa de que en diversas oportunidades se encuentra sujeta a propósitos de liquidez de las instituciones bancarias participantes y no presenta relación directa con el comportamiento del mercado de deuda soberana.

En la sección 1.1 se analizan algunas características de la deuda soberana en Uruguay. Se establece que los principales activos financieros que la integran son los bonos soberanos y que no existe un mercado desarrollado de derivados financieros en tasas de interés. Por lo tanto, los únicos datos disponibles para la estimación de las curvas de rendimiento en Uruguay son los precios de los bonos transados en ambas bolsas de valores y los bonos transados en el exterior. Por esta razón, en esta sección se proponen dos metodologías clásicas de estimación: la primera es el método del jacobiano y la segunda es la calibración. Vale destacar que en países que existe un mercado desarrollado de derivados financieros es posible aplicar otras propuestas tanto de modelación como de estimación.

Método del Jacobiano

El primer método de estimación que se describe es el método del jacobiano, el cual tiene como objetivo estimar los parámetros del modelo en base a los precios históricos de mercado de ciertos bonos.

Los modelos que se utilizan presentan la propiedad de que el precio depende de sus parámetros y es función de la tasa de interés spot instantánea r_t . Este método utiliza la fórmula de precios de manera inversa, es decir interpreta a la tasa de interés como un factor desconocido y a los precios de bonos cupón cero como conocidos al utilizar la herramienta de cambio de variable mediante su matriz jacobiana en la función de máxima verosimilitud.

El requerimiento de este método es utilizar como mínimo la misma cantidad de series históricas de precios de bonos que dimensiones en el modelo. En las aplicaciones se utilizan la misma cantidad; por lo cual se asume un conjunto de panel de precio de un bono cupón

cero en tiempo t de vencimiento $T^{(i)}$ que se denota como $P_t^M = (P^M(t, T^{(i)}))$ con $i = 1, \dots, I$ y $t = 1, \dots, S$ y se describe a $(r_t^{(i)})$ con $t = 1, \dots, S$ como el vector de tasas de interés spot instantánea que se considera no observable en el mercado.

Los modelos que se desarrollan en la sección 2.3 cumplen la propiedad de Markov, por lo cual se cumple que la densidad conjunta de P_2^M, \dots, P_S^M necesaria para definir la función de verosimilitud satisface

$$h(P_2^M, \dots, P_S^M | P_1^M, \Theta) = \prod_{k=2}^S h(P_k^M | P_{k-1}^M, \Theta)$$

Al utilizar el cambio de variable en cada función de densidad condicional, se obtiene

$$\begin{aligned} h(P_k^M | P_{k-1}^M, \Theta) &= h(r_k | r_{k-1}, \Theta) \left| \frac{\partial r_k}{\partial P_k} \right| \\ &= h(r_k | r_{k-1}, \Theta) \left| \frac{\partial P_k}{\partial r_k} \right|^{-1} = h(r_k | r_{k-1}, \Theta) \frac{1}{|J_k|}; \end{aligned}$$

donde J_k es la matriz jacobiana de cambio de variable de dimensión $I \times I$ que resulta de la fórmula de precios de bonos de cada modelo. Por más detalle, ver el trabajo [16].

Método de Calibración

El segundo método que se describe es la calibración de los parámetros en base a los precios de mercado de diversos bonos al utilizar un enfoque transversal.

En este método se asume que se observan en un tiempo fijo t los precios de mercado de los bonos soberanos en una determinada moneda. Por lo cual, la base de datos que se utiliza son los precios de un conjunto de N activos financieros en un mismo momento. Se denota la base de datos en tiempo t como $P_t^{Mer} = (P^{Mer}(t, T^{(i)}))$, $i = 1, \dots, I$, donde $P^{Mer}(t, T^{(i)})$ es el precio de mercado en tiempo t de cada uno de los bonos con vencimiento en $T^{(i)}$ y a los precios de los mismos activos computados mediante el modelo como $P_t^{Mod} = (P^{Mod}(t, T^{(i)}))$.

La propuesta del método se centra en encontrar los valores de los parámetros que minimizan la diferencia entre los precios de mercado y los precios del modelo. Para realizar la calibración, se selecciona resolver el problema de mínimos cuadrados

$$\min_{\Theta} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{i=I} \left(P^{Mer}(t, T^{(i)}) - P^{Mod}(t, T^{(i)}) \right)^2.$$

Datos y Resultados

Las bases de datos que se utilizan en la búsqueda de los parámetros en los modelos se encuentran relacionadas al método de estimación. En el primer método de estimación se emplean el modelo de Vasicek y el modelo G2++ y en el segundo método se emplean el modelo

de Ho-Lee y el modelo de Hull-White.

En el primer análisis, se estudia la deuda soberana en Uruguay en dólares desde enero de 2010 a octubre de 2013 al aplicar el modelo de Vasicek mediante el método del jacobiano. El modelo es en una dimensión por lo cual para obtener los parámetros es necesario utilizar por lo menos una serie histórica de precios de un activo soberano. Se selecciona el bono global en dólares con vencimiento en enero de 2033.

En este análisis se consideran dos casos diferentes. En primera instancia se realiza la estimación de parámetros con los precios del bono publicados por el BCU de manera semanal los días miércoles. Esta base presenta la característica (salvo algunos días feriados) que el diferencial de tiempo es constante en toda la estimación y que existen precios publicados que no fueron transados. Los precios no transados son estimados por el BCU al utilizar sus criterios de valuación. En segunda instancia se realiza la estimación de los parámetros al utilizar los precios del bono en los días en que se transó el bono en el mercado local. En esta base de datos se puede establecer que los precios del bono son los que determina el mercado aunque si en determinados días el activo se transó a diferentes precios se utiliza el precio promedio. Los resultados obtenidos se encuentran en el cuadro 2.1.

$a = 0.3876$	$b=0.0832$	$\sigma = 0.0196$
$a = 0.4527$	$b=0.0851$	$\sigma=0.0243$

Cuadro 2.1: Parámetros obtenidos en el modelo de Vasicek en los dos casos analizados. Arriba: base de datos de frecuencia semanal. Abajo: base de datos con precios transados en el mercado financiero local.

La comparación entre la magnitud de los parámetros estimados al utilizar las dos bases de datos, brinda una aproximación al problema de intercambiar datos que se utilizan en la estimación. Al establecer las curvas de rendimiento estimadas en ambos casos se obtiene que los cambios en los parámetros no parecen ser representativos, por lo tanto es un avance de los modelos dinámicos al problema que se enfrenta el enfoque estático. En los próximos análisis se utiliza la base semanal completa de los precios de los bonos.

Los precios de los bonos cupón cero que generan ambos modelos presentan un buen ajuste en los vencimientos a mediano plazo (ceranos al vencimiento del activo utilizado) aunque existen diferencias notorias en los precios de largo plazo. A su vez, en todo el período analizado, los precios de activos de vencimientos a corto plazo en el mercado mostraron mayores variaciones que los que se obtiene en el modelo. Esto deriva a que los errores cuadrático medio entre los precios de mercado y los precios del modelo sean elevados en ambos casos. Lo cual permite inducir que es necesario agregar mayor cantidad de dimensiones en los modelos a utilizar.

Al considerar la conclusión del primer análisis, en el segundo se aplica el modelo G2++. Al ser un modelo de dos factores es necesario agregar a la base de datos del primer análisis por lo menos una serie histórica de precios de algún otro bono soberano en dólares. Se adiciona el bono global en dólares con vencimiento en setiembre de 2025. Los parámetros obtenidos

en la estimación se encuentran en el cuadro 2.2. En los resultados se destaca que el primer factor presenta ambos parámetros de menor magnitud que el segundo factor y el valor del parámetro ρ muy cercano a -1 .

$a = 0.1301$	$b = 0.3526$	$\sigma = 0.2062$	$\eta = 0.4892$	$\rho = -0.9915$
--------------	--------------	-------------------	-----------------	------------------

Cuadro 2.2: Parámetros obtenidos en el modelo G2++.

Los parámetros estimados se utilizan para representar las curvas de precios de bonos cupón cero en la deuda soberana en Uruguay mediante la ecuación (2.32). En la figura 2.1, se encuentran las curvas de precios en todo el período de tiempo.

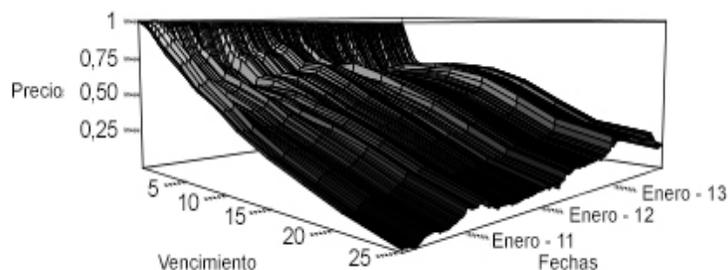


Figura 2.1: Curvas de precios de bonos cupón cero en el modelo G2++.

Al analizar los resultados y la forma de las curvas de precios que se obtienen en la estimación, se observa en la figura 2.1 que en algunos días del segundo semestre de 2012 dichas curvas de precios de bonos cupón cero presentan pendiente no negativa en algunos períodos de vencimientos. Esta situación introduce arbitraje en los resultados del modelo al existir precios de bonos cupón cero inferiores con menor vencimiento. Es decir, el ajuste que se obtiene del modelo proporciona parámetros que brindan como resultado el aumento de los precios de bonos en algunos intervalos de vencimiento T , situación que no acontece en los mercados financieros en los cuales las tasas de interés son estrictamente positivas. Por esta razón, se extiende el análisis de esta circunstancia con el fin de comprender bajo que condiciones la ecuación (2.32) genera oportunidad de arbitraje.

A la ecuación (2.31) es posible expresarla mediante integrales

$$V(t, T) = \frac{\sigma^2}{a^2} \int_t^T (1 - e^{-a(T-u)})^2 du + \frac{\eta^2}{b^2} \int_t^T (1 - e^{-b(T-u)})^2 du \\ + \frac{2\rho\sigma\eta}{ab} \int_t^T (1 - e^{-a(T-u)})(1 - e^{-b(T-u)}) du;$$

lo que permite inducir que $V(t, T) > 0$ para todo $t < T$ y es $V(t, T) = 0$ sólo si $t = T$. Si se aplica la función logaritmo y se diferencia en la ecuación (2.32) en la variable T se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial T} \log P(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} \log P^M(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left((1 - e^{-a(T-t)})^2 - (1 - e^{-aT})^2 \right) \\ + \frac{\eta^2}{2b^2} \left((1 - e^{-b(T-t)})^2 - (1 - e^{-bT})^2 \right) \\ + \frac{\rho\sigma\eta}{ab} \left((1 - e^{-a(T-t)})(1 - e^{-b(T-t)}) - (1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT}) \right) \\ - e^{-a(T-t)} x_t - e^{-b(T-t)} y_t. \quad (2.33)$$

En la ecuación (2.33) los primeros tres sumandos son negativos, el cuarto tiene el signo opuesto de ρ y los últimos dos dependen de los signos de x_t y y_t . En la estimación ρ es cercano a -1 , por lo que el cuarto sumando es negativo y provoca que en cierto intervalo de tiempo este sea el más influyente en la ecuación. Por lo tanto como resultado se alcanza que la derivada sea positiva.

Al finalizar se aplican los modelos de Ho-Lee y Hull-White mediante el método de calibración. En los dos análisis, se utilizan los precios diarios de los diez bonos globales en dólares disponibles durante todo el año 2013. El menor vencimiento corresponde a marzo 2014 y el mayor vencimiento corresponde a noviembre de 2045. Para obtener una aproximación a la tasa de interés a corto plazo se utiliza el vencimiento 3 meses de la curva de rendimiento publicada por BEVSA. También se utiliza dicha curva para el ajuste inicial de las tasas de interés forward instantánea en el día inicial del análisis que corresponde al 5 de enero de 2013.

En la aplicación del modelo de Ho-Lee, se obtiene la calibración del parámetro σ en cada día analizado. Los resultados se encuentran en la figura 2.2. El valor medio de las estimaciones del parámetro es 0.0232 y presenta una desviación estándar de 0.0094. En la aplicación del modelo Hull-White, se obtiene la calibración de los parámetros a y σ en cada día analizado. La evolución de cada parámetro se encuentra en la figura 2.3. El valor medio de las estimaciones del parámetro a es 0.0693 y presenta una desviación estándar de 0.0257. En el caso del parámetro σ el valor medio de las estimaciones es 0.0177 y presenta una desviación estándar de 0.0079. Si bien las estimaciones de ambos parámetros presentan diferentes magnitudes la evolución en el tiempo se puede establecer como semejante. En particular, se cumple que el máximo y el mínimo en las estimaciones de los parámetros se encuentran en los mismos días.

Los dos modelos calibrados permiten obtener las curvas de rendimiento del mercado en dólares en cada día. En la figura 2.4, se encuentran las curvas para el caso del modelo Hull-White, que es el que presenta menor error cuadrático medio con respecto a los precios publicados por BCU. Esto se debe a que los insumos en los modelos son muy similares y el modelo Hull-White presenta un parámetro adicional que permite mejorar los resultados.

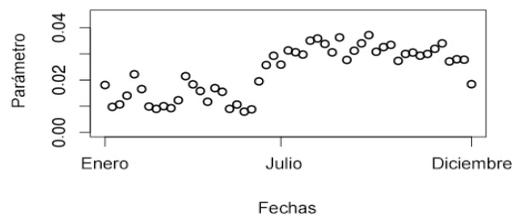


Figura 2.2: Evolución del parámetro a en el modelo de Ho-Lee en el año 2013.

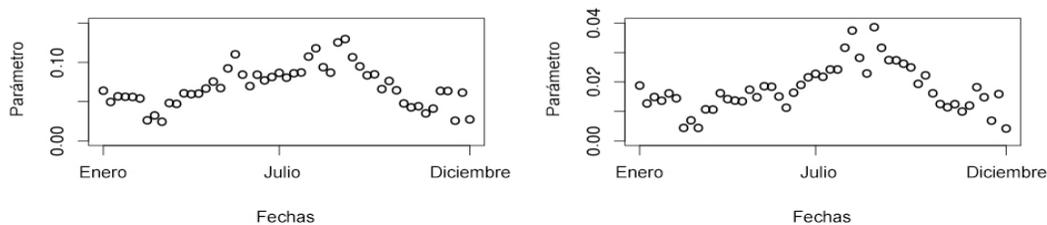


Figura 2.3: Evolución de los parámetros en el modelo de Hull-White en el año 2013. A la izquierda el parámetro a y a la derecha el parámetro σ .

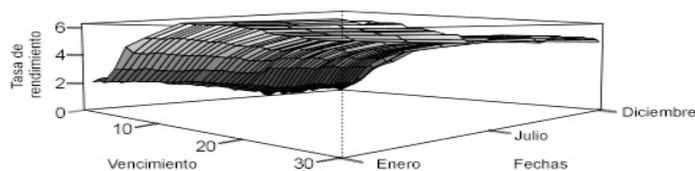


Figura 2.4: Curvas de rendimiento en el modelo Hull-White en el año 2013.

Modelos en Varias Dimensiones y Aplicaciones

Cuando se analizan en profundidad los resultados del capítulo 2, resultan que son satisfactorios en una primera instancia de modelación, aunque presentan varios problemas que deben ser perfeccionados.

En primer lugar, existe la necesidad de utilizar modelos con mayor cantidad de dimensiones (factores), lo que coincide con gran parte de la literatura que pondera la modelación en varias dimensiones, entre ellos se destacan los trabajos [16] y [42]. En segundo lugar, desde la perspectiva que se adopta no se concibe conveniente modelar de manera dinámica la curva de rendimiento en todos los vencimientos mediante la utilización de una o dos series históricas de precios de bonos, al existir en el mercado una amplia variedad de activos soberanos.

Por lo cual, la idea central del capítulo se basa en encontrar una clase de modelos de varias dimensiones y desarrollar nuevas técnicas de estimación que permitan ampliar de manera significativa la cantidad de información a utilizar. La doble búsqueda genera un compromiso entre el avance en los modelos y los problemas computacionales que surgen al utilizar una mayor cantidad de parámetros y de series históricas de precios de bonos.

Los resultados expuestos en este capítulo son similares a los que dieron origen a los trabajos [44] y [53] (salvo el período de tiempo analizado).

Clase de Modelos Afines

Al utilizar el enfoque de modelación mediante la tasa de interés spot instantánea se deduce que los precios de los bonos cupón cero cumplen una ecuación diferencial parcial dada mediante la ecuación (2.11). En una gran cantidad de modelos es necesario aplicar técnicas de resolución numérica a causa de su complejidad y la no existencia de fórmulas cerradas en los precios de los bonos cupón cero. En el desarrollo del capítulo sólo se incluye una clase general de modelos, en la cual la solución de la ecuación diferencial parcial se descompone en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que se resuelven de manera asequible a pesar de la cantidad de dimensiones involucradas. La clase de modelos que se utiliza se denomina *modelos afines* y la principal ventaja que presenta es su tratabilidad analítica a causa de la estructura funcional en la fórmula de precios. La bibliografía en estos modelos es extensa, entre ellos se destacan los trabajos [22] y [24].

Para desarrollar el marco teórico, como es usual se establece un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{Q})$ y un proceso $\{y_t, t \geq 0\}$ que se define en algún conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^N$ que presenta la dinámica

$$dy_t = \mu(y_t)dt + \sigma(y_t)dW_t; \quad (3.1)$$

donde $\mu : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ y $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ se les exige las características de regularidad suficientes para obtener una única solución y $\{W_t, t \geq 0\}$ es un movimiento browniano en \mathbb{R}^N . Para la obtención de la fórmula del precio del bono cupón cero en tiempo t con vencimiento en $T = t + \tau$ se asume que es posible expresarla mediante cierta función $g(\tau, y_t)$ que cumple $g \in C^{1,2}([0, +\infty) \times D)$.

Definición 13. *Un modelo estocástico de tasa de interés spot instantánea, es un modelo afín si existen las funciones $A : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ y $B : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ de clase C^1 que cumplan que el precio del bono cupón cero se determina mediante*

$$P(t, T) = P(\tau) = g(\tau, y_t) = e^{A(\tau) + B(\tau)y_t}. \quad (3.2)$$

En esta clase de modelos no sólo se impone la existencia de fórmulas cerradas en el precio del bono cupón cero sino también su estructura funcional. Al utilizar la definición 5, se obtiene que la tasa de rendimiento del bono cupón cero es

$$z(\tau) = -\frac{A(\tau)}{\tau} + \frac{B(\tau)}{\tau}y_t = \hat{A}(\tau) + \hat{B}(\tau)y_t;$$

la cual es una función lineal del proceso y_t . Esta cualidad es una ventaja comparativa frente a otros modelos en cuanto a su implementación computacional y a la posibilidad de aplicar nuevas técnicas estadísticas de estimación de parámetros.

La pregunta que surge al establecer un modelo es conocer las condiciones que deben cumplir las funciones $\mu(y)$ y $\sigma(y)$ en la ecuación (3.1) para que el modelo pertenezca a la clase de modelos afines (definición 13). La respuesta se establece en el trabajo [23], la que se sintetiza en la proposición 1 y la proposición 2. En sus deducciones, se utiliza el resultado que establece que si $\forall y \in D$ se satisface que $\alpha + \beta y = 0$ en algún conjunto abierto no vacío de \mathbb{R}^N se cumple simultáneamente que $\alpha = 0$ y $\beta = 0$.

Proposición 1. *Si el modelo estocástico de tasa de interés es afín y satisface que existen M vencimientos en los cuales la matriz $C(m_1, \dots, m_M)$ en la ecuación (3.6) cumple que es no singular, se obtiene que las funciones $\mu(y)$ y $\sigma(y)\sigma'(y)$ son afines.*

Demostración. Como se cumple que $g(0, y) = 1$ para todo $y \in D$ se obtiene que los valores iniciales de las funciones son $A(0) = 0$ y $B(0) = 0$. Similar al resultado que se obtiene en el caso unidimensional en la ecuación (2.6), se obtiene que la fórmula de precios del bono cupón cero cumple

$$dg_T(t, y) = \left(\frac{\partial g_T}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial g_T}{\partial y}(t, y)\mu(y) + \frac{1}{2}tr\left(\frac{\partial^2 g_T}{\partial y^2}(t, y)\sigma(y)\sigma(y)'\right) \right) dt + \frac{\partial g_T}{\partial y}(t, y)\sigma(y)dW_t. \quad (3.3)$$

Por hipótesis el modelo es afín, por lo cual la tendencia en la ecuación (3.3) se representa

$$g(t, y) \left(-A'(T-t) - B'(T-t)y + B(T-t)\mu(y) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j B_i(T-t)B_j(T-t)\sigma_i(y)\sigma_j(y)' \right);$$

y al utilizar la ecuación (2.12) se obtiene que en la clase de modelos afines se cumple

$$0 = -A'(\tau) - B'(\tau)y + B(\tau)\mu(y) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j B_i(\tau)B_j(\tau)\sigma_i(y)\sigma_j(y)' - r(y); \quad (\tau, y) \in [0, \infty) \times D. \quad (3.4)$$

Desde la ecuación (3.4) se define la función $a(\tau, y) : [0, +\infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ como aquella que cumple

$$a(\tau, y) := r(y) + A'(\tau) + B'(\tau)y = \sum_{i=1}^N B_i(\tau)\mu_i(y) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j B_i(\tau)B_j(\tau)\gamma_{ij}(y); \quad (3.5)$$

donde se denota a $\gamma_{ij}(y) = \sigma_i(y)\sigma_j(y)'$. La función $a(\tau, y)$ cumple que es afín en la variable y .

Si se considera el valor $M = 2N + (N^2 - N)/2$, se define la función $H : D \rightarrow \mathbb{R}^M$ que cumple

$$H(y) = \left(\mu_1(y), \dots, \mu_n(y), \gamma_{11}(y), \gamma_{12}(y), \dots, \gamma_{nn}(y) \right)';$$

en la cual únicamente se asignan aquellos γ_{ij} donde $i \leq j$ (elementos de la matriz superior triangular). Si se demuestra que cada coordenada de la función H es afín en y se obtiene la proposición. Se considera a la función $c : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^M$ como aquella que permite observar a la ecuación (3.5) como un sistema de ecuaciones

$$a(\tau, y) = c(\tau)'H(y); \quad (\tau, y) \in [0, \infty) \times D.$$

Al repetir con los diferentes vencimientos m_1, \dots, m_M se obtiene

$$\begin{pmatrix} a(m_1, y) \\ a(m_2, y) \\ \vdots \\ a(m_M, y) \end{pmatrix} = C(m_1, \dots, m_M)H(y); \quad (3.6)$$

en la cual $C(m_1, \dots, m_M)$ es una matriz de dimensión $M \times M$ cuya i -ésima fila está formada por el vector $c(m_i)'$. La matriz es no singular por hipótesis, salvo en un conjunto cerrado de medida nula. Por lo cual es posible utilizar la generalización del resultado que se establece en el trabajo [12] y se obtiene que cada coordenada de la función H es afín. Lo que permite concluir que las funciones $\mu_i(y)$ y $\sigma_i(y)\sigma_j(y)'$ son funciones afines. □

Proposición 2. *Si se cumple que las funciones $\mu(y)$ y $\sigma(y)\sigma(y)'$ son funciones afines y existen soluciones finitas para la ecuación (3.7), entonces se cumple que el modelo estocástico de tasa de interés es afín.*

Demostración. Sea $g(\tau, y)$ la función candidata a solución que satisface la ecuación (3.2) para las funciones A y B . Si se consideran todos los términos en y_i de la ecuación (3.4) para algún i fijo se expresa

$$\left(-B'_i(\tau) + \mathcal{B}_i(B(\tau))\right)y^i;$$

donde $\mathcal{B}_i(B(\tau)) = a + \sum_j b_j B_j(\tau) + \sum_{jk} d_{jk} B_j(\tau) B_k(\tau)$ para ciertos coeficientes a, b_j, d_{jk} , lo que provoca que \mathcal{B}^i sea una función cuadrática lineal. Dado que la ecuación (3.4) se cumple para todo y abierto se debe cumplir que $-B'_i(\tau) + \mathcal{B}(B(\tau)) = 0$. Al extender a todo i y a todo τ se da origen a la ecuación diferencial (ecuación diferencial de Ricatti)

$$B'(\tau) = \mathcal{B}(B(\tau)), \quad B(0) = 0; \quad (3.7)$$

donde $\mathcal{B} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ es una función cuadrática lineal. En una gran cantidad de casos los coeficientes de esta ecuación no son Lipschitz por lo cual existen problemas no triviales en cuanto a la existencia de soluciones finitas.

De forma análoga, los términos que no involucran al proceso y_t en la ecuación (3.4) son de la forma $-A'(\tau) + \mathcal{A}(B(\tau))$ donde $\mathcal{A} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ es también una función cuadrática lineal, por lo cual se obtiene

$$A'(\tau) = \mathcal{A}(B(\tau)), \quad A(0) = 0;$$

la cual tiene una única solución dada por la fórmula

$$A(\tau) = \int_0^\tau \mathcal{A}(B(s)) ds;$$

donde B es la solución de la ecuación (3.7) en caso de existir. \square

La proposición 1 y la proposición 2 establecen que bajo ciertas hipótesis de regularidad existe una relación unívoca entre los modelos estocásticos de tasas de interés afines y la determinación de las funciones $\mu(y)$ y $\sigma(y)$. Sin embargo, este análisis se restringe únicamente a funciones homogéneas en el tiempo. Si se extiende el análisis anterior a funciones dependientes del tiempo $\mu(t, y)$ y $\sigma(t, y)$ se generan nuevos modelos de tasas de interés afines que no provienen de funciones $\mu(t, y)$ y $\sigma(t, y)$ afines.

Bajo este marco teórico, Qiang Dai y Kenneth Singleton extendieron la teoría en el trabajo [19] en el que se establece una caracterización de los modelos afines de dimensión N . La especificación general de los modelos afines (definición 13) expresa que la tasa de interés spot instantánea r_t es una función afín de un vector de variables no observables $y_t = (y_t^1, y_t^2, \dots, y_t^N)$, es decir

$$r_t = y_t^1 + y_t^2 + \dots + y_t^N; \quad (3.8)$$

en el cual el vector y_t sigue un proceso afín que se representa

$$dy_t = \hat{a}(\hat{b} - y_t)dt + \Sigma \sqrt{S(t)} dW_t; \quad (3.9)$$

donde $\{W_t, t \geq 0\}$ es un movimiento browniano N -dimensional bajo la medida de riesgo neutral \mathbf{Q} ; \hat{a} y Σ son matrices de dimensión $N \times N$; $S(t)$ es una matriz diagonal de dimensión $N \times N$ en la cual cada entrada de la diagonal cumple $S(t)_{ii} = \alpha_i + \beta'_i y_t$ y \hat{b} es un vector de dimensión N . Con el fin de facilitar la notación, se define la matriz $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$ la

cual se forma por los vectores β_i en la ecuación (3.9).

Los modelos afines que se representan mediante la ecuación (3.8) y la ecuación (3.9) son paramétricos. Aunque no toda elección de parámetros es adecuada para la generación de modelos a causa del requisito de que en la ecuación (3.9) la varianza condicional $S(t)_{ii}$ sea positiva. Lo que se propone en el trabajo [19], es establecer la propiedad de que el modelo sea admisible, la cual establece ciertas restricciones en la elección de parámetros con el fin de que la ecuación (3.9) se encuentre bien definida. Estas restricciones imponen limitaciones en la interacción entre las variables no observables. En el trabajo se obtiene que la clase de modelos afines de dimensión N se divide en $N + 1$ subfamilias de modelos. Dentro de cada familia, los modelos se caracterizan mediante el grado de dependencia de la varianza condicional en el número de factores, es decir mediante el valor $m = \text{rank}(\mathcal{B})$.

La división en subfamilias genera un compromiso entre la dependencia en la matriz de covarianza de cada factor y_t^i y la estructura admisible de la matriz de correlación para y_t . En un extremo de la clasificación se encuentra la familia de los modelos gaussianos, la cual permite gran flexibilidad en las correlaciones bajo el costo de asumir varianza constante y del extremo opuesto se encuentra la familia de los modelos de raíz cuadrada en los cuales todos los factores dirigen la volatilidad condicional. Entre estas dos, se encuentran todas las familias en las cuales las volatilidades estocásticas del vector y_t se controlan mediante determinados factores en la modelación.

Modelos de Vasicek en Varias Dimensiones

En la clase de modelos afines que se establece en la sección 3.1, la familia que se selecciona para modelar las curvas de rendimiento es la gaussiana. Esta elección se fundamenta en el objetivo de avanzar en el análisis del capítulo 2, a fin de obtener conclusiones en los resultados que se obtienen en el aumento en la dimensión del modelo y en las nuevas técnicas de estimación que se proponen.

El modelo para analizar las curvas de rendimiento cumple la ecuación (3.8) y la ecuación (3.9) en la cual las matrices y los vectores que forman parte se representan mediante

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_N \end{pmatrix}; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & 1 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix};$$

$$S(t) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{B} = 0. \quad (3.10)$$

El modelo afín propuesto por la ecuación (3.8), la ecuación (3.9) y la ecuación (3.10) es una generalización del modelo de Vasicek en varias dimensiones. Si se realiza una deducción

análoga a la formulación de la ecuación (2.22) pero en el caso de multidimensional, la fórmula del precio del bono cupón cero en tiempo t con vencimiento en T es

$$P(t, T) = e^{A(\tau) - \sum_{i=1}^N B_i(\tau) y_t^i}; \quad (3.11)$$

donde

$$\begin{aligned} B_i(\tau) &= \frac{1}{a_i}(1 - e^{-a_i\tau}); \\ A(\tau) &= \sum_{i=1}^N \left(b_i - \frac{\sigma_i^2}{2a_i} \right) (B_i(\tau) - \tau) - \frac{\sigma_i^2 B_i^2(\tau)}{4a_i} \\ &\quad + \sum_{i,j,i \neq j} \frac{\sigma_{ij}}{2a_i a_j} \left(\tau - B_i(\tau) - B_j(\tau) + \frac{1}{a_i + a_j} (1 - e^{-(a_i + a_j)\tau}) \right). \end{aligned}$$

Desde la fórmula del precio mediante la ecuación (3.11), es posible obtener la tasa de interés spot compuesta (definición 5), que al ser un bono cupón cero coincide con la tasa de rendimiento del bono mediante

$$z(\tau) = -\frac{\log P(\tau)}{\tau} = \frac{-A(\tau)}{\tau} + \frac{\sum_{i=1}^N B_i(\tau) y_t^i}{\tau}. \quad (3.12)$$

La ecuación (3.8) y la ecuación (3.12) forman un sistema dinámico integrado por dos variables de diferentes características. Por un lado, las variables no observables (factores) que describen el comportamiento de la tasa de interés spot instantánea sujeta a incertidumbre mediante un proceso de Markov. Por el otro lado las variables observables que corresponden a las tasas de rendimiento de los activos financieros del mercado. Ambas variables se relacionan mediante una función lineal paramétrica. Esta circunstancia se enmarca en los modelos que se denominan *modelos de espacio-estado*, los cuales provienen del área de la ingeniería de control. Por lo cual, la idea principal es reformular el modelo gaussiano propuesto a través de las premisas de este enfoque de modelos. Es necesario deducir las ecuaciones que caracterizan los modelos espacio-estado que se denominan *la ecuación de transición y la ecuación de medida*.

Al discretizar el modelo, el intervalo de tiempo en el que se realiza el análisis $[t_1, S]$ se divide en m tiempos $t_i = iS/m$ para $i \in \{1, \dots, m\}$ que cumplen que la longitud de los intervalos es constante $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Por un lado, la ecuación de transición se obtiene mediante la dinámica de cada variable no observable (factor) y^i de la ecuación (3.10). En el caso general de los modelos afines es posible realizar diferentes acercamientos de la dinámica de los factores como por ejemplo utilizar la aproximación de Euler de la solución o discretizar la solución de la ecuación diferencial estocástica en caso de disponerla. En el modelo propuesto la solución es un proceso de Ornstein Uhlenbeck, el cual presenta momentos que se observan en la ecuación (2.16). Por lo cual, la ecuación matricial de transición se expresa

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_{t_i}^1 \\ y_{t_i}^2 \\ \vdots \\ y_{t_i}^N \end{pmatrix}}_{y_{t_i}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1(1 - e^{-a_1\Delta t}) \\ b_2(1 - e^{-a_2\Delta t}) \\ \vdots \\ b_N(1 - e^{-a_N\Delta t}) \end{pmatrix}}_{\alpha} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-a_1\Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-a_2\Delta t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-a_N\Delta t} \end{pmatrix}}_{\phi} \underbrace{\begin{pmatrix} y_{t_{i-1}}^1 \\ y_{t_{i-1}}^2 \\ \vdots \\ y_{t_{i-1}}^N \end{pmatrix}}_{y_{t_{i-1}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_{t_i}^1 \\ \mu_{t_i}^2 \\ \vdots \\ \mu_{t_i}^N \end{pmatrix}}_{\mu_{t_i}}; \quad (3.13)$$

donde $\mu_{t_i} | F_{t_{i-1}} \approx N(0, Q)$ siendo

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{2a_1}(1 - e^{-2a_1\Delta t}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2^2}{2a_2}(1 - e^{-2a_2\Delta t}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_N^2}{2a_N}(1 - e^{-2a_N\Delta t}) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

En la ecuación (3.14) se adiciona una hipótesis al modelo que establece que los parámetros σ_{ij} con $i \neq j$ son cero, lo que genera que la matriz Σ de la ecuación (3.10) sea la matriz identidad. El supuesto se incluye con el fin de disminuir en $N^2 - N$ la cantidad de parámetros en el modelo que es de utilidad en cuanto a la convergencia del algoritmo que se desarrolla.

Por el otro lado, la ecuación de medida se obtiene al utilizar la función lineal que relaciona las tasas de rendimiento de los bonos cupón cero con la evolución de la tasa de interés spot instantánea en la ecuación (3.12). Se asume que en del mercado es posible extraer un panel de datos de $n \geq N$ tasas de rendimiento de bonos cupón cero en tiempo $t \in [t_1, S]$ de vencimientos T^1, \dots, T^n que se denotan mediante $z(\tau_t^1), z(\tau_t^2), \dots, z(\tau_t^n)$ donde $\tau_t^j = T^j - t$.

En el inicio del capítulo se establece que uno de los objetivos es utilizar un conjunto de datos más robustos que en el capítulo 2, el cual consiste en los precios de una mayor cantidad de activos financieros en la modelación, es decir $n > N$. Esta resolución presenta como consecuencia la introducción de errores de medida entre las tasas de rendimiento observadas en el mercado y las estimadas en el modelo, ver el trabajo [16]. En el caso contrario, los modelos generan relaciones deterministas entre las tasas de rendimiento de bonos estimados, situación que no sucede en los mercados financieros. A su vez, la introducción de errores también es posible justificarla de manera económica en características del mercado como lo es la diferencia que existen entre los precios de compra y los precios de venta de los activos. Por lo cual, la ecuación matricial de medida se expresa

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z(\tau_{t_i}^1) \\ z(\tau_{t_i}^2) \\ \vdots \\ z(\tau_{t_i}^n) \end{pmatrix}}_{z_{t_i}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-A(\tau_{t_i}^1)}{\tau_{t_i}^1} \\ \frac{-A(\tau_{t_i}^2)}{\tau_{t_i}^2} \\ \vdots \\ \frac{-A(\tau_{t_i}^n)}{\tau_{t_i}^n} \end{pmatrix}}_{A_{t_i}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{B_1(\tau_{t_i}^1)}{\tau_{t_i}^1} & \frac{B_2(\tau_{t_i}^1)}{\tau_{t_i}^1} & \cdots & \frac{B_N(\tau_{t_i}^1)}{\tau_{t_i}^1} \\ \frac{B_1(\tau_{t_i}^2)}{\tau_{t_i}^2} & \frac{B_2(\tau_{t_i}^2)}{\tau_{t_i}^2} & \cdots & \frac{B_N(\tau_{t_i}^2)}{\tau_{t_i}^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{B_1(\tau_{t_i}^n)}{\tau_{t_i}^n} & \frac{B_2(\tau_{t_i}^n)}{\tau_{t_i}^n} & \cdots & \frac{B_N(\tau_{t_i}^n)}{\tau_{t_i}^n} \end{pmatrix}}_{B_{t_i}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_{t_i}^1 \\ y_{t_i}^2 \\ \vdots \\ y_{t_i}^N \end{pmatrix}}_{y_{t_i}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \nu_{t_i}^1 \\ \nu_{t_i}^2 \\ \vdots \\ \nu_{t_i}^n \end{pmatrix}}_{\nu_{t_i}}; \quad (3.15)$$

donde $\nu_{t_i} \approx N(0, R)$ siendo

$$R = \begin{pmatrix} \epsilon_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon_n^2 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

La ecuación (3.13) y la ecuación (3.15) representan la forma de espacio-estado del modelo

propuesto mediante la ecuación (3.10). Estas ecuaciones son posibles resumirlas en el sistema

$$\begin{aligned}y_{t_i} &= \alpha + \phi y_{t_{i-1}} + \mu_{t_i}; \\z_{t_i} &= A_{t_i} + B_{t_i} y_{t_i} + \nu_{t_i};\end{aligned}$$

donde y_{t_i} , α , μ_{t_i} , z_{t_i} y ν_{t_i} son vectores de dimensión N , ϕ es una matriz de dimensión $N \times N$ y B_{t_i} es una matriz de dimensión $n \times N$.

La determinación del modelo espacio-estado se completa al realizar dos supuestos adicionales. El primer supuesto se basa en el vector inicial y_{t_0} y establece que tiene distribución normal de parámetros $\mathbf{E}(y_0) = y_{t_0|t_0}$ y $\mathbf{Var}(y_{t_0}) = P_{t_0|t_0}$. El segundo supuesto es que los errores ν_{t_i} y μ_{t_i} están incorrelacionados en todos los tiempos e incorrelacionados al vector de estado inicial, es decir

$$\mathbf{E}(\nu_{t_i} \mu'_{t_j}) = 0, \quad \forall t_i, t_j \in \{1, \dots, S\};$$

y

$$\mathbf{E}(\mu_{t_i} y'_{t_0|t_0}) = 0 \quad y \quad \mathbf{E}(\nu_{t_i} y'_{t_0|t_0}) = 0, \quad \forall t_i \in \{1, \dots, S\}.$$

Filtro de Kalman

En la sección 3.2 se establece el modelo que se utiliza en las aplicaciones, lo que resta es establecer el método de estimación adecuado. Se trata de seleccionar un método que sea manipulable computacionalmente y que permita utilizar una gran cantidad de datos en la modelación de varias dimensiones. El método debe ser capaz de solucionar el problema de estimar las variables no observables en la ecuación (3.8) y los parámetros del modelo en la función lineal de la ecuación (3.12). Existen varios métodos para aplicar al problema y en la presente sección se selecciona el método que se denomina *filtro de Kalman*; el cual se desarrolló en la mitad del siglo XX y sus precursores fueron Norbert Wiener, Rudolf Kalman y David Luenberger en los trabajos [57], [39] y [43] respectivamente.

El filtro de Kalman es de suma importancia en diversas áreas de las ciencias. En economía, presenta una amplia gama de aplicaciones y de manera específica en el área de matemática financiera se utiliza en formular modelos económicos como también establecer superficies de volatilidad y curvas de credit default swaps. En la estimación de curvas de rendimiento, el filtro de Kalman se utiliza en algunos modelos dinámicos, entre ellos ver los trabajos [17] y [36].

El filtro es un conjunto de ecuaciones que implementan un sistema predictor-corrector para las estimaciones que se actualizan mediante el ingreso de nueva información. En el modelo, la predicción se obtiene a través de la distribución de la tasa de interés spot instantánea condicional a las estimaciones previamente establecidas. Esta predicción se actualiza al utilizar los datos de las tasas de rendimiento diarios del mercado. En el modelo propuesto el filtro de Kalman resulta ser óptimo, a pesar de que esta propiedad no se cumple en todos los modelos de la clase afín.

En la sección 3.2, el modelo propuesto se expresa en su forma espacio-estado mediante la ecuación (3.13), la ecuación (3.14), la ecuación (3.15) y la ecuación (3.16). Como los errores presentan distribución normal es posible aplicar la proposición 3 para derivar las ecuaciones que forman parte del método.

Proposición 3. Sea el vector (y, z) el cual tiene distribución conjunta normal de media μ y matriz de covarianza Σ dada mediante

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_y \\ \mu_z \end{bmatrix}; \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yz} \\ \Sigma_{zy} & \Sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Se cumple que la distribución del vector y condicional a z presenta distribución normal de media $\mu_{y|z}$ y matriz de covarianza $\Sigma_{yy|z}$ dada mediante

$$\mu_{y|z} := \mu_y + \Sigma_{yz}\Sigma_{zz}^{-1}(z - \mu_z); \quad \Sigma_{yy|z} := \Sigma_{yy} - \Sigma_{yz}\Sigma_{zz}^{-1}\Sigma_{zy}. \quad (3.17)$$

Demostración. La forma funcional de la densidad $\rho(y|z)$ de la variable y condicionada a z es

$$\rho(y|z) = \frac{\rho(y, z)}{\rho(z)} = \frac{1}{2\pi^{M/2}} \frac{|\Sigma_{zz}|^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(y' - u'_y, z' - u'_z)\Sigma^{-1}(y - u_y, z - u_z)\right)}{|\Sigma|^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(z' - u'_z)\Sigma_{zz}^{-1}(z - u_z)\right)}. \quad (3.18)$$

Al realizar algunas deducciones se observa que se cumple

$$\begin{pmatrix} Id & \vdots & -\Sigma_{yz}\Sigma_{zz}^{-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & Id \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} Id & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ -\Sigma_{zz}^{-1}\Sigma'_{yz} & \vdots & Id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{yy} - \Sigma_{yz}\Sigma_{zz}^{-1}\Sigma_{zy} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & \Sigma_{zz} \end{pmatrix};$$

que permite deducir las dos próximas igualdades

$$|\Sigma| = |\Sigma_{yy} - \Sigma_{yz}\Sigma_{zz}^{-1}\Sigma_{zy}||\Sigma_{zz}|;$$

y

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} Id & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ -\Sigma_{zz}^{-1}\Sigma'_{yz} & \vdots & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Sigma_{yy} - \Sigma_{yz}\Sigma_{zz}^{-1}\Sigma_{zy})^{-1} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & \Sigma_{zz}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & \vdots & -\Sigma_{yz} - \Sigma_{zz}^{-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & Id \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, al utilizar la notación de la ecuación (3.17), se cumple

$$\begin{aligned} (y' - u'_y, z' - u'_z)\Sigma^{-1}(y - u_y, z - u_z) \\ = (y' - u'_{y|z})(\Sigma_{yy} - \Sigma_{yz}\Sigma_{zz}^{-1}\Sigma_{zy})^{-1}(y - u_{y|z}) + (z' - u'_z)\Sigma_{zz}^{-1}(z - u_z). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (3.18) se expresa

$$\rho(y|z) = \frac{1}{2\pi^{M/2}|\Sigma_{yy} - \Sigma_{yz}\Sigma_{zz}^{-1}\Sigma_{zy}|} \exp\left(-\frac{1}{2}(y - u_{y|z})'(\Sigma_{yy} - \Sigma_{yz}\Sigma_{zz}^{-1}\Sigma_{zy})^{-1}(y - u_{y|z})\right);$$

donde se concluye que vector y condicional a z presenta distribución normal de media $\mu_{y|z}$ y matriz de covarianza $\Sigma_{yy|z}$. \square

El método es inductivo entonces en la derivación de las ecuaciones en tiempo t_i se asume que la estimación de la variable no observable $y_{t_{i-1}}$ en el instante t_{i-1} es conocida y se denota como $y_{t_{i-1}|t_{i-1}}$. Al utilizar la ecuación de transición (3.13), se obtiene que y_{t_i} se expresa como

la suma de dos vectores aleatorios de distribución normal, por lo cual la variable y_{t_i} es un vector normal de media

$$y_{t_i|t_{i-1}} = \alpha + \phi y_{t_{i-1}|t_{i-1}}; \quad (3.19)$$

y matriz de covarianza del error

$$P_{t_i|t_{i-1}} = \phi P_{t_{i-1}|t_{i-1}} \phi' + Q. \quad (3.20)$$

Las estimaciones que se obtienen desde la ecuación (3.19) y la ecuación (3.20) se originan únicamente con la variable no observable en tiempo t_{i-1} . Para adecuar las estimaciones al arribo de nueva información de la variable observable z_{t_i} en tiempo t_i , se reescribe el sistema

$$\begin{aligned} y_{t_i} &= y_{t_i|t_{i-1}} + y_{t_i} - y_{t_i|t_{i-1}}; \\ z_{t_i} &= A_{t_i} + B_{t_i} y_{t_i|t_{i-1}} + B_{t_i} (y_{t_i} - y_{t_i|t_{i-1}}) + \nu_{t_i}; \end{aligned}$$

en el cual se deduce que el vector aleatorio (y_{t_i}, z_{t_i}) tiene distribución normal multivariada de media

$$(y_{t_i|t_{i-1}}, A_{t_i} + B_{t_i} y_{t_i|t_{i-1}});$$

y matriz de covarianza

$$\begin{pmatrix} P_{t_i|t_{i-1}} & P_{t_i|t_{i-1}} B_{t_i}' \\ B_{t_i} P_{t_i|t_{i-1}} & B_{t_i} P_{t_i|t_{i-1}} B_{t_i}' + R \end{pmatrix}.$$

Si se aplica la proposición 3 al vector (y_{t_i}, z_{t_i}) condicional al valor observado del vector z_{t_i} en tiempo t_i , se obtiene

$$y_{t_i|t_i} = y_{t_i|t_{i-1}} + K_{t_i} (z_{t_i} - A_{t_i} - B_{t_i} y_{t_i|t_{i-1}}); \quad (3.21)$$

$$P_{t_i|t_i} = (Id - K_{t_i} B_{t_i}) P_{t_i|t_{i-1}}; \quad (3.22)$$

donde la matriz K_{t_i} se denomina *ganancia de Kalman*, tiene dimensión $N \times n$ y se expresa mediante

$$K_{t_i} = P_{t_i|t_{i-1}} B_{t_i}' \underbrace{(B_{t_i} P_{t_i|t_{i-1}} B_{t_i}' + R)^{-1}}_{H_{t_i}}. \quad (3.23)$$

El sistema que se representa mediante la ecuación (3.19) y la ecuación (3.20) se denomina *ecuación de predicción* y el sistema que se representa mediante la ecuación (3.21), la ecuación (3.22) y la ecuación (3.23) se denomina *ecuación de actualización*. En su deducción, se asume que la media condicional de la variable aleatoria z_{t_i} sujeto a la información en tiempo t_{i-1} es

$$z_{t_i|t_{i-1}} = A_{t_i} + B_{t_i} y_{t_i|t_{i-1}};$$

por lo cual se define el *error de predicción* o *innovación*, como

$$\zeta_{t_i} = z_{t_i} - z_{t_i|t_{i-1}};$$

que presenta distribución normal de media 0 y matriz de covarianza H_{t_i} .

Al analizar la ecuación (3.23), el valor de la ganancia de Kalman depende de la especificación de la ecuación de transición y de la ecuación de medida, así como de la covarianza de los errores de predicción. La ganancia de Kalman se interpreta como la importancia relativa

que se brinda al error de predicción en la estimación de la variable no observable. Es decir, una baja ganancia de Kalman implica mayor ponderación en las predicciones, mientras que una alta ganancia significa que el sistema es más sensible a la ecuación de medición.

En el modelo propuesto resulta relevante no sólo encontrar un procedimiento de estimación de la variable no observable sino también de los parámetros que lo forman. En el caso de series de tiempos, la función de verosimilitud se expresa

$$\rho(z|\theta) = \prod_{i=1}^{i=m} \rho(z_{t_i}|\theta); \quad (3.24)$$

donde $\rho(z_{t_i}|\theta)$ denota la distribución de z_{t_i} condicional a la información en tiempo t_{i-1} y al conjunto de parámetros θ .

En la deducción de las ecuaciones del filtro de Kalman se observa que la distribución condicional tiene distribución normal a causa de que el vector aleatorio z_{t_i} se expresa como

$$z_{t_i} = A_{t_i} + B_{t_i}y_{t_i|t_{i-1}} + B_{t_i}(y_{t_i} - y_{t_i|t_{i-1}}) + \nu_{t_i};$$

siendo su media $A_{t_i} + B_{t_i}y_{t_i|t_{i-1}}$ y su matriz de covarianza H_{t_i} . Por lo cual, la función de log-verosimilitud (3.24) se establece

$$\log \rho(z|\theta) = \sum_{t=1}^S \log \rho(z_{t_i}|\theta) = -\frac{nS}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^S \log |H_{t_i}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^S \zeta_t^T H_{t_i}^{-1} \zeta_t. \quad (3.25)$$

Los elementos que forman parte de la ecuación (3.25) se obtienen al aplicar el filtro de Kalman y mediante técnicas usuales de maximización pueden ser estimados los parámetros. Sin embargo, la maximización puede resultar ser un problema complejo de implementar por lo cual en varias oportunidades es necesario aplicar algún procedimiento numérico. Por más detalles en las propiedades del filtro de Kalman y sus posibles extensiones ver [29].

Esperanza Maximización

En esta sección se propone utilizar el método iterativo que se denomina *esperanza-maximización* (EM) con el objetivo de facilitar la búsqueda de los parámetros que maximizan la función de verosimilitud al existir variables no observables. En 1977, Arthur Dempster, Nan Laird y Donald Rubin proponen utilizar una función aproximada en caso de no ser posible de manera directa maximizar la función de verosimilitud en el trabajo [20].

Este método tiene la característica principal de no calcular ni aproximar las derivadas de la función de verosimilitud que son necesarias en los métodos tradicionales de optimización como lo son el método de Newton y del gradiente conjugado. Para determinar los pasos que forman parte de la técnica, se utilizan las notaciones de los conjuntos χ como la clausura de los puntos (y, z) donde se cumple que $\rho(y, z|\theta) > 0$ y $\chi(z)$ como la clausura de los puntos (y, z) donde se cumple que $\rho(y|z, \theta) > 0$.

El método se basa en la acotación de la ecuación (3.24), cuyo cálculo exacto se hace muy complejo. La función log-verosimilitud cumple que

$$\log \rho(z|\theta) \geq \int_{\chi(z)} q(y) \log \frac{\rho(y, z|\theta)}{q(y)} dy;$$

para cualquier distribución q . El algoritmo consiste en maximizar la cota con respecto a q (al fijar θ) y con respecto a θ (al fijar q) de manera iterativa. Se conoce que si se fija $\theta = \theta^{(m)}$ el máximo con respecto a q se obtiene en el caso

$$q(y) = \rho(y|z, \theta^{(m)});$$

por lo cual se cumple que

$$\begin{aligned} & \int_{\chi(z)} \rho(y|z, \theta^{(m)}) \log \frac{\rho(y, z|\theta)}{\rho(y|z, \theta^{(m)})} dy \\ &= \int_{\chi(z)} \rho(y|z, \theta^{(m)}) \log \rho(y, z|\theta) dy - \int_{\chi(z)} \rho(y|z, \theta^{(m)}) \log \rho(y, z|\theta^{(m)}) dy. \end{aligned} \quad (3.26)$$

En la ecuación (3.26), el segundo término es independiente de θ por lo cual no se considera al maximizar con respecto a los parámetros. El primer sumando en dicha ecuación es la definición de la esperanza condicional de la función $\log \rho(y, z|\theta)$ con respecto a $(z, \theta^{(m)})$ la cual se denota mediante $Q(\theta|\theta^{(m)})$,

$$Q(\theta|\theta^{(m)}) = \int_{\chi(z)} \log \rho(y, z|\theta) \rho(y|z, \theta^{(m)}) dy = \mathbf{E} \left(\log \rho(y, z|\theta) \mid z, \theta^{(m)} \right). \quad (3.27)$$

Entonces, el problema de maximizar la función de verosimilitud se encuentra relacionado a la estimación y maximización de la función $Q(\theta|\theta^{(m)})$. Por lo cual, los dos pasos en la iteración se expresan en:

- (E) *Esperanza en el paso $(m + 1)$ de la iteración:* mediante la estimación previa de los parámetros en el paso (m) junto con los datos observados z se estima la función $Q(\theta|\theta^{(m)})$ que es la esperanza condicional de la función de verosimilitud. Este paso es el que permite obtener estimaciones de las variables no observables.
- (M) *Maximización en el paso $(m + 1)$ de la iteración:* mediante los resultados del paso (E) se encuentran los parámetros $\theta^{(m+1)}$ que maximizan la función $Q(\theta|\theta^{(m)})$. Este paso es el que permite obtener estimaciones de los parámetros.

La proposición 4 junto al corolario 1 establecen que en cada paso de la iteración no disminuye la función de verosimilitud, pero ni existe un criterio general de convergencia ni se establece un criterio de parada en el algoritmo. Es de destacar que bajo ciertas circunstancias de regularidad, se demuestra que existe una convergencia lineal a un punto estacionario que no se asegura que sea el máximo global, es decir

$$\exists M > 0 \text{ y } 0 < C < 1 \text{ tal que } \|\theta^{(m+1)} - \theta^{(*)}\| \leq C \|\theta^{(m)} - \theta^{(*)}\|, \quad \forall m \geq M;$$

siendo $\theta^{(*)}$ un valor estacionario del conjunto de parámetros θ . Por más detalles en cuanto a las propiedades de convergencia del algoritmo ver el trabajo [58] y en sus aplicaciones ver los trabajos [41] y [56].

Proposición 4. Sean las variables aleatorias y y z que tienen distribución paramétrica $\theta \in \Theta$ que cumplen que $\rho(z|y, \theta) = \rho(z|y)$. Para $\theta \in \Theta$ y cualquier z tal que $\chi(z) \neq \emptyset$ se cumple que si $Q(\theta|\theta^{(m)}) \geq Q(\theta^{(m)}|\theta^{(m)})$ se obtiene que $\log \rho(z|\theta) \geq \log \rho(z|\theta^{(m)})$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\log \rho(z|\theta) &= \log \int_{\chi(z)} \rho(y, z|\theta) dy = \log \int_{\chi(z)} \frac{\rho(y, z|\theta)}{\rho(y|z, \theta^{(m)})} \rho(y|z, \theta^{(m)}) dy \\
&= \log \mathbf{E} \left(\frac{\rho(y, z|\theta)}{\rho(y|z, \theta^{(m)})} \mid z, \theta^{(m)} \right) \geq \mathbf{E} \left(\log \frac{\rho(y, z|\theta)}{\rho(y|z, \theta^{(m)})} \mid z, \theta^{(m)} \right) \\
&= \mathbf{E} \left(\log \frac{\rho(y, z|\theta) \rho(z|\theta^{(m)})}{\rho(y, z|\theta^{(m)})} \mid z, \theta^{(m)} \right) \\
&= \mathbf{E} \left(\log \rho(y, z|\theta) \mid z, \theta^{(m)} \right) - \mathbf{E} \left(\log \rho(y, z|\theta^{(m)}) \mid z, \theta^{(m)} \right) + \log \rho(z|\theta^{(m)}) \\
&= Q(\theta|\theta^{(m)}) - Q(\theta^{(m)}|\theta^{(m)}) + \log \rho(z|\theta^{(m)}).
\end{aligned}$$

□

Corolario 1. En el paso (m) de la iteración del método de EM se cumple

$$\log \rho(z|\theta^{(m+1)}) \geq \log \rho(z|\theta^{(m)}).$$

Demostración. En el paso (M) del algoritmo se cumple que $\theta^{(m+1)} = \arg \max_{\theta \in \Omega} Q(\theta|\theta^{(m)})$, por lo cual

$$Q(\theta^{(m+1)}|\theta^{(m)}) \geq Q(\theta^{(m)}|\theta^{(m)}) \Rightarrow \log \rho(z|\theta^{(m+1)}) \geq \log \rho(z|\theta^{(m)}).$$

□

Como no existe certeza en la determinación del carácter del punto estacionario existen diferentes enfoques heurísticos para intentar alcanzarlo. El que se utiliza es el algoritmo denominado *escalada simple*, en el cual se realizan varias estimaciones con condiciones iniciales aleatorias.

En la deducción del paso (E) de la iteración, se utiliza la ecuación (3.27) que es la esperanza condicional de la función $\log \rho(y, z|\theta)$ a los datos observados y a los parámetros que se obtienen en la iteración previa. Por lo cual, en este paso no es posible aplicar de manera directa el filtro de Kalman dado que en su deducción sólo se utilizan los datos hasta el tiempo actual.

Es necesario aplicar una técnica que se considera una ramificación del filtro de Kalman que se denomina *suavizado de intervalo fijo*, en el cual se utilizan los datos completos para la estimación de la variable no observable. El algoritmo se respalda en el filtro de Kalman al recalcular cada una de sus estimaciones mediante un sistema de ecuaciones recursivo hacia atrás. La deducción de las ecuaciones (3.28) se encuentran en [2], las cuales se expresan en el sistema

$$\begin{aligned}
y_{t_i|S} &= y_{t_i|t_i} + P_{t_i|t_i}^* (y_{t_{i+1}|S} - y_{t_{i+1}|t_i}); \\
P_{t_i|t_i}^* &= P_{t_i|t_i} \phi' P_{t_{i+1}|t_i}^{-1}; \\
P_{t_i|S} &= P_{t_i|t_i} + P_{t_i|t_i}^* (P_{t_{i+1}|S} - P_{t_{i+1}|t_i}) P_{t_i|t_i}' ;
\end{aligned} \tag{3.28}$$

donde $y_{t_i|t_i}$ y $P_{t_i|t_i}$ son las estimaciones obtenidas en la aplicación del filtro de Kalman y la inicialización en tiempo S también se realiza mediante las estimaciones del filtro, es decir $y_{S|S}$ y $P_{S|S}$. Las estimaciones de las variables no observadas $y_{t_i|S}$ son las que forman parte de la ecuación (3.27).

Al analizar el sistema de ecuaciones (3.28), se infiere que el suavizado es la estimación realizada por el filtro de Kalman ajustada por un término de error ponderado. Este término de error es la diferencia entre la estimación en el tiempo posterior realizada por el suavizado y la predicción del valor que otorga el filtro. En general, las nuevas estimaciones para la variable no observada al aplicar el suavizado presentan menor matriz de covarianza del error de estimación.

Implementación del Modelo

Los modelos se implementan en el software R. El código consiste de varias funciones que pretenden obtener un algoritmo en el cual sólo sea necesario ingresar los precios de los bonos con sus respectivas fechas de vencimiento y obtener como respuesta los parámetros estimados en la cantidad de factores seleccionados.

Para analizar la eficiencia del algoritmo que se implementa, se realizan mediante la discretización de Euler, simulaciones de las tasas de interés spot instantáneas r_t con parámetros conocidos, para calcular precios de bonos cupón cero correspondientes a dichas tasas de interés y se adicionan pequeños errores en los mismos. Con estos precios, se estiman los parámetros en modelos de un factor, dos factores y tres factores para percibir algunas propiedades de regularidad en las estimaciones.

Todas las simulaciones se realizan en base a datos diarios en un período de tiempo de tres años. La preferencia por estas características en los datos generados se debe a que es el marco en el cual se producen las aplicaciones en el mercado uruguayo. A su vez, los parámetros seleccionados para realizar las simulaciones son similares a parámetros estimados en bibliografía relacionada. De acuerdo a la cantidad de factores en la simulación se utilizan distintas cantidades de precios de bonos; en el caso de un factor se establecen 5 vencimientos de bonos, en el caso de dos factores se establecen 7 vencimientos de bonos y en el caso de tres factores se establecen 10 vencimientos de bonos.

Para cada modelo se simulan 100 escenarios posibles en la evolución de la tasa de interés spot instantánea y se ejecuta la estimación en cada caso. En el cuadro 3.1, en el cuadro 3.2 y en el cuadro 3.3 se establecen algunos estadísticos en las estimaciones de cada parámetro en el modelo de un factor, dos factores y tres factores respectivamente. La media en las estimaciones proporciona alguna noción de la existencia de cierto sesgo en la técnica de estimación mientras que los demás estadísticos restantes proporcionan alguna intuición en la precisión de las estimaciones.

En el caso del modelo de un factor es posible establecer que existe una muy buena estimación en los tres parámetros. Afirmación que se basa en el valor de la media de las estimaciones y su desviación estándar. En el caso del modelo de dos factores también se obtiene muy bue-

	Real	Media	Des. Est.	Min.	Max.
a_1	0.350	0.350858	0.005267	0.337005	0.367020
b_1	0.040	0.039989	0.000109	0.039716	0.040254
σ_1	0.015	0.014911	0.000775	0.012829	0.016983

Cuadro 3.1: Estadísticos de los parámetros estimados en la simulación en el modelo de un factor.

	Real	Media	Des. Est.	Min.	Max.
a_1	0.100	0.099809	0.002045	0.093744	0.104007
a_2	0.500	0.500312	0.029822	0.439937	0.587124
b_1	0.060	0.059148	0.018708	0.009195	0.099169
b_2	0.010	0.010129	0.001870	0.006136	0.014375
σ_1	0.020	0.020051	0.000690	0.018497	0.021471
σ_2	0.010	0.009812	0.000924	0.007454	0.011857

Cuadro 3.2: Estadísticos de los parámetros estimados en la simulación en el modelo de dos factores.

	Real	Media	Des. Est.	Min.	Max.
a_1	0.800	0.828985	0.093937	0.604075	1.000000
a_2	0.350	0.350462	0.024452	0.288603	0.418681
a_3	0.040	0.040006	0.001154	0.037660	0.042797
b_1	0.010	0.013718	0.004701	0.001411	0.024348
b_2	0.020	0.023549	0.009700	0.004808	0.041841
b_3	0.050	0.043908	0.008061	0.027419	0.065545
σ_1	0.020	0.019937	0.000561	0.018499	0.020915
σ_2	0.015	0.015117	0.001635	0.011430	0.017913
σ_2	0.010	0.009501	0.001723	0.006195	0.013275

Cuadro 3.3: Estadísticos de los parámetros estimados en la simulación en el modelo de tres factores.

nos ajustes en todos los parámetros, salvo en el parámetro a_2 que si bien la media en las estimaciones es muy cercana al parámetro real se observa que el mínimo y el máximo de las estimaciones del parámetro difieren en niveles considerables del valor real. En cambio, en el modelo de tres factores existen algunos parámetros en los que se obtienen buenas aproximaciones y otros en las que no. En los tres parámetros relacionados a la tasa de largo plazo se obtienen diferencias entre los valores reales y la media de las estimaciones. Los parámetros relacionados a la volatilidad tienen un muy buen ajuste y los parámetros de reversión a la media existe uno sólo que presenta reducida diferencia.

En resumen, es posible establecer mediante las estimaciones realizadas en los casos simulados que se logra un algoritmo sofisticado que determina los parámetros con buena precisión.

Datos

En la sección 1.1 se establece que la deuda soberana uruguaya se encuentra dividida en moneda extranjera y moneda nacional. En la primera categoría se destaca la deuda en dólares y en la segunda categoría se encuentran especialmente la deuda en unidades indexadas y en pesos uruguayos. En esta sección, se describen los datos que se utilizan en los diferentes mercados que se analizan: dólares, unidades indexadas y pesos uruguayos.

La información disponible en el mercado son los precios de activos financieros que se emiten en el mercado primario y se transan en el mercado secundario. La razón principal para seleccionar estos datos es que en el precio de los activos se encuentra subyacente la información sobre las expectativas que tienen los agentes que participan del mercado. En caso de disponibilidad en el mercado de derivados financieros de tasas de interés (swaps y repos entre otros) es posible utilizarlos para realizar las estimaciones pero en el caso de Uruguay no existe un mercado profundo en esta clase de activos.

Las bases de datos son de carácter diario y todas abarcan el mismo período de tiempo comprendido entre el 2 de enero de 2014 y el 31 agosto de 2016. Se establecen de manera detallada los activos disponibles en cada mercado.

El mercado en dólares es el más diversificado a causa de la gran cantidad de activos emitidos (en su mayoría bonos soberanos) con vencimientos a mediano y largo plazo. En el análisis, se brinda prioridad a las emisiones internacionales por lo que se utilizan los seis bonos globales que se encuentran vigentes en todo el período de análisis. Desde el año 2015 hasta la actualidad se emitieron 3 nuevos bonos globales que corresponden a vencimientos en los años 2027, 2050 y 2055. En el análisis se incorporaron los precios de dos bonos locales de vencimiento en 2019 y 2020 con el fin de obtener mayor precisión en los vencimientos a corto plazo en las curvas de rendimiento estimadas. Los bonos soberanos que se utilizan en el mercado en dólares se encuentran en el cuadro 3.4.

En lo que refiere a la deuda en moneda nacional, tanto en unidades indexadas como pesos uruguayos, su valor nominal aumentó en los últimos 10 años debido al objetivo planteado de disminuir la dolarización de la deuda soberana posterior a la crisis financiera del año 2002.

Activo Financiero	Emisión	Vencimiento	Cupón	Amortizaciones
Bono Local 2019	29/03/03	23/03/19	7.500	Al vencimiento
Bono Local 2020	29/05/03	28/02/20	9.750	Al vencimiento
Bono Global 2022	18/11/05	18/11/22	8.000	(33.3%) 18/11/20 - 18/11/21 - 18/11/22
Bono Global 2024	14/08/13	14/08/24	4.500	(33.3%) 14/08/22 - 14/08/23 - 14/08/24
Bono Global 2025	28/09/09	28/09/25	6.875	(33.3%) 28/09/23 - 28/09/24 - 28/09/25
Bono Global 2033	29/05/03	15/01/33	7.875	Al vencimiento
Bono Global 2036	21/03/06	21/03/36	7.625	(33.3%) 21/03/34 - 21/03/35 - 21/03/36
Bono Global 2045	20/11/12	20/11/45	4.125	(33.3%) 20/11/43 - 20/11/44 - 20/11/45

Cuadro 3.4: Bonos soberanos que se utilizan en el mercado en dólares.

Por un lado, en el mercado en unidades indexadas la primera emisión de activos indexados a la inflación la realizó el BCU al emitir letras de regulación monetaria en setiembre de 2002. En la actualidad existen en el mercado letras de regulación monetaria, notas de tesorería, bonos locales y bonos globales. En el análisis tienen prioridad los precios de los cinco bonos globales vigentes en todo el período de tiempo. Además, se incorporan a la base de datos dos notas de tesorería, que son las que presentan mayor circulante en el mercado. El detalle de los activos soberanos que se utilizan en el mercado de unidades indexadas se encuentra en el cuadro 3.5.

Activo Financiero	Emisión	Vencimiento	Cupón	Amortizaciones
Notas de tesorería Serie 14	10/06/10	10/06/20	4.000	Al vencimiento
Notas de tesorería Serie 16	27/01/11	27/01/19	3.250	Al vencimiento
Bono Global 2018	14/09/06	14/09/18	5.000	Al vencimiento
Bono Global 2027	03/04/07	05/03/27	4.250	(33.3%) 05/04/25 - 05/04/26 - 05/04/27
Bono Global 2028	15/12/11	15/12/28	4.375	(33.3%) 15/12/25 - 15/12/27 - 15/12/28
Bono Global 2030	10/07/08	10/07/30	4.000	(33.3%) 10/07/28 - 10/07/29 - 10/07/30
Bono Global 2037	26/06/07	26/06/37	3.700	(33.3%) 26/06/35 - 26/06/36 - 26/06/37

Cuadro 3.5: Bonos soberanos y notas de tesorería que se utilizan en el mercado en unidades indexadas.

Tanto en el mercado en dólares como en el mercado en unidades indexadas es de destacar que todos los activos utilizados presentan pagos intermedios de manera semestral (cupones). Por lo cual, se descomponen los flujos futuros de cada activo con el fin de obtener el precio del bono cupón cero equivalente.

Por el otro lado, el mercado en pesos uruguayos es el que presenta menor proporción circulante en comparación a los otros dos mercados. Esto se debe a que luego de la crisis económica del año 2002, las emisiones en pesos uruguayos se realizaron fundamentalmente en activos con vencimientos a corto plazo (no superaban los tres años). A partir del año 2011, se emitieron notas de tesorería a plazos máximos de 5 años y en el año 2017 se emitieron dos bonos globales con vencimientos en 2022 y 2028.

En la actualidad la emisión en el mercado local en pesos uruguayos se ajusta a la imple-

mentación de calendarios semestrales, lo genera una oferta continua de títulos en el mercado. La deuda soberana en pesos uruguayos se encuentra conformada por emisiones de letras de regulación monetaria con vencimiento que oscilan entre 1 mes y 1 año, dos series de Notas de Tesorería con vencimientos en 2018 y en 2019 y dos bonos globales con vencimientos en los años 2022 y 2028. Por lo cual, en esta moneda no existe la cantidad suficiente de activos vigentes en el período analizado (2014-2016) y se decide generar la base de precios de bonos cupón cero sintéticos que se deducen de las curvas de rendimientos que publica BEVSA para los plazos de 1 mes, 3 meses, 6 meses, 1 año, 3 años y 5 años.

Resultados

En esta sección se estiman los parámetros en tres modelos afines en las principales monedas de la deuda soberana uruguaya. Es de destacar, que si bien los modelos que se utilizan presentan probabilidad no nula que la tasa de interés spot instantánea r_t sea negativa, se verifica que esta característica no suceda en las aplicaciones.

En el caso de los modelos de un factor, los resultados presentan una interpretación significativa de acuerdo a la magnitud de los parámetros estimados. Lo cual permite comparar el comportamiento de las tasas de rendimiento en los diferentes mercados analizados. La principal desventaja que soportan es que las tasas de rendimiento se encuentran perfectamente correlacionada en los vencimientos. Esta propiedad teórica no se cumple de manera empírica en las curvas de rendimiento del mercado por esta razón es necesario agregar mayor cantidad de factores al modelo. Esta acción origina un mejor ajuste en los precios diarios del mercado. No obstante, al agregar factores en la modelación puede surgir un problema de sobreajuste al adicionar mayor cantidad de parámetros. Este planteamiento equivale a buscar un equilibrio entre el ajuste de los datos y el número de parámetros del modelo. Para su análisis existe una amplia variedad de criterios de información que pretenden buscar el modelo más simple posible que ajuste en buena medida a los datos. Los criterios usuales en el problema de estimación de las curvas de rendimiento son los que se componen de dos términos: el relacionado a la bondad de ajuste en los estimadores de máxima verosimilitud y el que penaliza el número de parámetros.

Las estimaciones de los parámetros se encuentran en el cuadro 3.6 para el mercado en dólares, en el cuadro 3.7 para el mercado en unidades indexadas y en el cuadro 3.8 para el mercado en pesos uruguayos. También se exhibe el valor de la función de verosimilitud y el criterio de Akaike (AIC) y el criterio bayesiano (BIC).

En cuanto a la interpretación de los parámetros obtenidos en los modelos de un factor se percibe que la velocidad de reversión a la media es mayor en el mercado en unidades indexadas escollado por el mercado en pesos uruguayos. En cambio, el mercado en pesos uruguayos es el que presenta mayor volatilidad y el mercado en dólares el de menor volatilidad. Para finalizar, los parámetros estimados en cuanto a la tasa de largo plazo se encuentran ordenados en relación a lo que se cumple en el mercado, siendo el de menor valor el mercado en unidades indexadas secundado de manera cercana por el mercado en dólares. Estos resultados se encuentran de acuerdo a lo esperado.

	Un Factor	Dos Factores	Tres Factores
a_1	0.216268	0.664686	0.738662
a_2	—	0.253509	0.255514
a_3	—	—	0.113262
b_1	0.069803	0.065406	0.051941
b_2	—	0.003866	0.016902
b_3	—	—	0.001163
σ_1	0.012315	0.015400	0.013778
σ_2	—	0.012303	0.012621
σ_3	—	—	0.008802
ϵ_1	0.005385	0.001947	0.001492
ϵ_2	0.004778	0.001434	0.002133
ϵ_3	0.004066	0.001366	0.002617
ϵ_4	0.003595	0.002596	0.000815
ϵ_5	0.003873	0.003425	0.000975
ϵ_6	0.003358	0.003854	0.001212
ϵ_7	0.003931	0.003385	0.001834
ϵ_8	0.003161	0.003042	0.001772
$\ln L$	3404.48	3660.60	3861.42
AIC	-6784.96	-7293.20	-7688.84
BIC	-6713.01	-7201.63	-7577.65

Cuadro 3.6: Estimación de parámetros en el mercado en dólares.

	Un Factor	Dos Factores	Tres Factores
a_1	0.683704	0.478106	0.548472
a_2	—	0.035019	0.243667
a_3	—	—	0.071716
b_1	0.045365	0.033008	0.039433
b_2	—	0.018637	0.007103
b_3	—	—	0.004344
σ_1	0.016890	0.015759	0.014621
σ_2	—	0.012805	0.015328
σ_3	—	—	0.009955
ϵ_1	0.006501	0.006441	0.000170
ϵ_2	0.002315	0.002132	0.000100
ϵ_3	0.002445	0.000343	0.000196
ϵ_4	0.002301	0.001550	0.000270
ϵ_5	0.001794	0.001551	0.000460
ϵ_6	0.000903	0.000668	0.000784
ϵ_7	0.003155	0.000697	0.000920
$\ln L$	8022.55	11077.84	11636.06
AIC	-16025.09	-22129.68	-23240.12
BIC	-15961.02	-22046.38	-23137.60

Cuadro 3.7: Estimación de parámetros en el mercado en unidades indexadas.

	Un Factor	Dos Factores	Tres Factores
a_1	0.347851	0.539109	0.828961
a_2	—	0.214363	0.112517
a_3	—	—	0.176157
b_1	0.124560	0.096547	0.080659
b_2	—	0.028565	0.013274
b_3	—	—	0.032058
σ_1	0.041862	0.021231	0.011983
σ_2	—	0.022710	0.024487
σ_3	—	—	0.020811
ϵ_1	0.004186	0.014921	0.007830
ϵ_2	0.004049	0.009378	0.002432
ϵ_3	0.009932	0.006441	0.000902
ϵ_4	0.004888	0.002132	0.001890
ϵ_5	0.003245	0.000343	0.001689
ϵ_6	0.002651	0.001550	0.001686
$\ln L$	2521.14	2744.65	2851.37
AIC	-5024.29	-5465.30	-5672.73
BIC	-4968.01	-5390.26	-5578.93

Cuadro 3.8: Estimación de parámetros en el mercado en pesos uruguayos.

Como los coeficientes asociados a $y_{t_{i-1}}$ en el proceso autoregresivo dado por la ecuación (3.13) son $e^{-a_i \Delta t}$ se cumple que si el parámetro a_i es cercano a cero el coeficiente es cercano a uno lo cual es equivalente a tener raíces cercanas al círculo unidad. Por lo cual, los parámetros a_i de valores reducidos presentan un comportamiento en el proceso similar al de un camino aleatorio, siendo los principales responsables de explicar las variaciones en las tasas de rendimiento de largo plazo. En los modelos estimados en varios factores, se cumple que el primer factor es el que presenta mayor reversión a la media siendo el que acapara la dinámica en el nivel de la tasa de rendimiento de corto plazo. Los restantes factores se encargan de explicar los movimientos en el mediano y largo plazo. Si se consideran los parámetros b_i en cada estimación en varios factores, los valores estimados están de acuerdo en cuanto a su interpretación con sus respectivos modelos en un factor.

Para todo los modelos estimados se construyen las curvas de rendimiento en cada día analizado. La figura 3.1 corresponde al mercado en dólares, la figura 3.2 corresponde al mercado en unidades indexadas y la figura 3.3 corresponde al mercado en pesos uruguayos.

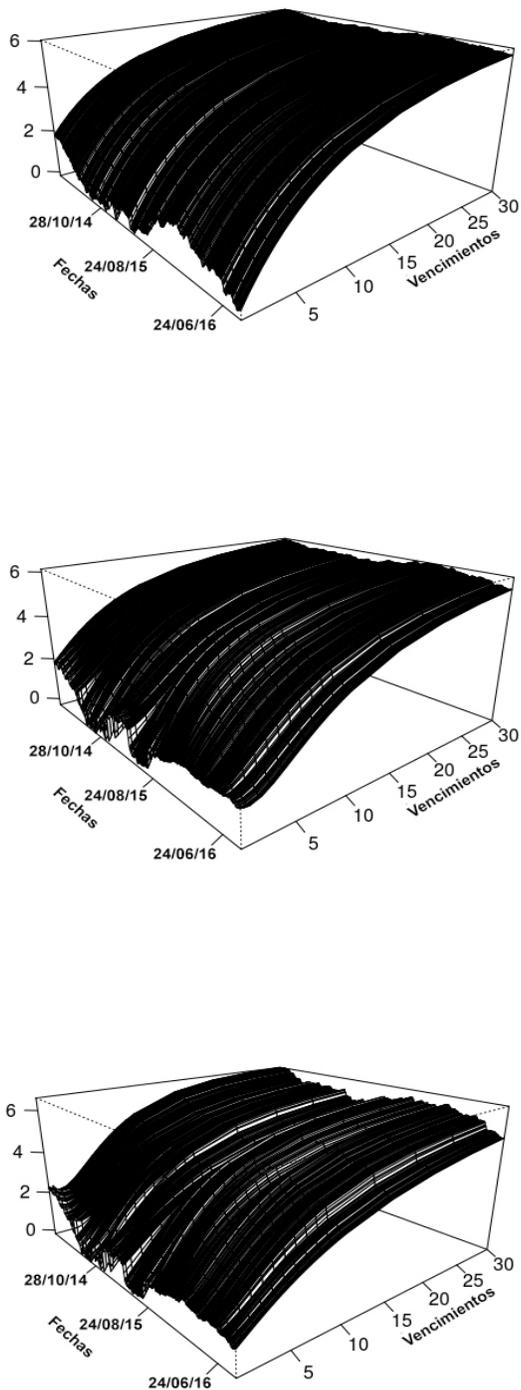


Figura 3.1: Curvas de rendimiento estimadas en el mercado en dólares.

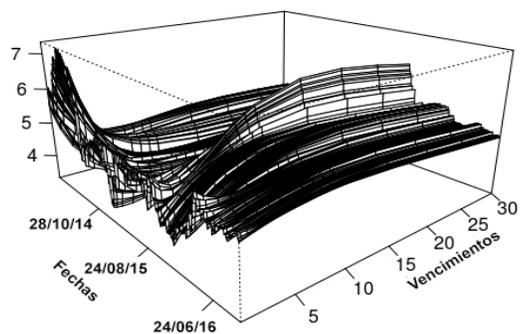
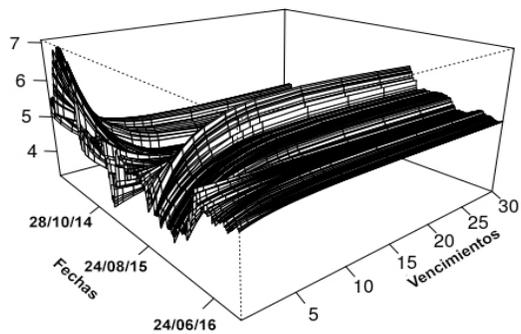
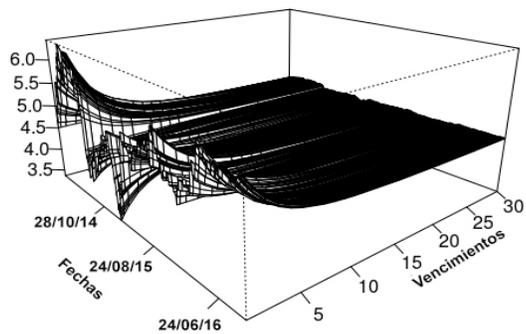


Figura 3.2: Curvas de rendimiento estimadas en el mercado en unidades indexadas.

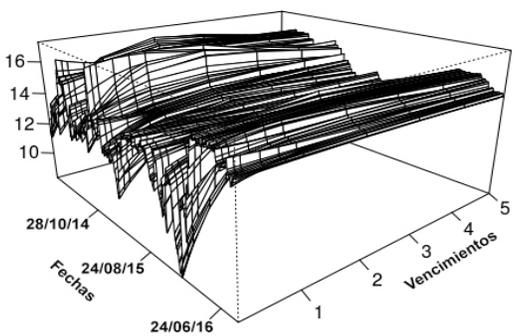
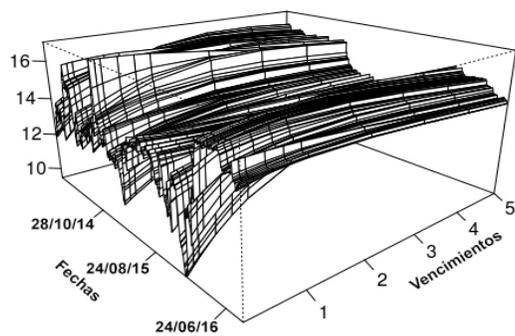
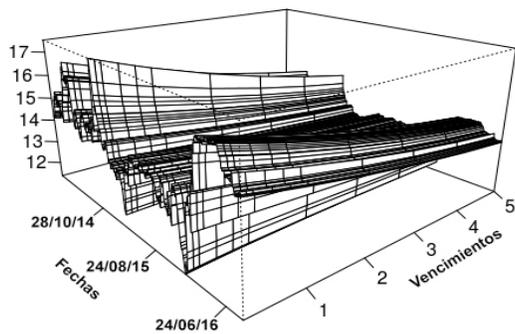


Figura 3.3: Curvas de rendimiento estimadas en el mercado en pesos uruguayos.

En las curvas de rendimiento estimadas en los mercados se perciben diferencias notorias entre los modelos en un factor y los modelos en varios factores. Esto se debe a la rigidez en las estructuras de las curvas de rendimiento en los modelos de un factor, lo que provoca un ajuste adecuado en el corto plazo pero no así en el largo plazo.

En cambio, al comparar las curvas de rendimiento estimadas en modelos de varios factores no es posible establecer un parecer sobre las ventajas relativas entre los modelos al coincidir de manera visual de manera general. Sin embargo, existen tiempos en los cuales las curvas de rendimiento estimadas en ambos modelos se diferencian. En la figura 3.4 se establece en cada mercado el día en el cual se genera la mayor diferencia entre ambos modelos. El error cuadrático medio entre las curvas de rendimiento estimadas en cada modelos y las tasas de rendimiento de los activos utilizados en cada estimación se encuentran en el cuadro 3.9. Lo que sucede es que el modelo en tres dimensiones permite a las curvas de rendimiento mayor variabilidad en los vencimientos lo que produce diferentes curvaturas. Si bien se podría establecer que los modelos en tres dimensiones son mejores debido a esta propiedad es posible que se pierda parte de la suavidad deseada en la estimación de curvas de rendimiento. Vale destacar, que no es necesario establecer de manera gráfica el día de menor diferencia entre los modelos porque prácticamente son idénticas las curvas de rendimiento.

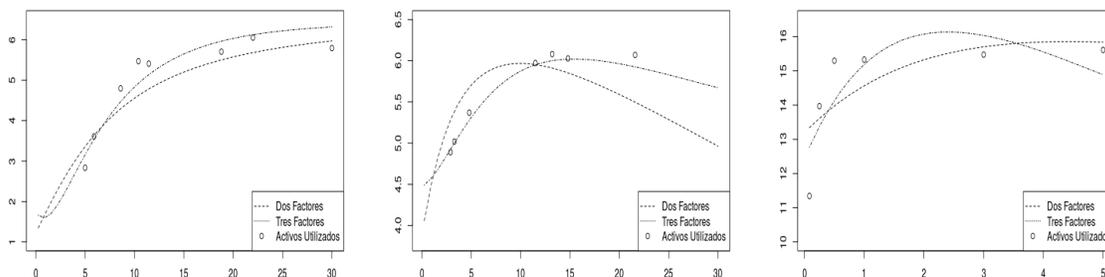


Figura 3.4: Mayor diferencia entre las curvas estimadas en los modelos de dos factores y los modelos de tres factores. De izquierda a derecha el mercado en dólares, en unidades indexadas y en pesos uruguayos. Las fechas corresponden a 25/03/2014, 16/10/2015 y 22/06/2016 respectivamente.

	DÓLARES	U. INDEXADAS	P. URUGUAYOS
UN FACTOR	0.001288	0.004092	0.008181
DOS FACTORES	0.000861	0.001285	0.001498
TRES FACTORES	0.000575	0.000087	0.000733

Cuadro 3.9: Error cuadrático medio en cada uno de los modelos estimados.

Aplicación: Precios de Opciones Europeas

Los sistemas financieros de los países emergentes se profundizaron de manera importante en los últimos años aunque la mayoría se encuentran por debajo de los niveles de las economías avanzadas. En particular, en el mercado de derivados financieros, las economías emergentes se encuentran en crecimiento aunque comparadas con las economías desarrolladas, el mercado es reducido, presenta menos liquidez y los activos transados presentan menor sofisticación. Se estima que sólo el 10 % del volumen transados en derivados financieros es en activos cuyo subyacente son de países emergentes.

En los mercados emergentes más de la mitad de los contratos se basan en derivados financieros sobre monedas, en especial en futuros y swaps. Esto es debe al riesgo inherente que presentan estas economías al tipo de cambio. En América Latina el mercado de derivados es relativamente pequeño, en el cual se destacan México en el mercado de derivados de tipo de cambio y Brasil en el mercado de derivados de tasas de interés. En otros países de la región se ha desarrollado un incipiente mercado de opciones en tasas de interés.

En lo que refiere a Uruguay, se avanzó en el desarrollo del mercado de derivados financieros sobre moneda porque es el de mayor impacto en el sistema financiero. El derivado financiero más transado en los últimos años es el contrato a futuro sobre el tipo de cambio. En cuanto al negocio de swaps y opciones de tipo de cambio existe pero no se genera un mercado líquido.

El desarrollo del mercado de derivados financieros sobre tasas de interés en un país, beneficiaría a los agentes locales en el manejo de los diferentes riesgos asociados a sus portafolios, como lo es el riesgo de cobertura en activos en las Administradoras de Fondos de Ahorro Previsional (Afap) y las compañías aseguradoras. El trabajo [1], se basa en el problema de optimización que presentan las Afaps al considerar un gran portafolio de activos principalmente a largo plazo.

Este desarrollo sería importante para la optimización de los portafolios especialmente en ciertos momentos de incertidumbre; como por ejemplo en el año 2013, que frente a un anuncio de la Reserva Federal (Banco Central de Estados Unidos) las curvas de rendimiento de bonos soberanos en el mercado en unidades indexadas en Uruguay se incrementaron en un breve período de tiempo. En particular, la tasa de rendimiento en el bono a 10 años aumentó en 2 % lo que provocó grandes pérdidas contables en algunas Afaps al representar un costo aproximado del 5 % del total del portafolio. También, se destaca que el desarrollo del mercado de derivados afecta en una mayor profundidad al mercado secundario de bonos soberanos debido a la existencia de activos financieros que proporcionan cobertura para mitigar los diferentes riesgos en las tasas de interés. Por estos motivos, es esencial la utilización de diferentes metodologías de valuación en esta clase de activos con el objetivo de impulsar el mercado de derivados sobre tasas de interés en el Uruguay.

Una aplicación de los modelos estimados en la sección 3.7, es establecer una propuesta metodológica para la valuación de los derivados financieros que se denominan *opciones europeas de compra* y *opciones europeas de venta*. En estos activos financieros, el activo subyacente es un bono soberano de vencimiento en tiempo T y otorga el derecho a comprar (vender) en cierto tiempo S (vencimiento de la opción) que satisface $S < T$ el bono soberano a cierto

precio prefijado K (precio de ejercicio). Farshid Jamshidian derivó la fórmula de precios de opciones en el modelo de Vasicek en el trabajo [36], al utilizar argumentos similares a los establecidos en el trabajo [10]. Las fórmulas de precios de opciones de compra (O.C.) y de opciones de venta (O.V.) en el modelo de Vasicek son

$$O.C.(t, S, K, T) = P(t, T)N(h) - KP(t, S)N(h - \sigma_p); \quad (3.29)$$

$$O.V.(t, S, K, T) = KP(t, S)N(\sigma_p - h) - P(t, T)N(-h); \quad (3.30)$$

donde

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \log \left(\frac{P(t, T)}{KP(t, S)} \right) + \frac{\sigma_p}{2}; \quad \sigma_p = \frac{\sigma}{a} (1 - e^{-a(T-S)}) \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(S-t)}}{2a}}.$$

Es posible extender de manera general la valuación de opciones en la ecuación (3.29) y la ecuación (3.30) para los modelos propuestos en varias dimensiones. La modificación en la fórmula del precio sucede en el factor de varianza correspondiente, mediante

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{a_i} (1 - e^{-a_i(T-S)}) \sqrt{\frac{1 - e^{-2a_i(S-t)}}{2a_i}}.$$

Con los resultados obtenidos en las estimaciones de la sección 3.7, se establece el valor de las opciones europeas de compra y las opciones europeas de venta en el día 31 de agosto de 2016 para diferentes precios de ejercicio y diferentes vencimientos de las opciones (3, 6 y 12 meses).

Se selecciona como alternativa el clásico modelo propuesto por Fischer Black, Emanuel Derman y Bill Toy en el trabajo [9] para comparar los resultados a causa de que no existen precios transados en el mercado en esta clase de activos. El modelo BDT es uno de los modelos más utilizados por los agentes financieros para valorar precios de bonos y opciones europeas y americanas. El modelo se desarrolla en el enfoque libre de arbitraje y se emplea un árbol binomial para calibrar sus parámetros con el propósito de ajustar tanto la curva de rendimiento del mercado como su estructura de volatilidad histórica. En la aplicación del modelo, los datos que se utilizan para la valuación del precio de opciones son las curvas de rendimiento publicada por BEVSA para el mismo período de tiempo que se considera en la sección 3.6.

En el caso del mercado en dólares el activo subyacente es el bono cupón cero equivalente al Bono Local 2019 con vencimiento el 23 de mayo de 2019 que tiene el precio 94.84 (tasa de rendimiento de 1.94 %) al momento del análisis; en el caso del mercado en unidades indexadas es el bono cupón cero equivalente al Bono Global 2018 con vencimiento en 14 de setiembre de 2018 que tiene el precio 89.97 (tasa de rendimiento de 5.19 %) al momento del análisis y en el caso del mercado en pesos uruguayos es el bono cupón cero equivalente a la Nota de Tesorería serie 7 con vencimiento en 08 de abril de 2018 que tiene el precio 79.49 (tasa de rendimiento de 14.35 %) al momento del análisis. En los tres mercados, se establece el precio de opciones para cinco precios de ejercicios, los cuales corresponden a variaciones en 0 %, ± 1 % y ± 2 % en las tasas de rendimiento del activo subyacente.

Los resultados se encuentran en el cuadro 3.10 para el mercado en dólares, en el cuadro 3.11 para el mercado en unidades indexadas y en el cuadro 3.12 para el mercado en pesos uruguayos. Si bien, los precios de las opciones de compra y los precios de opciones de venta son calculados mediante sus respectivas metodologías (la ecuación (3.29) y la ecuación (3.30) en los modelos de factores y el árbol binomial en el modelo BDT) se verifica que se cumpla en todos los casos la conocida “fórmula de paridad call-put”. Como se cumple dicha paridad alcanza sólo con discutir los resultados en los precios de las opciones de compra.

En el mercado en dólares, la diferencia más notoria entre ambas metodologías es que las opciones que tienen precio de ejercicio más alto (frente a una disminución en la tasa de rendimiento) en el modelo de BDT los precios de opciones son cercanos a cero y en los modelos de factores no se cumple en ninguno de los vencimientos de la opción. Además se verifica que el precio de las opciones aumenta cuando se considera un factor adicional en la modelación. En el mercado en unidades indexadas, el modelo de un factor genera precios de opciones similares a los genera el modelo BDT. A su vez, estos precios se diferencian en gran medida a los precios generados en los modelos de dos y tres factores (que se aproximan entre ellos) al ser menores en todas las situaciones analizadas. En el mercado en pesos uruguayos, se da la particularidad de que al agregar factores al modelo los precios de las opciones disminuyen. Los precios en el modelo BDT se posicionan entre los precios de opciones del modelo de dos factores y del modelo de tres factores.

Precio de Opciones a 3 meses								
P.E.	OP. DE COMPRA				OP. DE VENTA			
	VK-1	VK-2	VK-3	BDT	VK-1	VK-2	VK-3	BDT
97.69	0.003	0.012	0.029	0.000	2.649	2.658	2.675	2.646
96.48	0.048	0.095	0.149	0.006	1.487	1.533	1.587	1.444
95.48	0.317	0.408	0.494	0.256	0.578	0.669	0.755	0.526
94.13	1.029	1.098	1.170	1.043	0.122	0.191	0.262	0.136
92.97	2.076	2.096	2.126	2.096	0.011	0.032	0.062	0.032

Precio de Opciones a 6 meses								
P.E.	OP. DE COMPRA				OP. DE VENTA			
	VK-1	VK-2	VK-3	BDT	VK-1	VK-2	VK-3	BDT
97.92	0.017	0.046	0.088	0.000	2.611	2.640	2.682	2.594
96.83	0.097	0.167	0.247	0.009	1.619	1.690	1.770	1.533
95.76	0.355	0.464	0.574	0.223	0.809	0.919	1.029	0.679
94.70	0.901	1.007	1.113	0.850	0.301	0.407	0.512	0.250
93.65	1.721	1.784	1.858	1.732	0.077	0.139	0.213	0.089

Precio de Opciones a 1 año								
P.E.	OP. DE COMPRA				OP. DE VENTA			
	VK-1	VK-2	VK-3	BDT	VK-1	VK-2	VK-3	BDT
98.39	0.043	0.091	0.155	0.000	2.369	2.418	2.482	2.327
97.54	0.131	0.215	0.310	0.003	1.628	1.712	1.806	1.497
96.70	0.330	0.444	0.562	0.101	0.997	1.111	1.229	0.768
95.87	0.682	0.806	0.929	0.473	0.530	0.652	0.776	0.320
95.05	1.201	1.304	1.413	1.085	0.238	0.341	0.451	0.122

Cuadro 3.10: Precios de opciones de compra y venta en el mercado en dólares.

Precio de Opciones a 3 meses								
P.E.	OP. DE COMPRA				OP. DE VENTA			
	VK-1	VK-2	VK-3	BDT	VK-1	VK-2	VK-3	BDT
92.79	0.003	0.063	0.088	0.003	1.631	1.692	1.717	1.631
91.96	0.048	0.204	0.248	0.053	0.861	1.018	1.062	0.867
91.14	0.284	0.506	0.558	0.316	0.291	0.513	0.565	0.309
90.33	0.842	0.999	1.043	0.874	0.049	0.206	0.249	0.081
89.52	1.589	1.649	1.675	1.601	0.003	0.064	0.089	0.016

Precio de Opciones a 6 meses								
P.E.	OP. DE COMPRA				OP. DE VENTA			
	VK-1	VK-2	VK-3	BDT	VK-1	VK-2	VK-3	BDT
93.75	0.021	0.159	0.203	0.012	1.415	1.5553	1.597	1.382
93.03	0.106	0.334	0.393	0.095	0.799	1.028	1.086	0.599
92.32	0.348	0.619	0.682	0.349	0.346	0.617	0.681	0.351
91.61	0.796	1.023	1.080	0.807	0.104	0.331	0.388	0.115
90.91	1.397	1.532	1.576	1.403	0.020	0.156	0.199	0.026

Precio de Opciones a 1 año								
P.E.	OP. DE COMPRA				OP. DE VENTA			
	VK-1	VK-2	VK-3	BDT	VK-1	VK-2	VK-3	BDT
95.75	0.052	0.233	0.283	0.002	1.012	1.193	1.243	0.958
95.26	0.144	0.379	0.436	0.107	0.634	0.869	0.927	0.383
94.77	0.321	0.579	0.639	0.292	0.344	0.602	0.663	0.269
94.28	0.598	0.835	0.893	0.589	0.156	0.394	0.452	0.148
93.79	0.962	1.147	1.197	0.969	0.058	0.243	0.293	0.065

Cuadro 3.11: Precios de opciones de compra y venta en el mercado en unidades indexadas.

Precio de Opciones a 3 meses								
P.E.	OP. DE COMPRA				OP. DE VENTA			
	VK-1	VK-2	VK-3	BDT	VK-1	VK-2	VK-3	BDT
83.50	0.219	0.101	0.001	0.038	1.551	1.434	1.334	1.140
82.94	0.364	0.212	0.019	0.121	1.153	1.001	0.808	0.806
82.38	0.568	0.396	0.117	0.291	0.816	0.645	0.366	0.535
81.83	0.836	0.666	0.392	0.576	0.548	0.378	0.104	0.30
81.28	1.168	1.020	0.837	0.960	0.347	0.199	0.016	0.189

Precio de Opciones a 6 meses								
P.E.	OP. DE COMPRA				OP. DE VENTA			
	VK-1	VK-2	VK-3	BDT	VK-1	VK-2	VK-3	BDT
86.30	0.381	0.212	0.025	0.106	1.414	1.246	1.058	1.139
85.82	0.530	0.341	0.084	0.216	1.120	0.931	0.674	0.806
85.35	0.716	0.516	0.218	0.386	0.865	0.665	0.368	0.535
84.88	0.939	0.742	0.453	0.619	0.650	0.453	0.165	0.330
84.41	1.199	1.017	0.783	0.914	0.474	0.292	0.058	0.189

Precio de Opciones a 1 año								
P.E.	OP. DE COMPRA				OP. DE VENTA			
	VK-1	VK-2	VK-3	BDT	VK-1	VK-2	VK-3	BDT
92.30	0.364	0.222	0.019	0.137	0.947	0.806	0.603	0.720
92.03	0.454	0.304	0.055	0.216	0.798	0.648	0.399	0.560
91.75	0.559	0.405	0.129	0.321	0.663	0.509	0.234	0.426
91.48	0.678	0.524	0.252	0.451	0.544	0.390	0.117	0.317
91.20	0.812	0.663	0.421	0.604	0.440	0.292	0.049	0.233

Cuadro 3.12: Precios de opciones de compra y venta en el mercado en pesos uruguayos.

Modelos con Riesgo de Incumplimiento de Pago

El problema que aborda este capítulo es la modelación de las curvas de rendimiento al incluir en la valuación el riesgo de incumplimiento de pago por parte del emisor del activo financiero. El objetivo es extender el análisis previo, en el cual no se considera de manera explícita la existencia de este riesgo.

El *riesgo de incumplimiento de pago* o *riesgo de crédito* es la posible pérdida que asume un agente económico como consecuencia del impago de un activo financiero por parte del emisor. El riesgo de crédito afecta de manera negativa la valuación del activo a causa de no existir certeza en que el emisor cumpla con los flujos de pagos futuros. El riesgo de crédito soberano varía en el tiempo, en general se incrementa en etapas en las que el país se enfrenta tanto a problemas en el sistema financiero local como internacional. Aunque los determinantes de este riesgo pueden ser no sólo de carácter económico sino también político, por tal motivo es una variable de difícil estimación y predicción.

La gran globalización que existe en la actualidad en el mercado financiero mundial permite a los agentes inversores considerar un amplio espectro de activos financieros para integrar a su portafolio, entre ellos se encuentran todos los activos de renta fija soberanos. La incorporación del riesgo de crédito en la valuación de deuda soberana es de vital importancia por la información económica que se obtiene de su análisis. Los inversores se encuentran interesados en los retornos esperados en las distintas deudas soberanas al considerar su riesgo de incumplimiento de pago.

Existen distintos enfoques en la valuación del riesgo de crédito a nivel soberano. En el capítulo se analiza la perspectiva que surge de la clase de modelos que se denominan *modelos reducidos* o *modelos de intensidad*. En estos modelos se impone una especificación exógena en la probabilidad de incumplimiento de pago mediante un nuevo proceso que se denomina *proceso del riesgo*. La razón principal para utilizar este enfoque es que se considera la extensión natural de la modelación que se desarrolla en el capítulo 2 y en el capítulo 3. El marco matemático y las herramientas computacionales en ambos capítulos son la base en este nuevo análisis. En la literatura existe una amplia gama de trabajos sobre la temática, entre ellos se destacan [25] y [40]. En el Uruguay, el primer estudio aplicado a la deuda soberana se encuentra en el trabajo de tesis [27].

Modelos Estáticos

En la actualidad los agentes inversores analizan los diferentes indicadores que existen en cuanto al riesgo de crédito y al retorno esperado de los activos financieros con el fin de decidir sus futuras inversiones o de supervisar el riesgo existente en sus portafolios.

En el mercado existen numerosas formas de medir el riesgo de crédito tanto de manera cualitativa como cuantitativa. Determinadas valuaciones las brindan las *calificadoras de riesgo*, que son agentes financieros que tienen entre sus objetivos analizar la capacidad de repago de la deuda que presenta el emisor mediante alguna medida cualitativa. Su fijación de manera general consiste en la aplicación de algún modelo en el cual participan variables como son la solvencia financiera, la situación económica, los shocks externos y el marco legal que regula al país.

En este capítulo se utilizan métodos cuantitativos que intentan estimar la probabilidad de que el país no pague a sus acreedores sus obligaciones asumidas en los tiempos establecidos. Una de las alternativas más utilizadas en este enfoque es la que evalúa la variable que se denomina *riesgo país*. El valor de esta variable expresa la sobretasa promedio que existe en las tasas de rendimiento en una canasta de bonos soberanos del país con respecto a una canasta de bonos de similares características de otro país (que en teoría) no presenta riesgo de incumplimiento de pago.

El riesgo país es una variable económica fundamental en especial en los países emergentes que expandieron su participación en la economía mundial. Desde el punto de vista del inversor la información que brinda la variable es de utilidad para la gestión de su portafolio al permitir la comparación entre varias alternativas a causa de que se analizan de manera similar los distintos emisores soberanos. Desde el punto de vista del emisor se obtiene información sobre las expectativas de los participantes del mercado respecto a su deuda y entre otras acciones permite la planificación de futuras emisiones debido a que es posible predecir el mayor o menor costo de financiamiento que debe afrontar el país.

Desde esta perspectiva se interpreta que la tasa de rendimiento de los bonos soberanos en moneda extranjera se descompone en dos partes. En primer lugar, la tasa de rendimiento libre de riesgo de incumplimiento de pago, que por convención se considera a la deuda soberana en Estados Unidos y en segundo lugar, la tasa de rendimiento que compensa la existencia del riesgo de incumplimiento de pago. Por lo cual al analizar la evolución, las variaciones se deben tanto a los cambios en los bonos soberanos en Uruguay como también a los cambios en los bonos soberanos en Estados Unidos.

El índice internacional de riesgo país más difundido en la actualidad es el que se denomina *Emerging Markets Bond Index* (Embi) y es desarrollado por J.P. Morgan. En la construcción del indicador se evalúan las tasas de rendimiento de bonos, préstamos y eurobonos nominados en dólares que se emiten en una gran cantidad de países, los cuales se ponderan en función de la capitalización al utilizar ciertos requisitos de liquidez y vencimiento. A su vez, existen varios índices de similares características en los sistemas de información como Bloomberg y Reuters.

En el mercado financiero de Uruguay, existen dos índices de referencia, que utilizan los mismos fundamentos en su evaluación que el índice Embi pero sus diferencias radican en los métodos de estimación de la curva de rendimiento (sección 1.3). Es decir, los índices se construyen mediante la estimación de las respectivas curvas de rendimiento y se pondera (de acuerdo al circulante) las diferencias entre la curva de rendimiento en Uruguay y la curva de rendimiento en Estados Unidos en determinados tiempos que corresponden al vencimiento de bonos soberanos uruguayos que cumplen ciertas restricciones. Los dos índices son publicados con frecuencia diaria por BEVSA y República Afap y se denominan *Índice de Riesgo Uruguay de BEVSA* (Irubevsa) y *Uruguay Bond Index* (Ubi) respectivamente.

Con el fin de analizar la evolución de los principales indicadores del mercado uruguayo se utilizan las series históricas de Embi, Irubevsa y Ubi de frecuencia diaria desde enero de 2010 hasta agosto de 2016. Entre los tres índices existen diferencias aunque su evolución en el largo plazo es similar. La diferencia máxima en todo el período fue de 62 puntos básicos entre los índices Irubevsa y Ubi que corresponde al 33 % del valor del mayor índice. Las diferencias entre los valores se deben principalmente a los diferentes métodos de estimación de las curvas de rendimiento y de los precios de activos que se utilizan. En el cuadro 4.1 se expresan las correlaciones en los datos diarios entre los distintos índices por año.

ÍNDICES	COMPLETO	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Ubi vs Irubevsa	0.9674	0.9722	0.9853	0.9906	0.9816	0.9403	0.9840	0.9929
Ubi vs Embi	0.9755	0.8430	0.9907	0.9942	0.9881	0.9843	0.9933	0.9963
Irubevsa vs Embi	0.9595	0.8355	0.9872	0.9930	0.9823	0.9259	0.9822	0.9922

Cuadro 4.1: Correlaciones entre los principales índices de riesgo país en Uruguay.

Marco Teórico

El objetivo de la presente sección es establecer el marco teórico general para introducir el riesgo de incumplimiento de pago en los modelos. El enfoque adoptado tiene como finalidad el estudio de lo que se denomina *diferencial de crédito* (credit spread). Este valor es una medida del exceso de la tasa de rendimiento que paga un activo sujeto a riesgo de incumplimiento de pago en comparación a un activo que presenta las mismas características en el caso libre de riesgo de incumplimiento de pago.

En el capítulo 2, se utiliza el activo financiero bono cupón cero como elemento base en el desarrollo del estudio de la deuda soberana. En este capítulo, se utiliza un activo financiero de similares propiedades salvo que se encuentra sujeto a riesgo de incumplimiento de pago.

Definición 14. *Un bono cupón cero en tiempo t sujeto a riesgo de crédito con vencimiento en tiempo T es un activo financiero que paga una unidad de dinero en tiempo T sin pagos intermedios en caso de no existir incumplimiento de pago y paga cero en caso de existir el incumplimiento de pago en algún momento de tiempo entre t y T .*

De la definición 14, se infiere que existe algún proceso adicional que se encarga de establecer el momento del incumplimiento de pago y que el precio de este activo se transforma en

$P(t, T) = 0$ inmediatamente después de suceder el evento de incumplimiento de pago.

Se asume que existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$, que presenta una filtración \mathbb{F} en la cual la medida de probabilidad \mathbf{Q} es la probabilidad de riesgo neutral. Este marco teórico es similar al que se establece en el capítulo 2 en el que la cuenta de ahorro (definición 10) se define al utilizar la tasa de interés spot instantánea r_t que cumple que es \mathbb{F} -progresivamente medible. También se asume la existencia de un tiempo de incumplimiento de pago τ , que es una variable aleatoria positiva que cumple $\mathbf{Q}(\tau = 0) = 0$ y que $\mathbf{Q}(\tau > t) > 0$ para cualquier $t \in \mathbb{R}_+$. La segunda condición se establece para que el tiempo de incumplimiento de pago no se encuentre acotado por ningún valor constante, en el caso contrario implicaría conocer que sucede en algún tiempo anterior a uno predeterminado.

Bajo las premisas del capítulo 2, se pretende extender el concepto de riesgo de incumplimiento de pago para todos los activos financieros. Se propone la existencia de ciertas variables aleatorias y ciertos procesos estocásticos en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$ que se encuentran relacionados al flujo de caja de los activos.

- Una variable aleatoria X , que representa el pago en tiempo T en caso de no existir incumplimiento de pago.
- Un proceso A_t , que refleja el flujo de dividendos que paga el activo.
- Una variable aleatoria \hat{X} , que representa el pago en tiempo T en caso de incumplimiento de pago en $\tau < T$.
- Un proceso Z_t , que establece el pago del activo en el momento de incumplimiento de pago si ocurre en $t < T$.

Definición 15. *Un activo financiero sujeto a riesgo de crédito en tiempo t de vencimiento en tiempo T es un vector (X, A, \hat{X}, Z, τ) en el cual las variables aleatorias X y \hat{X} cumplen que son \mathcal{F}_T -medibles; el proceso A_t es \mathbb{F} -predecible, de variación finita y cumple que $A_0 = 0$; el proceso Z_t es \mathbb{F} -predecible y τ es el tiempo aleatorio que define el momento de incumplimiento de pago.*

La interpretación de cada variable aleatoria y de cada proceso en la definición 15 se manifiesta de manera precisa en la definición 22 del flujo de pagos del activo financiero sujeto a riesgo de crédito, en la cual se desarrollan todos los posibles pagos asociados hasta el vencimiento. Vale destacar que los procesos en la definición 15 satisfacen condiciones adecuadas de integrabilidad necesarias para cumplir con las propiedades que se les exigen.

El tiempo de parada τ se torna de gran importancia en la modelación de los activos financieros sujetos a riesgo de incumplimiento de pago. La definición 16, la definición 17 y la definición 18 permiten construir procesos a partir de cierto tiempo aleatorio que son de utilidad en el desarrollo del capítulo.

Definición 16. *Dado un tiempo aleatorio τ , para cualquier $t \in \mathbb{R}_+$ se denomina proceso de mortandad $F : [0, T] \rightarrow [0, 1]$ a la función de distribución de τ respecto a la filtración de \mathbb{F}*

$$F_t = \mathbf{Q}(\tau \leq t | \mathcal{F}_t).$$

Definición 17. Dado un tiempo aleatorio τ , para cualquier $t \in \mathbb{R}_+$ se denomina proceso de supervivencia $G : [0, T] \rightarrow [0, 1]$ como

$$G_t = 1 - F_t = \mathbf{Q}(\tau > t | \mathcal{F}_t).$$

Definición 18. Dado un tiempo aleatorio τ , para cualquier $t \in \mathbb{R}_+$ se denomina proceso indicador del incumplimiento de pago H_t como

$$H_t = 1_{\{\tau \leq t\}}.$$

La proposición 5 permite afirmar que el proceso F_t (definición 16) es una submartingala con respecto a la filtración \mathbb{F} . Como corolario de este resultado se concluye que el proceso G_t es una supermartingala.

Proposición 5. El proceso F_t es una \mathbb{F} -submartingala, no negativa y acotada bajo la medida \mathbf{Q} .

Demostración. Para todo $0 \leq t \leq s$ se cumple que $\{\tau \leq t\} \subset \{\tau \leq s\}$ y

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(F_s | \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}(\tau \leq s | \mathcal{F}_s) | \mathcal{F}_t) = \mathbf{Q}(\tau \leq s | \mathcal{F}_t) \geq \mathbf{Q}(\tau \leq t | \mathcal{F}_t) = F_t.$$

□

A partir de la definición 18 del proceso H_t se obtiene una nueva filtración $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \geq 0}$, la cual corresponde a la filtración natural generada por dicho proceso; es decir $\mathcal{H}_t = \sigma(H_u : u \leq t) = \sigma(\{\tau \leq u\} : u \leq t)$. De acuerdo a las propiedades que se pretenden en la generación del modelo, las filtraciones \mathbb{F} y \mathbb{H} pueden coincidir o no. En los modelos que se utilizan en este capítulo, ambas filtraciones no coinciden a causa de que el tiempo aleatorio τ no es un \mathbb{F} -tiempo de parada, lo que motiva que el evento de incumplimiento de pago sea un suceso imprevisto para los participantes del mercado.

Se define la filtración agrandada $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}$ mediante $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$; en esta nueva filtración se cumple que el tiempo de incumplimiento de pago τ es un \mathbb{G} -tiempo de parada. La interpretación en el modelo en cuanto a la información del mercado es que la filtración \mathbb{F} representa la información que tienen los inversores y la filtración \mathbb{H} representa la información sobre el riesgo de incumplimiento de pago que no es conocida en \mathbb{F} .

La nueva filtración \mathbb{G} es posible expresarla mediante

$$\mathcal{G}_t = \{A \in \mathcal{F} : \exists B \in \mathcal{F}_t, A \cap \{\tau > t\} = B \cap \{\tau > t\}\};$$

lo que permite una forma de caracterizar a los eventos de la σ -álgebra \mathcal{G}_t en el conjunto $\{\tau > t\}$. Esta propiedad tiene como consecuencia que para cualquier variable aleatoria Y_t que es \mathcal{G}_t -medible existe una variable aleatoria \hat{Y}_t que es \mathcal{F}_t -medible tal que $Y_t = \hat{Y}_t$ en $\{\tau > t\}$. Esta situación es relevante en el cambio de filtración de \mathbb{G} a \mathbb{F} que es esencial en la valuación de activos financieros sujetos a riesgo de crédito.

Lema 1. Sea la variable aleatoria Y que es \mathcal{G} -medible y $t \in \mathbb{R}_+$. Se cumple que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{G}_t) = \mathbf{Q}(\tau > t | \mathcal{G}_t) \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{F}_t)}{\mathbf{Q}(\tau > t | \mathcal{F}_t)}. \quad (4.1)$$

En particular,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{G}_t \right) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(Y | \mathcal{G}_t \right) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{F}_t \right)}{\mathbf{Q} \left(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{F}_t \right)}. \quad (4.2)$$

Demostración. Para probar la ecuación (4.1), alcanza con verificar que se cumple

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y \mathbf{Q}(\{\tau > t\} | \mathcal{F}_t) | \mathcal{G}_t \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{F}_t \right) | \mathcal{G}_t \right);$$

lo que es equivalente a que se cumpla para cualquier $A \in \mathcal{G}_t$

$$\int_A \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y \mathbf{Q}(\{\tau > t\} | \mathcal{F}_t) d\mathbf{Q} = \int_A \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{F}_t \right) d\mathbf{Q}.$$

Se sabe que para cualquier $A \in \mathcal{G}_t$ existe $B \in \mathcal{F}_t$ tal que $A \cap \{\tau > t\} = B \cap \{\tau > t\}$, entonces se cumple

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y \mathbf{Q}(\{\tau > t\} | \mathcal{F}_t) d\mathbf{Q} &= \int_{A \cap \{\tau > t\}} Y \mathbf{Q}(\{\tau > t\} | \mathcal{F}_t) d\mathbf{Q} = \int_{B \cap \{\tau > t\}} Y \mathbf{Q}(\{\tau > t\} | \mathcal{F}_t) d\mathbf{Q} \\ &= \int_B \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y \mathbf{Q}(\{\tau > t\} | \mathcal{F}_t) d\mathbf{Q} = \int_B \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{F}_t) \mathbf{Q}(\{\tau > t\} | \mathcal{F}_t) d\mathbf{Q} \\ &= \int_B \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_t) d\mathbf{Q} = \int_{B \cap \{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{F}_t) d\mathbf{Q} \\ &= \int_{A \cap \{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{F}_t) d\mathbf{Q} = \int_A \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{F}_t) d\mathbf{Q}. \end{aligned}$$

La demostración de (4.2) es un corolario de (4.1). \square

Definición 19. Dado un tiempo aleatorio τ , se denomina el \mathbb{F} -proceso del riesgo con respecto a \mathbf{Q} , al proceso que cumple

$$\Gamma_t = -\ln G_t = -\ln(1 - F_t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Corolario 2. Sea una variable aleatoria Y que es \mathcal{G} -medible y $t \leq s$. Se cumplen que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} Y | \mathcal{G}_t \right) = \mathbf{Q}(\tau > t | \mathcal{G}_t) \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} e^{\Gamma_t} Y | \mathcal{F}_t \right); \quad (4.3)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} Y | \mathcal{G}_t \right) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} e^{\Gamma_t} Y | \mathcal{F}_t \right); \quad (4.4)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq s\}} Y | \mathcal{G}_t \right) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq s\}} e^{\Gamma_t} Y | \mathcal{F}_t \right). \quad (4.5)$$

Además, si Y cumple que es \mathcal{F}_s -medible

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} Y | \mathcal{G}_t \right) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(e^{\Gamma_t - \Gamma_s} Y | \mathcal{F}_t \right). \quad (4.6)$$

Demostración. Al considerar la ecuación (4.1), para demostrar que se cumple la ecuación (4.3) es suficiente observar la igualdad $\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} = \mathbb{1}_{\{\tau > s\}}$. La ecuación (4.4) y la ecuación (4.5) son consecuencias de la ecuación (4.3). Para demostrar la ecuación (4.6), se observa que mediante la ecuación (4.4) se cumple

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} Y | \mathcal{G}_t \right) &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} e^{\Gamma_t} Y | \mathcal{F}_t \right) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbf{Q}(\tau > s | \mathcal{F}_s) e^{\Gamma_t} Y | \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left((1 - F_s) e^{\Gamma_t} Y | \mathcal{F}_t \right) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(e^{\Gamma_t - \Gamma_s} Y | \mathcal{F}_t \right). \end{aligned}$$

\square

En las aplicaciones de este capítulo, el proceso del riesgo Γ_t del tiempo de incumplimiento de pago τ es un proceso absolutamente continuo con respecto a la medida de Lebesgue.

Definición 20. *Dado un tiempo aleatorio τ , se denomina proceso de intensidad del riesgo de incumplimiento de pago al proceso γ_t que es \mathbb{F} -progresivamente medible y cumple*

$$\Gamma_t = \int_0^t \gamma_u \, du, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Al aplicar de manera directa el corolario 2, se establece la interpretación del proceso de intensidad del riesgo de incumplimiento de pago dada la información que tienen los agentes participantes del mercado en el corolario 3.

Corolario 3. *Si el proceso Γ_t que es el \mathbb{F} -proceso del riesgo de un tiempo aleatorio τ que cumple que es absolutamente continuo, para cualquier $t \leq s$ se obtiene*

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\tau > s | \mathcal{G}_t) &= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(e^{-\int_t^s \gamma_u \, du} | \mathcal{F}_t \right); \\ \mathbf{Q}(t < \tau \leq s | \mathcal{G}_t) &= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(1 - e^{-\int_t^s \gamma_u \, du} | \mathcal{F}_t \right). \end{aligned}$$

Tanto el proceso del riesgo (definición 19) como el proceso de intensidad del riesgo de incumplimiento de pago (definición 20) presentan un rol clave en el enfoque de martingala que tienen los modelos de riesgo de crédito. Para obtener algunas de las propiedades que cumple el proceso Γ_t se define un nuevo proceso.

Definición 21. *Dado el proceso H_t , el proceso L_t es dado por*

$$L_t = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} e^{\Gamma(t)} = (1 - H_t) e^{\Gamma(t)} = \frac{1 - H_t}{1 - F_t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Lema 2. *El proceso L_t es una \mathbb{G} -martingala.*

Demostración. Es necesario probar que para cualquier $t \leq s$ se cumple

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbf{1}_{\{\tau > s\}} e^{\Gamma(s)} | \mathcal{G}_t \right) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} e^{\Gamma(t)}.$$

En vista de la ecuación (4.4), se puede observar que

$$\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} e^{\Gamma(t)} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbf{1}_{\{\tau > s\}} e^{\Gamma(s)} | \mathcal{F}_t \right) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} e^{\Gamma(t)}.$$

Para completar la demostración se suficiente obtener

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbf{1}_{\{\tau > s\}} e^{\Gamma(s)} | \mathcal{F}_t \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(e^{\Gamma(s)} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbf{1}_{\{\tau > s\}} | \mathcal{F}_s \right) | \mathcal{F}_t \right) = 1.$$

□

Proposición 6. *Si el proceso Γ_t es el \mathbb{F} -proceso del riesgo de un tiempo aleatorio τ que cumple que es continuo y creciente. El proceso \hat{M}_t , que se define mediante $\hat{M}_t := H_t - \Gamma_{t \wedge \tau}$, es una \mathbb{G} -martingala. Es decir, cumple que*

$$\hat{M}_t = - \int_{(0,t]} e^{-\Gamma_u} dL_u.$$

Demostración. Como el proceso Γ_t es continuo, se tiene que $g_t = 1 - H_t$ y $h_t = e^{\Gamma_t}$ son dos procesos adaptados, continuos a la derecha con límite a la izquierda se aplica la integración por partes para procesos de variación finita y se obtiene

$$\begin{aligned} L_t &= (1 - H_t) e^{\Gamma_t} = 1 + \int_{(0,t]} e^{\Gamma_u} (1 - H_u) d\Gamma_u - \int_{(0,t]} e^{\Gamma_u} dH_u \\ &= 1 + \int_{(0,t]} e^{\Gamma_u} ((1 - H_u) d\Gamma_u - dH_u). \end{aligned}$$

Por lo cual se cumple

$$\hat{M}_t = H_t - \Gamma_{t \wedge \tau} = \int_{(0,t]} (dH_u - (1 - H_u) d\Gamma_u) = \int_{(0,t]} e^{-\Gamma_u} dL_u;$$

que por el lema 2 se cumple que \hat{M}_t es una \mathbb{G} -martingala. \square

Todos los resultados permiten generar la valuación de activos financieros en el marco de riesgo de incumplimiento de pago mediante la existencia de un tiempo aleatorio τ . Como la valuación es de riesgo neutral, se obtiene que el proceso de precios descontados de los activos financieros que no pagan dividendos al utilizar la cuenta de ahorro cumple que es una \mathbb{G} -martingala respecto de la medida de probabilidad \mathbf{Q} . En la deducción de los precios, se comienza con la valuación de los activos financieros sujetos a riesgo de crédito de manera general con el objetivo de adicionar hipótesis para arribar a la valuación del bono cupón cero sujeto a riesgo de crédito que es el activo base en el análisis de la deuda soberana.

Definición 22. *El proceso D_t que se denomina flujo de pagos de un activo financiero que se establece a través de la definición 15 es dado por*

$$D_t = X^d(T) \mathbf{1}_{\{t \geq T\}} + \int_{(0,T]} (1 - H_u) dA_u + \int_{(0,T]} Z_u dH_u;$$

donde $X^d(T) = X \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} + \hat{X} \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}$.

Definición 23. *El proceso S_t^* que se denomina precios descontados de un activo financiero que se establece a través de la definición 15 es dado por*

$$S_t^* = B_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,T]} B_u^{-1} dD_u | \mathcal{G}_t \right).$$

Al aplicar la definición 22 en la definición 23, el proceso de precios descontados S_t^* es dado

$$S_t^* = B_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,T]} B_u^{-1} (1 - H_u) dA_u + \int_{(t,T]} B_u^{-1} Z_u dH_u + B_T^{-1} X^d(T) | \mathcal{G}_t \right). \quad (4.7)$$

El alcance de la ecuación (4.7) es general en los activos financieros sujetos a riesgo de incumplimiento de pago. Como el objetivo del capítulo es el análisis de la deuda soberana en Uruguay, se asumen ciertas hipótesis adicionales con el fin de aproximar la valuación del bono cupón cero sujeto a riesgo de incumplimiento de pago (definición 14). En sí, existen diversas cláusulas en los contratos de los activos financieros que pueden ser consideradas en la modelación. En la definición 15, los valores más relevantes son la cantidad de activo que

se recupera en caso de incumplimiento de pago y en que momento del tiempo se concreta su recupero. Luego de la última crisis económica en Uruguay, en abril de 2003 se realizó un canje voluntario de una fracción importante de la deuda soberana, en la cual una cantidad de activos financieros emitidos con anterioridad en Uruguay podían ser intercambiados por nuevas emisiones de activos con vencimiento a largo plazo, ver el trabajo [47]. Esta decisión es posible interpretarla como el pago parcial de la deuda en el momento de incumplimiento de pago mediante la emisión de nuevos bonos soberanos y que no existe pago alguno en el vencimiento de los bonos originales. Por lo cual, la primera aproximación que se considera es que la variable aleatoria \hat{X} de la definición 15 es 0 y que el reintegro de parte de la deuda es en el momento del incumplimiento de pago.

Teorema 2. *El proceso S_t^* de precios descontados de un activo financiero (X, A, Z, τ) previo al momento de incumplimiento de pago, cumple que*

$$S_t^* = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} G_t^{-1} B_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t, T]} B_u^{-1} (G_u dA_u - Z_u dG_u) + G_T B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t \right).$$

En el caso que el proceso de supervivencia G_t sea continuo, se cumple que el proceso del riesgo Γ_t también es continuo, por lo cual

$$S_t^* = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} B_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t, T]} B_u^{-1} e^{\Gamma_t - \Gamma_u} (dA_u + Z_u d\Gamma_u) + B_T^{-1} e^{\Gamma_t - \Gamma_T} X | \mathcal{F}_t \right).$$

Antes de realizar la demostración del teorema 2 es importante especificar tres proposiciones que permiten facilitar su demostración.

Proposición 7. *Sea una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada y sea $t < s < \infty$. Entonces se cumple que*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq s\}} h(\tau) | G_t \right) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} e^{\Gamma_t} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t, s]} h(u) dF_u | \mathcal{F}_t \right). \quad (4.8)$$

Demostración. En vista de la ecuación (4.5), para establecer la ecuación (4.8) es suficiente observar que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq s\}} h(\tau) | \mathcal{F}_t \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t, s]} h(u) dF_u | \mathcal{F}_t \right).$$

Al considerar funciones constantes a trozos de la forma $h(u) = \sum_{i=0}^n h_i \mathbb{1}_{\{t_i < u \leq t_{i+1}\}}$, donde $t_0 = t < \dots < t_{n+1} = s$. Entonces se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq s\}} h(\tau) | \mathcal{F}_t \right) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(h_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(\tau) | \mathcal{F}_{t_{i+1}} \right) | \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\sum_{i=0}^n h_i (F_{t_{i+1}} - F_{t_i}) | \mathcal{F}_t \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\sum_{i=0}^n \int_{(t_i, t_{i+1}]} h(u) dF_u | \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t, s]} h(u) dF_u | \mathcal{G}_t \right). \end{aligned}$$

Al aproximar h mediante funciones constantes a trozos se completa la demostración. \square

Proposición 8. *Sea un proceso Z_t que es \mathbb{F} -predecible y acotado y $t < s < \infty$. Entonces se cumple que*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbf{1}_{\{t < \tau \leq s\}} Z_{\tau} | \mathcal{G}_t \right) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} e^{\Gamma t} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,s]} Z_u dF_u | \mathcal{F}_t \right). \quad (4.9)$$

Demostración. Para demostrar la ecuación (4.9), se asume que el proceso Z_t es \mathbb{F} -predecible y constante a trozos; es decir $Z_u = \sum_{i=0}^n Z_{t_i} \mathbf{1}_{\{t_i < u \leq t_{i+1}\}}$, donde $t < u \leq s$ y $t_0 = t < \dots < t_{n+1} = s$ siendo Z_{t_i} una variable aleatoria \mathcal{F}_{t_i} -medible para $i = 0, \dots, n$. Entonces se cumple

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbf{1}_{\{t < \tau \leq s\}} Z_{\tau} | \mathcal{F}_t \right) &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\sum_{i=0}^n \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbf{1}_{\{t_i < \tau \leq t_{i+1}\}} Z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i+1}} \right) | \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\sum_{i=0}^n \mathbf{1}_{\{t_i < \tau \leq t_{i+1}\}} Z_{t_i} | \mathcal{F}_t \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\sum_{i=0}^n Z_{t_i} (F_{t_{i+1}} - F_{t_i}) | \mathcal{F}_t \right); \end{aligned}$$

por lo cual se obtiene la conclusión para los procesos constantes a trozos. Si se repite el razonamiento de aproximar el proceso Z por una sucesión de procesos constantes a trozos se obtiene la conclusión en el caso general. Vale destacar que es necesario que los procesos Z_t y F_t sean acotados para la convergencia de la sucesión de esperanzas condicionales. \square

Proposición 9. *Sea el proceso A_t que es \mathbb{F} -predecible, acotado y de variación finita. Se cumple que para cada $t \leq s$*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,s]} (1 - H_u) dA_u | \mathcal{G}_t \right) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} e^{\Gamma t} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,s]} (1 - F_u) dA_u | \mathcal{F}_t \right); \quad (4.10)$$

o equivalentemente

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,s]} (1 - H_u) dA_u | \mathcal{G}_t \right) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,s]} e^{\Gamma t - \Gamma u} dA_u | \mathcal{F}_t \right).$$

Demostración. Sea el proceso \hat{A}_t que se define mediante $\hat{A}_u := A_u - A_t$ para $u \in [t, s]$. Este proceso es \mathbb{F} -predecible, acotado, de variación finita y sea el proceso \hat{A}_t^- (límite a la izquierda). Por lo cual,

$$\begin{aligned} J_t &:= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,s]} (1 - H_u) dA_u | \mathcal{G}_t \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,s]} \mathbf{1}_{\{\tau > u\}} d\hat{A}_u | \mathcal{G}_t \right) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbf{1}_{\{t < \tau \leq s\}} \hat{A}_{\tau^-} + \mathbf{1}_{\{\tau > s\}} \hat{A}_s | \mathcal{G}_t \right) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} e^{\Gamma t} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,s]} \hat{A}_{u^-} dF_u + \hat{A}_s (1 - F_s) | \mathcal{F}_t \right); \end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce desde la ecuación (4.6) y la ecuación (4.9). Al utilizar la definición 17, se obtiene

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,s]} \hat{A}_{u^-} dF_u + \hat{A}_s (1 - F_s) | \mathcal{F}_t \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(- \int_{(t,s]} \hat{A}_{u^-} dG_u + \hat{A}_s G_s | \mathcal{F}_t \right).$$

Dado que el proceso \hat{A}_t es de variación finita, la regla del producto de Itô establece

$$\hat{A}_s G_s = \hat{A}_t G_t + \int_{(t,s]} \hat{A}_{u^-} dG_u + \int_{(t,s]} G_u d\hat{A}_u.$$

Como el proceso cumple $\hat{A}_t = 0$, se obtiene

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,s]} \hat{A}_u - dF_u + \hat{A}_s(1 - F_s) | \mathcal{F}_t \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,s]} (1 - F_u) dA_u | \mathcal{F}_t \right);$$

lo que prueba la ecuación (4.10). \square

Al utilizar la proposición 7, la proposición 8 y la proposición 9 es posible establecer la demostración del teorema 2.

Demostración. El proceso S_t^* se divide en la suma de tres procesos $S_t^* = I_t(A) + J_t(Z) + K_t$ que son dados mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} I_t(A) &= B_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,T]} B_u^{-1} (1 - H_u) dA_u | \mathcal{G}_t \right); \\ J_t(Z) &= B_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbf{1}_{\{t < \tau \leq T\}} B_\tau^{-1} Z_\tau | \mathcal{G}_t \right); \\ K_t &= B_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(B_T^{-1} X \mathbf{1}_{\{T < \tau\}} | \mathcal{G}_t \right). \end{aligned}$$

Al aplicar la proposición 9 al proceso de variación acotada $\int_{(0,t]} B_u^{-1} dA_u$, se obtiene

$$I_t(A) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} G_t^{-1} B_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,T]} B_u^{-1} G_u dA_u | \mathcal{F}_t \right);$$

o equivalentemente

$$I_t(A) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} B_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,T]} B_u^{-1} e^{\Gamma_t - \Gamma_u} dA_u | \mathcal{F}_t \right).$$

Al aplicar la ecuación (4.9) de la proposición 8 se cumple

$$J_t(Z) = -\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} G_t^{-1} B_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,T]} B_u^{-1} Z_u dG_u | \mathcal{F}_t \right);$$

y si el proceso de sobrevivencia G_t es continuo se cumple

$$J_t(Z) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} B_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_t^T B_u^{-1} e^{\Gamma_t - \Gamma_u} Z_u d\Gamma_u | \mathcal{F}_t \right).$$

Para culminar, desde la ecuación (4.4) se cumple

$$K_t = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} G_t^{-1} B_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t \right).$$

Como las variables X y B_T son \mathcal{F}_t -medibles, al utilizar la ecuación (4.6) se obtiene

$$K_t = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} G_t^{-1} B_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(G_T B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t \right) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} B_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(B_T^{-1} e^{\Gamma_t - \Gamma_T} X | \mathcal{F}_t \right).$$

\square

Corolario 4. *Si el tiempo aleatorio τ admite un proceso γ_t de intensidad del riesgo de incumplimiento de pago, el proceso S_t^* de precios descontados de un activo financiero sujeto a riesgo de crédito cumple*

$$S_t^* = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t,T]} e^{-\int_t^u (r_v + \gamma_v) dv} (dA_u + \gamma_u Z_u du) | \mathcal{F}_t \right) + \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(e^{-\int_t^T (r_v + \gamma_v) dv} X | \mathcal{F}_t \right). \quad (4.11)$$

Si bien la valuación de precios mediante la ecuación (4.11) admite la existencia de pagos intermedios en el activo financiero, es importante obtener la valuación de los bonos cupón cero sujetos a riesgo de crédito a causa de ser el elemento base en la modelación. De esta manera, la ecuación (4.11) en el caso del bono cupón cero sujeto a riesgo de crédito (definición 14) en tiempo t con vencimiento en tiempo T es

$$P^*(t, T) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(e^{-\int_t^T (r_v + \gamma_v) dv} | \mathcal{F}_t \right) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(e^{-\int_t^T \hat{r}_v dv} | \mathcal{F}_t \right). \quad (4.12)$$

Al analizar la ecuación (4.12), se obtiene que la valuación de bonos soberanos sujetos a riesgo de incumplimiento de pago se encuentra relacionada a la valuación de bonos soberanos en los modelos que no consideran de manera explícita este riesgo. En este caso, el proceso de descuento en el pago futuro del bono se realiza mediante una nueva tasa de interés, la que tiene el objetivo de ajustar la valuación al riesgo de incumplimiento de pago, es decir la nueva tasa de interés de descuento se expresa $\hat{r}_t = r_t + \gamma_t$.

Tiempos Aleatorios y Procesos de Poisson Condicionales

En la sección 4.2, se desarrolla la valuación de activos financieros sujetos a riesgo de incumplimiento de pago mediante la existencia de un tiempo aleatorio τ que se establece de manera exógena. Sin embargo, en el enfoque de los modelos que se proponen utilizar en el capítulo no se establece el tiempo aleatorio sino que se construye a partir de un proceso estocástico asociado.

Para la construcción del tiempo aleatorio τ asociado a un proceso Φ_t en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G}, \mathbf{Q})$, se asume otro espacio de probabilidad filtrado $(\tilde{\Omega}, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \tilde{\mathbf{Q}})$ en el cual existe un proceso Φ_t tal que sea \mathcal{F} -adaptado, continuo y creciente que cumple que $\Phi_0 = 0$ y $\Phi_\infty = \infty$. A su vez, se asume la existencia de una variable aleatoria ϵ uniforme en el intervalo $[0, 1]$ en otro espacio de probabilidad $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbf{Q}})$. Se considera el espacio producto $(\Omega = \tilde{\Omega} \times \hat{\Omega}, \mathcal{G} = \mathcal{F}_\infty \otimes \hat{\mathcal{F}}, \mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}} \otimes \hat{\mathbf{Q}})$ en el cual se define el tiempo de espera τ mediante

$$\tau = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : e^{-\Phi_t} \leq \epsilon\} = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : \Phi_t \geq -\ln \epsilon\}; \quad (4.13)$$

y sea \mathbb{H} la filtración generada por τ .

En la propiedad 1 se establece que el proceso del riesgo (definición 19) asociado al tiempo de espera dado mediante la ecuación 4.13 es el mismo proceso Φ_t .

Propiedad 1. *Se considera un proceso Φ_t . El \mathbb{F} -proceso del riesgo del tiempo de espera τ asociado al proceso Φ_t es sí mismo; es decir el proceso Φ_t .*

Demostración. Sea el proceso F_t (definición 16) que genera el tiempo aleatorio τ que se establece mediante la ecuación (4.13). Se cumple que el conjunto $\{\tau > t\}$ coincide con $\{e^{-\Phi_t} > \epsilon\}$ por lo cual se cumple que $\mathbf{Q}(\tau > t | \mathcal{F}_\infty) = e^{-\Phi_t}$.

Entonces,

$$1 - F_t = \mathbf{Q}(\tau > t | \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\mathbf{Q}(\tau > t | \mathcal{F}_\infty) | \mathcal{F}_t \right) = e^{-\Phi_t};$$

y se obtiene que el proceso F_t es \mathcal{F} -adaptado creciente y continuo. A su vez,

$$F_t = 1 - e^{-\Phi_t} = \mathbf{Q}(\tau \leq t | \mathcal{F}_\infty) = \mathbf{Q}(\tau \leq t | \mathcal{F}_t);$$

por lo cual se concluye que Φ_t coincide con el proceso \mathbb{F} -proceso del riesgo de τ bajo \mathbf{Q} . \square

La propiedad 1 hace énfasis en un único tiempo aleatorio que define el momento de incumplimiento de pago. Se plantea proponer modelos que extiendan esta construcción a una sucesión de tiempos aleatorios asociados a un proceso al utilizar premisas similares que en la construcción anterior del tiempo aleatorio. Los modelos se propone realizar mediante los procesos que se denominan *procesos de Poisson condicionales* o *procesos de Poisson doblemente estocásticos*. Para su definición es necesario introducir algunas definiciones previas.

Definición 24. *Un proceso N_t en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbf{Q})$, es un Proceso de Poisson de parámetro λ con respecto a \mathbb{G} , si para cualquier tiempo $0 \leq s < t$ se cumplen las condiciones*

- $N_0 = 0$;
- el incremento $N_t - N_s$ es independiente de la σ -álgebra \mathcal{G}_s ;
- el incremento $N_t - N_s$ tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda(t - s)$.

Se denota a $\tau_0 = 0$ y τ_1, τ_2, \dots los \mathbb{G} -tiempos de parada que se establecen mediante la ecuación $\tau_{k+1} = \inf\{t > \tau_k : N_t \neq N_{\tau_k}\}$ que son los tiempos aleatorios de los sucesivos saltos de N_t . Se define la sucesión de variables aleatorias positivas ϵ_k mediante $\epsilon_k = \tau_k - \tau_{k-1}$, $\forall k$. Estas variables aleatorias cumplen que son independientes e igualmente distribuidas de distribución exponencial de parámetro λ .

Esta propiedad establece la base para la existencia y la construcción de un proceso estocástico N_t en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{Q})$ que cumple la definición 24. Se realiza mediante una sucesión de variables aleatorias mutuamente independientes de distribución exponencial de parámetro λ al definir N_t como $N_t = 0$ si $\{t < \epsilon_1\}$ y para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $N_t = k$ si y solo si $\sum_{i=1}^k \epsilon_i \leq t < \sum_{i=1}^{k+1} \epsilon_i$. La demostración que el proceso que cumple dichas propiedades es un proceso de Poisson de parámetro λ se encuentra en [6].

Si se considera la función lineal $\Phi(t) = \lambda t$, el tiempo de parada dado por el primer salto del Proceso de Poisson de parámetro λ cumple que tiene como proceso del riesgo a $\Phi(t)$. Es más, es posible probar que la función $\Phi(t) = \lambda t$ es el compensador del proceso N_t , es decir el proceso $\hat{N}_t := N_t - \lambda t$ cumple que es \mathbb{G} -martingala.

La construcción del proceso de Poisson de parámetro λ es posible generalizarla al caso en la que existe una función $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ que cumple que es creciente, continua a la derecha

y toma los valores $\Phi(0) = 0$ y $\Phi(\infty) = \infty$. En este caso se incluye la situación en la que la función $\Phi(t)$ admita una función $\phi(t)$ localmente integrable y no negativa que cumple que $\Phi(t) = \int_0^t \phi(u)du$.

Definición 25. *Un proceso N_t en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbf{Q})$ es un proceso de Poisson de intensidad dada mediante la función $\Phi(t)$ con respecto a \mathbb{G} si para cualquier $0 \leq s < t$ se cumplen las condiciones*

- $N_0 = 0$;
- el incremento $N_t - N_s$ es independiente de la σ -álgebra \mathcal{G}_s ;
- el incremento $N_t - N_s$ tiene distribución de Poisson de parámetro $\Phi(t) - \Phi(s)$.

La existencia y construcción de este proceso se realiza mediante cambios de tiempo, al considerar un proceso de Poisson \tilde{N} de intensidad $\lambda = 1$ con respecto a una filtración $\tilde{\mathcal{F}}$ y se establece el proceso $N_t := \hat{N}_{\Phi(t)} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$. En este proceso, se obtiene que el tiempo aleatorio dado por el primer tiempo de salto tiene como proceso del riesgo a la función $\Phi(t)$ y a su vez cumple que la función $\Phi(t)$ es el compensador del proceso estocástico N_t .

Con el objetivo de finalizar la sección, se presenta la definición del proceso estocástico denominado proceso de Poisson condicional. En él, se cumple que el proceso del riesgo es un proceso estocástico en sí. Se asume un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G}, \mathbf{Q})$ y una cierta subfiltración \mathbb{F} de \mathbb{G} en el que se considera un proceso estocástico Φ_t que es \mathbb{F} -adaptado, creciente, continuo a la derecha y que cumple $\Phi_0 = 0$ y $\Phi_\infty = \infty$. En este caso se incluye la situación en la que el proceso Φ_t se establece mediante un proceso ϕ_t que es \mathbb{F} -progresivamente medible de trayectorias localmente integrables y cumple que $\Phi_t = \int_0^t \phi_u du$.

Definición 26. *Un proceso N_t en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbf{Q})$ es un proceso de Poisson condicional asociado al proceso de riesgo Φ_t con respecto a \mathbb{G} , si $N_0 = 0$ y para cualquier $0 \leq s < t$ se cumple*

$$\mathbf{Q}(N_t - N_s = k | \mathcal{G}_s \vee \mathcal{F}_\infty) = \frac{(\Phi_t - \Phi_s)^k}{k!} e^{-(\Phi_t - \Phi_s)}$$

donde $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_u : u \in \mathbb{R}_+)$.

Este proceso se interpreta como un procedimiento de asignación de azar en dos pasos debido a que el tiempo donde se mide el proceso de Poisson es por si mismo otro proceso estocástico.

La existencia y la construcción de un proceso que presenta estas características se basa en un cambio de tiempo asociado al proceso estocástico creciente Φ_t . Es evidente, que el número de saltos en un proceso de Poisson condicional es no acotado con probabilidad 1. Sin embargo, en los modelos que se establecen en la sección 4.4 para el análisis de las curvas de rendimiento con riesgo de incumplimiento de pago, se cumple que el tiempo aleatorio es dado por el primer salto del proceso de Poisson condicional que tiene como proceso de riesgo al proceso Φ_t . Como los procesos de Poisson condicional son esencialmente procesos de Poisson, varios de sus resultados presentan la contrapartida en los procesos de Poisson condicional, ver [6].

Modelos de Riesgo de Incumplimiento de Pago

Para la construcción de los modelos de valuación de riesgo de incumplimiento de pago en Uruguay se utiliza el mismo enfoque de variables no observables (factores) que en el capítulo 2 y el capítulo 3. Se considera un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{Q})$ y un proceso estocástico $y_t \in \mathbb{R}^k$ que es Markov bajo la medida de probabilidad \mathbf{Q} . Se denota a \mathbb{F}^y la filtración natural generada por el proceso y_t . Se considera la función $\gamma : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_+$ y aquel proceso estocástico γ_t que se obtiene mediante $\gamma_t = \gamma(y_t)$. Por medio de este, es posible establecer el proceso de Poisson condicional (definición 26) que presenta al proceso γ_t como su proceso de intensidad de riesgo de incumplimiento de pago. Este proceso estocástico determinado se denomina *proceso de Cox* asociado al proceso y_t y al proceso de intensidad γ_t . Por lo tanto se concluye que el tiempo de incumplimiento de pago τ no aparece de manera explícita en los modelos aunque se define mediante el tiempo del primer salto del proceso de Cox.

En el corolario 5, se establece los resultados del corolario 4 mediante la utilización de un proceso de Cox en la definición del tiempo aleatorio de incumplimiento de pago. Este enfoque impone un nuevo proceso que se denomina *cuenta de ahorro ajustada al riesgo de crédito*, que tiene características similares a la cuenta de ahorro B_t (definición 10) y se denota mediante \tilde{B}_t . El nuevo proceso se representa

$$\tilde{B}_t = \exp \left(\int_0^t (r_v + \gamma_v) dv \right).$$

Corolario 5. *La valuación de los activos financieros en la ecuación (4.11) y en la ecuación (4.12) mediante este enfoque se representan*

$$S_t^* = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \tilde{B}_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t, T]} \tilde{B}_v^{-1} (dA_v + Z_v \gamma(y_v) dv + \tilde{B}_T^{-1} X | \mathcal{F}_t) \right);$$

$$P^*(t, T) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \tilde{B}_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\tilde{B}_T^{-1} | \mathcal{F}_t \right) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(e^{-\int_t^T \hat{r}_v dv} | \mathcal{F}_t \right).$$

donde $\hat{r}_t = r_t + \gamma_t$ se denota a la tasa de interés spot instantánea ajustada a riesgo de crédito.

De acuerdo al marco teórico que se establece, los modelos se basan en la existencia de dos procesos estocásticos, uno para la dinámica de la tasa de interés spot instantánea y el otro para la dinámica del riesgo de incumplimiento de pago. El primero se interpreta como la tasa de interés del mercado libre de riesgo de incumplimiento de pago y el segundo se interpreta como la sobretasa de interés que se genera al analizar el mercado que presenta riesgo de incumplimiento de pago.

En esta sección, se plantean dos modelos que difieren entre sí en la relación que cumplen los procesos estocásticos r_t y γ_t . Se considera el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{Q})$ y el vector de proceso $y_t = (y_t^1, y_t^2, \dots, y_t^N)$ que cumple la ecuación (3.9) y la ecuación (3.10). Este vector se divide en dos componentes $y_t = \left(y_t^{(r)}, y_t^{(\gamma)} \right)$, los que se representan mediante $y_t^{(r)} = (y_t^1, \dots, y_t^M)$ y $y_t^{(\gamma)} = (y_t^{M+1}, \dots, y_t^N)$. En las aplicaciones se seleccionan distintos valores de $M < N$.

En el Primer Modelo, se consideran los dos procesos estocásticos r_t y γ_t de manera independiente siendo cada uno un proceso afín de algunas de las componentes del vector y_t . Es decir,

$$\begin{aligned} r_t &= r(y_t^{(r)}) = y_t^1 + \dots + y_t^M; \\ \gamma_t &= \gamma(y_t^{(\gamma)}) = y_t^{M+1} + \dots + y_t^N. \end{aligned}$$

En este modelo, la derivación del precio del bono cupón cero se ajusta a la que se establece en la sección 2.3, por lo tanto se cumple la ecuación (3.11), en la que cada componente del vector del proceso agrega a la fórmula del precio del bono cupón cero un término como el de la ecuación (2.22).

No obstante, existe evidencia empírica de relación entre las tasas de rendimiento libre de riesgo de incumplimiento de pago y el diferencial de tasas de rendimiento. Por lo tanto, se propone el Segundo Modelo que considera esta situación. La dinámica de la tasa de interés libre de riesgo de incumplimiento de pago r_t presenta idéntica modelación que en el Primer Modelo. La diferencia radica en la dinámica del diferencial de tasas de rendimiento que se modela mediante el proceso

$$\gamma_t = \psi r_t + y_t^{M+1} + \dots + y_t^N.$$

En este modelo se agrega un parámetro adicional ψ que es el responsable de capturar la relación que existe entre los dos procesos.

Si se utilizan sólo los datos del mercado en dólares de la sección 3.6, no es posible estimar todos los parámetros en ambos modelos. Esto se debe a que no es posible extraer información de las tasas de rendimiento libre de riesgo de incumplimiento de pago. Por esta razón, es necesario agregar a la base de datos de la deuda soberana uruguaya en dólares, información de las tasas de rendimiento en Estados Unidos (se considera que no presenta riesgo de incumplimiento de pago). Vale destacar que en ambos modelos no existen restricciones sobre si los procesos deben ser positivos, sin embargo en la construcción del proceso de intensidad en la sección 4.2 se requiere que el proceso γ_t lo cumpla. Por lo cual, en cada aplicación se examina que se cumpla esta propiedad, es decir que $\gamma_t > 0 \quad t > 0$.

Datos

La valuación de las tasas de rendimiento de los activos financieros sujetos a riesgo de incumplimiento de pago mediante el enfoque de la sección 4.2 es posible aplicarla únicamente en el mercado en dólares en la deuda soberana uruguaya. El motivo es que los dos restantes mercados que se analizan en el capítulo 3 pertenecen a la categoría de moneda nacional y no existen los datos suficientes para su estimación.

Los datos que se utilizan en las estimaciones de los parámetros se extraen de diferentes fuentes. En el caso de la deuda soberana uruguaya en dólares la base de datos es la que se encuentra en el cuadro 3.4 para el período de tiempo entre el 02 de enero de 2014 y el 31 de agosto de 2016. En el caso de la deuda soberana en Estados Unidos, la base de datos se encuentra integrada por las tasas de rendimiento denominadas *Constant Maturity Treasury*

que publica la Reserva Federal. Estos valores se generan mediante un índice que se basa en la tasa de rendimiento promedio de varios activos financieros de características similares emitidos por Estados Unidos.

Para estudiar, en primera instancia, si existe relación en la evolución temporal de las tasas de rendimiento en Estados Unidos y en Uruguay se realiza un estudio de correlaciones. Los datos que se consideran para la deuda soberana en Uruguay son las tasas de rendimiento en dólares que publica BEVSA. Las correlaciones se estiman en los diez vencimientos que coinciden ambas bases de datos. Los resultados se encuentran en la figura 4.1. La principal conclusión del análisis es que en su diagonal se obtienen valores positivos y estadísticamente significativos salvo en la tasa de rendimiento a 20 años.

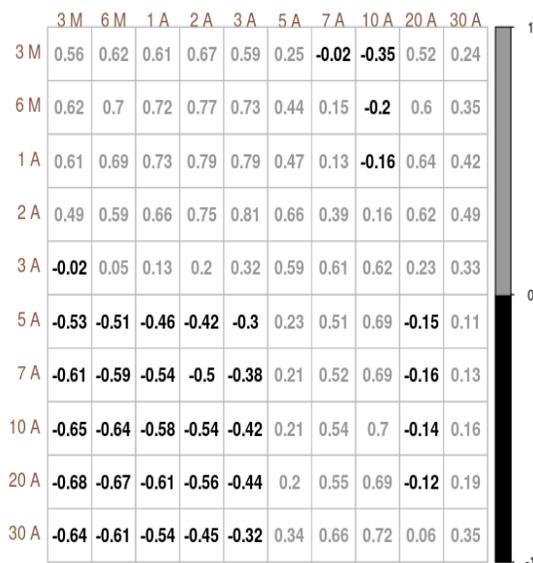


Figura 4.1: Correlación entre las tasas de rendimiento establecidas en Constant Maturity Treasury (en horizontal) y las tasas de rendimiento publicadas en la Curva Uruguay en Dólares (en vertical).

Resultados

En los dos modelos de la sección 4.4, las tasas de rendimiento en los bonos soberanos en dólares en Uruguay se explican en parte por las tasas de rendimiento libres de riesgo de incumplimiento de pago (que se representa a través de la deuda soberana en Estados Unidos) y en parte por el diferencial de tasas de rendimiento entre ambos mercados. La estimación de los parámetros en cada uno de los modelos se realiza en dos etapas. En la primera etapa, se estiman los parámetros de la deuda soberana en Estados Unidos al considerar únicamente la información de su mercado. En la segunda etapa, se estiman los parámetros de la diferencia entre las tasas de rendimiento al considerar los precios de bonos emitidos en Uruguay y los parámetros obtenidos en la primera etapa.

Las aplicaciones que se realizan, abarcan los casos de los modelos en un factor y en dos factores en cada uno de los mercados en los dos modelos propuestos en la sección 4.4. Los resultados se encuentran divididos en dos: en el cuadro 4.2 se exhiben los casos que analizan las tasas de rendimiento libres de riesgo de incumplimiento de pago mediante un factor y en el cuadro 4.3 se exhiben los casos que analizan las tasas de rendimiento libres de riesgo de incumplimiento de pago mediante dos factores. En cada uno se realizan cuatro estimaciones de parámetros: las primeras dos corresponden a utilizar el Primer Modelo y las otras dos corresponden a utilizar el Segundo Modelo. Es decir, en total se realizan ocho estimaciones de parámetros distintos modelos.

	ESTADOS UNIDOS	Primer Modelo		Segundo Modelo		
		DIF 1 FAC	DIF 2 FAC	DIF 1 FAC	DIF 2 FAC	
a	0.249183	a_1	0.462682	0.653504	1.031167	1.122362
		a_2	—	0.023770	—	0.004866
b	0.031936	b_1	0.035713	0.014348	0.034477	0.010494
—	—	b_2	—	0.023185	—	0.016018
σ	0.003431	σ_1	0.023220	0.015740	0.014763	0.013853
—	—	σ_2	—	0.026122	—	0.014121
—	—	ψ	—	—	0.08702	0.327490
ϵ_1	0.000514	ϵ_1	0.001459	0.001013	0.000947	0.000809
ϵ_2	0.000676	ϵ_2	0.001231	0.001175	0.001124	0.001030
ϵ_3	0.001040	ϵ_3	0.001690	0.001454	0.001449	0.000946
ϵ_4	0.001069	ϵ_4	0.001882	0.001324	0.001606	0.001021
ϵ_5	0.001568	ϵ_5	0.002096	0.001172	0.001789	0.001384
ϵ_6	0.002608	ϵ_6	0.002249	0.001558	0.001999	0.001145
ϵ_7	0.003085	ϵ_7	0.001475	0.000983	0.001263	0.000949
ϵ_8	0.002132	ϵ_8	0.001580	0.001345	0.001492	0.001018
ϵ_9	0.002495	—	—	—	—	—
ϵ_{10}	0.002951	—	—	—	—	—
$\ln L$	—	—	12926.50	13258.54	13003.18	13344.20
AIC	—	—	-25805.00	-26463.08	-25956.36	-26632.40
BIC	—	—	-25642.66	-26280.45	-25787.26	-26443.01

Cuadro 4.2: Resultados en los modelos que consideran la tasa libre de riesgo de incumplimiento de un factor.

		Primer Modelo		Segundo Modelo		
ESTADOS UNIDOS		DIF 1 FAC	DIF 2 FAC	DIF 1 FAC	DIF 2 FAC	
a_1	0.319650	a_1	1.399440	1.313931	1.789204	1.190081
a_2	0.037311	a_2	—	0.103552	—	0.103065
b_1	0.017365	b_1	0.037837	0.016763	0.034424	0.008009
b_2	0.016145	b_2	—	0.020187	—	0.005950
σ_1	0.008863	σ_1	0.014973	0.015253	0.011285	0.014160
σ_2	0.008112	σ_2	—	0.014022	—	0.019631
		ψ	—	-	0.094660	0.681380
ϵ_1	0.000749	ϵ_1	0.001632	0.000622	0.001373	0.000509
ϵ_2	0.000391	ϵ_2	0.000946	0.000939	0.000835	0.000967
ϵ_3	0.001054	ϵ_3	0.000908	0.000986	0.000909	0.000846
ϵ_4	0.001178	ϵ_4	0.001704	0.000808	0.000730	0.000847
ϵ_5	0.000827	ϵ_5	0.001594	0.001202	0.001114	0.001081
ϵ_6	0.001574	ϵ_6	0.001855	0.001357	0.001470	0.000967
ϵ_7	0.001729	ϵ_7	0.001177	0.000853	0.001007	0.000689
ϵ_8	0.001085	ϵ_8	0.001089	0.000750	0.000789	0.000693
ϵ_9	0.000974	—	—	—	—	—
ϵ_{10}	0.001077	—	—	—	—	—
$\ln L$	—	—	13908.77	14082.74	13962.29	14179.85
AIC	—	—	-27763.54	-28105.48	-27868.58	-28297.70
BIC	—	—	-27580.91	-27902.56	-27679.19	-28088.01

Cuadro 4.3: Resultados en los modelos que consideran la tasa libre de riesgo de incumplimiento de dos factores.

Al observar los parámetros en las estimaciones de la deuda soberana en Estados Unidos se concluye que los parámetros asociados a su evolución son sensiblemente inferiores en magnitud a los parámetros estimados en todos los modelos de la deuda soberana uruguaya en la sección 3.7. Al comparar los resultados del modelo de un factor con el modelo de dos factores en dicha deuda, se obtiene (como era de esperar) que las curvas de rendimiento en el modelo de dos factores se ajustan mejor a los datos utilizados. El efecto se acentúa tanto en las tasas de rendimiento a largo plazo como también en las tasas de rendimiento a corto plazo debido a que el modelo de un factor no refleja el incremento que sucedió en noviembre de 2015. Las curvas de rendimiento en ambos casos se encuentran en la figura 4.2.

En el análisis de los parámetros asociados al proceso de intensidad en el cuadro 4.2, se obtiene que en el Primer Modelo el cambio de parámetros en el traspaso de los modelos de un factor al modelo de dos factores es similar al cambio de parámetros reflejado en el caso de los modelos de la deuda soberana en dólares en Uruguay. En los parámetros de reversión a la media, al aumentar la cantidad de factores aparece un parámetro de menor magnitud que se encarga del ajuste en los vencimientos a largo plazo. Los parámetros asociados a la tasa de rendimiento de largo plazo en ambos casos se encuentran relacionados a los obtenidos en el cuadro 3.6. En los parámetros asociados al Segundo Modelo, si se compara el modelo de un factor con el modelo de dos factores se advierte que el parámetro ψ , que si bien es positivo en ambos casos, difieren de manera evidente en su magnitud. A su vez, los restantes parámetros se alteran de manera esperable. La función de verosimilitud se incrementa en los dos modelos al cambiar del modelo de un factor al modelo de dos factores en el proceso de intensidad.

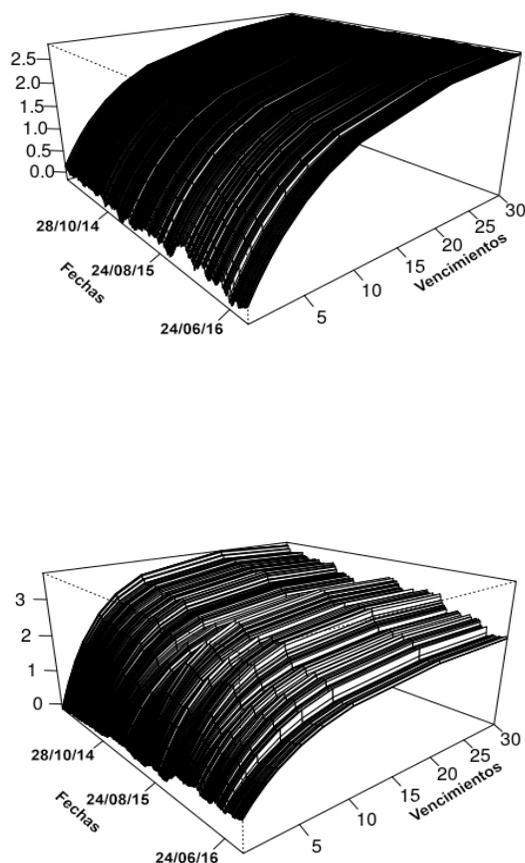


Figura 4.2: Curvas de rendimiento estimadas en la deuda soberana en Estados Unidos.

Al comparar entre el Primer Modelo y el Segundo Modelo en el cuadro 4.2, se obtiene que la mayor diferencia radica en que los parámetros b_i en el Segundo Modelo son de menor magnitud. La razón de que esto suceda es que estos parámetros se encuentran influenciados por el parámetro adicional ψ . Con respecto a la función de verosimilitud, el Segundo Modelo proporciona valores mayores aunque dicho aumento es exiguu. Sin embargo, el aumento permite establecer preferencia por el Segundo Modelo en los dos criterios de información. Esto se debe a que el cambio en la función de verosimilitud es mayor que el cambio en el factor de penalidad al agregar un parámetro adicional.

Con relación al análisis de los parámetros del proceso de intensidad en el cuadro 4.3, se obtiene que no existe en los parámetros en el Primer Modelo un comportamiento similar a los correspondientes a la deuda en dólares en Uruguay, principalmente se debe a que los parámetros a_i presentan magnitudes mayores (en el caso de dos factores uno es de menor

magnitud). Los parámetros b_i asociados a las tasas de rendimiento a largo plazo, en ambos casos se encuentran relacionados a los que se obtiene en el cuadro 3.6. En el Segundo Modelo, el parámetro ψ vuelve a aumentar en magnitud del modelo de un factor al modelo de dos factores, aunque en este caso el incremento es de mayor proporción. La función de verosimilitud en el Segundo Modelo produce valores mayores aunque el aumento vuelve a ser escaso.

Si se confrontan el Primer Modelo y el Segundo Modelo en el cuadro 4.3 se obtienen conclusiones similares que en el cuadro 4.2. Por lo cual, se concluye que en todos los casos analizados se alcanzan mejores resultados al agregar un factor adicional en los modelos en cualquiera de las dos deudas soberanas y no al cambiar de modelo. El principal motivo es que al incorporar un factor en la modelación se adicionan tres parámetros y al cambiar del Primer Modelo al Segundo Modelo sólo se adiciona un parámetro. Sin embargo, en todos los casos en los que se tiene la misma cantidad de factores en los modelos en ambas deudas soberanas, el Segundo Modelo presenta mayor función de verosimilitud con respecto al Primer Modelo y es el que se selecciona en ambos criterios de información.

El análisis permite obtener la evolución del proceso de intensidad para cada estimación. Este resultado es importante para identificar la probabilidad instantánea de incumplimiento de pago de la deuda soberana en Uruguay en cada momento de tiempo. En la figura 4.3 se encuentra la evolución del proceso para el modelo que presenta mayor función de verosimilitud.

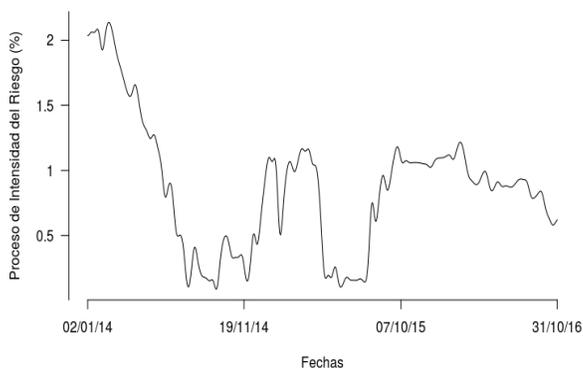


Figura 4.3: Estimación del proceso de intensidad de riesgo en el Segundo Modelo en todo el período de tiempo.

Aplicación: Generación del Índice de Riesgo País

En la sección 4.1, se establece que el riesgo país es una variable importante en el análisis de la economía. Si bien existen diferentes métodos de estimación de esta variable, en su mayoría utilizan como insumo principal las curvas de rendimiento de activos soberanos.

En esta sección, se estiman dos índices de riesgo país que surgen de los resultados del primer modelo y del Segundo Modelo en el caso de dos factores en la deuda soberana en Estados Unidos y de dos factores en el diferencial de tasas de rendimiento entre ambas deudas. Es decir, los parámetros que se utilizan se encuentran en el cuadro 4.3.

El índice se calcula mediante un promedio ponderado de las diferencias en las curvas de rendimiento estimadas en ambos mercados en determinados vencimientos. En esta aplicación se utilizan los vencimientos de los ocho bonos soberanos uruguayos que se establecen en el cuadro 3.4. Los agentes financieros que estiman el índice de riesgo país en Uruguay ponderan las diferencias por el monto circulante de cada bono. Para replicar esta metodología es necesario contar con la información diaria del circulante de la deuda pero esta información no se logró obtener. Por lo cual, en la estimación del índice se decide ponderar en dos categorías arbitrarias: a los bonos locales se le asigna una ponderación de 8% a cada uno y a los bonos globales se le asigna una ponderación de 14% a cada uno.

En la figura 4.4, se establecen las estimaciones de las curvas de rendimiento en los dos modelos en el día 30 de octubre de 2015. Si bien entre ambas representaciones no existe diferencia evidente, la máxima diferencia en tasas de rendimiento en todos los vencimientos es de 0.12%. En cada modelo se obtiene que el índice de riesgo país para el día que se analiza es 265 puntos básicos en el primero y 258 puntos básicos en el segundo.

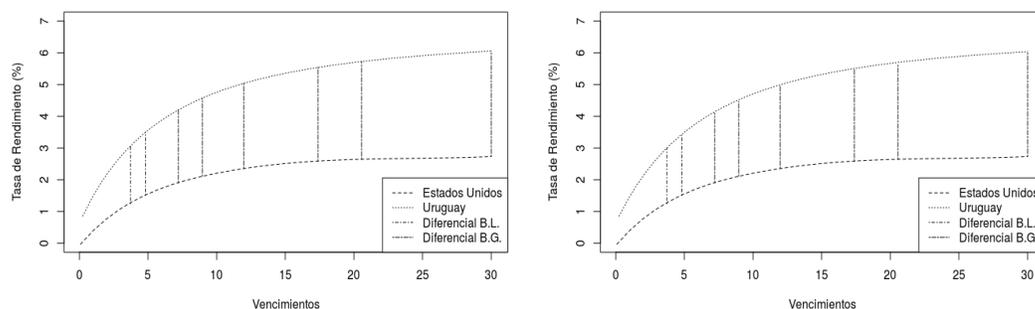


Figura 4.4: Diferencial entre tasas de rendimiento en ambas deudas soberanas. A la izquierda el Primer Modelo y a la derecha el Segundo Modelo en el día 30/10/2015.

En la figura 4.5 se exhibe la evolución de ambos índices en el período de tiempo considerado y la ampliación de 100 días centrada en la fecha 30 de octubre de 2015, con el fin de visualizar de mejor manera la diferencia entre ambos índices. La correlación entre ambos índices es 0.9756. Para comparar la evolución de estos índices generados con los publicados en el mercado, se selecciona el índice Irubevsa para realizar el análisis. Se establece que la correlación entre

el índice Irubevsa y el índice generado a través del Primer Modelo es 0.9404 y con el índice generado a través del Segundo Modelo es 0.9749.

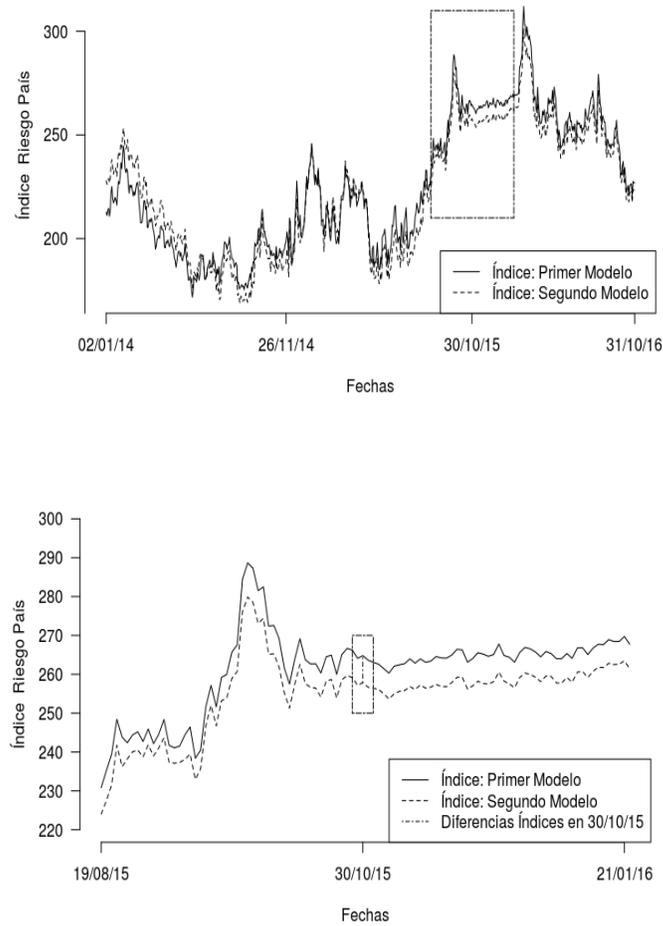


Figura 4.5: Evolución de los índices de riesgo país estimados. Arriba se considera todo el período de tiempo. Abajo se considera los 100 días centrados en el día 30/10/2015.

Conclusiones

En la segunda mitad del siglo *XX*, se desarrolló una nueva rama de la matemática que se denomina matemática financiera. En esta área, se propusieron una gran variedad de modelos matemáticos y métodos estadísticos con el objetivo de describir el funcionamiento de los mercados financieros. En la actualidad la investigación abarca diferentes temáticas, particularmente las relacionadas con la valuación de los activos financieros que se encuentran sujetos a incertidumbre, los cuales inciden en decisiones estratégicas de inversión por parte de los agentes económicos.

En la presente tesis, el objeto de estudio fundamental es la curva de rendimiento de activos soberanos y se aborda el problema a partir de sus precios transados en el mercado. La perspectiva propuesta permite cambiar el enfoque habitual que se utiliza en la industria, el cual se basa en modelos estáticos, por modelos dinámicos que permiten utilizar una mayor cantidad de información, generalmente disponible en el mercado. Los modelos que se desarrollan exigen la utilización de instrumentos analíticos potentes, los cuales deben ser capaces de generar, en cada momento del análisis, una determinada curva de rendimiento. Cabe agregar además, que la modelación de activos de deuda soberanos (renta fija) involucra un nivel de complejidad superior a la modelación de acciones (activos de renta variable), los cuales asignan en cada momento únicamente el precio del activo seleccionado.

En síntesis, el presente trabajo de tesis tiene el objetivo de modelar la deuda soberana en Uruguay, a través de la estimación de las curvas de rendimiento, mediante modelos dinámicos que permitan estudiar su evolución en el tiempo.

Para demostrar las diferencias que presenta el enfoque mediante modelos estáticos, se realiza un análisis de las curvas de rendimiento publicadas por distintos agentes en el mercado en Uruguay con sus respectivas metodologías. En particular se comprueba que las diferentes estimaciones de curvas de rendimiento (independientemente del método estático que se utilice) dependen fuertemente en los activos soberanos seleccionados para la estimación. Este resultado es uno de los fundamentos del cambio de enfoque propuesto en la tesis a modelos dinámicos.

Al introducir de manera gradual las herramientas matemáticas y los conceptos económicos necesarios, es posible realizar en primera instancia, una modelación dinámica del mercado de deuda nominada en dólares. Se utilizan cuatro modelos gaussianos, aunque entre ellos existen diferencias en sus dimensiones y en el ajuste inicial a la curva de rendimiento del mercado. El método de estimación en cada modelo se selecciona de acuerdo a la calidad de la naturaleza

de los datos disponibles. El primer método corresponde al método del jacobiano, en el cual se realiza un cambio de variable en la función de verosimilitud. La información que se utiliza para su estimación es únicamente una o dos series históricas de precios de bonos. El segundo método corresponde a la calibración de los parámetros del modelo mediante la optimización de mínimos cuadrados entre los precios de mercado y los precios del modelo. En este segundo método, se utiliza una mayor cantidad de información, aunque los parámetros relevantes se estiman de manera diaria.

A partir de los resultados que se obtienen en las estimaciones, se concluye que, si bien los resultados son satisfactorios, es necesario orientar mayores esfuerzos en solucionar dos problemas claves en la modelación. En primer lugar, es imprescindible utilizar modelos que contengan más dimensiones. En segundo lugar, es necesario utilizar una mayor cantidad de series históricas de precios de activos soberanos. Estos dos objetivos introducen la dificultad de aumentar de manera considerable tanto la diversidad en los modelos como la complejidad computacional.

En la tesis se propone entonces, utilizar la clase de modelos afines debido a la relación lineal que se presenta entre la tasa de interés spot instantánea y las tasas de rendimiento de los activos. Para la estimación de los parámetros del modelo se utiliza como base la técnica del filtro de Kalman, la que supera en gran medida a las técnicas que se utilizaron anteriormente, al emplear en forma simultánea una gran cantidad de series históricas de precios de activos. Sin embargo, la función de verosimilitud que resulta no permite una maximización directa por la existencia de variables no observables. Se debe recurrir entonces a la metodología de esperanza-maximización para la optimización.

Bajo el entorno descrito se aplican los modelos en una, dos y tres dimensiones para los tres mercados de deuda más relevantes en Uruguay: dólares, unidades indexadas y pesos uruguayos. Los resultados que se obtienen del análisis se aplican a la valuación de los precios de opciones financieras de una manera consistente con las curvas de rendimiento estimadas. Esta aplicación es relevante al ofrecer una metodología de valuación de precios necesaria para el desarrollo de un mercado en derivados financieros en tasas de interés. Esto permitiría una mejor gestión de los portafolios de los agentes financieros locales al reducir el riesgo de sus principales activos.

Por último, en la tesis se considera la existencia del riesgo de incumplimiento de pago de la deuda soberana (default). Este riesgo afecta de manera negativa el precio de los activos. Es decir, si se analiza desde el punto de vista de las preferencias de los agentes inversores, los activos emitidos en países con mayor riesgo de incumplimiento de pago deben pagar mayores tasas de rendimiento. En la tesis se desarrolla el enfoque de modelos reducidos (mediante un proceso de intensidad) debido a que permite extender la teoría matemática previa. Se proponen entonces, dos modelos para el análisis en el Uruguay y se utiliza información que proviene de la deuda soberana de Estados Unidos como referencia (teórica) de activos libre de incumplimiento de pago. Se realizan varias estimaciones de parámetros en el mercado en dólares y se obtiene la probabilidad instantánea de incumplimiento de pago que reflejan los precios transados de los activos soberanos en Uruguay. La aplicación de estos modelos permite generar nuevas estimaciones de la variable riesgo país.

En resumen, como el monto y el nivel de complejidad de la deuda soberana en Uruguay aumentó significativamente en los últimos años, los avances que se producen en la investigación podrían ser importantes tanto para las instituciones financieras como para las instituciones académicas. Se espera que la tesis, motive el acercamiento entre la investigación y las prácticas habituales de los agentes participantes del mercado, al reducir la distancia entre los dos ámbitos en Uruguay.

Bibliografía

- [1] Accinelli, E., Tempone, R and Piria, A., *Optimización de las Carteras de Fondo de Retiro*. Estudios Económicos, Vol 27, 129-152, 1999.
- [2] Anderson, B. and Moore, J., *Optimal Filtering*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1979.
- [3] Bank of Japan, *The Framework for Macro Stress-Testing of Credit Risk: Incorporating Transition in Borrower Classifications*. Financial System Report, September 2007.
- [4] Bertino, M. and Bertoni, R., *Más de un Siglo de Deuda Pública Uruguay: una Historia de Ida y Vuelta*. The Nordic Journal of Latin American and Caribbean, Vol 34, 2004.
- [5] Bjork, T., *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Third Edition Oxford Finance, 2009.
- [6] Bielecki, T. and Rutkowski, M., *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [7] Black, F., *The Pricing of Commodity Contracts*. Journal of Financial Economics, Vol 3, 167-179, 1976.
- [8] Black, F. and Cox, J., *Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions*. Journal of Finance, Vol 31, pp 351 - 367, 1976.
- [9] Black, F.; Derman, E. and Toy, W., *A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options* Financial Analysts Journal, Vol 46, No 1, 33-39, 1990.
- [10] Black, F.; Scholes, M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy, Vol 81, No 3, 637-654, 1973.
- [11] Brigo, D. and Mercurio, F., *Interest Rate Models Theory and Practice with Smile, Inflation and Credit*. Second Edition Springer Verlag, 2006.
- [12] Brown, R.; Schaefer, S., *Interest Rate Volatility and the Term Structure of Interest Rate*. Philosophical Transactions of the Royal Society a Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol 347, 563-576, 1993.
- [13] Bunn, P., Cunningham, A. and Drehmann, M., *Stress Testing as a Tool for Assessing Systemic Risks*. Financial Stability Review, Bank of England, June 2005.
- [14] Caicedo, E., Claramunt, M. and Casanovas, M., *Medición del riesgo de crédito mediante modelos estructurales: una aplicación al mercado colombiano*. Proyecto: Modelos actuariales de medición y transferencia del riesgo. Mayo 2011.
- [15] Coletti, D., Lalonde, R., Misina, M., Muir, D., St-Amant, P. and Tessier, D., *Bank of Canada Participation in the 2007 FSAP Macro Stress-Testing Exercise*. Bank of Canada Financial System Review, June 2008.

-
- [16] Chen, R. and Scott, L., *Maximum Likelihood Estimation for a Multi Factor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates*. The Journal of Fixed Income, Vol 3, No 3, 14-31, 1993.
- [17] Chen, R. and Scott, L., *Multi-Factor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure: Estimates and Tests from a Kalman Filter Model*. The Journal of Real Estate Finance and Economics 27, 143-172, 2003.
- [18] Cox, J., Ingersoll, J. and Ross, S., *IA theory of the term structure of interest rates*. Econometrica, Vol 53, No 2, 385-407, 1985.
- [19] Dai, Q. and Singleton, K., *Specification Analysis of Affine Term Structure Models*. The Journal of Finance, Vol 55, No. 5, 2000.
- [20] Dempster, A., Laird, N. and Rubin, D., *Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm*. Journal of the Royal Statistical Society, Vol 39, No. 1, 1-38, 1977.
- [21] Dubra, J., *Los Bonos del Tesoro en Uruguay*. Tesis Licenciatura en Economía, Universidad de la República, 1995.
- [22] Duffie, D., Filipovic, D. and Schachermayer, W., *Affine Processes and Applications in Finance*. The Annals of Applied Probability, Vol 13, No. 3, 984-1053, 2003.
- [23] Duffie, D. and Kan, R., *A yield-factor Model of Interest Rate*. Mathematical Finance, Vol 6, No. 4, 379-406, 1996.
- [24] Duffie, D. and Singleton, K., *An Econometric Model of the Term Structure of Interest-Rate Swap Yields*. The Journal of Finance, Vol 52, No. 4, 1287-1321, 1997.
- [25] Duffie, D. and Singleton, K., *Modeling Term Structure of Defaultable Bonds*. Review of Financial Studies, Vol 12, 687-720, 1999.
- [26] Dybvig, L., *Bond and Bond Options Pricing Based on the Current Term Structure*. Working Paper, Washington University in Saint Louis, 1998.
- [27] Frache, S. and Katz, G., *Estimating a Risky Term Structure of Uruguayan Sovereign Bonds*. Tesis Licenciatura en Economía, Universidad de la República, 2004.
- [28] Filipovic, D., *Term Structure Models*. Springer Finance. 2009.
- [29] Harvey, A., *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press, 1992.
- [30] Heath, D., Jarrow, R. and Morton, A., *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation*. Econometrica, Vol 60, No 1, 77-105, 1992.
- [31] Ho, T. and Lee, S., *Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims*. The Journal of Finance, Vol 41, No 5, 1011-1029, 1986.
- [32] Hull, J. and A White, A., *One Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol 28, No 2, 235-254, 1993.
- [33] Illanes, G., Pena, A. and Sosa, A., *A Macroeconomic Model of Credit Risk in Uruguay*. Revista Brasileira de Economia, Vol 70, No 4, pp 441 - 455, 2016.
- [34] Jamieson, D. , *Affine Term Structure Models: Theory and Implementation*. Working Paper - Bank of Canada, 2001.
-

-
- [35] Jamieson, D. and Scott, G., *Exponentials, Polynomials, and Fourier Series: More Yield Curve Modelling at the Bank of Canada*. Working Paper - Bank of Canada, 2002.
- [36] Jamshidian, F., *An Exact Bond Option Formula*. The Journal of Finance, Vol 44, No 1, 205-209, 1989.
- [37] Jakubik, P., *Macroeconomic Credit Risk Model*. Financial Stability, Czech National Bank, Report 2005.
- [38] Jiménez, G. and Mencía, J., *Modelling the Distribution of Credit Losses with Observables and Latent Factors*. Working Paper. Banco de España, 2007.
- [39] Kalman, R., *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*. Journal of Basic Engineering, Vol 82, 35-45, 1960.
- [40] Lando, D., *On Cox Processes and Credit Risky Securities*. Review of Derivatives Research, Vol 2, 99-120, 1998.
- [41] Linke, Y., Mader, M., Mader, W., Schelter, B., Sommerlade, L., and Timmer, J., *A Numerically Efficient Implementation of the Expectation Maximization Algorithm for State Space Models*. Applied Mathematics and Computation, Vol 241, 222-232, 2014.
- [42] Longstaff, F. and Schwartz, E., *Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model*. Journal of Finance, Vol 47, No 4, 1259-1282, 1992.
- [43] Luenberger, D., *Observing the State of a Linear System*. IEEE Transactions on Military Electronics, Vol 8, No 2, 74-80, 1964.
- [44] Magnou, G., Mordecki, E. and Sosa, A., *Pricing Bond Options in Emerging Markets: a Case Study*. Journal of Dynamics and Games, American Institute of Mathematical Sciences, Vol 51, 21-30, 2018.
- [45] Mamon, R., *Three Ways to Solve for Bond Prices in the Vasicek Model*. Journal of Applied Mathematics and Decisions Sciences, Vol 8, No 1, 1-14, 2004.
- [46] Merton, R., *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates*. Journal of Finance, Vol 22, pp.449-470, , 1974.
- [47] Mordecki, G., García, S., Leiva, A., Miranda, R. and Rodríguez, S., *Crisis, Recuperación y Auge: 15 Años de Política Económica en Uruguay (2000-2014)*. Instituto de Economía, Universidad de la República, 2015.
- [48] Mordecki, E. and Sosa, A., *Modeling the Uruguayan debt through gaussian models*. Trends in Mathematical Economics. Springer, 2016.
- [49] Musiela, M. and Rutkowski M., *Martingale Methods in Financial Modeling*. Second Edition, Springer, 2005.
- [50] Nahum, B., *La Deuda Externa Uruguay (1864-1930)*. Ediciones de la Banda Oriental, 1995.
- [51] Nelson, C. and Siegel, A., *Parsimonious Modeling of Yield Curves*. Journal of Business, Vol 60, No 4, 473-489, 1987.
- [52] Svensson, L., *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994*. Institute for International Economic Studies. Papers 579, 1994.
- [53] Sosa, A., *Modelación del Mercado de Bonos Soberanos en Moneda Nacional en Uruguay*. Perspectivas: Revista de análisis de economía, comercio y negocios internacionales, Vol 13, 2018.
-

-
- [54] Vasicek, O., *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*. Journal of Financial Economics, Vol 5, 177-188, 1977.
- [55] Virolainen, K., *Macro stress testing with macroeconomics credit risk model for Finland*. Bank of Finland Discussion Papers, 18, 2004.
- [56] Watson, M. and Engle, R., *Alternative Algorithms for the Estimation of Dynamic Factor, Mimic and Varying Coefficient Regression Models*. Journal of Econometrics, Vol 23, 385-400, 1983.
- [57] Wiener, N., *The Exploration, Interpolation and Smoothing of Stationary Times Series*. New York: Wiley, 1949.
- [58] Wu, C., *On the Convergence Properties of the EM Algorithm for Gaussian Mixtures*. The Annals of Statistics, Vol 11, No 1, 95-103, 1983.

Apéndice

El trabajo de tesis fue dedicado de manera íntegra al problema de valuación de la deuda soberana en Uruguay mediante el incremento tanto de la complejidad en los modelos que se utilizan como en las técnicas de estimación de parámetros. En particular, se finaliza la tesis en el capítulo 4 al analizar la valuación de la deuda soberana en dólares mediante la hipótesis de existencia de riesgo de incumplimiento de pago por parte del emisor. Los modelos que se utilizan forman parte de la clase denominada modelos reducidos o modelos de intensidad. Sin embargo, existe otra clase de modelos que se denominan *modelos estructurales*, que pretenden estudiar el riesgo de crédito al analizar la economía en su conjunto. Estos modelos se encargan de ajustar la evolución incierta del valor de los activos del agente emisor para determinar si existe incumplimiento de pago al no cubrir los pasivos contraídos.

El modelo propuesto por Robert Merton, en el trabajo [46], es el primer modelo estructural. En el modelo se supone que el agente emisor presenta incumplimiento de pago si sus activos se encuentran por debajo de su deuda en el momento de pago. Su principal ventaja es que se aplican técnicas similares al desarrollo del modelo Black-Scholes. Sin embargo, presenta dos desventajas esenciales que son la restricción del incumplimiento de pago al tiempo final (momento de pago de la deuda) y la hipótesis de que las curvas de rendimiento son constantes en todos los vencimientos.

Un modelo posterior que se desarrolló en esta clase fue propuesto por Fischer Black y John Cox en el trabajo [8]. El modelo se centra en la primera desventaja del modelo de Merton al permitir que el momento de incumplimiento de pago suceda en cualquier instante de tiempo, en el que el valor de los activos del agente se encuentren por debajo de cierta barrera. En esta clase de modelos, el avance se extendió de gran manera al permitir propiedades muy versátiles en cuanto a la evolución de los activos del deudor y al momento de incumplimiento de pago. En la actualidad, los modelos más relevantes en este enfoque son aquellos que relacionan el riesgo de crédito con la situación financiera, tanto del agente deudor como de la economía en su conjunto. Es decir, los cambios en el nivel crediticio del emisor se vinculan a las variables macroeconómicas del mercado.

Los modelos de estas características se desarrollan en gran medida en el ámbito de los bancos centrales con el fin de determinar las pérdidas esperadas que enfrenta el sistema bancario. El Banco de Inglaterra en [13], utiliza este enfoque para estimar las tasas de incumplimiento de pago en préstamos a empresas no financieras, a particulares en la compra de vivienda mediante hipoteca y en diferentes carteras de tarjetas de crédito. Estas tasas se estiman mediante la utilización de ciertas variables macroeconómicas como lo son el producto bruto interno, la

tasa de interés real, la tasa de desempleo y nivel de endeudamiento de los agentes. En el caso del Banco de Finlandia en [55], utiliza un modelo empírico basado en una regresión logística para analizar la tasa de incumplimiento de pago en los diferentes sectores de la economía mediante variables macroeconómicas.

La hipótesis de linealidad en los modelos son razonables cuando las variaciones que se consideran son reducidas, pero en otro caso es necesario introducir factores no lineales. El Banco de Canadá en [15], se basa en esta premisa al analizar la relación en una transformación logística de la tasa de incumplimiento de pago en los diferentes sectores de la economía con dos variables macroeconómicas (producto bruto interno y tasa de interés) las cuales se transforman mediante funciones polinomiales. El Banco de Japón en [3], utiliza una transformación probit de las probabilidades en las transiciones de las calificaciones crediticias mediante las variables producto bruto interno y la relación entre los pasivos y los activos de los agentes. El Banco de España en [38], analiza una transformación probit de la tasa de incumplimiento de pago y las variables que utiliza son el producto bruto interno, las tasas de interés, el diferencial de tasas de interés con respecto a otros mercados, algunas variables sectoriales y dos factores latentes.

En América Latina, hay muy pocas referencias disponibles sobre la aplicación de modelos estructurales. Se destaca el trabajo [14], en el cual el riesgo de crédito se cuantifica al aplicar el modelo de Merton en empresas en el mercado colombiano entre los años 2005 y 2007. En el caso de Uruguay, no se encuentran trabajos sobre la estimación de la tasa de incumplimiento de pago al utilizar este enfoque.

El objetivo del apéndice es proponer y estimar un modelo estructural del riesgo de crédito en una cartera de préstamos en Uruguay. En la tesis se estudia únicamente el segmento de crédito consumo en pesos uruguayos, siendo el segmento uno de los principales en el sistema bancario en Uruguay. Los resultados obtenidos junto al análisis en otros segmentos de créditos dieron origen al trabajo [33].

Modelo

El modelo estructural que se propone asume un portafolio de préstamos homogéneo en la economía. El logaritmo de los retornos (estandarizado) del agente i en tiempo t satisface

$$R_t^{(i)} = \sqrt{\rho}F_t + \sqrt{1-\rho}U_t^{(i)}; \quad (A1)$$

donde F corresponde al logaritmo de los retornos en la economía que es independiente del agente i (factor sistemático de la economía) que tiene distribución normal estándar. A su vez, el valor $U^{(i)}$ es el retorno específico del agente i que se asume presenta distribución normal estándar y sea el factor ρ aquel parámetro que representa la sensibilidad del retorno del activo al factor no observable de la economía. Además se considera la independencia entre las variables F y U .

El evento de incumplimiento de pago del agente i ocurre cuando el retorno $R_t^{(i)}$ cae por debajo de cierta barrera T . Si se define la variable aleatoria Y como aquella variable binaria que toma el valor 1 si el deudor se encuentra en incumplimiento de pago y 0 en otro caso, se obtiene que la probabilidad de incumplimiento de pago del agente i en tiempo t es

$$p_t^{(i)} = \mathbf{P}(Y_t^{(i)} = 1) = \mathbf{P}(R_t^{(i)} < T).$$

La barrera T puede ser determinada mediante cualquier condición que se seleccione. En el modelo se utilizan variables macroeconómicas relevantes para la economía que de acuerdo a su evolución temporal esta barrera se actualice. Se asume que es una combinación lineal de N variables macroeconómicas

$$p_t^{(i)} = \mathbf{P}(Y_t^{(i)} = 1) = \mathbf{P}(\sqrt{\rho}F_t + \sqrt{1-\rho}U_t^{(i)} < \beta_0 + \sum_{j=1}^N \beta_j x_{jt}) = \Phi\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^N \beta_j x_{jt}\right);$$

donde Φ es la función de distribución de la variable normal estándar.

La probabilidad de incumplimiento de pago condicional al valor del factor no observable f_t es dada mediante

$$p^{(i)}(f_t) = \mathbf{P}\left(U_t^{(i)} < \frac{\beta_0 + \sum_{j=1}^N \beta_j x_{jt} - \sqrt{\rho}f_t}{\sqrt{1-\rho}}\right) = \Phi\left(\frac{\beta_0 + \sum_{j=1}^N \beta_j x_{jt} - \sqrt{\rho}f_t}{\sqrt{1-\rho}}\right); \quad (\text{A2})$$

la cual es posible expresar

$$\Phi^{-1}(p^{(i)}(f_t)) = \frac{\beta_0 + \sum_{j=1}^N \beta_j x_{jt}}{\sqrt{1-\rho}} - \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}f_t. \quad (\text{A3})$$

Al asumir que los agentes son homogéneos, si el número de agentes aumenta la tasa de incumplimiento de pago DR_t converge a su probabilidad condicional. Esto permite estimar dicha tasa del portafolio mediante la probabilidad individual.

El modelo asume que el número de incumplimientos de pagos condicional $D_t(f_t)$ tiene distribución binomial de probabilidad de incumplimiento de pago condicional $p^{(i)}(f_t)$ y número total de agentes n_t . Entonces la probabilidad no condicional se obtiene al integrar sobre el factor aleatorio no observable

$$\mathbf{P}(D_t = d_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{d_t}^{n_t} (p(f_t))^{d_t} (1 - p(f_t))^{n_t - d_t} \phi(f_t) dt; \quad (\text{A4})$$

donde ϕ es la densidad de la distribución normal estándar.

Los parámetros de la ecuación (A4) se obtienen mediante la maximización de la función de verosimilitud; a través de una base de datos que contiene los casos de default (d_t), el número total de los agentes de la economía (n_t) y las variables macroeconómicas más relevantes (x_{jt}). Es de interés la variable aleatoria D_t , por lo cual el logaritmo de la función de verosimilitud tiene la forma

$$\begin{aligned}
l(\bar{\beta}, \rho) &= \sum_{t=1}^{t=T} \log(\mathbf{P}(D_t = d_t)) \\
&= \sum_{t=1}^{t=T} \log \int_{-\infty}^{+\infty} C_{d_t}^{n_t} (p(f_t))^{d_t} (1 - p(f_t))^{n_t - d_t} \phi(f_t) dt \\
&= \sum_{t=1}^{t=T} \log \left[\int_{-\infty}^{+\infty} C_{d_t}^{n_t} \left(\Phi \left(\frac{\beta_0 + \sum_{j=1}^N \beta_j x_{jt} - \sqrt{\rho} f_t}{\sqrt{1 - \rho}} \right) \right)^{d_t} \right. \\
&\quad \left. \left(1 - \Phi \left(\frac{\beta_0 + \sum_{j=1}^N \beta_j x_{jt} - \sqrt{\rho} f_t}{\sqrt{1 - \rho}} \right) \right)^{n_t - d_t} \phi(f_t) dt \right]. \tag{A5}
\end{aligned}$$

El problema se centra en encontrar los parámetros $\bar{\beta}$ y ρ que maximizan la función de verosimilitud l . La mayor dificultad que se presenta en la estimación es aproximar la integral de la ecuación (A5) porque no es posible calcular su función primitiva. Esta circunstancia se examina en el trabajo [37] y el método de la cuadratura gaussiana se selecciona para su resolución.

Datos

Existen varias variables macroeconómicas capaces de ajustar el modelo. El objetivo es seleccionar aquellas variables que mejor se adaptan a las hipótesis de normalidad de F_t en la ecuación (A1) y la independencia de la probabilidad condicional del incumplimiento de pago en la ecuación (A2). Por lo tanto, es necesario encontrar una forma de selección de las variables macroeconómicas x_i con el fin de ajustar el modelo.

Dado el conjunto de variables macroeconómicas, se evalúa el ajuste a las hipótesis al realizar las regresiones lineales correspondientes a la ecuación (A3), al considerar a $\frac{d_t}{n_t}$ como una buena aproximación de $p^{(i)}(f_t)$ y que el término

$$\sqrt{\frac{\rho}{1 - \rho}} f_t;$$

es una variable aleatoria normal con media 0 y varianza pequeña (al asumir que se espera que el parámetro ρ sea pequeño). De esta manera, las hipótesis del modelo son equivalentes a que se cumpla la normalidad en la serie y la independencia de los residuos en las regresiones.

Por lo tanto, en el conjunto de las variables macroeconómicas que presentan importancia teórica para explicar las probabilidades $p^{(i)}$, se ejecutan las regresiones del vector $p^{(i)}(f_t)$ contra diferentes elecciones de subgrupos de variables. Se elige el subconjunto que mejor se ajusta a las pruebas estadísticas. Además, es adecuado verificar que los coeficientes β_i sean significativos y que sus signos sean coherentes con la intuición económica.

Para realizar el ajuste del modelo se utiliza una base de datos mensuales desde diciembre de 2001 hasta mayo de 2013. El período de tiempo abarca los mayores valores de morosidad del sistema bancario en Uruguay en las últimas décadas, a causa de la crisis económica que

sucedió en el año 2002. Posterior a este período, se observa una tendencia decreciente en la tasa de morosidad debido al crecimiento económico. La variable dependiente es la proporción de préstamos con capacidad de pago comprometida en el sistema bancario privado. En esta variable se asume que los préstamos se conceden por el mismo monto con el fin de ponderar de manera adecuada la trascendencia de los agentes en el incumplimiento de pago y de respetar la hipótesis de homogeneidad. Vale destacar que, como la función de verosimilitud de la ecuación (A5) no es lineal, los resultados dependen en menor proporción de la fracción de dinero seleccionada en cada préstamo.

Se considera una gran cantidad de variables macroeconómicas y las seleccionadas para estudiar el segmento de crédito consumo en moneda nacional son:

- Indicador de actividad basado en el Producto Bruto Interno (PBI). Fuente: BCU.
- Índice de salario real (SR). Fuente: Instituto Nacional de Estadística (INE).
- Riesgo país del Uruguay (RP). Índice Embi. Fuente: JP Morgan.
- Tasa activa de interés en el segmento crédito consumo en moneda nacional (TA). Fuente: BCU.
- Tasa de desempleo (TD) - Tasa de desempleo en localidades de 5.000 o más habitantes. Fuente: INE.
- Tasa de inflación (TI). Fuente: INE.
- Tipo de cambio nominal (TCN). Fuente: BCU.
- Tipo de cambio real (TCR). Fuente: BCU.

Las variables macroeconómicas también exhiben una gran volatilidad en los años 2002-2003 a causa de la crisis económica en Uruguay. Asimismo, en algunas de las variables en los años 2008-2009, se presenta una gran variación debido a la crisis financiera mundial, al ser Uruguay una pequeña economía abierta no significativa en los mercados internacionales pero vulnerable a diferentes impactos externos. También, es posible considerar variables macroeconómicas de carácter internacional que son relevantes en la evolución de la economía uruguaya. Entre ellas se encuentran los precios de las materias primas, los tipos de interés extranjeros y ciertas medidas de volatilidad externa. Sin embargo, se asume que los efectos que pueden provocar estas variables en el Uruguay se captan en gran medida en las variables seleccionadas.

Resultados

Al aplicar el criterio de selección de variables, el conjunto más adecuado de variables macroeconómicas para el segmento de crédito analizado es la tasa de desempleo con un rezago de 6 meses, la tasa activa en crédito consumo en moneda nacional con un rezago de 3 meses y la tasa de inflación con un rezago de 3 meses. Los resultados para la regresión lineal se encuentran en el cuadro A1. La prueba de normalidad de chi-cuadrado para los residuos establece un p-valor de 0.532, por lo cual no se rechaza la normalidad de los residuos.

Al obtener que los parámetros estimados en la regresión lineal son significativos, sus signos se ajustan a la intuición económica y los residuos se pueden considerar normales, se aplica

	Parámetro	Desviación Estándar	Estadístico t	p-valor
Constante	-2.4450	0.0514	-47.59	0.00
TD (-6)	6.8737	0.5884	11.68	0.00
TI (-3)	-2.1353	0.6946	-3.08	0.00
TA (-3)	0.7988	0.1170	6.83	0.00

Cuadro A1: Regresión Lineal en las variables seleccionadas para el ajuste del modelo.

a este subconjunto de variables macroeconómicas el modelo propuesto. Los resultados del modelo se encuentran en la cuadro A2.

	Parámetro
Constante	-2.3846
TD (-6)	6.1568
TI (-3)	-2.3524
TA (-3)	0.8742
ρ	0.0045

Cuadro A2: Parámetros estimados en el modelo propuesto. El valor de la función log-verosimilitud es 9529,93.

En el modelo se obtiene que el parámetro ρ es cercano a cero, lo que se encuentra de acuerdo con lo esperado en este segmento de crédito según lo sugerido en el método basado en calificaciones internas propuesto en la reglamentación de Basilea II. En otros sectores, se espera un parámetro ρ de mayor magnitud. Otras alternativas en la modelación en este segmento de crédito se analizan en el trabajo [33].

Una de las principales aplicaciones de este modelo, es utilizar la estimación de sus parámetros en un análisis de sensibilidad. Se consideran diferentes escenarios en las variables macroeconómicas que forman parte del modelo y se evalúa de que manera impactan estos cambios en la tasa de incumplimiento de pago. Los resultados se encuentran en el cuadro A3.

El principal resultado en el cuadro A3 es que la variable macroeconómica con mayor impacto en el modelo es la tasa de desempleo. A su vez, se enfatiza la propiedad de no linealidad del modelo debido a que un aumento de uno por ciento en la tasa de desempleo genera mayores efectos a medida que aumenta la tasa de desempleo. Desde un punto de vista económico es posible explicar este resultado al considerar un mayor efecto de primer y segundo orden cuando la tasa de desempleo se incrementa. En contraste, el impacto de la tasa de interés en el modelo es limitado.

TI	TA	Tasa de Desempleo (TD)							
		7 %	8 %	9 %	10 %	11 %	12 %	13 %	14 %
5 %	25 %	3.2 %	3.7 %	4.2 %	4.8 %	5.4 %	6.1 %	6.9 %	7.8 %
	28 %	3.4 %	3.9 %	4.4 %	5.0 %	5.7 %	6.4 %	7.3 %	8.1 %
	31 %	3.6 %	4.1 %	4.7 %	5.3 %	6.0 %	6.8 %	7.6 %	8.5 %
	34 %	3.8 %	4.3 %	4.9 %	5.6 %	6.3 %	7.1 %	8.0 %	9.0 %
	37 %	4.0 %	4.6 %	5.2 %	5.9 %	6.7 %	7.5 %	8.4 %	9.4 %
6 %	28 %	3.2 %	3.7 %	4.2 %	4.8 %	5.4 %	6.2 %	6.9 %	7.8 %
	31 %	3.4 %	3.9 %	4.5 %	5.1 %	5.7 %	6.5 %	7.3 %	8.2 %
	34 %	3.6 %	4.1 %	4.7 %	5.3 %	6.0 %	6.8 %	7.7 %	8.6 %
	37 %	3.8 %	4.4 %	5.0 %	5.6 %	6.4 %	7.2 %	8.0 %	9.0 %
7 %	31 %	3.2 %	3.7 %	4.2 %	4.8 %	5.5 %	6.2 %	7.0 %	7.8 %
	34 %	3.4 %	3.9 %	4.5 %	5.1 %	5.8 %	6.5 %	7.3 %	8.2 %
	37 %	3.6 %	4.2 %	4.7 %	5.4 %	6.1 %	6.9 %	7.7 %	8.6 %
8 %	34 %	3.3 %	3.7 %	4.3 %	4.8 %	5.5 %	6.2 %	7.0 %	7.9 %
	37 %	3.5 %	3.9 %	4.5 %	5.1 %	5.8 %	6.5 %	7.4 %	8.3 %

Cuadro A3: Análisis de sensibilidad en las variables del modelo.