

TESIS DE DOCTORADO

Cohomología de Hochschild y estructura de Gerstenhaber de las álgebras toupie

Dalia Artenstein

Orientadores: Dra. Andrea Solotar (UBA), Dr. Marcelo Lanzilotta (UdelaR)

Doctorado en Matemática
PEDECIBA - Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

DICIEMBRE DE 2015

Índice general

1. Introducción	7
2. Preliminares	9
2.1. Álgebras toupie	9
2.2. Lema del Diamante	10
2.2.1. Aplicación	11
2.3. Homología y cohomología de Hochschild	12
2.3.1. Homología	13
2.3.2. Cohomología	14
2.3.3. Complejo Bar	14
2.3.4. Cohomología de Hochschild relativa a una subálgebra	15
2.3.5. Complejo Bar E-reducido	17
2.3.6. Estructura de la cohomología de Hochschild como álgebra graduada	17
2.4. Familias uniparamétricas de deformaciones	19
2.5. Álgebras de Lie.	21
2.5.1. Representaciones de álgebras de Lie	23
2.5.2. Representaciones de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$	23
3. Resolución del álgebra como bimódulo	25
3.1. Construcción de la resolución minimal	25
3.1.1. Las n-ambigüedades	25
3.1.2. La resolución	27
4. Cálculo de la cohomología de Hochschild	35
4.1. Cálculo de $H^0(A)$	38
4.2. Cálculo de $H^1(A)$	38
4.3. Cálculo de $H^i(A)$ con $i \geq 2$	40
5. Morfismos de comparación	43
5.1. Construcción general.	43
5.2. Fórmulas explícitas	45
6. Estructura de Gerstenhaber de $H^*(A)$	53
6.1. Producto cup	53
6.2. Corchete de Gerstenhaber	54
6.3. El corchete de Gerstenhaber en $H^1(A)$	56

6.4. Descomposición de $H^1(A)$ como álgebra de Lie	58
6.5. $H^2(A)$ como representación de $H^1(A)$	63
6.6. $H^3(A)$ como representación de $H^1(A)$	69
6.7. $H^i(A)$ como representación de $H^1(A)$	71
7. Cálculo de las deformaciones del álgebra	73
7.1. Forma genérica de un 2-cociclo	73
7.2. Integrabilidad y rigidez	74
7.3. Deformaciones con $f_i = 0$ para $i > 1$	75

Abstract

In this thesis we compute the Hochschild cohomology $H^*(A)$ of a certain type of algebras called toupie algebras, and we describe the Gerstenhaber structure of $\bigoplus_{i=0}^{\infty} H^i(A)$.

A quiver Q is called toupie if it has a unique source and a unique sink, and for any other vertex there is exactly one arrow starting at it and exactly one arrow ending at it. The algebra A is toupie if $A = kQ/\mathcal{I}$ with Q a toupie quiver and \mathcal{I} any admissible ideal.

We first construct a minimal projective resolution of A as A^e -module adapting to this case Bardzell's resolution for monomial algebras. Using this resolution, we compute a k -basis for every cohomology space $H^i(A)$. The structure of $H^1(A)$ as a Lie algebra is described in detail as well as the module structure of $H^i(A)$ over $H^1(A)$.

Capítulo 1

Introducción

Esta tesis se enmarca en el estudio de la teoría de Representaciones de Álgebras y dentro de ésta en aspectos (co)homológicos de las álgebras toupie. Un carcaj toupie es aquel que tiene un único pozo, una única fuente y para todo punto que no es pozo ni fuente una sola flecha sale de él y una sola flecha llega a él. Un álgebra toupie es el cociente de un álgebra de caminos kQ , con Q un carcaj toupie, por un ideal admisible.

La importancia de las álgebras toupie radica en el hecho de que el carcaj asociado a cualquier álgebra triangular se escribe como unión de carcajes toupie. Si bien algunas álgebras de esta familia habían sido tratadas anteriormente, el primer trabajo dedicado completamente a esta familia es [6]. En él los autores determinan cuáles de ellas son hereditarias, inclinadas, casi inclinadas, shod, débilmente shod o laura. Posteriormente en [14] se calcularon las dimensiones de los espacios de cohomología de Hochschild de estas álgebras. En el marco de la tesis de maestría [2], clasifiqué a las álgebras toupie según su tipo de representación.

El objetivo principal de esta tesis es describir completamente la cohomología de Hochschild de un álgebra toupie a partir de una resolución proyectiva minimal de A como A^e -módulo, para de este modo calcular bases explícitas de cada uno de los k -espacios de cohomología $H^i(A)$ y así poder describir luego la estructura de álgebra de Lie de $H^1(A)$ y la de cada $H^i(A)$ como representación de Lie de $H^1(A)$.

El Capítulo 2 comienza describiendo el objeto de estudio, las álgebras toupie. Luego, con la ayuda del Lema del Diamante de Bergman, construimos un conjunto minimal de generadores del ideal asociado al álgebra que será el punto de partida de los cálculos en los capítulos posteriores. Más adelante repasamos las nociones básicas de (co)homología de Hochschild y definimos en la Sección 2.3.5 la resolución Bar E-reducida, una variación de la resolución Bar que nos resultará más conveniente. Por último, repasamos los conceptos básicos sobre deformaciones de álgebras y sobre álgebras de Lie.

En el Capítulo 3 adaptamos a nuestro caso la resolución minimal para álgebras monomiales descrita por Bardzell y Skölberg en [3] y [24], respectivamente. Para esto usamos la noción de n -ambigüedad y probamos sus principales propiedades. Utilizamos ideas relacionadas a [9].

En el Capítulo 4 realizamos el cálculo de la cohomología de Hochschild de las álgebras toupie. Uno de los nudos centrales a resolver es el cálculo de $H^1(A)$ y $H^2(A)$ ya que difieren del caso monomial. En cada uno proponemos un algoritmo de construcción de bases. Éstos resultados se demuestran en 4.2.4 y 4.3.3. En el caso de $H^1(A)$ los resultados obtenidos corresponden al Teorema 4.3.4.

El Capítulo 5 contiene una definición recursiva de los morfismos de comparación entre la resolución minimal hallada en el Capítulo 3 y la resolución Bar E-reducida definida en el Capítulo 2. Dichos morfismos son útiles para calcular el producto cup y fundamentales en la descripción del corchete de Gerstenhaber. Damos fórmulas explícitas para los morfismos en grados bajos y probamos algunos resultados generales que nos ayudarán a describir más adelante $H^i(A)$ como representación de $H^1(A)$. El cálculo de los morfismos de comparación entre la resolución Bar y la resolución minimal de Bardzell para álgebras de carcaj truncadas se encuentra en [1].

El Capítulo 6 se centra en la descripción de la estructura de Gerstenhaber de la cohomología de Hochschild de las álgebras toupie complejas. La estructura explícita de Gerstenhaber es conocida hasta el momento solo para pocas familias de álgebras. En [26] Strametz estudió la estructura de álgebra de Lie del primer grupo de cohomología de Hochschild para álgebras monomiales de dimensión finita. Luego, Sánchez estudió en [21] y [22] la estructura de representaciones de Lie de los grupos de cohomología de Hochschild para álgebras monomiales de radical cuadrado cero cuyas dimensiones fueron calculadas en [12], ver también [23]. Por otro lado, Bustamante en [5] estudió la estructura de Gerstenhaber de las álgebras string probando que el producto cup es trivial para las triangulares string cuadráticas y que el corchete de Gerstenhaber se anula en las álgebras triangulares gentiles si partimos de elementos en $H^m(A)$ y $H^n(A)$ con m, n mayores que 1. Más recientemente, se estudió la estructura de Gerstenhaber [7] de las álgebras triangulares cuadráticas monomiales. En este Capítulo demostramos en primer lugar para las álgebras toupie resultados similares a los expuestos por Bustamante en [5]. Para hacer esto usamos fuertemente cuál es la forma de un carcaj toupie. Luego damos una descomposición de $H^1(A)$ como álgebra de Lie en el Teorema 6.4.5, estableciendo condiciones para que ésta sea abeliana o semisimple (ver Teorema 6.4.1 y Corolario 6.4.8). En las secciones siguientes describimos la acción de $H^1(A)$ sobre $H^i(A)$, tratando en primer lugar los casos $i = 2$ e $i = 3$ para los cuales tenemos las fórmulas explícitas de los morfismos de comparación. Luego generalizamos para cualquier i mayor que 2.

En el Capítulo 7, utilizando el cálculo del segundo espacio de cohomología de Hochschild estudiado en el Capítulo 4, daremos familias uniparamétricas de deformaciones de las álgebras toupie. En particular probaremos que dado un elemento $\bar{\psi} \in H^2(A)$, si denotamos f_ψ el cociclo correspondiente en $\text{Hom}_k(A \otimes A, A)$, este será siempre integrable, pudiendo incluso tomar $f_i = 0$ para todo i mayor que uno. Probamos que la familia de las álgebras toupie es cerrada bajo dichas deformaciones.

A lo largo de esta tesis k denota un cuerpo y cuando hablamos de álgebra nos referimos a una k -álgebra asociativa con unidad.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Álgebras toupie

Esta familia de álgebras cuya definición recordaremos en esta sección, apareció por primera vez en el artículo "Toupie algebras, some examples of Laura algebras" de Diane Castonguay, Julie Dionne, Francois Huard y Marcelo Lanzilotta [6]. Las álgebras toupie se pueden ver como una generalización de las álgebras canónicas definidas por Claus Ringel en [20]. Un carcaj Q se llama triangular si no contiene ciclos orientados.

El interés en las álgebras toupie proviene del hecho de que cualquier carcaj triangular puede pensarse como unión de subcarcajes toupie. En trabajos posteriores a [6] se estudió la dimensión de la cohomología de Hochschild de las álgebras toupie [14] y se clasificó esta familia de álgebras según su tipo de representación [2].

A continuación daremos algunas definiciones y notaciones relacionadas con las álgebras toupie.

Definición 2.1.1. Dado un carcaj conexo Q y dos vértices x e y de Q , se dice que x es un pozo si no hay flechas que comiencen en él y que y es una fuente si no hay flechas que terminen en él.

Definición 2.1.2. Un carcaj Q es **toupie** si tiene una única fuente, un único pozo, y para cualquier otro vértice x de Q , hay exactamente una flecha que comienza en x y exactamente una flecha que termina en x .

Denotaremos θ a la única fuente y ω al único pozo.

Definición 2.1.3. Un álgebra $A = kQ/\mathcal{I}$ es **toupie** si Q es un carcaj toupie.

Denotaremos con D a la dimensión del k -espacio vectorial $e_\theta A e_\omega$ donde, como es habitual, si x es un vértice de Q , e_x es el camino de largo cero correspondiente a ese vértice.

Observación 2.1.4. Las álgebras canónicas son un caso particular de álgebras toupie.

Los caminos de θ a ω se llaman *ramas*. A continuación presentaremos algunas notaciones que nos serán útiles más adelante.

- $Z = \{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(a)}\}$ es el conjunto de las flechas de Q que van de θ a ω ,

- $Y = \{\alpha^{(a+1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(a+l)}\}$ es el conjunto de las ramas que no son flechas y no participan en relaciones,
- $W = \{\alpha^{(a+l+1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(a+l+m)}\}$ es el conjunto de las ramas que contienen relaciones monomiales,
- $T = \{\alpha^{(a+l+m+1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(a+l+m+n)}\}$ es el conjunto de las ramas que participan en relaciones no monomiales.

2.2. Lema del Diamante

Sea $A = kQ/\mathcal{I}$ un álgebra toupie. Nuestro objetivo es fijar una k -base conveniente del álgebra A para calcular los invariantes cohomológicos que buscamos. Para esto utilizaremos el Lema del Diamante de Bergman [4]. A continuación daremos algunas definiciones y recordaremos el teorema principal del artículo de Bergman.

Dado un conjunto X , denotemos $\langle X \rangle$ al monoide con unidad 1 generado por las palabras en X ; sea $k\langle X \rangle$ la k -álgebra asociativa libre con k -base X .

Definición 2.2.1. ▪ Un *sistema de reducción* \mathcal{S} de X es un conjunto de pares $\tau = (W_\tau, f_\tau)$ con $W_\tau \in \langle X \rangle$ y $f_\tau \in k\langle X \rangle$.

- Para cada $\tau \in \mathcal{S}$ y para cada par de elementos $A, B \in \langle X \rangle$, sea $r_{A\tau B} : k\langle X \rangle \rightarrow k\langle X \rangle$ el único morfismo que verifica $r_{A\tau B}(AW_\tau B) = Af_\tau B$, y fija el resto de las palabras. Los morfismos de esta forma reciben el nombre de *reducciones*.
- Sea $a \in k\langle X \rangle$. Decimos que a es *irreducible* si $r_{A\tau B}(a) = a$ para todo $A, B \in \langle X \rangle$; y para todo $\tau \in \mathcal{S}$.
- Sea $a \in k\langle X \rangle$. Una sucesión finita de reducciones r_1, \dots, r_n se dice *final en a* si $r_n \circ \dots \circ r_1(a)$ es irreducible. El elemento $r_n \circ \dots \circ r_1(a)$ se llama *imagen de a por una sucesión final*.
- Un elemento $a \in k\langle X \rangle$ se dice de *reducción finita* si para cada sucesión infinita de reducciones $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, r_n actúa trivialmente en $r_{n-1} \circ \dots \circ r_1(a)$.
- Un elemento $a \in k\langle X \rangle$ se dice de *reducción única* si es de reducción finita y existe $b \in k\langle X \rangle$ irreducible tal que $r_n \circ \dots \circ r_1(a) = b$ para toda sucesión r_1, \dots, r_n final en a .

Al tratar de reducir una palabra aparecen dos tipos de indeterminaciones: las de tipo *solapamiento* y las de tipo *inclusión*. En el caso de las álgebras toupie solo pueden aparecer indeterminaciones de tipo *solapamiento* pero definiremos ambos tipos por completitud.

Definición 2.2.2. ▪ Una 5-upla (τ, η, A, B, C) con $\tau, \eta \in \mathcal{S}$ y A, B, C una terna de elementos en $\langle X \rangle - \{1\}$ tal que $W_\tau = AB$, y $W_\eta = BC$, se llama una *indeterminación de tipo solapamiento*, o simplemente un *solapamiento*. Un solapamiento (τ, η, A, B, C) se dice *resoluble* si existen reducciones r y r' tales que $r(f_\tau C) = r'(Af_\eta)$.

- Una 5-upla (τ, η, A, B, C) con τ, η elementos distintos de \mathcal{S} y A, B, C una terna de elementos en $\langle X \rangle$ tal que $W_\tau = B$, y $W_\eta = ABC$, se llama una *indeterminación de tipo inclusión*, o simplemente un *inclusión*. Una inclusión (τ, η, A, B, C) se dice *resoluble* si existen reducciones r y r' tales que $r(Af_\tau B) = r'(f_\eta)$.

Para poder enunciar el teorema principal de [4] necesitamos definir un orden parcial sobre $\langle X \rangle$ que cumpla con algunas propiedades que veremos a continuación.

Definición 2.2.3. ▪ Un orden parcial \leq sobre $\langle X \rangle$ se llama *orden parcial de semigrupo* si para todo par de elementos $B, B' \in \langle X \rangle$ tal que $B < B'$, vale que $ABC < AB'C$ para todo $A, C \in \langle X \rangle$.

- Un orden parcial sobre $\langle X \rangle$ tiene la *propiedad de cadena descendente* si toda cadena de monomios $A_1 \geq A_2 \geq \dots$ se estanca.
- Un orden parcial de semigrupo en $\langle X \rangle$ se dice *compatible con \mathcal{S}* si para todo $\tau \in \mathcal{S}$, f_τ es combinación lineal de monomios $A_1, \dots, A_n \in \langle X \rangle$ con $A_i < W_\tau$ para todo i .

Teorema 2.2.4. [4, Theorem 1.2] *Sea X un conjunto, sea \mathcal{S} un sistema de reducción para $k\langle X \rangle$ y sea \leq un orden parcial de semigrupo en $\langle X \rangle$ compatible con \mathcal{S} con la propiedad de cadena descendente. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

- Todas las indeterminaciones de \mathcal{S} son resolubles.
- Todos los elementos de $k\langle X \rangle$ son de reducción única.
- La clase de los monomios irreducibles es una k -base del álgebra $k\langle X \rangle / \mathcal{I}$ donde \mathcal{I} es el ideal bilátero generado por el conjunto $\{W_\tau - f_\tau : \tau \in \mathcal{S}\}$.

Observación 2.2.5. Sea $\omega : X \rightarrow \mathbb{N}$ una función de conjuntos y sea \leq un orden total en X . Podemos definir un orden en $\langle X \rangle$ de la siguiente manera.

Dados $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in X$, decimos que $x_1 \dots x_n < y_1 \dots y_m$ si y solo si $\sum_{i=1}^n \omega(x_i) < \sum_{i=1}^m \omega(y_i)$ ó $\sum_{i=1}^n \omega(x_i) = \sum_{i=1}^m \omega(y_i)$ y existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = y_i$ para $i = 1, \dots, k-1$ y $x_k < y_k$.

Proposición 2.2.6. *El orden definido en la observación anterior es un orden de semigrupo y, si X es finito, tiene la propiedad de cadena descendente.*

La demostración de esta proposición se encuentra en [8, Proposición 4.1.5]

2.2.1. Aplicación

Vamos a mostrar ahora como construir un sistema de reducción para un álgebra toupie $A = kQ/\mathcal{I}$. Llamamos Q_0 al conjunto de vértices de Q y Q_1 al conjunto de flechas. Sea R' un conjunto minimal de generadores de \mathcal{I} . Escribiremos $R' = \{\sigma_1, \dots, \sigma_q, \rho_1, \dots, \rho_p\}$ donde $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ son relaciones monomiales y ρ_1, \dots, ρ_p son relaciones no monomiales. Notemos que puede ser $q = 0$ o $p = 0$. Para la parte monomial incluiremos en \mathcal{S} los pares $(\sigma_i, 0)$ con $1 \leq i \leq q$. Para la parte no monomial comenzaremos definiendo a continuación nuevos generadores ρ'_1, \dots, ρ'_p . Sabemos que

existen escalares a_{ij} tales que

$$\rho_i = \sum_{a+l+m+1}^{a+l+m+n} a_{ij} \alpha^{(j)},$$

donde $\alpha^{(j)}$ son las ramas que participan en la parte no monomial.

Sea $B = (b_{ij})$ la forma escalerizada reducida de la matriz $C = (a_{ij})$. Definamos

$$\rho'_i = \alpha^{(k_i)} + \sum_{j > k_i} b_{ij} \alpha^{(j)}, \quad 1 \leq i \leq p,$$

donde k_i es el pivote de la i -ésima fila.

Es claro que $\langle \rho_1, \dots, \rho_p \rangle = \langle \rho'_1, \dots, \rho'_p \rangle$, y si $i' > i$ entonces $k_{i'} > k_i$.

Llamemos $R_{\text{mon}} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q\}$, $R_{\text{nomon}} = \{\rho'_1, \dots, \rho'_p\}$ y $R = R_{\text{mon}} \cup R_{\text{nomon}}$. Finalmente consideremos los pares $(\alpha^{(k_i)}, -\sum_{j > k_i} b_{ij} \alpha^{(j)})$.

Es claro que el conjunto de pares

$$\mathcal{S} = \{(\sigma_1, 0), \dots, (\sigma_q, 0), (\alpha^{(k_1)}, -\sum_{j > k_1} b_{1j} \alpha^{(j)}), \dots, (\alpha^{(k_p)}, -\sum_{j > k_p} b_{pj} \alpha^{(j)})\}$$

forma un sistema de reducción para A .

Para poder aplicar el Teorema 2.2.4 necesitamos definir un orden parcial de semigrupo en $\langle Q_1 \rangle$ compatible con \mathcal{S} que tenga la propiedad de cadena descendente. Utilizando la Proposición 2.2.6 definiremos un orden en las flechas y una función $\omega : Q_1 \rightarrow \mathbb{N}$ que luego extenderemos a $\langle Q_1 \rangle$. Si α_i^j es la i -ésima flecha de la rama j del carcaj toupie, entonces $\alpha_i^j < \alpha_k^q$ si $j > q$ o $j = q$ e $i < k$. Sea $\omega : Q_1 \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\omega(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in Q_1$. Observemos que este orden es compatible con el sistema de reducción por definición del mismo.

Ahora si, aplicando el Teorema 2.2.4, podemos afirmar que los monomios irreducibles forman una k -base de A ya que todas las posibles indeterminaciones son resolubles al encontrarse en la parte monomial y por definición anularse en el álgebra.

A partir de esta construcción obtenemos una base de A como k -espacio vectorial en la cual aparecen todos los caminos no nulos de A salvo los que son primeros elementos en los pares del sistema de reducción. Llamemos \mathcal{B} a dicha base.

2.3. Homología y cohomología de Hochschild

En esta sección desarrollaremos las nociones básicas acerca de la homología y cohomología de Hochschild de un bimódulo sobre una k -álgebra. La (co)homología de Hochschild se puede definir en general en el caso en que k es un anillo conmutativo unitario y A una k -álgebra, nosotros trabajaremos con k un cuerpo. Como libro de referencia utilizaremos [27].

Dada una k -álgebra A , sea $A^e = A \otimes_k A^{op}$ el álgebra envolvente de A . Podemos ver a los A -bimódulos con A^e -módulos a izquierda o a derecha. Veremos este resultado en lo que sigue. La importancia del mismo -para nuestros fines- radica en el hecho de que, siendo la categoría de A -bimódulos naturalmente isomorfa a una categoría de módulos resulta tener suficientes objetos proyectivos.

Definición 2.3.1. Un *bimódulo* sobre el álgebra A es un k -módulo M , con acciones a derecha e izquierda de A , tales que

$$(a.m).a' = a.(m.a') \quad \forall m \in M, \quad \forall a, a' \in A.$$

y las acciones de k inducidas a izquierda y derecha coinciden.

Dados dos A -bimódulos M y N , un *morfismo de bimódulos* es una transformación k -lineal $f : M \rightarrow N$ que es morfismo de A -módulos tanto a derecha como a izquierda.

Proposición 2.3.2. La categoría de A -bimódulos es naturalmente isomorfa a la categoría de A^e -módulos a izquierda.

Demostración. Llamemos ${}_A \text{Mod}_A$ a la categoría de A -bimódulos y ${}_{A^e} \text{Mod}$ a la categoría de A^e -módulos a izquierda.

Sea $\Phi : {}_A \text{Mod}_A \rightarrow {}_{A^e} \text{Mod}$ el funtor tal que en un objeto M es la identidad sobre el k -espacio vectorial subyacente, cuya estructura de A^e -módulo a izquierda se define por:

$$(a \otimes a').m = ama' \quad \forall a, a' \in A, \forall m \in M.$$

El funtor Φ es la identidad en los morfismos.

Es claro que Φ es un isomorfismo que además es natural. □

En forma análoga se prueba que la categoría de A -bimódulos es también naturalmente isomorfa a la categoría de A^e -módulos a derecha definiendo la acción como $m.(a \otimes a') = a'ma$.

2.3.1. Homología

Dado un A -bimódulo M construiremos un complejo de cadenas al que notaremos $C_*(A, M)$. La componente de grado n -ésimo del complejo será $(C_*(A, M))_n = M \otimes_k A^{\otimes n}$ para n positivo, M si $n = 0$ y 0 si $n < 0$. En adelante consideraremos que $A^{\otimes 0} = k$. Dados $n \geq 1$ e $i \in \{0, \dots, n\}$, los diferenciales del complejo se definen a partir de los morfismos

$$\partial_i^n : M \otimes A^{\otimes n} \rightarrow M \otimes A^{\otimes n-1}$$

dados por

$$\partial_i^n(m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \begin{cases} ma_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n, & i = 0, \\ m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_n, & 0 < i < n, \\ a_n m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1}, & i = n, \end{cases}$$

y son de la forma:

$$b_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i^n : M \otimes A^{\otimes n} \rightarrow M \otimes A^{\otimes n-1}.$$

Así obtenemos el complejo:

$$\dots \xrightarrow{b_2} M \otimes A \otimes A \xrightarrow{b_1} M \otimes A \xrightarrow{b_0} M \longrightarrow 0 \quad C_*(A, M).$$

Definición 2.3.3. La homología de Hochschild de A con coeficientes en M es la homología del complejo $C_*(A, M)$. Utilizaremos para esta homología la notación habitual $H_*(A, M)$.

Veremos luego que el n -ésimo espacio de homología de Hochschild $H_n(A, M)$ es isomorfo a $\text{Tor}_n^{A^e}(A, M)$. Al ser la homología de Hochschild el functor derivado a izquierda del functor $-\otimes_{A^e} A$ se puede usar cualquier resolución proyectiva de A como A -bimódulo para calcularla.

2.3.2. Cohomología

Dado un A -bimódulo M construiremos un complejo de cocadenas al que notaremos $C^*(A, M)$. La componente de grado n -ésimo del complejo será $C^n(A, M) = \text{Hom}_k(A^{\otimes n}, M)$ para $n \geq 0$, es decir, el espacio de las funciones k -multilineales de A en M y el complejo será nulo en grados negativos.

Dados $n \geq 0$ e $i \in \{0, \dots, n+1\}$, consideremos los morfismos

$$\partial_n^i : \text{Hom}_k(A^{\otimes n}, M) \rightarrow \text{Hom}_k(A^{\otimes n+1}, M)$$

definidos por:

$$\partial_n^i(f)(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = \begin{cases} a_0 f(a_1 \otimes \dots \otimes a_n), & i = 0; \\ f(a_0 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n), & 0 < i < n+1; \\ f(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1}) a_n, & i = n+1. \end{cases}$$

Los diferenciales del complejo serán de la forma:

$$b^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_n^i : \text{Hom}_k(A^{\otimes n}, M) \rightarrow \text{Hom}_k(A^{\otimes n+1}, M).$$

Así obtenemos el complejo:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{b^0} \text{Hom}_k(A, M) \xrightarrow{b^1} \text{Hom}_k(A \otimes A, M) \xrightarrow{b^2} \dots \quad C^*(A, M).$$

donde identificamos $\text{Hom}_k(k, M)$ con M de manera estándar.

Definición 2.3.4. La cohomología de Hochschild de A con coeficientes en M es la cohomología del complejo $C^*(A, M)$ y utilizaremos para esta cohomología la notación habitual $H^*(A, M)$.

Como en el caso de la homología, la cohomología de Hochschild también es un functor derivado, en este caso a derecha.

2.3.3. Complejo Bar

A continuación definiremos un complejo que denotaremos $C_{\text{Bar}}(A)$, que resultará una resolución proyectiva de A como A^e -módulo. Luego veremos la relación entre este complejo y la cohomología de Hochschild de A con coeficientes en un A -bimódulo M .

Definición 2.3.5. Dado $n \geq -1$, el *complejo Bar* tiene como componente de grado n -ésimo a $A^{\otimes(n+2)}$. Para $n \geq 0$ los diferenciales del complejo $\delta_n : A^{\otimes(n+3)} \rightarrow A^{\otimes(n+2)}$ se definen como

$$\delta_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+2}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \cdots \otimes a_{n+2}.$$

Definimos $\delta_{-1} : A \otimes A \rightarrow A$ como la multiplicación, o sea, $\delta_{-1}(a_0 \otimes a_1) = a_0 a_1$.

Observación 2.3.6. El k -espacio vectorial $A^{\otimes(n+2)}$ tiene estructura de A -bimódulo como sigue. Dados $\alpha, \beta \in A$ y $a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \in A^{\otimes(n+2)}$:

$$\alpha(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})\beta = \alpha a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \beta.$$

La siguiente Proposición es un resultado clásico y se encuentra en [27].

Proposición 2.3.7. *El complejo $C_{\text{Bar}}(A)$ es una resolución proyectiva de A como A^e -módulo a derecha.*

Demostración. En primer lugar, al ser k un cuerpo, $A^{\otimes n}$ es un k -módulo libre y por lo tanto $A^{\otimes(n+2)} \simeq A^{\otimes n} \otimes A^e$ es A^e -libre para todo $n \geq 0$. Además es sencillo verificar que $\delta = \{\delta_n\}_{n \geq -1}$ es una familia de morfismos de A^e -módulos. Para ver que se trata de una resolución basta probar que tiene homología nula. Esto se puede hacer definiendo una homotopía, o sea una familia de morfismos de A -módulos a derecha $s' = \{s'_n\}_{n \geq -1}$, $s'_n : A^{\otimes(n+2)} \rightarrow A^{\otimes(n+3)}$ de forma tal que $s' \circ \delta + \delta \circ s' = \text{id}$. Definiremos $s'_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$ para todo $n \geq -1$. \square

Teorema 2.3.8. [27, Corollary 9.1.5] *Sea A una k -álgebra. Para todo A -bimódulo M y para todo $n \geq 0$ se cumple que:*

$$H_n(A, M) \simeq \text{Tor}_n^{A^e}(A, M).$$

$$H^n(A, M) \simeq \text{Ext}_{A^e}^n(A, M).$$

2.3.4. Cohomología de Hochschild relativa a una subálgebra

Gerstenhaber y Schack probaron en [17] un resultado sobre la cohomología de Hochschild que muchas veces simplifica su cálculo. El enunciado es el siguiente.

Teorema 2.3.9. (Teorema 1.2 de [17])

Si E es una subálgebra k -separable de A , entonces $\Gamma^i : \text{Ext}_{E, A^e}^i(N, M) \rightarrow \text{Ext}_{A^e}^i(N, M)$ es un isomorfismo para todo i , que es natural en M .

Para entender completamente este enunciado recordaremos algunas definiciones y propiedades, ver [17] por más detalles.

Definición 2.3.10. Un álgebra semisimple de dimensión finita E sobre un cuerpo k se dice *separable* si para toda extensión de cuerpos $k \subset l$, la l -álgebra $E_l = E \otimes_k l$ es semisimple.

La definición anterior es equivalente a pedir que E sea proyectivo como E^e -módulo a izquierda. La prueba se encuentra en el capítulo 9 de [27].

Ejemplo 2.3.11. Dada A un álgebra de la forma $A = kQ/\mathcal{I}$ con Q un carcaj finito e \mathcal{I} un ideal admisible, la k -álgebra $E = kQ_0$ es separable ya que \bar{E} es semisimple a izquierda y a derecha lo que implica que E es un E^e -módulo proyectivo.

Definición 2.3.12. Sean k un anillo conmutativo unitario, A una k -álgebra asociativa, M y N dos A -bimódulos y $E \subset A$ una k -subálgebra separable.

1. Un mapa de A -bimódulos $\phi \in \text{Hom}_{A^e}(N, M)$ es E -admisibile si existe un mapa de E -bimódulos $f : M \rightarrow N$ que satisface $\phi f \phi = \phi$.
2. Un A -bimódulo P es E -proyectivo relativo si satisface el criterio de levantamiento usual para morfismos E -admisibles, es decir, que dado el epimorfismo E -admisibile $\phi : N \rightarrow M$ y el morfismo E -admisibile $f : P \rightarrow M$, existe un morfismo $g : P \rightarrow N$ tal que $\phi \circ g = f$. Gráficamente

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \swarrow g & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

3. Una E -resolución proyectiva P_\bullet de N es una sucesión de A -bimódulos E -proyectivos relativos y morfismos E -admisibles:

$$P_\bullet : \dots \xrightarrow{d_n} P_n \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow 0$$

que es exacta en grados positivos y tal que $P_0/\text{Im}(d_1)$ es isomorfo a N como A -bimódulo.

Definición 2.3.13. El bifunctor cohomológico de Yoneda E -relativo

$$\text{Ext}_{E, A^e}^i(-, -) : ({}_A \text{Mod}_A)^{\text{op}} \times {}_A \text{Mod}_A \rightarrow {}_k \text{Mod}$$

es el i -ésimo functor derivado E -relativo de $\text{Hom}_{A^e}(-, -)$.

Dado un A -bimódulo M , el k -módulo $\text{Ext}_{E, A^e}^i(N, M)$ se puede calcular como el espacio de cohomología de grado i del complejo $\text{Hom}_{A^e}(P_\bullet, M)$ donde P_\bullet es una E -resolución proyectiva de N .

Observación 2.3.14. Notemos que dado $n \in \mathbb{N}$, el mapa d_n es E' -admisibile para toda k -subálgebra E' de E . Por lo tanto, si $P'_\bullet \rightarrow N$ es una E' -resolución proyectiva de N , la propiedad de levantamiento provee un morfismo de complejos $P'_\bullet \rightarrow P_\bullet$ que a su vez induce un mapa de cocadenas de $\text{Hom}_{A^e}(P_\bullet, M)$ en $\text{Hom}_{A^e}(P'_\bullet, M)$ y así obtenemos el morfismo $\Gamma^i : \text{Ext}_{E, A^e}^i(N, M) \rightarrow \text{Ext}_{E', A^e}^i(N, M)$ para todo i . Observemos que $\text{Ext}_{k, A^e}^i(N, M) = \text{Ext}_{A^e}^i(N, M)$.

A continuación recordaremos un resultado de [17] que es necesario para demostrar el teorema principal antes citado.

Lema 2.3.15. (Lema 1.1 de [17]) Supongamos que E es una extensión separable de k y que M, N son A^e -módulos. Se cumple lo siguiente:

1. un mapa de A -bimódulos $\phi : M \rightarrow N$ es E -admisibile si y solo si es k -admisibile,

2. un módulo M es E -proyectivo relativo si y solo si es k -proyectivo relativo.

El teorema del artículo de Gerstenhaber-Schack nos resultará útil para calcular la cohomología de Hochschild de un álgebra toupie $A = kQ/\mathcal{I}$ tomando $E = kQ_0$ ya que al tomar productos tensoriales sobre E en lugar de sobre k el complejo resultará más simple.

2.3.5. Complejo Bar E -reducido

Sea A una k -álgebra de dimensión finita que contiene una k -subálgebra $E \subset A$ separable. A continuación daremos una variante de la resolución Bar $(A^{\otimes(n+2)}, \delta_n)$ expuesta anteriormente a la que llamaremos resolución Bar E -reducida. Dicha resolución es un cociente de la resolución Bar que resulta de tomar en primer lugar tensores sobre E en lugar de k y luego, para cada $n \geq 0$, considerar el subespacio vectorial de $A^{\otimes_E(n+2)} D_n = \langle a_0 \otimes_E a_1 \otimes_E \cdots \otimes_E a_n \otimes_E a_{n+1} : \exists i, 1 \leq i \leq n \text{ tal que } a_i \in E \rangle$. Al observar que $\delta_n(D_{n+1}) \subset D_n$ vemos que $D = (D_n, \delta_{n-1}|_{D_n})$ es un subcomplejo de $(A^{\otimes_E(n+2)}, \delta_n)$ y el complejo cociente $C_{\text{Bar}E}(A)$ resulta:

$$\dots A \otimes_E \bar{A}^{\otimes_E 3} \otimes_E A \xrightarrow{\bar{\delta}_2} A \otimes_E \bar{A}^{\otimes_E 2} \otimes_E A \xrightarrow{\bar{\delta}_1} A \otimes_E \bar{A} \otimes_E A \xrightarrow{\bar{\delta}_0} A \otimes_E A \xrightarrow{\bar{\delta}_{-1}} A \rightarrow 0$$

donde $\bar{A} = A/E$ y $\bar{\delta}_i$ es tal que $\bar{\delta}_i(a_0 \otimes_E \bar{a}_1 \otimes_E \cdots \otimes_E \bar{a}_{i+1} \otimes_E a_{i+2}) = \delta_i(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i+1} \otimes a_{i+2})$.

La prueba del siguiente lema se encuentra en [10].

Lema 2.3.16. *El complejo $C_{\text{Bar}E}(A)$ es una resolución proyectiva de A como A^e -módulo.*

Demostración. Veamos que $A \otimes_E \bar{A}^{\otimes_E i} \otimes_E A$ es A^e -proyectivo. Como E es separable, E^e será semi-simple y por lo tanto todo E^e -módulo será E^e -proyectivo. En particular $\bar{A}^{\otimes_E i}$ será E^e -proyectivo. Esto implica que $A \otimes_E \bar{A}^{\otimes_E i} \otimes_E A$ es A^e -proyectivo. Para ver que $A \otimes_E A$ es proyectivo basta observar que $A \otimes_E A = A \otimes_E E \otimes_E A$ y E es E^e -proyectivo. Para probar que es una resolución construimos una homotopía contractante $t = \{t_i\}_{i \geq -1}$ con

$$t_i : A \otimes_E \bar{A}^{\otimes_E i} \otimes_E A \rightarrow A \otimes_E \bar{A}^{\otimes_E i+1} \otimes_E A$$

de forma tal que $\bar{\delta} \circ t + t \circ \bar{\delta} = \text{id}$. Para eso basta considerar $t_i(a_0 \otimes_E \bar{a}_1 \otimes_E \cdots \otimes_E \bar{a}_{i+1} \otimes_E a_{i+2}) = 1 \otimes_E \bar{a}_0 \otimes_E \bar{a}_1 \otimes_E \cdots \otimes_E \bar{a}_{i+1} \otimes_E a_{i+2}$. \square

Llamaremos a $C_{\text{Bar}E}(A)$ la resolución Bar E -reducida de A . Para simplificar notación seguiremos llamando δ_n a los diferenciales de dicha resolución.

2.3.6. Estructura de la cohomología de Hochschild como álgebra graduada

Para calcular la cohomología de Hochschild de A podemos utilizar la resolución Bar y aplicarle el funtor $\text{Hom}_{A^e}(-, A)$. Utilicemos ahora el conocido isomorfismo $F_X : \text{Hom}_{A^e}(A \otimes X \otimes A) \rightarrow \text{Hom}_k(X, A)$ natural en X dado por $F_X(\varphi)(x) = \varphi(1 \otimes x \otimes 1)$. El complejo resultante tiene como espacio vectorial graduado subyacente a $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \text{Hom}_k(A^{\otimes i}, A)$ sobre el cual podemos definir un producto llamado el producto cup que da al complejo una estructura de álgebra diferencial graduada.

Definición 2.3.17. Dados elementos homogéneos $\varphi \in \text{Hom}_k(A^{\otimes n}, A)$ y $\phi \in \text{Hom}_k(A^{\otimes m}, A)$, el **producto cup** de φ y ϕ es el elemento $\varphi \smile \phi \in \text{Hom}_k(A^{\otimes(n+m)}, A)$ definido por:

$$\varphi \smile \phi(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m}) = \varphi(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \phi(a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m}).$$

Lema 2.3.18. Sean φ y ϕ elementos homogéneos de grados n y m respectivamente. El producto cup satisface

$$\delta_{n+m}(\varphi \smile \phi) = \delta_n(\varphi) \smile \phi + (-1)^{nm} \varphi \smile \delta_m(\phi).$$

El lema anterior garantiza que el producto cup puede definirse en la cohomología de Hochschild dando a la misma estructura de k -álgebra graduada.

Observación 2.3.19. El producto cup en la cohomología de Hochschild coincide con el producto de Yoneda. Una prueba de este hecho se encuentra en [27].

Partamos ahora de la resolución Bar E -reducida. Al aplicarle el functor $\text{Hom}_{A^e}(-, A)$ y considerar el isomorfismo $F_X : \text{Hom}_{A^e}(A \otimes_E X \otimes_E A) \rightarrow \text{Hom}_{E^e}(X, A)$ natural en X dado por

$$F(X)(\varphi)(x) = \varphi(1 \otimes_E x \otimes_E 1)$$

obtenemos el complejo:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{E^e}(E, A) \xrightarrow{E_0} \text{Hom}_{E^e}(\bar{A}, A) \xrightarrow{E_1} \text{Hom}_{E^e}(\bar{A} \otimes_E \bar{A}, A) \xrightarrow{E_2} \text{Hom}_{E^e}(\bar{A}^{\otimes_E 3}, A) \longrightarrow \dots$$

Definiremos ahora el producto cup reducido en $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \text{Hom}_{E^e}(\bar{A}^{\otimes_E i}, A)$. Dados $\varphi \in \text{Hom}_{E^e}(\bar{A}^{\otimes_E n}, A)$ y $\phi \in \text{Hom}_{E^e}(\bar{A}^{\otimes_E m}, A)$,

$$\varphi \smile_{\text{red}} \phi(\bar{a}_1 \otimes \dots \otimes \bar{a}_{n+m}) = \varphi(\bar{a}_1 \otimes \dots \otimes \bar{a}_n) \phi(\bar{a}_{n+1} \otimes \dots \otimes \bar{a}_{n+m}).$$

El producto \smile_{red} también induce un producto en cohomología que utilizando la Definición 2.3.13, la Observación 2.3.14 y la observación anterior se prueba que coincide con el producto cup usual así que lo denotaremos simplemente \smile .

Existe otro producto en la cohomología de Hochschild llamado corchete de Gerstenhaber que puede definirse sobre $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \text{Hom}_k(A^{\otimes i}, A)$ dándole una estructura de superálgebra de Lie.

Definición 2.3.20. Dadas $f \in \text{Hom}_k(A^{\otimes n}, A)$ y $g \in \text{Hom}_k(A^{\otimes m}, A)$, se define el **asociador** de f y g , que notaremos $f \circ g \in \text{Hom}_k(A^{\otimes m+n-1}, A)$ el cual evaluando en $a_1 \otimes \dots \otimes a_{n+m-1}$ da como resultado

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{(i-1)(m-1)} f(a_1 \otimes \dots \otimes a_{i-1} \otimes g(a_i \otimes \dots \otimes a_{i+m-1}) \otimes a_{i+m} \otimes \dots \otimes a_{n+m-1}).$$

Se define luego el **corchete de Gerstenhaber** como:

$$[f, g] = f \circ g - (-1)^{(n-1)(m-1)} g \circ f.$$

Teorema 2.3.21. [15, Theorem 3] Dadas $f \in \text{Hom}_k(A^{\otimes n}, A)$ y $g \in \text{Hom}_k(A^{\otimes m}, A)$, se cumple que:

$$\delta(f \circ g) = f \circ \delta(g) + (-1)^{m-1} \delta(f) \circ g + (-1)^{m-1} (f \smile g - (-1)^{mn} g \smile f).$$

El teorema anterior implica que si definimos el corchete del producto cup $[f, g]^{\smile} = f \smile g - (-1)^{mn} g \smile f$ en $\bigoplus_{i=0}^{\infty} H^i(A)$ este se anula lo que le da a $\bigoplus_{i=0}^{\infty} H^i(A)$ estructura de álgebra graduada conmutativa.

Enunciaremos ahora una proposición cuya demostración es consecuencia del hecho que el asociador da a $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \text{Hom}_k(A^{\otimes i}, A)$ estructura de álgebra de pre-Lie y del Teorema 2.3.18 para la tercera identidad.

Proposición 2.3.22. Con las notaciones anteriores, sean f , g y h de grados n , m y p respectivamente. Valen las siguientes igualdades:

1. $[f, g] = -(-1)^{(n-1)(m-1)}[g, f]$,
2. $(-1)^{(n-1)(p-1)}[[f, g], h] + (-1)^{(m-1)(n-1)}[[g, h], f] + (-1)^{(p-1)(m-1)}[[h, f], g] = 0$,
3. $\delta([f, g]) = [f, \delta(g)] + (-1)^{m-1}[\delta(f), g]$.

Las identidades 1 y 2 son las que dan a $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \text{Hom}_k(A^{\otimes i}, A)$ una estructura de superálgebra de Lie, mientras que la identidad 3 asegura que podemos definir el corchete de Gerstenhaber en cohomología.

Observación 2.3.23. La restricción del corchete de Gerstenhaber a $\text{Hom}_k(A, A)$ da a este espacio una estructura de álgebra de Lie que a su vez da estructura de álgebra de Lie a $H^1(A)$. Estudiaremos esta estructura para el caso de las álgebras toupie en el Capítulo 6. Además, utilizando el corchete de Gerstenhaber, $H^i(A)$ será una representación de Lie de $H^1(A)$.

En forma similar al producto cup, podemos definir en $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \text{Hom}_{E^e}(\overline{A}^{\otimes i}, A)$ el asociador de f con g , $f \circ g \in \text{Hom}_{E^e}(\overline{A}^{\otimes m+n-1}, A)$ el cual evaluado en $\overline{a_1} \otimes_E \cdots \otimes_E \overline{a_{n+m-1}}$ da como resultado

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{(i-1)(m-1)} f(\overline{a_1} \otimes_E \cdots \otimes_E \overline{a_{i-1}} \otimes_E \overline{g(\overline{a_i} \otimes_E \cdots \otimes_E \overline{a_{i+m-1}})}) \otimes_E \overline{a_{i+m}} \otimes_E \cdots \otimes_E \overline{a_{n+m-1}}.$$

Si ahora definimos el corchete de Gerstenhaber reducido como

$$[f, g]_{\text{red}} = f \circ g - (-1)^{(n-1)(m-1)} g \circ f,$$

obtenemos que el corchete de Gerstenhaber queda bien definido en cohomología y coincide con el definido a partir de la resolución Bar. Una prueba detallada de esto se encuentra en el apéndice B de [21].

2.4. Familias uniparamétricas de deformaciones

Esta sección contiene los conceptos y resultados básicos que necesitaremos para el cálculo de las deformaciones de las álgebras toupie. Para más detalles ver [8] y [16].

Definición 2.4.1. Sea A una k -álgebra asociativa. Una **familia uniparamétrica de deformaciones de A** , o simplemente una deformación de A , es un producto asociativo en $A[[t]]$ determinado por la extensión $k[[t]]$ -bilineal de una función $f_t : A \times A \rightarrow A[[t]]$ dada por:

$$f_t(a, b) = ab + f_1(a, b)t + f_2(a, b)t^2 + \dots$$

con $a, b \in A$, donde $f_i : A \times A \rightarrow A$ es k -bilineal para todo $i \in \mathbb{N}$.

Sea A_{f_t} o simplemente A_t una deformación de A , la condición de asociatividad del nuevo producto es equivalente a:

$$f_t(f_t(a, b), c) - f_t(a, f_t(b, c)) = 0 \quad \forall a, b, c \in A.$$

Desarrollando la ecuación anterior y utilizando la k -bilinealidad, esta condición se traduce en:

$$\sum_{i+j=s} f_i(f_j(a, b), c) - f_i(a, f_j(b, c)) = 0 \quad \forall a, b, c \in A, \forall s \in \mathbb{N}_0,$$

y donde $f_0(a, b) = ab$, el producto en A .

Despejando los términos correspondientes a $(i, j) = (s, 0)$ e $(i, j) = (0, s)$, para todo $s \in \mathbb{N}_0$, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\sum_{i+j=s, i,j>0} f_i \circ f_j = b^2(f_s)$$

donde $f_i \circ f_j$ es el asociador de f_i y f_j y b^2 es el diferencial en grado 2 del complejo de Hochschild $\text{Hom}_k(A^{\otimes \bullet}, A)$. Estas ecuaciones suelen llamarse **ecuaciones de deformación**. Observamos que para $s = 0$ estas ecuaciones describen la asociatividad del producto de A y para $s = 1$ dicen que $b^2(f_1) = 0$, es decir, f_1 debe ser un 2-cociclo de Hochschild. Más en general, si A_{f_t} es una familia uniparamétrica de deformaciones de A tal que $f_1 = f_2 = \dots = f_{n-1} = 0$, entonces f_n es un 2-cociclo de Hochschild ya que en ese caso las ecuaciones de deformación dicen que:

$$\sum_{i+j=n, i,j>0} f_i \circ f_j = b^2(f_n)$$

y $f_i = 0$ para todo $i < n$.

Definición 2.4.2. Sea f_1 un 2-cociclo de Hochschild. Decimos que f_1 es **integrable** si existen $\{f_i\}_{i \geq 2}$ tales que la familia $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ verifica las ecuaciones de deformación, es decir, si existe una familia uniparamétrica de deformaciones que comienza con f_1 .

Definición 2.4.3. Dos familias de deformaciones, A_{f_t} y A_{g_t} se dicen **equivalentes** si existe un isomorfismo de $k[[t]]$ -álgebras $\Phi_t : A_{f_t} \rightarrow A_{g_t}$ dado por la extensión $k[[t]]$ -lineal de

$$\Phi_t(a) = a + \phi_1(a)t + \phi_2(a)t^2 + \dots$$

donde $\phi_i : A \rightarrow A$ es k -lineal para todo $i \in \mathbb{N}$. Decimos que una familia A_{f_t} es **trivial** si es equivalente al producto usual de $A[[t]]$. Un álgebra A es **rígida** si toda deformación de A es trivial.

En general, si A_{f_t} es equivalente a A_{g_t} , al desarrollar la igualdad $\Phi_t(f_t(a, b)) = g_t(\Phi_t(a), \Phi_t(b))$ se deduce que $f_1 = g_1 + b^1(\phi_1)$; sin embargo el recíproco es falso, un mismo 2-cociclo podría integrarse de dos maneras no equivalentes.

Terminaremos esta sección citando algunos resultados clásicos de la teoría de deformaciones que usaremos en los próximos capítulos.

Proposición 2.4.4. [8, Proposición 3.2.18] *Sea f_t una familia uniparamétrica de deformaciones de A no trivial. Existe $n \in \mathbb{N}$, y una familia uniparamétrica de deformaciones A_{g_t} de A que cumple que $g_1 = \dots = g_{n-1} = 0$ y g_n es un 2-cociclo no cohomólogo a cero equivalente a A_{f_t} .*

Corolario 2.4.5. *Si $H^2(A) = 0$, entonces A es rígida.*

Proposición 2.4.6. *Sea A_{f_t} una deformación trivial de A distinta del producto usual de $A[[t]]$. Sea $i_0 \in \mathbb{N}$ el mínimo de los $i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i \neq 0$. Entonces f_{i_0} es un 2-coborde.*

2.5. Álgebras de Lie.

A lo largo de esta sección enunciaremos muchos de los resultados básicos de álgebras de Lie que serán utilizados más adelante. Un análisis más detallado del tema se puede encontrar en [13] y [19]. Las álgebras de Lie con las que trabajaremos serán siempre de dimensión finita.

Definición 2.5.1. Un **álgebra de Lie** \mathfrak{g} es un k -espacio vectorial con un mapa bilineal antisimétrico,

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

que satisface la siguiente identidad para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

El mapa bilineal se llama **corchete de Lie** y la identidad anterior se llama **identidad de Jacobi**.

Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} , una **subálgebra de Lie** \mathfrak{h} de \mathfrak{g} es un subespacio vectorial tal que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Un **morfismo** entre álgebras de Lie es una transformación lineal que preserva el corchete de Lie.

Ejemplos 2.5.2. 1. Sea V un k -espacio vectorial. Consideremos el conjunto de los endomorfismos de V al que llamaremos $\text{End}(V)$. La aplicación:

$$[,] : \text{End}(V) \times \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V)$$

definida por: $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ es un corchete de Lie.

2. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $\text{sl}_n(\mathbb{C})$ el conjunto de las matrices con coeficientes en \mathbb{C} de tamaño $n \times n$ y de traza nula. La fórmula $[A, B] = AB - BA$ da a $\text{sl}_n(\mathbb{C})$ una estructura de álgebra de Lie que puede verse como una subálgebra de Lie de $\text{End}(V)$ si V es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión n e identificamos los endomorfismos de V con las matrices $n \times n$.

Definición 2.5.3. Una subálgebra \mathfrak{h} de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es un **ideal** si para todo $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{g}$ verifica que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. Un álgebra de Lie se dice **simple** si es de dimensión mayor a uno y no contiene ideales no triviales.

Definición 2.5.4. Dada un álgebra A , una **k -derivación** de A en A es un mapa k -lineal $D : A \rightarrow A$ que verifica la regla de Leibniz, o sea tal que $D(ab) = aD(b) + D(a)b$ para todo $a, b \in A$. Denotamos $\text{Der}_k(A)$ al conjunto de todas las k -derivaciones de A . Este conjunto es un álgebra de Lie con el corchete inducido por el de $\text{End}_k(A)$.

Sean \mathfrak{h} y \mathfrak{k} dos álgebras de Lie y $\delta : \mathfrak{h} \rightarrow \text{Der}_k(\mathfrak{k})$ un morfismo de álgebras de Lie. Consideremos el espacio vectorial $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$. Puede probarse fácilmente que el mapa:

$$[(h, k), (h', k')] = ([h, h'], \delta(h)(k') - \delta(h')(k) + [k, k'])$$

es un corchete de Lie en $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$; el álgebra de Lie así obtenida se llama el **producto semidirecto** de \mathfrak{h} y \mathfrak{k} y se escribe $\mathfrak{h} \rtimes_{\delta} \mathfrak{k}$. Pensando a \mathfrak{h} y \mathfrak{k} como subconjuntos de $\mathfrak{h} \rtimes_{\delta} \mathfrak{k}$ en la forma usual, \mathfrak{h} resulta una subálgebra y \mathfrak{k} un ideal. Recíprocamente, si un álgebra de Lie \mathfrak{g} se puede descomponer de la forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$, en la cual \mathfrak{h} es una subálgebra y \mathfrak{k} un ideal, entonces existe un morfismo de álgebras de Lie $\delta : \mathfrak{h} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{k})$ tal que \mathfrak{g} es isomorfa a $\mathfrak{h} \rtimes_{\delta} \mathfrak{k}$.

Observación 2.5.5. Supongamos que \mathfrak{g} es un álgebra de Lie, que $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ es un ideal y que \mathfrak{h} es una subálgebra de \mathfrak{g} . El álgebra \mathfrak{g} es producto semidirecto de \mathfrak{h} por \mathfrak{k} si y solo si la aplicación natural $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ induce un isomorfismo entre \mathfrak{h} y $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$.

Definición 2.5.6. Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} , el **centro de \mathfrak{g}** es $Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \text{ tales que } [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}$. Diremos que un álgebra de Lie es **abeliana** si $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Ejemplos 2.5.7. 1. *Todo espacio vectorial sobre \mathbb{C} se puede ver como un álgebra de Lie abeliana definiendo $[u, v] = 0$ para todo $u, v \in V$.*
2. *El subconjunto de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ formado por las matrices diagonales de traza nula al que llamaremos \mathfrak{h} con el corchete inducido es un álgebra de Lie abeliana.*

Definición 2.5.8. La **serie central descendente** de \mathfrak{g} es una sucesión de ideales

$$\mathfrak{D}_0\mathfrak{g} \supset \mathfrak{D}_1\mathfrak{g} \supset \mathfrak{D}_2\mathfrak{g} \supset \dots$$

definidos recursivamente por $\mathfrak{D}_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{D}_k\mathfrak{g} = [\mathfrak{D}_{k-1}\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, para todo $k \geq 1$. El álgebra \mathfrak{g} se dice **nilpotente** si existe $m > 0$ tal que $\mathfrak{D}_m\mathfrak{g} = 0$.

Definición 2.5.9. La **serie derivada** de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es la sucesión de ideales

$$\mathfrak{D}^0\mathfrak{g} \supset \mathfrak{D}^1\mathfrak{g} \supset \mathfrak{D}^2\mathfrak{g} \supset \dots$$

definidos recursivamente por $\mathfrak{D}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{D}^k\mathfrak{g} = [\mathfrak{D}^{k-1}\mathfrak{g}, \mathfrak{D}^{k-1}\mathfrak{g}]$, para todo $k \geq 1$. El álgebra \mathfrak{g} se dice **soluble** si existe $m > 0$ tal que $\mathfrak{D}^m\mathfrak{g} = 0$. Decimos que el álgebra \mathfrak{g} es **semisimple** si no tiene ideales solubles no nulos.

Ejemplos 2.5.10. 1. *Si \mathfrak{d}_+ es el subconjunto de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ formado por las matrices triangulares superiores de diagonal nula se tiene que \mathfrak{d}_+ con el corchete inducido es una subálgebra de Lie nilpotente.*
2. *La subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{d}_+$ de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ compuesta por las matrices triangulares superiores de traza nula es un álgebra de Lie soluble.*

Observación 2.5.11. Para que un álgebra de Lie sea semisimple basta con pedir que no tenga ideales abelianos no nulos.

La suma de dos ideales solubles es soluble. Consideremos la suma de todos los ideales solubles en \mathfrak{g} , que resulta ser un ideal soluble maximal al que llamaremos **radical de \mathfrak{g}** y denotaremos $\text{Rad}(\mathfrak{g})$. Observemos que $\mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g})$ es semisimple.

A continuación veremos la descomposición de Levi de un álgebra de Lie.

Teorema 2.5.12. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita sobre \mathbb{C} . Existe una descomposición,*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \ltimes \text{Rad}(\mathfrak{g})$$

con $\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g})$.

2.5.1. Representaciones de álgebras de Lie

Definición 2.5.13. Una k -espacio vectorial V es una **representación** de un álgebra de Lie \mathfrak{g} si existe un mapa de álgebras de Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) = \text{End}(V)$$

o equivalentemente una acción de \mathfrak{g} en V tal que:

$$[X, Y](v) = X(Y(v)) - Y(X(v))$$

para todo $v \in V$.

Decimos que una representación $V \neq \{0\}$ es **indescomponible** si no se puede escribir como suma directa de dos subrepresentaciones propias de V . La representación será además **irreducible** si no tiene subrepresentaciones propias.

Ejemplos 2.5.14. 1. Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} , podemos considerar el espacio vectorial $V = \mathbb{C}$ con la acción $X(v) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ y $v \in \mathbb{C}$. Esta es claramente una representación irreducible de \mathfrak{g} a la que llamaremos **representación trivial de dimensión 1**.

2. Si consideramos $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ y $V = \mathbb{C}^n$ con la acción de multiplicar la matriz por el vector obtenemos una representación a la que llamaremos **representación estándar**. Es fácil ver que esta representación es irreducible observando como actúan las matrices elementales E_{ij} con $i \neq j$.

De aquí en adelante todas la representaciones serán de dimensión finita.

Dado un \mathbb{C} -espacio vectorial V , recordemos que gracias a la descomposición de Jordan, todo $X \in \text{End}(V)$ se puede escribir de forma única como $X = X_s + X_n$ con X_s un endomorfismo diagonalizable y X_n un endomorfismo nilpotente que conmutan entre sí.

Teorema 2.5.15. [13, Theorem 9.20] Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple. Para cualquier elemento $X \in \mathfrak{g}$ existen X_s y $X_n \in \mathfrak{g}$ tales que para cualquier representación $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ resulta $\rho(X_s) = \rho(X)_s$ y $\rho(X_n) = \rho(X)_n$.

2.5.2. Representaciones de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

Dada el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, podemos considerar la siguiente descomposición

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{d}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{d}_-$$

donde \mathfrak{d}_+ es el conjunto de matrices triangulares superiores de diagonal nula, \mathfrak{d}_- es el conjunto de matrices triangulares inferiores de diagonal nula y \mathfrak{h} es el conjunto de matrices diagonales de traza nula.

Dada una representación V de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, utilizando el Teorema 2.5.15 deducimos que \mathfrak{h} actúa en forma diagonalizable y por lo tanto podemos descomponer a V a partir de sus valores y subespacios propios.

Definición 2.5.16. Sea V una representación de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Para cada $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ definimos

$$V_\lambda = \{v \in V : x.v = \lambda(x)v, \forall x \in \mathfrak{h}\}.$$

Si $V_\lambda \neq 0$, entonces λ es un **peso** y V_λ es un **espacio de peso** de \mathfrak{h} en V ; la **multiplicidad** de λ en V es la dimensión de V_λ .

Un **vector maximal** $v \in V$ es un vector no nulo tal que $x.v = 0$, para todo $x \in \mathfrak{d}_+$ y existe $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tal que $v \in V_\lambda$. En ese caso λ se dice un **peso maximal** de \mathfrak{h} en V .

La siguiente proposición se encuentra en [19]

Proposición 2.5.17. Si V es una representación no nula de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, entonces

$$V = \bigoplus_{\lambda \in P(V)} V_\lambda$$

donde $P(V)$ es el conjunto de los pesos de \mathfrak{h} en V .

Ejemplo 2.5.18. Si $V = \mathbb{C}^n$ es la representación estándar de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ y $L_i \in \mathfrak{h}^*$ es tal que

$$L_i \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_{nn} \end{pmatrix} = h_{ii}, \text{ entonces } h \cdot e_i = L_i(h)e_i ; \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Luego L_1, L_2, \dots, L_n , son los pesos de \mathfrak{h} en V con multiplicidad 1 y L_1 es el único peso maximal.

Los siguientes dos teoremas son casos particulares de teoremas demostrados en el capítulo VI de [19].

Teorema 2.5.19. Dada una representación no nula V de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$,

1. V tiene algún vector maximal v de peso maximal λ .
2. Si W es la subrepresentación generada por el vector maximal v , entonces:
 - a) W es irreducible,
 - b) la multiplicidad de λ en W es 1.

Teorema 2.5.20. Toda representación irreducible de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ tiene un único peso maximal que además tiene multiplicidad 1. Si dos representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ tienen el mismo peso maximal, entonces son isomorfas.

Este último resultado es útil para clasificar representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ a menos de isomorfismos.

Capítulo 3

Resolución del álgebra como bimódulo

A partir de este capítulo trabajaremos siempre con un álgebra toupie $A = kQ/\mathcal{I}$.

3.1. Construcción de la resolución minimal

En esta sección construiremos una resolución minimal para un álgebra toupie A como A^e -módulo con el objetivo de calcular luego su cohomología de Hochschild. Nuestra resolución resultará una adaptación de la que dio Bardzell para álgebras monomiales en [3]. Para la construcción de dicha resolución minimal utilizaremos algunos resultados del artículo [24] adaptados a nuestro caso.

3.1.1. Las n -ambigüedades

El concepto de n -ambigüedad es central para la comprensión de los A^e -módulos proyectivos que participan en la resolución minimal, especialmente en grados altos.

Definición 3.1.1. Decimos que un camino u es un *divisor a izquierda* (resp. *divisor a derecha*) de un camino v si existe un camino s tal que $v = us$ (resp. $v = su$).

Definición 3.1.2. Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, una *n -ambigüedad a derecha* p es un camino en Q que cumple las siguientes condiciones:

1. se escribe como $p = u_0 \dots u_n$ con u_i caminos de largo mayor o igual a 1 para todo i ,
2. ningún u_i está en \mathcal{I} , con $i = 0, \dots, n$,
3. el camino $u_0 \in Q_1$,
4. para todo i tenemos que $u_i u_{i+1} \in \mathcal{I}$ y $u_i u$ no está en \mathcal{I} para todo u divisor propio a izquierda de u_{i+1}

Notemos que una 0-ambigüedad es una flecha y una 1-ambigüedad es una relación monomial.

Definición 3.1.3. Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, una *n -ambigüedad a izquierda* p es un camino en Q que cumple las siguientes condiciones:

1. se escribe como $p = w_n \dots w_0$ con w_i caminos de largo mayor o igual a 1 para todo i ,
2. ningún w_i está en \mathcal{I} , con $i = 0, \dots, n$,
3. el camino $w_0 \in Q_1$,

4. para todo i tenemos que $w_{i+1}w_i \in \mathcal{I}$ y ww_i no está en \mathcal{I} para todo w divisor propio a derecha de w_{i+1}

El siguiente lema corresponde al Lema 1 de [24]. La prueba está incluida para trabajar con la notación propuesta y reafirmar el concepto de n -ambigüedad.

Dado un camino p en Q , denotamos con $|p|$ el largo de dicho camino.

Lema 3.1.4. *Un camino es una n -ambigüedad a izquierda si y solo si lo es a derecha.*

Demostración. Supongamos que tenemos u_0, \dots, u_n tales que $u_{n-j} \dots u_n$ es una j -ambigüedad a izquierda para todo $j = 0, \dots, n$.

Afirmamos que se puede factorizar cada $u_i = u'_i u''_i$, con $|u'_i| > 0$ de forma tal que

$$u'_0 u''_0 \dots u'_{i-1} u''_{i-1} u'_i$$

es una i -ambigüedad a derecha para todo $i > 0$ y tal que para $i = 0$ u'_0 sea una 0 -ambigüedad a derecha.

Probaremos la afirmación anterior por inducción en i .

Para $i = 0$ la afirmación es evidente ya que podemos considerar la factorización $u_0 = u'_0 u''_0$ donde u'_0 es la primera flecha en u_0 ; así u'_0 resulta ser una 0 -ambigüedad a derecha.

Supongamos ahora que la afirmación se cumple para i dado. Como $u'_i u''_i u_{i+1} = u_i u_{i+1}$ posee un elemento de R como factor a izquierda, podemos escribir $u''_{i-1} u_i u_{i+1} = urw$ con $r \in R$ como en la Sección 2.2.1 y $|w|$ maximal. Notemos que r no tiene que ser necesariamente el elemento de R que es factor a izquierda de $u_i u_{i+1}$. Si verificamos que $u''_{i-1} u_i$ es un factor propio de ur , entonces podemos elegir u'_{i+1} de forma tal que $u''_{i-1} u_i u'_{i+1} = ur$. Aquí $u''_{i-1} u_i u'_{i+1}$ tiene un elemento de R como factor a derecha y no tiene divisores a izquierda ya que $|w|$ es maximal, por lo tanto $u'_0 u''_0 \dots u'_{i-1} u''_{i-1} u'_i$ es una i -ambigüedad a derecha.

Si este no fuera el caso tendríamos un factor propio a derecha de $u_{i-1} u_i$ conteniendo un elemento de R como factor, contradiciendo el hecho de que $u_{i-1} \dots u_n$ es una $(n - i + 1)$ -ambigüedad. Como $|u_n| = 1$, se tiene que $u''_n = 0$ y $u_0 \dots u_n$ es una n -ambigüedad a derecha. \square

Desde ahora hablaremos simplemente de i -ambigüedad cuando nos querramos referir a una i -ambigüedad a derecha o a izquierda. Notaremos con $V^{(i)}$ al conjunto de las i -ambigüedades, en particular $V^{(0)} = Q_1$. Denotaremos $kV^{(i)}$ al k -espacio vectorial generado por las i -ambigüedades, que tiene estructura natural de kQ_0 -bimódulo.

Lema 3.1.5. *Si u y v son n -ambigüedades, entonces u no es un divisor propio de v .*

Demostración. Supongamos que $u = u_0 u_1 \dots u_n$ es un divisor propio de $v = v_0 v_1 \dots v_n$ y que n es el menor entero que cumple con esta condición. Es claro por la definición de n -ambigüedad, que $n \geq 2$. Sean t_1 y t_2 , no ambos de largo cero, tales que $t_1 u t_2 = v$. La minimalidad de n implica que $v_0 \dots v_j$ es un divisor a izquierda de $t_1 u_0 \dots u_j$ para todo $j = 1, \dots, n - 1$, por lo tanto $u_{n-1} u_n$ es un divisor de $v_{n-1} v_n$. De lo anterior se deduce que $|t_2| = 0$ ya que $v_{n-1} v_n$ no puede tener divisores propios a izquierda en \mathcal{I} . Un argumento simétrico al recién expuesto se utiliza para probar que $|t_1| = 0$, lo que nos lleva a una contradicción. \square

Lema 3.1.6. Sea $i \geq 0$.

1. Si ab y bc son $(2i + 1)$ -ambigüedades con a, b, c de largo positivo y a, c no están en \mathcal{I} , entonces existe una $(2i + 2)$ -ambigüedad que es factor de abc .
2. Sea u una $2i$ -ambigüedad. El conjunto de factorizaciones $u = u^{(1)}u^{(2)}u^{(3)}$ con $u^{(2)}$ una $(2i - 1)$ -ambigüedad tiene exactamente dos elementos, uno con $|u^{(1)}| = 0$ y el otro con $|u^{(3)}| = 0$.

Demostración. 1. Como ab es una $(2i + 1)$ -ambigüedad, por definición escribimos

$$ab = w_0w_1w_2w_3 \dots w_{2i+1}.$$

Análogamente $bc = v_0v_1v_2v_3 \dots v_{2i+1}$. Observemos que como w_0 es una flecha y a no pertenece a \mathcal{I} , entonces, considerando el orden de los vértices de ab de izquierda a derecha, $t(w_0) \leq t(a)$ y $t(w_1) > t(a)$.

A continuación deduciremos la posición de cada uno de los caminos $v_0, v_1, \dots, v_{2i+1}$ relativa a los caminos $w_0, w_1, \dots, w_{2i+1}$.

En primer lugar observemos que $t(v_0) \leq t(w_1)$ ya que v_0 es una flecha, y, como $w_1w_2 \in \mathcal{I}$ y no tiene divisores a izquierda en \mathcal{I} , entonces $t(v_1) \geq t(w_2)$. Utilizando que $w_2w_3 \in \mathcal{I}$ y que v_1v_2 no tiene factores propios a izquierda en \mathcal{I} , necesariamente es $t(v_2) \leq t(w_3)$.

Probemos ahora por inducción lo siguiente:

- $t(v_{2j}) \leq t(w_{2j+1})$ para $j \geq 0$,
- $t(v_{2j-1}) \geq t(w_{2j})$ para $j \geq 1$.

El caso base de la inducción ya fue probado, comencemos con el paso inductivo.

Sabemos que $t(v_{2j-2}) \leq t(w_{2j-1})$ y que $t(v_{2j-3}) \geq t(w_{2j-2})$ por hipótesis inductiva. Como $w_{2j-1}w_{2j} \in \mathcal{I}$ y no tiene divisores propios a izquierda en \mathcal{I} , entonces $t(v_{2j-1}) \geq t(w_{2j})$. Dado que $v_{2j-1}v_{2j} \in \mathcal{I}$ y no tiene divisores propios a izquierda en \mathcal{I} , obtenemos que $t(v_{2j}) \leq t(w_{2j+1})$.

En particular $t(v_{2i-1}) \geq t(w_{2i})$ y existe al un elemento en R que comienza luego de $t(w_{2i})$. Consideremos aquel que comience más a la izquierda y llamémoslo σ . Sea w'_{2i+2} al camino tal que $\sigma \in w_{2i+1}w'_{2i+2}$ y $t(w'_{2i+2}) = t(\sigma)$.

Para probar que $w_0 \dots w_{2i+1}w'_{2i+2}$ es una $(2i + 2)$ -ambigüedad verifiquemos primero que w'_{2i+2} no pertenece a \mathcal{I} . Para esto observemos que w'_{2i+2} es divisor de v_{2i+1} . Por otro lado $w_{2i+1}w'_{2i+2}$ no tiene divisores a izquierda en \mathcal{I} al haber considerado el elemento de R que comenzaba más a la izquierda luego de $t(w_{2i})$. En conclusión, con σ completamos la $(2i + 1)$ -ambigüedad ab en abc para obtener la $(2i + 2)$ -ambigüedad buscada.

2. Si $u = u_0u_1 \dots u_{2i} = w_{2i} \dots w_1w_0$, consideremos la $2i$ -ambigüedad $u^{(2)} = u_0u_1 \dots u_{2i-1}$, entonces $u = u^{(1)}u^{(2)}u^{(3)}$ con $|u^{(1)}| = 0$. Si tomamos ahora la $2i$ -ambigüedad de la forma $u^{(2)} = w_{2i-1} \dots w_1w_0$, resulta que $u = u^{(1)}u^{(2)}u^{(3)}$ con $|u^{(3)}| = 0$. Supongamos que existe otra factorización posible $u = u^{(1')}u^{(2')}u^{(3')}$ con $u^{(2')}$ una $(2i - 1)$ -ambigüedad. En ese caso, considerando las $(2i - 1)$ -ambigüedades $u_0u_1 \dots u_{2i-1}$ y $u^{(2')}$ podemos usar la primera parte del lema y asegurar que existe una $2i$ -ambigüedad que es un factor propio de u , lo cual genera una contradicción. □

3.1.2. La resolución

A continuación presentaremos el complejo que será una resolución proyectiva minimal de A como A^e -módulo. En este capítulo todos los tensores serán sobre $E = kQ_0$.

Notación 3.1.7. Dado un camino $u \in Q$, cuando escribimos $\sum u^{(1)} \otimes u^{(2)} \otimes u^{(3)} \in A \otimes_E A \otimes_E A$ nos referimos a la suma de todas las formas posibles de factorizar u como el producto $u^{(1)}u^{(2)}u^{(3)} = u$. Si $u^{(2)}$ es una flecha escribiremos $\sum u^{(1)} \otimes \overleftarrow{u^{(2)}} \otimes u^{(3)}$. En el caso en que ρ'_i es una relación no monomial, sabemos que es de la forma $\alpha^{(k_i)} + \sum_{j>k_i} b_{ij}\alpha^{(j)}$, entonces cuando escribimos $\sum [\rho'_i]^{(1)} \otimes \overleftarrow{[\rho'_i]^{(2)}} \otimes [\rho'_i]^{(3)}$ nos referimos a $\sum [\alpha^{(k_i)}]^{(1)} \otimes \overleftarrow{[\alpha^{(k_i)}]^{(2)}} \otimes [\alpha^{(k_i)}]^{(3)} + \sum_{j>k_i} b_{ij} \sum [\alpha^{(j)}]^{(1)} \otimes \overleftarrow{[\alpha^{(j)}]^{(2)}} \otimes [\alpha^{(j)}]^{(3)}$.

Dado $i \geq 0$, la i -ésima componente del complejo será:

$$P_i = \begin{cases} A \otimes_E A, & \text{si } i=0, \\ A \otimes_E kV^{(0)} \otimes_E A, & \text{si } i=1, \\ A \otimes_E kR \otimes_E A, & \text{si } i=2, \\ A \otimes_E kV^{(i-1)} \otimes_E A, & \text{si } i>2. \end{cases}$$

Observemos que $A \otimes_E A \simeq A \otimes_E kQ_0 \otimes_E A$ y que $V^{(1)} = R_{\text{mon}}$.

Los diferenciales d_i son los únicos morfismos de A -bimódulos tales que si $u = u_0 \dots u_i = w_i \dots w_0$ es una i -ambigüedad,

$$d_i(1 \otimes u \otimes 1) = \begin{cases} u \otimes 1 - 1 \otimes u & \text{si } i=0, \\ \sum u^{(1)} \otimes u^{(2)} \otimes u^{(3)} \text{ con } u^{(2)} \in V^{(i-1)} & \text{si } i \text{ es impar e } i \geq 1, \\ w_i \otimes w_{i-1} \dots w_0 \otimes 1 - 1 \otimes u_0 \dots u_{i-1} \otimes u_i & \text{si } i \text{ es par e } i \geq 2. \end{cases}$$

Si ρ'_i es una relación no monomial definimos:

$$d_1(1 \otimes \rho'_i \otimes 1) = \sum [\rho'_i]^{(1)} \otimes \overleftarrow{[\rho'_i]^{(2)}} \otimes [\rho'_i]^{(3)}.$$

Así obtenemos:

$$C_{\min}(A) : \dots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_{i-1}} \dots P_3 \xrightarrow{d_2} P_2 \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \longrightarrow 0$$

Lema 3.1.8. $C_{\min}(A)$ es un complejo.

Demostración. Debemos probar que $d_{i-1} \circ d_i = 0$ para todo $i \geq 1$.

- Veamos primero que $d_0 \circ d_1 = 0$.
Dada una relación monomial σ_i ,

$$\begin{aligned} d_0 \circ d_1(1 \otimes \sigma_i \otimes 1) &= d_0\left(\sum \sigma_i^{(1)} \otimes \overleftarrow{\sigma_i^{(2)}} \otimes \sigma_i^{(3)}\right) = \sum \sigma_i^{(1)} d_0(1 \otimes \overleftarrow{\sigma_i^{(2)}} \otimes 1) \sigma_i^{(3)} \\ &= \sum \sigma_i^{(1)} (\overleftarrow{\sigma_i^{(2)}} \otimes 1 - 1 \otimes \overleftarrow{\sigma_i^{(2)}}) \sigma_i^{(3)} = 1 \otimes \sigma_i - \sigma_i \otimes 1 = 0. \end{aligned}$$

El cálculo para una relación no monomial ρ'_i es análogo.

- Veamos ahora que $d_1 \circ d_2 = 0$.
Dada una 2-ambigüedad $v = v_0 v_1 v_2 = w_2 w_1 w_0$,

$$\begin{aligned}
d_1 \circ d_2(1 \otimes v \otimes 1) &= d_1(w_2 \otimes w_1 w_0 \otimes 1) - d_1(1 \otimes v_0 v_1 \otimes v_2) \\
&= w_2 d_1(1 \otimes w_1 w_0 \otimes 1) - d_1(1 \otimes v_0 v_1 \otimes 1) v_2 \\
&= w_2 \left(\sum (w_1 w_0)^{(1)} \otimes \overleftarrow{(w_1 w_0)^{(2)}} \otimes (w_1 w_0)^{(3)} \right) \\
&\quad - \left(\sum (v_0 v_1)^{(1)} \otimes \overleftarrow{(v_0 v_1)^{(2)}} \otimes (v_0 v_1)^{(3)} \right) v_2.
\end{aligned}$$

Si algún término apareciera en la primera suma y no en la segunda, entonces $(w_1 w_0)^{(3)}$ estaría estrictamente incluido en v_2 , por lo tanto $\overleftarrow{(w_1 w_0)^{(2)}} (w_1 w_0)^{(3)}$ estaría incluido en v_2 , al ser $\overleftarrow{(w_1 w_0)^{(2)}}$ una flecha, lo que implicaría que $w_2 (w_1 w_0)^{(1)} \supset v_0 v_1 = 0$. El mismo argumento se utiliza para probar que todos los términos no nulos de la segunda suma están también en la primera. En conclusión, $d_1 \circ d_2 = 0$.

- Veamos que para todo $i \geq 2$, $d_{2i-2} \circ d_{2i-1} = 0$.
Dada una $(2i-1)$ -ambigüedad $v = u_0 \dots u_{2i-1} = w_{2i-1} \dots w_0$,
 $d_{2i-2} \circ d_{2i-1}(1 \otimes v \otimes 1) = d_{2i-2}(\sum v^{(1)} \otimes v^{(2)} \otimes v^{(3)})$, donde $v^{(2)} \in V^{(2i-2)}$.

Consideremos el conjunto finito $F = \{v^{(1)} \otimes v^{(2)} \otimes v^{(3)} / v^{(1)} v^{(2)} v^{(3)} = v, v^{(2)} \in V^{(2i-2)}\}$ y llamemos n al cardinal de F . Vamos a definir un orden en F : diremos que $v_j^{(1)} \otimes v_j^{(2)} \otimes v_j^{(3)} < v_i^{(1)} \otimes v_i^{(2)} \otimes v_i^{(3)}$ si $|v_j^{(1)}| < |v_i^{(1)}|$. Observemos en primer lugar que si tuvieramos $|v_j^{(1)}| = |v_i^{(1)}|$ para $i \neq j$, entonces $v_j^{(2)}$ estaría estrictamente incluido en $v_i^{(2)}$ o $v_i^{(2)}$ estaría estrictamente incluido en $v_j^{(2)}$ y esto contradice el Lema 3.1.5.

Utilizando la segunda parte del Lema 3.1.6 sabemos que $v_1^{(2)}$ tiene solamente dos divisores en $V^{(2i-3)}$ a los cuales llamaremos v'_1 y v'_2 . A su vez, $v_2^{(2)}$ tiene dos divisores en $V^{(2i-3)}$, llamémoslos v''_2 y v'_3 . Observemos que si $v'_2 \neq v''_2$, por la primera parte del Lema 3.1.6, obtendríamos una $(2i-2)$ -ambigüedad entre $v_1^{(2)}$ y $v_2^{(2)}$ y esto no es posible por el orden elegido, por lo tanto $v'_2 = v''_2$. En general, $v_j^{(2)}$ tiene dos divisores v'_j y v'_{j+1} mientras que $v_{j+1}^{(2)}$ tiene dos divisores v'_{j+1} y v'_{j+2} .

Escribamos ahora $v_j^{(2)} = v'_j u_{2i-2,j} = w_{2i-2,j} v'_{j+1}$. Observemos que $u_{2i-2,1} = u_{2i-2}$ ya que $v'_1 = u_0 u_1 \dots u_{2i-3}$ y $w_{2i-2,n} = w_{2i-2}$ ya que $v'_{n+1} = w_{2i-3} \dots w_1 w_0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
d_{2i-2} \circ d_{2i-1}(1 \otimes v \otimes 1) &= \sum_{j=1}^n v_j^{(1)} w_{2i-2,j} \otimes v'_{j+1} \otimes v_j^{(3)} - v_j^{(1)} \otimes v'_j \otimes u_{2i-2,j} v_j^{(3)} \\
&= w_{2i-1} w_{2i-2} \otimes v'_{n+1} \otimes 1 - 1 \otimes v'_1 \otimes u_{2i-2} u_{2i-1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- Veamos finalmente que si $i \geq 2$, entonces $d_{2i-1} \circ d_{2i} = 0$.
Dada una $2i$ -ambigüedad $u = u_0 \dots u_{2i} = w_{2i} \dots w_0$,

$$\begin{aligned} d_{2i-1} \circ d_{2i}(1 \otimes u \otimes 1) &= d_{2i-1}(w_{2i} \otimes w_{2i-1} \dots w_0 \otimes 1) - d_{2i-1}(1 \otimes u_0 \dots u_{2i-1} \otimes u_{2i}) \\ &= w_{2i}(\sum v^{(1)} \otimes v^{(2)} \otimes v^{(3)}) - (\sum z^{(1)} \otimes z^{(2)} \otimes z^{(3)})u_{2i} \end{aligned}$$

con $v^{(1)}v^{(2)}v^{(3)} = w_{2i-1} \dots w_0$, $v^{(2)} \in V^{(2i-2)}$, $z^{(1)}z^{(2)}z^{(3)} = u_0 \dots u_{2i-1}$ y $z^{(2)} \in V^{(2i-2)}$.

Consideremos los sumandos de la forma $z^{(1)} \otimes z^{(2)} \otimes z^{(3)}$ y supongamos que $s(z^{(2)}) < t(w_{2i})$, probaremos que en ese caso $z^{(3)}u_{2i} = 0$. Si $s(z^{(2)})$ coincidiera con $s(w_{2i})$, esto implicaría que $z^{(2)} = u_0 \dots u_{2i-2}$, $z^{(3)} = u_{2i-1}$ y por lo tanto $z^{(3)}u_{2i} = 0$. Si no, escribamos a la $2i$ -ambigüedad $z^{(2)} = x_0 x_1 \dots x_{2i-2}$. Al ser x_0 una flecha sabemos que $t(x_0) \leq t(w_{2i})$. Como $w_{2i}w_{2i-1} \in \mathcal{I}$ y no tiene divisores propios a derecha en \mathcal{I} , resulta que $t(w_{2i-1}) < t(x_1)$. Sabemos también que $x_1 x_2 \in \mathcal{I}$ y que no tiene divisores propios a izquierda en \mathcal{I} por lo tanto $t(w_{2i-2}) > t(x_2)$. Continuando con este proceso obtenemos que $t(w_2) > t(x_{2i-2})$ lo que implica que $w_1 w_0$ es un divisor de $z^{(3)}u_{2i}$ y así concluimos que $z^{(3)}u_{2i} = 0$.

De forma análoga podemos probar que si tenemos un sumando de la forma $v^{(1)} \otimes v^{(2)} \otimes v^{(3)}$ con $t(v^{(2)}) > s(u_{2i})$, entonces $w_{2i}v^{(1)} = 0$. En conclusión, tenemos los mismos sumandos nulos en cada una de las sumas y por lo tanto $d_{2i-1} \circ d_{2i} = 0$.

□

Observación 3.1.9. La resolución minimal que acabamos de definir coincide con la resolución de Bardzell a partir de $P_3 = A \otimes_E kV^{(2)} \otimes_E A$ ya que si i es mayor o igual que 2, las i -ambigüedades se construyen solamente utilizando las relaciones monomiales.

Lema 3.1.10. *Los A^e -módulos de $C_{\min}(A)$ son A^e -proyectivos.*

Demostración. Observemos en primer lugar que los A^e -módulos de C_{\min} son todos de la forma $A \otimes_E kS \otimes_E A$ con $S = \{w_1, \dots, w_r\}$ un conjunto finito de caminos. A continuación probaremos que kS es E^e -proyectivo. Para esto consideraremos el morfismo de E -bimódulos $i : kS \rightarrow (E^e)^r$ que manda a cada w_j en S a la r -upla $(0, 0, \dots, \underbrace{s(w_j) \otimes t(w_j)}_{j\text{-ésimo lugar}}, 0, \dots, 0)$. Dicho morfismo se escinde

por el morfismo de E -bimódulos $p : (E^e)^r \rightarrow kS$ que manda a la r -upla $(a_1^1 \otimes a_1^2, a_2^1 \otimes a_2^2, \dots, a_j^1 \otimes a_j^2, \dots)$ a $\sum_k w_k$ si $s(w_k) = a_k^1$ y $t(w_k) = a_k^2$ y a cero en caso contrario. En consecuencia kS es E^e -proyectivo y por lo tanto $A \otimes_E kS \otimes_E A$ es A^e -proyectivo. □

Para probar que efectivamente $C_{\min}(A)$ es un resolución proyectiva, veamos que el siguiente complejo tiene homología nula. Para esto definiremos morfismos de A -módulos a izquierda $\{s_i\}_{i \geq -1}$ como en el siguiente diagrama en el que μ denota la multiplicación:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & \rightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2^2} & A \otimes kR \otimes A & \xrightarrow{d_1^1} & A \otimes kV^{(0)} \otimes A & \xrightarrow{d_0^0} & A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A & \rightarrow & 0 \\ & & \text{Id} \downarrow & \swarrow s_2 & \text{Id} \downarrow & \swarrow s_1 & \text{Id} \downarrow & \swarrow s_0 & \text{Id} \downarrow & \swarrow s_{-1} & \text{Id} \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2^2} & A \otimes kR \otimes A & \xrightarrow{d_1^1} & A \otimes kV^{(0)} \otimes A & \xrightarrow{d_0^0} & A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A & \rightarrow & 0 \end{array}$$

y probaremos que se trata de una homotopía de contracción, o sea que:

- $\mu s_{-1} = \text{Id}$,
- $s_{-1}\mu + d_0 s_0 = \text{Id}$,
- para $i \geq 0$, $s_i d_i + d_{i+1} s_{i+1} = \text{Id}$.

Proposición 3.1.11. $C_{\min}(A)$ es una resolución proyectiva de A como A^e -módulo.

Demostración. Basta definir una familia de morfismos de A -módulos a izquierda $\{s_i\}_{i \geq -1}$ y probar que se trata de una homotopía de contracción. Dado $i \geq -1$, sea a un elemento de la k -base de caminos irreducibles \mathcal{B} , sean $e_{s(b)}$ el camino de largo cero en el comienzo del camino b y $e_{t(b)}$ el camino de largo cero en el final del camino b . Definamos en primer lugar

$$s_{-1}(a) = a \otimes e_{t(a)}, \text{ para } a \in A.$$

Para $i \geq 0$, observemos que basta definir s_i en los elementos de la forma $e_{s(w)} \otimes w \otimes a \in P_i$ y extenderlo de forma tal de obtener un morfismo de A -módulos a izquierda. Sean

$$s_0(e_{s(a)} \otimes a) = - \sum a^{(1)} \otimes \overleftarrow{a^{(2)}} \otimes a^{(3)} \text{ con } \overleftarrow{a^{(2)}} \in Q_1.$$

$$s_1(e_{s(\alpha)} \otimes \alpha \otimes a) = \begin{cases} e_0 \otimes \rho'_i \otimes e_w, & \text{si } \alpha a = W_{\rho'_i}; \\ e_{s(\alpha)} \otimes \sigma_j \otimes b, & \text{si } \alpha a = \sigma_j b \text{ en } Q \text{ con } \sigma_j \in R_{\text{mon}}; \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Para $i = 2$, dado $r \in R$,

$$s_2(e_{s(r)} \otimes r \otimes a) = - \sum (ra)^{(1)} \otimes (ra)^{(2)} \otimes (ra)^{(3)}$$

con $(ra)^{(2)} \in V^{(2)}$ si ra contiene una 2-ambigüedad y cero en caso contrario.

Observación 3.1.12. Si $r = \rho'_i$ es una relación no monomial, entonces $s_2(e_{s(r)} \otimes r \otimes a) = 0$.

Para $i > 2$, dado $w \in V^{(i-1)}$,

$$s_i(e_{s(w)} \otimes w \otimes a) = (-1)^{i+1} \sum (wa)^{(1)} \otimes (wa)^{(2)} \otimes (wa)^{(3)}$$

con $(wa)^{(2)} \in V^{(i)}$ si wa contiene una i -ambigüedad y cero en caso contrario.

Observación 3.1.13. Observemos que como todos los tensores son sobre E , $s_i(e_{s(w)} \otimes w \otimes a) = s_i(1 \otimes w \otimes a)$

Observación 3.1.14. Observemos que la homotopía $\{s_i\}_{i \geq -1}$ definida anteriormente coincide salvo por los signos con la definida en [24] en la parte monomial del álgebra. Esta diferencia de signos proviene del hecho de que la homotopía definida aquí es de A -módulos a izquierda mientras que la de [24] es de A -módulos a derecha.

Probemos que $\{s_i\}_{i \geq -1}$ es una homotopía de contracción:

- Veamos primero que $\mu s_{-1} = \text{Id}$. En efecto, dado $a \in A$, $\mu s_{-1}(a) = \mu(a \otimes e_{t(a)}) = a$.

- Probemos que $s_{-1}\mu + b's_0 = \text{Id}$. Dado $a \in \mathcal{B}$, $s_{-1}\mu(e_{s(a)} \otimes a) = s_{-1}(a) = a \otimes e_{t(a)}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} d_0 s_0(e_{s(a)} \otimes a) &= d_0(-\sum a^{(1)} \otimes \overleftarrow{a^{(2)}} \otimes a^{(3)}) \\ &= -\sum a^{(1)} \overleftarrow{a^{(2)}} \otimes a^{(3)} + \sum a^{(1)} \otimes \overleftarrow{a^{(2)}} a^{(3)} \\ &= -a \otimes e_{t(a)} + e_{s(a)} \otimes a \end{aligned}$$

y obtenemos el resultado buscado.

- Para $i = 0$, veamos que $s_0 d_0 + d_1 s_1 = \text{Id}$. Dado $e_{s(\beta)} \otimes \beta \otimes a$ con $a \in \mathcal{B}$ y $\beta \in Q_1$ consideraremos tres casos:

1. $\beta a \in \mathcal{B}$: en este caso

$$\begin{aligned} s_0 d_0(e_{s(\beta)} \otimes \beta \otimes a) &= s_0(\beta \otimes a - e_{s(\beta)} \otimes \beta a) \\ &= -\sum (\beta a^{(1)} \otimes \overleftarrow{a^{(2)}} \otimes a^{(3)} + (\beta a)^{(1)} \otimes \overleftarrow{(\beta a)^{(2)}} \otimes (\beta a)^{(3)}) \\ &= e_{s(\beta)} \otimes \beta \otimes a. \end{aligned}$$

Por otro lado, $s_1(e_{s(\beta)} \otimes \beta \otimes a) = 0$ y la ecuación se verifica.

2. $\beta a = W_{\rho'_i}$ para alguna relación no monomial ρ'_i : en este caso

$$\begin{aligned} s_0 d_0(e_{s(\beta)} \otimes \beta \otimes a) &= s_0(\beta \otimes a - e_{s(\beta)} \otimes \beta a) \\ &= -\sum \beta a^{(1)} \otimes \overleftarrow{a^{(2)}} \otimes a^{(3)} + \sum_{j>k_i} b_{ij} \sum [\alpha^{(j)}]^{(1)} \otimes \overleftarrow{[\alpha^{(j)}]^{(2)}} \otimes [\alpha^{(j)}]^{(3)}. \end{aligned}$$

Por otro lado $d_1 s_1(e_{s(\beta)} \otimes \beta \otimes a) = d_1(e_0 \otimes \rho'_i \otimes e_\omega) = \sum (\beta a)^{(1)} \otimes \overleftarrow{(\beta a)^{(2)}} \otimes (\beta a)^{(3)} - \sum_{j>k_i} b_{ij} \sum [\alpha^{(j)}]^{(1)} \otimes \overleftarrow{[\alpha^{(j)}]^{(2)}} \otimes [\alpha^{(j)}]^{(3)}$ por lo tanto $(s_0 d_0 + d_1 s_1)(e_{s(\beta)} \otimes \beta \otimes a) = e_{s(\beta)} \otimes \beta \otimes a$ y la ecuación se verifica.

3. $\beta a = 0$: en este caso $s_0 d_0(e_{s(\beta)} \otimes \beta \otimes a) = s_0(\beta \otimes a) = -\sum \beta a^{(1)} \otimes \overleftarrow{a^{(2)}} \otimes a^{(3)}$. A su vez tenemos que $d_1 s_1(e_{s(\beta)} \otimes \beta \otimes a) = d_1(e_{s(\beta)} \otimes \sigma_i \otimes b)$ si $\beta a = \sigma_i b$ en Q , con $\sigma_i \in R_{\text{mon}}$. Luego, $d_1(e_{s(\sigma_i)} \otimes \sigma_i \otimes b) = \sum \sigma_i^{(1)} \otimes \overleftarrow{\sigma_i^{(2)}} \otimes \sigma_i^{(3)} b$; además observemos que $-\sum \beta a^{(1)} \otimes \overleftarrow{a^{(2)}} \otimes a^{(3)} = -\sum \sigma_i^{(1)} \otimes \overleftarrow{\sigma_i^{(2)}} \otimes \sigma_i^{(3)} b + e_{s(\beta)} \otimes \beta \otimes a$ por lo que obtenemos el resultado buscado.

- Consideremos el caso $i = 1$ y probemos que $s_1 d_1 + d_2 s_2 = \text{Id}$. Hay dos casos posibles.
 - Si $r = \rho'_i \in R_{\text{nomon}}$, consideremos $e_{s(\rho'_i)} \otimes \rho'_i \otimes a$. Como los tensores son tomados sobre E , suponiendo sin pérdida de generalidad que $a = e_\omega$ resulta $s_1 d_1(e_0 \otimes \rho'_i \otimes e_\omega) = s_1 d_1(e_0 \otimes \alpha^{(k_i)} \otimes e_\omega) - s_1 d_1(e_0 \otimes f_{\rho'_i} \otimes e_\omega) = e_0 \otimes \rho'_i \otimes e_\omega$. Además $s_2(e_0 \otimes \rho'_i \otimes e_\omega) = 0$, por lo que concluimos que la ecuación se verifica.
 - Si $\sigma_i \in R_{\text{mon}}$, sabemos que

$$s_1 d_1(e_{s(\sigma_i)} \otimes \sigma_i \otimes a) = s_1(\sum [\sigma_i]^{(1)} \otimes \overleftarrow{[\sigma_i]^{(2)}} \otimes [\sigma_i]^{(3)} a).$$

Llamemos $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ al conjunto ordenado de las relaciones monomiales incluidas en $\sigma_i a$, en particular $p_1 = \sigma_i$. Vemos que $s_1(\sum [\sigma_i]^{(1)} \otimes \overleftarrow{[\sigma_i]^{(2)}} \otimes [\sigma_i]^{(3)} a)$ resulta

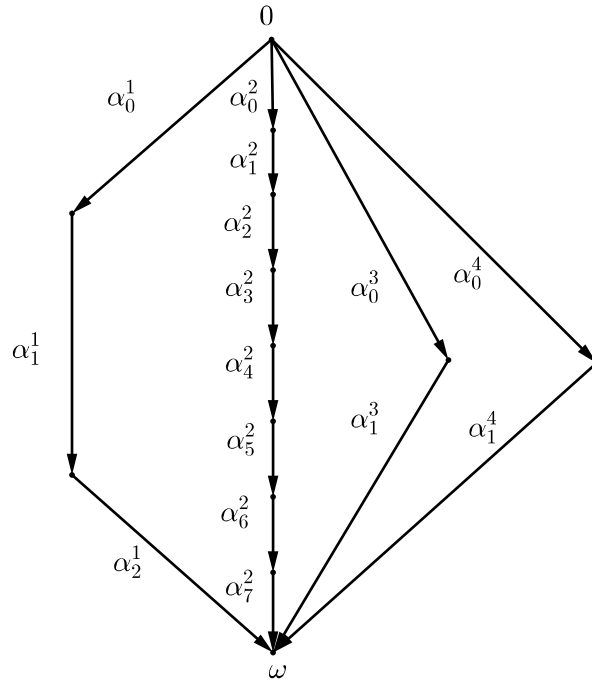
ser $p_n^l \otimes p_n \otimes p_n^r$ donde p_n^l es la parte de $\sigma_i a$ que queda a la izquierda de p_n y p_n^r la parte que queda a la derecha. Por otro lado, si llamamos $u^j = u_0^j u_1^j u_2^j = w_2^j w_1^j w_0^j$ a la 2-ambigüedad que se obtiene a partir de las relaciones p_j y p_{j+1} tenemos que $d_2 s_2(e_{s(\sigma_i)} \otimes \sigma_i \otimes a) = -d_2(\sum_{j=1}^{n-1} [u^j]^l \otimes u^j \otimes [u^j]^r)$ donde $[u^j]^l$ es la parte de $\sigma_i a$ que queda a la izquierda de u^j y $[u^j]^r$ la parte que queda a la derecha. Al aplicar d_2 obtenemos $e_{s(\sigma_i)} \otimes \sigma_i \otimes a - p_n^l \otimes p_n \otimes p_n^r$ ya que los términos del medio se cancelan entre si. Así obtenemos el resultado deseado y la ecuación se verifica.

- Para el caso $i > 1$, veamos que $s_i d_i + d_{i+1} s_{i+1} = \text{Id}$.
Como a este nivel la parte no monomial de la resolución no aparece la igualdad se sigue de los cálculos de [24].

□

Observación 3.1.15. Para ver que la resolución proyectiva $C_{\min}(A)$ es minimal consideremos r^e , el radical de Jacobson de A^e . Este radical está generado por los elementos de la forma $\alpha \otimes e_i$ y $e_j \otimes \beta$ con $i, j \in Q_0$ y $\alpha, \beta \in Q_1$ ya que $\text{rad}(A \otimes A^{\text{op}}) = A \otimes \text{rad}(A^{\text{op}}) + \text{rad}(A) \otimes A^{\text{op}}$. Para probar que $C_{\min}(A)$ es minimal debemos chequear que $\text{Im}(d_i) \subset P_{i-1} r^e$. Esto es claro, considerando las fórmulas de los diferenciales.

Ejemplo 3.1.16. Consideremos el álgebra toupie $A = kQ/\mathcal{I}$ donde Q es el carcaj de la siguiente siguiente figura con $\#Q_0 = 13, \#Q_1 = 15$:



Sean $\rho'_1 = \alpha_0^3 \alpha_1^3 - \alpha_0^4 \alpha_1^4$ y $\sigma_i = \alpha_i^2 \alpha_{i+1}^2 \alpha_{i+2}^2 \alpha_{i+3}^2$ con $i = 0, \dots, 4$ e $\mathcal{I} = \langle \rho'_1, \sigma_i : i = 0, \dots, 4 \rangle$. Notemos que la dimensión del álgebra es 2, no hay flechas de punta a punta, hay una rama de largo mayor que uno que no participa de relaciones, una rama que contiene relaciones monomiales y dos ramas que participan de relaciones no monomiales; es decir que $D = 2$, $\alpha = 0$, $l = 1$, $m = 1$ y $n = 2$.

Describiremos a continuación los A -bimódulos de la resolución minimal y su dimensión.

Si $i > 3$, $A \otimes_E kV^{(i)} \otimes_E A = \{0\}$ ya que en este ejemplo el conjunto de i -ambigüedades es vacío.

Para el caso en que $i = 3$, veamos que $V^{(3)} = \{\alpha^{(2)}\}$:

Escribiendo a $\alpha^{(2)}$ como ambigüedad a derecha con la notación de la Subsección 3.1.1, $\alpha^{(2)} = u_0 u_1 u_2 u_3$ con $u_0 = \alpha_0^2$, $u_1 = \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2$, $u_2 = \alpha_4^2$ y $u_3 = \alpha_5^2 \alpha_6^2 \alpha_7^2$.

Si ahora vemos a $\alpha^{(2)}$ como ambigüedad a izquierda, resulta $\alpha^{(2)} = w_3 w_2 w_1 w_0$ con $w_0 = \alpha_7^2$, $w_1 = \alpha_4^2 \alpha_5^2 \alpha_6^2$, $w_2 = \alpha_3^2$ y $w_3 = \alpha_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2$.

Notemos que en la ambigüedad escrita a derecha las relaciones σ_3 y σ_4 quedan ocultas mientras que escribiendo la ambigüedad a izquierda, son las relaciones σ_2 y σ_3 las que quedan ocultas.

En conclusión, $A \otimes_E kV^{(3)} \otimes_E A = \langle e_0 \otimes \alpha^{(3)} \otimes e_\omega \rangle$ y por lo tanto $\dim_k A \otimes_E kV^{(3)} \otimes_E A = 1$.

Para $i = 2$ observemos que en la tercera rama hay cuatro 2-ambigüedades:

$$u^{(1)} = \alpha_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_4^2, \quad u^{(2)} = \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_4^2 \alpha_5^2, \quad u^{(3)} = \alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_4^2 \alpha_5^2 \alpha_6^2 \quad \text{y} \quad u^{(4)} = \alpha_3^2 \alpha_4^2 \alpha_5^2 \alpha_6^2 \alpha_7^2.$$

Luego,

$$A \otimes kV_E^{(2)} \otimes_E A = \langle c \otimes u^{(i)} \otimes d : i = 1, 2, 3, 4; \quad c, d \in \mathcal{B}, t(c) = s(u^{(i)}) \text{ y } s(d) = t(u^{(i)}) \rangle$$

y en consecuencia $\dim_k A \otimes_E kV^{(2)} \otimes_E A = 20$.

Vemos que $A \otimes_E kR \otimes_E A$ es el k -espacio vectorial generado por la unión de los conjuntos

$$\{c \otimes \sigma_j \otimes d, j = 0, \dots, 4; \quad c, d \in \mathcal{B}, t(c) = s(\sigma_j) \text{ y } s(d) = t(\sigma_j)\}$$

y

$$\{c \otimes \rho'_1 \otimes d; \quad c, d \in \mathcal{B}, t(c) = s(\rho'_1) \text{ y } s(d) = t(\rho'_1)\}.$$

Luego, $\dim_k A \otimes_E kR \otimes_E A = 34$.

El espacio vectorial $A \otimes_E kQ_1 \otimes_E A$ está generado por el conjunto

$$\{c \otimes \alpha_j^i \otimes d : 1 \leq i \leq 4; 0 \leq j \leq 7; \quad c, d \in \mathcal{B}, t(c) = s(\alpha_j^i) \text{ y } s(d) = t(\alpha_j^i)\}$$

. Luego $\dim_k A \otimes_E kQ_1 \otimes_E A = 15 + 22 + 21 + 20 + 12 + 6 + 2 = 98$.

Por último

$$A \otimes_E A = \langle c \otimes d : c, d \in \mathcal{B}, t(c) = s(d) \rangle.$$

Realizando el cálculo de la dimensión en este caso obtenemos que $\dim_k A \otimes_E A = 13 + 30 + 33 + 26 + 15 + 8 + 3 = 128$.

Capítulo 4

Cálculo de la cohomología de Hochschild

El cálculo de las dimensiones de los espacios de cohomología de Hochschild de un álgebra toupie A ya fue realizado en [14]. Aquí construiremos una base explícita para cada uno de los espacios $H^i(A)$, con $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Esto nos permitirá, entre otras cosas, describir las deformaciones del álgebra.

Nuestro objetivo en este capítulo es describir explícitamente una base de $H^i(A)$ para cada i . Para comenzar el cálculo aplicamos el funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(-, A)$ a la resolución minimal $C_{\min}(A)$ y obtenemos:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(A \otimes_E E \otimes_E A, A) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(d_0, A)} & \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(A \otimes_E kQ_1 \otimes_E A, A) & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(A \otimes_E kV^{(i-1)} \otimes_E A, A) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(d_i, A)} & \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(A \otimes_E kV^{(i)} \otimes_E A, A) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Es bien conocido que dado un E -bimódulo X , existe un isomorfismo $F_X : \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(A \otimes_E X \otimes_E A, A) \rightarrow \text{Hom}_{E^e}(X, A)$ dado por $F(\varphi)(x) = \varphi(1 \otimes x \otimes 1)$ que es natural en X . Así identificamos el complejo anterior con el siguiente complejo:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{E^e}(E, A) \xrightarrow{D_0} \text{Hom}_{E^e}(kQ_1, A) \xrightarrow{D_1} \text{Hom}_{E^e}(kR, A) \xrightarrow{D_2} \text{Hom}_{E^e}(kV^{(2)}, A) \longrightarrow \dots$$

donde $D_i = F \circ \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(d_i, A) \circ F^{-1}$ para todo i .

Dado un E -bimódulo kW y un morfismo no nulo $f \in \text{Hom}_{E^e}(kW, A)$, se cumple que para todo $i, j \in Q_0$ y para todo $w \in W$, vale la igualdad $e_i f(w) e_j = f(e_i w e_j)$, por lo tanto $f(w)$ debe compartir con w el origen y el término. Dado $w \in W$, denotaremos $w \parallel f(w)$ al mapa que manda w a $f(w)$ y el resto de los elementos de W a cero.

Dados conjuntos A y B , denotaremos $k(B \parallel A)$ al k -espacio vectorial generado por los elementos de la forma $b \parallel a$ con $b \in B$ y $a \in A$. Observemos que como las álgebras toupie no tienen ciclos orientados resulta $\text{Hom}_{E^e}(E, A) = k(Q_0 \parallel Q_0)$.

Recordemos que llamamos $Z = \{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \dots \alpha^{(a)}\}$ al conjunto formado por las flechas de 0 a ω y $Y = \{\alpha^{(a+1)}, \dots, \alpha^{(a+l)}\}$ al conjunto de ramas que no son flechas y que no contienen relaciones monomiales ni participan en relaciones no monomiales.

Sea $X = \{\alpha^{(j_1)}, \alpha^{(j_2)}, \dots, \alpha^{(j_a)}\}$, el conjunto de todas las ramas que aparecen en $f_{\rho'}$ para alguna relación no monomial ρ' . El conjunto ${}_0\mathcal{B}_\omega = X \cup Y \cup Z$ es una base de ${}_0Ae_\omega$. Observemos que la dimensión D del álgebra A coincide con $a + l + d$.

A continuación describiremos los espacios vectoriales restantes que aparecen en el complejo que vamos a usar para calcular la cohomología de Hochschild.

En grado 1,

$$\text{Hom}_{E^e}(kQ_1, A) = k(Q_1 \| Q_1) + k(Z \| ({}_0\mathcal{B}_\omega - Z)).$$

En grado 2,

$$\text{Hom}_{E^e}(kR, A) = k(R_{\text{nomon}} \| {}_0\mathcal{B}_\omega) + k({}_0(R_{\text{mon}})_\omega \| {}_0\mathcal{B}_\omega).$$

Finalmente, para $i \geq 2$,

$$\text{Hom}_{E^e}(kV^{(i)}, A) = k({}_0(V^{(i)})_\omega \| {}_0\mathcal{B}_\omega).$$

Ahora daremos la fórmula explícita de los diferenciales. Dado $\alpha \in Q_1$ y $f \in \text{Hom}_{E^e}(E, A)$,

$$\begin{aligned} D_0(f)(\alpha) &= F(\text{Hom}(d_0, A)F^{-1}(f))(\alpha) = \text{Hom}(d_0, A)F^{-1}(f)(1 \otimes \alpha \otimes 1) \\ &= F^{-1}(f)(d_0(1 \otimes \alpha \otimes 1)) = F^{-1}(f)(\alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha) \\ &= \alpha f(1) - f(1)\alpha. \end{aligned}$$

En particular, si $f = e_i \| e_i$ resulta $D_0(f) = \sum_{\alpha: t(\alpha)=i} \alpha \| \alpha - \sum_{\beta: s(\beta)=i} \beta \| \beta$.

En forma análoga calculamos D_1 , considerando distintos casos.

Dadas $\sigma_i \in R_{\text{mon}}$ y $f \in \text{Hom}_{E^e}(kQ_1, A)$,

$$\begin{aligned} D_1(f)(\sigma_i) &= F(\text{Hom}(d_1, A)F^{-1}(f))(\sigma_i) = \text{Hom}(d_1, A)F^{-1}(f)(1 \otimes \sigma_i \otimes 1) \\ &= \sum F^{-1}(f)(\sigma_i^{(1)} \otimes \overleftarrow{\sigma_i^{(2)}} \otimes \sigma_i^{(3)}) = \sum \sigma_i^{(1)} f(\overleftarrow{\sigma_i^{(2)}}) \sigma_i^{(3)}. \end{aligned}$$

- Si $f = \alpha_j \| \alpha_j$ y α_j no está incluida en σ_i , entonces $D_1(\alpha_j \| \alpha_j)(\sigma_i) = 0$, ya que $f(\overleftarrow{\sigma_i^{(2)}}) = 0$ para todas las factorizaciones de σ_i .
- Si $f = \alpha_j \| \alpha_j$ y α_j está incluida en σ_i , entonces $D_1(\alpha_j \| \alpha_j)(\sigma_i) = 0$, ya que existe una factorización de σ_i de la forma $\beta \alpha_j \gamma$ y por lo tanto $\sum \sigma_i^{(1)} f(\overleftarrow{\sigma_i^{(2)}}) \sigma_i^{(3)} = \beta f(\alpha_j) \gamma = \beta \alpha_j \gamma = 0$ en A .
- Si $f = \alpha^{(h)} \| \alpha^{(j)}$ con $\alpha^{(h)} \| \alpha^{(j)} \in Z \| ({}_0\mathcal{B}_\omega - Z)$, entonces $D_1(\alpha^{(h)} \| \alpha^{(j)})(\sigma_i) = 0$, ya que $\alpha^{(h)}$ no está incluida en σ_i al ser una flecha de 0 a ω y por lo tanto $f(\overleftarrow{\sigma_i^{(2)}}) = 0$ para todas las factorizaciones de σ_i .

Dadas $\rho'_i = \alpha^{(k_i)} + \sum_{j>k_i} b_{ij} \alpha^{(j)} \in R_{\text{nomon}}$ y $g \in \text{Hom}_{E^e}(kQ_1, A)$,

$$\begin{aligned} D_1(g)(\rho'_i) &= F(\text{Hom}(d_1, A)F^{-1}(g))(\rho'_i) = \text{Hom}(d_1, A)F^{-1}(g)(1 \otimes \rho'_i \otimes 1) \\ &= F^{-1}(g)\left(\sum \alpha^{(k_i)(1)} \otimes \overleftarrow{\alpha^{(k_i)(2)}} \otimes \alpha^{(k_i)(3)}\right) + \sum_{j>k_i} b_{ij} F^{-1}(g)\left(\sum \alpha^{(j)(1)} \otimes \overleftarrow{\alpha^{(j)(2)}} \otimes \alpha^{(j)(3)}\right) \\ &= \sum \alpha^{(k_i)(1)} g(\overleftarrow{\alpha^{(k_i)(2)}}) \alpha^{(k_i)(3)} + \sum_{j>k_i} b_{ij} \sum \alpha^{(j)(1)} g(\overleftarrow{\alpha^{(j)(2)}}) \alpha^{(j)(3)}. \end{aligned}$$

- Si $g = \alpha_r \| \alpha_r$ y α_r no está incluida en alguna rama que participa en ρ'_i , entonces $D_1(\alpha_r \| \alpha_r)(\rho'_i)$ se anula ya que $g(\overleftarrow{\alpha^{(k_i)(2)}}) = 0$ para toda factorización de $\alpha^{(k_i)}$ y $g(\overleftarrow{\alpha^{(j)(2)}}) = 0$ para toda factorización de $\alpha^{(j)}$ en $f_{\rho'_i}$.

- Si $g = \alpha_r \parallel \alpha_r$ y α_k está incluida en una rama $\alpha^{(p)}$ que participa en la relación no monomial ρ'_i , entonces $D_1(\alpha_r \parallel \alpha_r)(\rho'_i) = b_{ip} \alpha^{(p)}$. Recordemos que $b_{ik_i} = 1$.
- Si $g = \alpha^{(h)} \parallel \alpha^{(k)}$ con $\alpha^{(h)} \parallel \alpha^{(k)} \in Z \parallel ({}_0\mathcal{B}_\omega - Z)$, entonces $D_1(\alpha^{(h)} \parallel \alpha^{(k)})(\rho'_i) = 0$, ya que $\alpha^{(h)}$ no está incluida en ninguna rama que participe en ρ'_i y se cumple que $g(\overleftarrow{\alpha^{(k_i)}(2)}) = 0$ para toda factorización de $\alpha^{(k_i)}$ y $g(\overleftarrow{\alpha^{(j)}(2)}) = 0$ para toda factorización de $\alpha^{(j)}$ en $f_{\rho'_i}$.

En conclusión,

$$D_1(\alpha_r \parallel \alpha_r) = \begin{cases} \sum_{i: \alpha^{(i)} \in \rho'_i} \rho'_i \parallel b_{ij} \alpha^{(i)} & \text{si } \alpha_r \text{ está en } \alpha^{(i)} \text{ y } \alpha^{(i)} \text{ es una rama de } \rho'_i, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$D_1(\alpha^{(h)} \parallel \alpha^{(j)}) = 0 \text{ si } \alpha^{(h)} \parallel \alpha^{(j)} \in Z \parallel ({}_0\mathcal{B}_\omega - Z).$$

Para $i \geq 2$ probaremos en tres pasos que $D_i = 0$.

1. Primero probaremos que $D_2 = 0$.

Dados $w = w_2 w_1 w_0 = v_0 v_1 v_2 \in V^{(2)}$ y $f \in \text{Hom}_{E^e}(kR, A)$,

$$\begin{aligned} D_2(f)(w) &= F(\text{Hom}(d_2, A)F^{-1}(f))(w) = \text{Hom}(d_2, A)F^{-1}(f)(1 \otimes w \otimes 1) \\ &= F^{-1}(f)d_2(1 \otimes w \otimes 1) = F^{-1}(f)(w_2 \otimes w_1 w_0 \otimes 1 - 1 \otimes v_0 v_1 \otimes v_2) \\ &= w_2 f(w_1 w_0) - f(v_0 v_1) v_2. \end{aligned}$$

Como $w_1 w_0$ y $v_0 v_1$ son relaciones monomiales que no van de 0 a ω , resulta que $f(w_1 w_0) = f(v_0 v_1) = 0$ y por lo tanto $D_2 = 0$.

2. Probaremos ahora que si $i \geq 2$, entonces $D_{2i-1} = 0$.

Dados $w \in V^{(2i-1)}$ y $f \in \text{Hom}_{E^e}(kV^{(2i-2)}, A)$

$$\begin{aligned} D_{2i-1}(f)(w) &= F(\text{Hom}(d_{2i-1}, A)F^{-1}(f))(w) = \text{Hom}(d_{2i-1}, A)F^{-1}(f)(1 \otimes w \otimes 1) \\ &= F^{-1}(f)d_{2i-1}(1 \otimes w \otimes 1) = F^{-1}(f) \sum w^{(1)} \otimes w^{(2)} \otimes w^{(3)} \\ &= \sum w^{(1)} f(w^{(2)}) w^{(3)}, \end{aligned}$$

donde $w^{(2)} \in V^{(2i-2)}$. Como la $(2i-2)$ -ambigüedad $w^{(2)}$ no va de 0 a ω para ninguna factorización de w , esto implica que $f(w^{(2)}) = 0$ y concluimos que $D_{2i-1} = 0$.

3. Por último probaremos que si $i \geq 2$, entonces $D_{2i} = 0$.

Dadas $w = w_{2i} \dots w_0 = v_0 \dots v_{2i} \in V^{(2i)}$ y $f \in \text{Hom}_{E^e}(kV^{(2i-1)}, A)$

$$\begin{aligned} D_{2i}(f)(w) &= F(\text{Hom}(d_{2i}, A)F^{-1}(f))(w) \\ &= \text{Hom}(d_{2i}, A)F^{-1}(f)(1 \otimes w \otimes 1) \\ &= F^{-1}(f)d_{2i}(1 \otimes w \otimes 1) \\ &= F^{-1}(f)(w_{2i} \otimes w_{2i-1} \dots w_0 \otimes 1 - 1 \otimes v_0 \dots v_{2i-1} \otimes v_{2i}) \\ &= w_{2i} f(w_{2i-1} \dots w_0) - f(v_0 \dots v_{2i-1}) v_{2i}. \end{aligned}$$

Como las $(2i - 1)$ -ambigüedades $w_{2i-1} \dots w_0$ y $v_0 \dots v_{2i-1}$ no van de 0 a ω , entonces

$$f(w_{2i-1} \dots w_0) = f(v_0 \dots v_{2i-1}) = 0$$

y concluimos que $D_{2i} = 0$.

4.1. Cálculo de $H^0(A)$

Para calcular $H^0(A) = \ker D_0$ probaremos primero que $\sum_{i \in Q_0} e_i \| e_i$ pertenece al subespacio $\ker D_0$ y luego veremos que dicho elemento genera todo este subespacio. Utilizando la linealidad y la definición de D_0 sabemos que:

$$D_0 \left(\sum_{i \in Q_0} e_i \| e_i \right) = \sum_{i \in Q_0} D_0(e_i \| e_i) = \sum_{i \in Q_0} \left(\sum_{\alpha: t(\alpha)=i} \alpha \| \alpha - \sum_{\beta: s(\beta)=i} \beta \| \beta \right).$$

Dada una flecha $\alpha \in Q_1$, el término $\alpha \| \alpha$ aparecerá una vez en $D_0(e_{t(\alpha)} \| e_{t(\alpha)})$ y aparecerá una vez como $-\alpha \| \alpha$ en $D_0(e_{s(\alpha)} \| e_{s(\alpha)})$. Esto implica que la suma anterior se anula y que por lo tanto $\sum_{i \in Q_0} e_i \| e_i \in \ker D_0$.

Para probar que $H^0(A) = \ker D_0 = \langle \sum_{i \in Q_0} e_i \| e_i \rangle$ supongamos que:

$$0 = D_0 \left(\sum_{i \in Q_0} \lambda_i e_i \| e_i \right) = \sum_{i \in Q_0} \lambda_i D_0(e_i \| e_i) = \sum_{i \in Q_0} \lambda_i \left(\sum_{\alpha: t(\alpha)=i} \alpha \| \alpha - \sum_{\beta: s(\beta)=i} \beta \| \beta \right).$$

Si existe algún j tal que $\lambda_j \neq 0$, entonces para toda flecha α que termina en e_j , resulta que $\lambda_{s(\alpha)} = \lambda_j$ ya que α aparecerá como $\alpha \| \alpha$ en $D_0(e_j \| e_j)$ y como $-\alpha \| \alpha$ en $D_0(e_{s(\alpha)} \| e_{s(\alpha)})$. Usando el mismo argumento, para toda flecha β que comienza en e_j resultará que $\lambda_{t(\beta)} = \lambda_j$. Al ser Q un carcaj conexo, concluimos que todo elemento en $\ker D_0$ es de la forma $\lambda_j (\sum_{i \in Q_0} e_i \| e_i)$.

4.2. Cálculo de $H^1(A)$

Para calcular $H^1(A) = \ker D_1 / \text{Im} D_0$, la idea es partir de una base de $\ker D_1$ y modificar sus elementos hasta obtener otra base que incluya una base de $\text{Im} D_0$.

Utilizando las ramas del carcaj de largo mayor o igual a uno sin relaciones monomiales del álgebra toupie construiremos un grafo Q_ρ de la siguiente forma.

Definición 4.2.1. Sea Q_ρ el grafo tal que:

1. los vértices se corresponden con las ramas de Q que no son flechas y no contienen relaciones monomiales,
2. hay una arista entre los vértices $\alpha^{(k)}$ y $\alpha^{(p)}$ si existe una relación que involucre a ambas ramas.

Llamemos $\{Q_\rho^k : k = 1 \dots, r\}$ al conjunto de componentes conexas de Q_ρ .

A continuación consideraremos cuatro subconjuntos de $k(Q_1 \| \mathcal{B})$ cuya unión resultará una base de $\ker(D_1)$.

1. Sea $A_1 = \{\alpha_j^i \parallel \alpha_j^i : \alpha^{(i)}\}$ es una rama que contiene relaciones monomiales para todo j .
2. En segundo lugar consideremos $A_2 = Z \parallel_0 \mathcal{B}_\omega$.
3. Definamos
 $A_3 = \{\alpha_j^i \parallel \alpha_j^i - \alpha_0^i \parallel \alpha_0^i : j \neq 0, |\alpha^{(i)}| > 1 \text{ y sin relaciones monomiales}\}$.
4. Finalmente consideremos el conjunto $A_4 = \{\sum_{\alpha^{(i)} \in Q_0^k} \alpha_0^i \parallel \alpha_0^i : k = 1 \dots, r\}$.

Lema 4.2.2. *El conjunto $H = \bigcup_{i=1}^4 A_i$ es una base de $\ker(D_1)$.*

Demostración. Conocemos por [14] que $\dim_k H^1(A) = r + m + Da - 1$. De lo anterior deducimos que $\dim_k \ker(D_1) = r + m + Da + \#Q_0 - 2$. Por construcción, H es linealmente independiente. Veamos ahora que el cardinal de H es $r + m + Da + \#(Q_0) - 2$. Como $A_1 \cup A_3$ es una unión disjunta, resulta que $\#(A_1 \cup A_3) = \#(A_1) + \#(A_3)$. Además, el conjunto $A_1 \cup A_3$ está en biyección con el conjunto formado por todas las flechas que no comienzan en 0 y por las flechas de la parte monomial que comienzan en 0. Por lo tanto $\#A_1 + \#A_3 = \#Q_0 - 2 + m$. Como claramente $\#A_2 = Da$ y $\#A_4 = r$, concluimos que $\#H = r + m + Da + \#Q_0 - 2$. \square

El siguiente paso será modificar H de modo tal que el conjunto resultante incluya una base de $\text{Im}D_0$. Para eso realizamos el siguiente procedimiento.

1. Consideremos los elementos de A_1 de la forma $\alpha_j^i \parallel \alpha_j^i$ con $j \neq 0$ y reemplacemos dichos elementos por los de la forma $\alpha_j^i \parallel \alpha_j^i - \alpha_0^i \parallel \alpha_0^i$. Llamaremos A'_1 al conjunto que contiene a los elementos modificados y A''_1 al subconjunto de A_1 de los elementos que no fueron modificados, es decir $A''_1 = \{\alpha_0^i \parallel \alpha_0^i : \alpha^{(i)} \text{ es una rama que contiene relaciones monomiales}\}$.
2. El siguiente paso depende de si hay flechas de 0 a ω o no.
 - Si $a > 0$, en primer lugar reemplazamos los elementos de la forma $\alpha^{(i)} \parallel \alpha^{(i)}$ con $i \neq 1$ en A_2 por $\alpha^{(i)} \parallel \alpha^{(i)} - \alpha^{(1)} \parallel \alpha^{(1)}$ y a continuación reemplazamos también al elemento $\alpha^{(1)} \parallel \alpha^{(1)}$ por $s = \sum_{\alpha^{(i)}} \alpha_0^i \parallel \alpha_0^i$.
 - Si $a = 0$, llamemos $\alpha^{(B)}$ a la última rama del álgebra toupie y consideremos el elemento de H que contiene a $\alpha_0^B \parallel \alpha_0^B$ al cual reemplazamos por $s = \sum_{\alpha^{(i)}} \alpha_0^i \parallel \alpha_0^i$.

Sea C el conjunto obtenido a partir de H luego de realizar las modificaciones. Es claro que el k -espacio vectorial generado por H coincide con el k -espacio vectorial generado por C . A continuación describiremos una base de $\text{Im}(D_0)$

Lema 4.2.3. *El conjunto $K = \{s\} \cup A'_1 \cup A_3$ es una base de $\text{Im}(D_0)$.*

Demostración. Sabemos que $\dim_k \text{Im}(D_0) = \#Q_0 - 1$ ya que por un lado $\dim_k \ker(D_0) = 1$ y por otro lado $\dim_k \text{Hom}_{E^e}(E, A) = \#Q_0$. Como $K \subset \text{Im}(D_0)$, basta observar que $\#(A'_1) + \#(A_3) = \#(Q_0) - 2$ y que K es linealmente independiente. \square

La prueba del teorema que enunciaremos a continuación se deduce directamente de los lemas previos.

Teorema 4.2.4. *Las clases de los elementos de $C - K$ en $\ker(D_1) / \text{Im}(D_0)$ forman una base de $H^1(A)$.*

Notación 4.2.5. *Para el caso $a > 0$ asignaremos las siguientes notaciones a los elementos de la base de $H^1(A)$ construida anteriormente :*

- $y_i = \overline{\alpha_0^i \parallel \alpha_0^i}$ con $\alpha^{(i)}$ una rama con relaciones monomiales.
- $w_{pq} = \overline{\alpha^{(p)} \parallel \alpha^{(q)}}$ con $p \neq q$ y $p, q = 1 \dots, a$.

- $z_{ts} = \overline{\alpha^{(t)} \parallel \alpha^{(s)}}$ con $t = 1, \dots, a$ y $\alpha^{(s)} \in_0 \mathcal{B}_\omega - Z$.
- $x_t = \overline{\alpha^{(t)} \parallel \alpha^{(t)}} - \overline{\alpha^{(1)} \parallel \alpha^{(1)}}$ con $t = 2, \dots, a$.
- $t_k = \sum_{\alpha^{(i)} \in Q_\rho^k} \overline{\alpha_0^i \parallel \alpha_0^i}$ con $k = 1, \dots, r$.

De ahora en adelante omitiremos la barra que denota la clase de equivalencia cuando querremos referirnos a elementos de $H^i(A)$ siempre y cuando no genere confusión.

4.3. Cálculo de $H^i(A)$ con $i \geq 2$

Continuando con el cálculo de la cohomología de Hochschild obtendremos una base de $H^2(A)$. Para esto hallaremos en primer lugar una base de $\text{Im}(D_1)$ que luego modificaremos a una más conveniente. Por otro lado partiremos de una base de $\text{Hom}_{E^e}(kR, A)$ y reemplazaremos algunos de sus elementos por los de la base obtenida para $\text{Im}(D_1)$, de modo tal de obtener una nueva base de $\text{Hom}_{E^e}(kR, A)$ que incluya a una base de $\text{Im}(D_1)$. Recordemos que $D_2 = 0$ y por lo tanto $\ker(D_2) = \text{Hom}_{E^e}(kR, A)$.

Observación 4.3.1. Recordemos que escribimos las relaciones no monomiales como

$$\rho'_i = \alpha^{(k_i)} + \sum_{j > k_i} b_{ij} \alpha^{(j)}.$$

A continuación daremos un orden en dichas relaciones. Diremos que $\rho'_i \prec' \rho'_j$ si $k_i < k_j$. Este orden a su vez induce un orden en los elementos de $R_{\text{nomon}} \parallel_0 \mathcal{B}_\omega$ de la siguiente forma, $\rho'_i \parallel \alpha^{(k)} \prec \rho'_j \parallel \alpha^{(l)}$ si $\rho'_i \prec' \rho'_j$ o $\rho'_i = \rho'_j$ y $k < l$.

Para cada componente conexa de Q_ρ correspondiente a relaciones no monomiales existe una relación con k_i máximo. Llamaremos a dicha relación la última de la componente conexa.

Para construir una base de $\text{Im}(D_1)$ consideraremos los siguientes subconjuntos de $k(R \parallel_0 \mathcal{B}_\omega)$:

- $B_1 = \{\rho'_i \parallel f_{\rho'_i} : \rho'_i \in R_{\text{nomon}} \text{ y tal que } k_i \text{ no es máximo de ninguna } Q_\rho^k, k = 1, \dots, r\}$,
- $B_2 = \{\sum_{i: \alpha^{(k)} \in \rho'_i, \alpha^{(k)} \neq \alpha^{(k_i)}} \rho'_i \parallel b_{ik} \alpha^{(k)}\}$.

Notemos que $\#B_1 = n - d + l - r$ y $\#B_2 = d$.

Lema 4.3.2. *El conjunto $B_1 \cup B_2$ es una base de $\text{Im}(D_1)$.*

Demostración. Es claro que $B_1 \cup B_2 \subset \text{Im}(D_1)$ ya que $B_1 \subset \{D_1(\alpha_0^i \parallel \alpha_0^i) : \alpha^{(i)} = W_{\rho'_i} \text{ para algún } i\}$ y $B_2 = \{D_1(\alpha_0^i \parallel \alpha_0^i) : \alpha^{(i)} \in X\}$. Sabemos que $\dim_k \ker(D_1) = r + m + Da + \#Q_0 - 2$ y por otra parte, $\dim_k \text{Hom}_{E^e}(kQ_1, A) = \#Q_1 + (D - 1)a = m + l + n + Da + \#Q_0 - 2$. De lo anterior se deduce que $\dim_k \text{Im}(D_1) = l + n - r$. Como $\#(B_1 \cup B_2) = \#B_1 + \#B_2 = l + n - r$, alcanza con probar que $B_1 \cup B_2$ genera $\text{Im}(D_1)$. Como $D_1(\alpha_0^i \parallel \alpha_0^i) = D_1(\alpha_j^i \parallel \alpha_j^i)$ para cualquier flecha α_j^i que no es la primera en la rama $\alpha^{(i)}$ y $D_1(\sum_{\alpha^{(i)} \in Q_\rho^k} \alpha_0^i \parallel \alpha_0^i) = 0$, para toda componente conexa Q_ρ^k de Q_ρ , el resultado queda probado. \square

Para modificar la base $B_1 \cup B_2$ realizaremos los siguientes pasos.

1. Cada vez que tengamos en B_2 un elemento con un sumando de la forma $\rho'_j \parallel \alpha^{(k)}$ donde $\alpha^{(k)}$ es la primera rama de $f_{\rho'_j}$ y ρ'_j no es la última relación de ninguna componente conexa de Q_ρ , le restamos a dicho sumando $\rho'_j \parallel f_{\rho'_j}$. Llamemos B'_2 al conjunto obtenido a partir de

B_2 luego de las modificaciones. Observemos que el espacio vectorial generado por $B_1 \cup B_2$ contiene al espacio generado por $B_1 \cup B'_2$ ya que los elementos modificados se obtienen como combinación lineal de elementos de B_1 y B_2 .

2. Consideremos el orden inducido por el sistema de reducción en las relaciones no monomiales y luego en las ramas. Podemos construir entonces un orden en $R_{\text{nonmon}} \parallel_0 \mathcal{B}_\omega$. A partir de este orden consideremos la matriz asociada a B'_2 y escalicemos dicha matriz para obtener a partir de ella un nuevo conjunto B''_2 .

Llamemos M al conjunto $B_1 \cup B''_2$ y observemos que $\langle M \rangle = \langle B_1 \cup B'_2 \rangle = \langle B_1 \cup B_2 \rangle$ y por lo tanto M también es una base de $\text{Im}(D_1)$.

El conjunto $N = \{\rho'_i \parallel \alpha^{(k)} : \rho'_i \in R_{\text{nonmon}} \text{ y } \alpha^{(k)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega\} \cup \{\sigma_i \parallel \alpha^{(k)} : \sigma_i \in {}_0(R_{\text{mon}})_\omega \text{ y } \alpha^{(k)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega\}$ es una base de $\text{Hom}_{E^e}(kR, A)$.

Nuestro objetivo es ahora modificar esta base para obtener una nueva base que incluya a M . Para eso seguiremos los siguientes pasos.

1. Para tener a los elementos de B_1 en nuestra base reemplazamos en C los elementos de la forma $\rho'_i \parallel \alpha^{(k)}$ con $\alpha^{(k)}$ con el k menor de $f_{\rho'_i}$ por el elemento de B_1 correspondiente, o sea, $\rho'_i \parallel f_{\rho'_i}$.
2. Para tener los elementos de B''_2 dentro de la nueva base consideramos el pivot correspondiente a cada elemento de B''_2 y reemplazamos el elemento correspondiente a este pivot en la base N por dicho elemento de B''_2 .

Llamemos N' a la base luego de las modificaciones. De todo lo anterior se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 4.3.3. *Las clases de equivalencia en $\text{Hom}_{E^e}(kR, A)/\text{Im}(D_1)$ de $N' - M$ forman una base de $H^2(A)$.*

El siguiente teorema tiene como objetivo describir una base de la cohomología de A en grados mayores o iguales que 3.

Teorema 4.3.4. *Dado $i \geq 3$, el conjunto $B_i = \{w_j \parallel \alpha^{(k)} : \alpha^{(k)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega \text{ y } w_j \in V^{(i)}, s(w_j) = 0, t(w_j) = \omega\}$ es una base de $H^i(A)$.*

Demostración. Como $D_i = 0$ para $i \geq 3$, se cumple que $H^i(A) = \text{Hom}_{E^e}(kV^{(i-1)}, A)$. Como B_i es una base de este último espacio vectorial, resulta entonces una base de la cohomología. \square

Observación 4.3.5. En el caso particular de las álgebras canónicas, Dieter Happel probó en [18] que $H^0(A) \simeq k$ y $H^i(A) = 0$ para $i \geq 3$. Además, dada un álgebra canónica de pesos p_1, \dots, p_t y definiendo $d_p = (t-2) - \sum_{i=1}^t 1/p_i$, se probó en [18] que si $d_p \geq 0$ entonces $\dim_k H^2(A) = t-3$ y $H^1(A) = 0$. En el caso en que $d_p < 0$ sabemos que el álgebra será de tipo doméstico y por lo tanto podemos asegurar que $H^2(A) = 0$.

Ejemplo 4.3.6. *Retomemos el Ejemplo 3.1.16 y calculemos la cohomología de Hochschild en ese caso. El cálculo de $H^0(A)$ es estándar y resulta $H^0(A) = \langle \sum_{i \in Q_0} e_i \parallel e_i \rangle$.*

Para el cálculo de una base de $H^1(A)$, con las notaciones propuestas anteriormente, observemos que en este caso $a = 0$ y por lo tanto $A_2 = \{\}$. Con la única rama con relaciones monomiales obtenemos que $A'_1 = \{\alpha_0^2 \parallel \alpha_0^2\}$ y con la única componente de Q_ρ , obtenemos que $A_4 = \{\alpha_0^3 \parallel \alpha_0^3 + \alpha_0^4 \parallel \alpha_0^4\}$. Luego cambiamos $\alpha_0^3 \parallel \alpha_0^3 + \alpha_0^4 \parallel \alpha_0^4$ por $s = \alpha_0^1 \parallel \alpha_0^1 + \alpha_0^2 \parallel \alpha_0^2 + \alpha_0^3 \parallel \alpha_0^3 + \alpha_0^4 \parallel \alpha_0^4$ y obtenemos que $H^1(A) = \langle \overline{\alpha_0^2 \parallel \alpha_0^2} \rangle$.

Con el objetivo de obtener una base de $H^2(A)$, observemos que $B_2 = \{\rho'_1 \parallel \alpha^{(4)}\}$ es una base de $\text{Im}(D_1)$ que está contenida en la base estándar $\{\rho'_1 \parallel \alpha^{(4)}, \rho'_1 \parallel \alpha^{(1)}\}$ de $\text{Hom}_{E^e}(kR, A)$. En este caso particular, quitaremos simplemente a $\rho'_1 \parallel \alpha^{(4)}$ de la base estándar y tomaremos clase del elemento restante.

En definitiva $H^2(A) = \langle \overline{\rho'_1 \parallel \alpha^{(1)}} \rangle$.

Es sencillo ver que $H^3(A) = \{0\}$ ya que las 2-ambigüedades que aparecen no van de 0 a ω .

Como $\alpha^{(2)}$ es una 3-ambigüedad de 0 a ω , resulta $H^4(A) = \langle \overline{\alpha^{(2)} \parallel \alpha^{(4)}}, \overline{\alpha^{(2)} \parallel \alpha^{(1)}} \rangle$.

Por último $H^i(A) = \{0\}$ para $i > 4$.

Capítulo 5

Morfismos de comparación

Para el cálculo de la cohomología de Hochschild utilizamos una resolución minimal en lugar de la resolución Bar E-reducida definida en la Sección 2.3.5, ya que esto simplifica mucho los cálculos. Sin embargo, tanto las deformaciones del álgebra como el corchete de Gerstenhaber están definidos a partir de la resolución Bar y se pueden adaptar a la Bar E-reducida pero en principio no sabemos como verlos en la resolución minimal. Necesitaremos morfismos de comparación para pasar de alguna de estas resoluciones a la minimal y viceversa. Como la resolución Bar E-reducida es una variante mas económica de la resolución Bar donde también están bien definidos los productos vamos a tomar morfismos de comparación entre esta y la minimal. Dichos morfismos resultan difíciles de calcular en la mayoría de los casos. Comenzaremos con el cálculo en los grados más bajos.

5.1. Construcción general.

La existencia de los morfismos de comparación esta garantizada porque tanto la resolución minimal como la resolución Bar E-reducida son resoluciones proyectivas de A como A^e -módulo. Llamaremos $\varphi : C_{\min}(A) \rightarrow C_{\text{Bar}E}(A)$ y $\eta : C_{\text{Bar}E}(A) \rightarrow C_{\min}(A)$ a los morfismos de comparación entre las dos resoluciones. Se trata de morfismos de complejos, es decir que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots A \otimes_E kV^{(2)} \otimes_E A & \xrightarrow{d_2} & A \otimes_E kR \otimes_E A & \xrightarrow{d_1} & A \otimes_E kQ_1 \otimes_E A & \xrightarrow{d_0} & A \otimes_E A & \rightarrow & A & \rightarrow & 0 \\
 \varphi_3 \downarrow \uparrow \eta_3 & & \varphi_2 \downarrow \uparrow \eta_2 & & \varphi_1 \downarrow \uparrow \eta_1 & & \varphi_0 \downarrow \uparrow \eta_0 & & \parallel & & \\
 \dots A \otimes_E \overline{A}^{\otimes 3} \otimes_E A & \xrightarrow{\delta_2} & A \otimes_E \overline{A}^{\otimes 2} \otimes_E A & \xrightarrow{\delta_1} & A \otimes_E \overline{A} \otimes_E A & \xrightarrow{\delta_0} & A \otimes_E A & \rightarrow & A & \rightarrow & 0.
 \end{array}$$

Los mapas entre dos resoluciones proyectivas de un módulo son únicos a menos homotópia. Las composiciones $\eta \circ \varphi$ y $\varphi \circ \eta$ son homotópicas a las identidades correspondientes. Luego de aplicar el functor $\text{Hom}_{A^e}(-, A)$ y de realizar las identificaciones naturales obtendremos los mapas φ^* y η^* y el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 \longrightarrow & \text{Hom}_{E^e}(E, A) & \xrightarrow{d_0^*} & \text{Hom}_{E^e}(kQ_1, A) & \xrightarrow{d_1^*} & \text{Hom}_{E^e}(kR, A) & \xrightarrow{d_2^*} & \text{Hom}_{E^e}(kV^{(2)}, A) \dots \\
 & \eta_0^* \downarrow \uparrow \varphi_0^* & & \eta_1^* \downarrow \uparrow \varphi_1^* & & \eta_2^* \downarrow \uparrow \varphi_2^* & & \eta_3^* \downarrow \uparrow \varphi_3^* \\
 0 \longrightarrow & \text{Hom}_{E^e}(E, A) & \xrightarrow{\delta_0^*} & \text{Hom}_{E^e}(\overline{A}, A) & \xrightarrow{\delta_1^*} & \text{Hom}_{E^e}(\overline{A} \otimes_E \overline{A}, A) & \xrightarrow{\delta_2^*} & \text{Hom}_{E^e}(\overline{A}^{\otimes 3}, A) \dots
 \end{array}$$

Los mapas φ^* y η^* inducen isomorfismos a nivel de cohomología que seguiremos llamando φ^* y η^* .

A continuación construiremos morfismos de comparación φ y η que levantan la identidad de A .

En primer lugar, tanto φ_0 como η_0 serán la identidad en $A \otimes_E A$.

Ahora definiremos en forma inductiva los mapas φ_i con i positivo. Para esto utilizaremos la homotopía considerada en la Sección 2.3.5 para el complejo Bar E -reducido.

Definición 5.1.1. Dado $i \in \mathbb{N}$ y dado $1 \otimes_E u \otimes_E 1 \in P_i$ fijamos:

$$\varphi_i(1 \otimes_E u \otimes_E 1) = t_{i-1} \varphi_{i-1} d_{i-1}(1 \otimes_E u \otimes_E 1).$$

Notemos que si bien φ_{i-1} y d_{i-1} son morfismos de A^e -módulos, t_{i-1} solo es morfismo de A -módulos a derecha.

Extendemos φ_i para que sea un morfismo de A -bimódulos, o sea, dados $\lambda, \mu \in \mathcal{B}$:

$$\varphi_i(\lambda \otimes_E u \otimes_E \mu) = \lambda t_{i-1} \varphi_{i-1} d_{i-1}(1 \otimes_E u \otimes_E 1) \mu.$$

Por último extendemos linealmente.

Proposición 5.1.2. La familia de funciones $\varphi = \{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ es un morfismo de complejos.

Demostración. Para probar que φ es un morfismo de complejos debemos verificar que los diagramas correspondientes conmutan, o sea, que $\delta_i \varphi_{i+1} = \varphi_i d_i$, para todo i . Lo probaremos por inducción.

El paso base es claro.

Para el paso inductivo supongamos que $\delta_{j-1} \varphi_j = \varphi_{j-1} d_{j-1}$ para algún $j \geq 0$ y probemos que $\delta_j \varphi_{j+1} = \varphi_j d_j$. Observemos en primer lugar que basta probar la igualdad para los tensores de la forma $1 \otimes_E u \otimes_E 1 \in P_{j+1}$, ya que todos los mapas que intervienen son morfismos de A -bimódulos. Por la definición de φ_{j+1} , resulta que:

$$\begin{aligned} \delta_j \varphi_{j+1}(1 \otimes_E u \otimes_E 1) &= \delta_j t_j \varphi_j d_j(1 \otimes_E u \otimes_E 1) \\ &= (\text{Id} - t_{j-1} \delta_{j-1}) \varphi_j d_j(1 \otimes_E u \otimes_E 1). \end{aligned}$$

Para obtener el resultado buscado bastaría entonces con probar que:

$$t_{j-1} \delta_{j-1} \varphi_j d_j(1 \otimes_E u \otimes_E 1) = 0.$$

Utilizando la hipótesis inductiva, sabemos que $\delta_{j-1} \varphi_j = \varphi_{j-1} d_{j-1}$, luego el término de la izquierda es:

$$t_{j-1} \varphi_{j-1} d_{j-1} d_j(1 \otimes_E u \otimes_E 1)$$

que se anula ya que $d_{j-1} d_j = 0$. □

Definiremos a continuación de forma análoga los mapas η_i con $i > 0$. En este caso utilizaremos la homotopía construida para la resolución minimal en la Subsección 3.1.2.

Definición 5.1.3. Dado $i \in \mathbb{N}$ y dado $1 \otimes_E \bar{\alpha}_1 \otimes_E \cdots \otimes_E \bar{\alpha}_i \otimes_E 1 \in A \otimes_E \bar{A}^{\otimes_E i} \otimes_E A$, fijamos:

$$\eta_i(1 \otimes_E \bar{\alpha}_1 \otimes_E \cdots \otimes_E \bar{\alpha}_i \otimes_E 1) = s_{i-1} \eta_{i-1} \delta_{i-1}(1 \otimes_E \bar{\alpha}_1 \otimes_E \cdots \otimes_E \bar{\alpha}_i \otimes_E 1).$$

Luego extendemos η_i para que resulte un morfismo de A -bimódulos, o sea, dados $\lambda, \mu \in \mathcal{B}$:

$$\eta_i(\lambda \otimes_E \bar{\alpha}_1 \otimes_E \cdots \otimes_E \bar{\alpha}_i \otimes_E \mu) = \lambda s_{i-1} \eta_{i-1} \delta_{i-1}(1 \otimes_E \bar{\alpha}_1 \otimes_E \cdots \otimes_E \bar{\alpha}_i \otimes_E 1) \mu.$$

Por último extendemos linealmente.

Utilizando argumentos similares a los de la prueba de la Proposición 5.1.2 podemos probar el siguiente resultado. A continuación enunciaremos dicho resultado.

Proposición 5.1.4. La familia de mapas $\eta = \{\eta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es un morfismo de complejos.

5.2. Fórmulas explícitas

Veamos ahora las fórmulas explícitas de los morfismos φ_i y η_i para $i = 1, 2, 3$.

Comenzaremos con φ_1 .

Sea $\lambda \otimes_E \alpha \otimes_E \mu$ un elemento no nulo de P_1 :

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda \otimes_E \alpha \otimes_E \mu) &= \lambda(t_0 \varphi_0(\alpha \otimes_E 1 - 1 \otimes_E \alpha)) \mu \\ &= \lambda(t_0(\alpha \otimes_E 1) - t_0(1 \otimes_E \alpha)) \mu \\ &= \lambda(1 \otimes_E \bar{\alpha} \otimes_E 1 - 1 \otimes_E \bar{1} \otimes_E \alpha) \mu \\ &= \lambda \otimes_E \bar{\alpha} \otimes_E \mu \end{aligned}$$

ya que $1 \otimes_E \bar{1} \otimes_E \alpha$ se anula al ser $1 = \sum_{i \in Q_0} e_i$ un elemento de $E = kQ_0$.

Sigamos con φ_2 . Dado $\lambda \otimes_E r \otimes_E \mu$ un elemento no nulo de P_2 :

$$\begin{aligned} \varphi_2(\lambda \otimes_E r \otimes_E \mu) &= \lambda(t_1 \varphi_1 \left(\sum r^{(1)} \otimes_E \overleftarrow{r^{(2)}} \otimes_E r^{(3)} \right) \mu \\ &= \lambda(t_1 \left(\sum r^{(1)} \otimes_E \overleftarrow{r^{(2)}} \otimes_E r^{(3)} \right) \mu \\ &= \sum \lambda \otimes_E \overleftarrow{r^{(1)}} \otimes_E \overleftarrow{r^{(2)}} \otimes_E r^{(3)} \mu. \end{aligned}$$

Notemos que cuando $r^{(1)} \in Q_0$, el correspondiente término de la última suma se anula.

Observemos también, que como $\overleftarrow{r^{(2)}}$ es una flecha podemos identificar a $\overleftarrow{r^{(2)}}$ con $\overleftarrow{r^{(2)}}$ en $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B} - \{e_x : x \in Q_0\}$. De ahora en adelante, cuando se trate de una flecha omitiremos la clase en $\bar{\mathcal{A}}$.

Por último veamos la fórmula explícita de φ_3 . Dada $u = u_0 u_1 u_2 = w_2 w_1 w_0 \in V^{(2)}$ y $\lambda \otimes_E u \otimes_E \mu$ un elemento no nulo de P_3 , resulta

$$\begin{aligned} \varphi_3(\lambda \otimes_E u \otimes_E \mu) &= \lambda(t_2 \varphi_2(w_2 \otimes_E w_1 w_0 \otimes_E 1 - 1 \otimes_E u_0 u_1 \otimes_E u_2)) \mu \\ &= \lambda \left(t_2 \sum w_2 \otimes_E \overleftarrow{(w_1 w_0)^{(1)}} \otimes_E \overleftarrow{(w_1 w_0)^{(2)}} \otimes_E (w_1 w_0)^{(3)} \right) \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda \left(t_2 \sum 1 \otimes_E \overline{(u_0 u_1)^{(1)}} \otimes_E \overleftarrow{(u_0 u_1)^{(2)}} \otimes_E (u_0 u_1)^{(3)} u_2 \right) \mu \\
& = \sum \lambda \otimes_E \overline{w_2} \otimes_E \overline{(w_1 w_0)^{(1)}} \otimes_E \overleftarrow{(w_1 w_0)^{(2)}} \otimes_E (w_1 w_0)^{(3)} \mu
\end{aligned}$$

ya que al aplicar t_2 , el segundo sumando se anula en el complejo Bar E-reducido.

Pasemos ahora a los morfismos η_i con $i = 1, 2, 3$. La fórmula explícita de η_1 se calcula como sigue. Sea $\lambda \otimes_E \bar{a} \otimes_E \mu \in A \otimes_E \bar{A} \otimes_E A$:

$$\begin{aligned}
\eta_1(\lambda \otimes_E \bar{a} \otimes_E \mu) & = \lambda(s_0 \eta_0(a \otimes_E 1 - 1 \otimes_E a))\mu \\
& = \lambda(s_0(a \otimes_E 1 - 1 \otimes_E a))\mu \\
& = \sum \lambda a^{(1)} \otimes_E \overleftarrow{a^{(2)}} \otimes_E a^{(3)} \mu.
\end{aligned}$$

ya que $s_0(a \otimes_E 1) = 0$.

Sigamos con η_2 . Dado $\lambda \otimes_E a_1 \otimes_k a_2 \otimes_E \mu \in A \otimes_E \bar{A}^{\otimes_E 2} \otimes_E A$ con $a_1, a_2 \in \bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B} - \{e_x : x \in Q_0\}$,

$$\begin{aligned}
\eta_2(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E \mu) & = \lambda(s_1 \eta_1 \delta_1(1 \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E 1))\mu \\
& = \lambda(s_1 \eta_1(a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E 1 - 1 \otimes_E a_1 a_2 \otimes_E 1 + 1 \otimes_E a_1 \otimes_E a_2))\mu.
\end{aligned}$$

Debemos considerar tres casos:

1. Si $a_1 a_2 \in \mathcal{B}$, entonces

$$\begin{aligned}
\eta_1 \delta_1(1 \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E 1) & = \sum a_1 a_2^{(1)} \otimes_E \overleftarrow{a_2^{(2)}} \otimes_E a_2^{(3)} \\
& \quad - \sum (a_1 a_2)^{(1)} \otimes_E \overleftarrow{(a_1 a_2)^{(2)}} \otimes_E (a_1 a_2)^{(3)} \\
& \quad + \sum a_1^{(1)} \otimes_E \overleftarrow{a_1^{(2)}} \otimes_E a_1^{(3)} a_2.
\end{aligned}$$

Esta suma se anula ya que el segundo sumando es igual a la suma del primero con el tercero.

En conclusión, si $a_1 a_2 \in \mathcal{B}$:

$$\eta_2(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E \mu) = 0.$$

2. Si $a_1 a_2$ contiene al menos una relación monomial sea $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$ el conjunto de relaciones monomiales que aparecen en $a_1 a_2$, ordenado de acuerdo al orden de aparición de sus inicios en a_1 . Para cada, σ_i , podemos escribir $a_1 a_2 = (\sigma_i)^l \sigma_i (\sigma_i)^r$ donde $(\sigma_i)^l$ es la parte de $a_1 a_2$ que queda a la izquierda de σ_i y $(\sigma_i)^r$ la parte que queda a la derecha. Aplicando la definición de η_1 ,

$$\begin{aligned}
\eta_2(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E \mu) & = \lambda \left(\sum s_1(a_1 a_2^{(1)} \otimes_E \overleftarrow{a_2^{(2)}} \otimes_E a_2^{(3)}) \right) \mu \\
& \quad + \lambda \left(\sum s_1(a_1^{(1)} \otimes_E \overleftarrow{a_1^{(2)}} \otimes_E a_1^{(3)} a_2) \right) \mu \\
& = \lambda(\sigma_p)^l \otimes_E \sigma_p \otimes_E (\sigma_p)^r \mu.
\end{aligned}$$

El primer sumando se anula ya que $a_2 \in \overline{\mathcal{B}}$ y esto implica que no hay relaciones que comiencen luego de final de a_1 en $a_1 a_2$. Con respecto al segundo sumando, observemos que si $\overleftarrow{a_1^{(2)}}$ es una flecha anterior a la primera flecha de σ_p , entonces $a_1^{(3)} a_2 = 0$ ya que contiene a σ_p .

En conclusión, si $a_1 a_2$ contiene alguna relación monomial:

$$\eta_2(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E \mu) = \lambda(\sigma_p)^l \otimes_E \sigma_p \otimes_E (\sigma_p)^r \mu$$

3. Si $a_1 a_2 = W_{\rho'_i}$ para alguna relación $\rho'_i \in R_{\text{nomon}}$, resulta que $\eta_2(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E \mu)$ es igual a:
 $\lambda s_1 \left(\sum a_1 a_2^{(1)} \otimes_E \overleftarrow{a_2^{(2)}} \otimes_E a_2^{(3)} - \sum (f_{\rho'_i})^{(1)} \otimes_E \overleftarrow{(f_{\rho'_i})^{(2)}} \otimes_E (f_{\rho'_i})^{(3)} + \sum a_1^{(1)} \otimes_E \overleftarrow{a_1^{(2)}} \otimes_E a_1^{(3)} a_2 \right) \mu$.
 Vemos que s_1 se anula sobre las dos primeras sumatorias y aplicándolo a la tercera la expresión anterior resulta ser igual a:

$$\lambda \otimes_E \rho'_i \otimes_E \mu.$$

En conclusión, si $a_1 a_2 = W_{\rho'_i}$ para alguna relación $\rho'_i \in R_{\text{nomon}}$:

$$\eta_2(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E \mu) = \lambda \otimes_E \rho'_i \otimes_E \mu.$$

Resumiendo,

$$\eta_2(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E \mu) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_1 a_2 \in \mathcal{B}, \\ \lambda(\sigma_p)^l \otimes_E \sigma_p \otimes_E (\sigma_p)^r \mu & \text{si } a_1 a_2 \in \mathcal{I}, \\ \lambda \otimes_E \rho'_i \otimes_E \mu & \text{si } a_1 a_2 = W_{\rho'_i}. \end{cases}$$

Por último daremos la fórmula explícita de η_3 .

Dados $a_1, a_2, a_3 \in \overline{\mathcal{B}}$ consideramos $\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu \in A \otimes_E \overline{A}^{\otimes_E 3} \otimes_E A$ y obtenemos que $\eta_3(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu)$ es igual a:

$$\lambda(s_2 \eta_2(a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E 1 - 1 \otimes_E a_1 a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E 1 + 1 \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 a_3 \otimes_E 1 - 1 \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3)) \mu.$$

Vamos a considerar cuatro casos.

1. Comencemos considerando el caso en el cual $a_1 a_2 \in \mathcal{B}$ y $a_2 a_3 \in \mathcal{B}$. Aplicando la definición de η_2 resulta

$$\eta_3(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu) = \lambda(s_2(-\eta_2(1 \otimes_E a_1 a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E 1) + \eta_2(1 \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 a_3 \otimes_E 1))) \mu.$$

Hace falta distinguir a su vez tres casos:

- (I) Si $a_1 a_2 a_3 \in \mathcal{B}$, ambos sumandos se anulan y $\eta_3(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu) = 0$.
 (II) Si $a_1 a_2 a_3 \in \mathcal{I}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \eta_2(\lambda \otimes_E a_1 a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu) &= \eta_2(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 a_3 \otimes_E \mu) \\ &= \lambda(\sigma_p)^l \otimes_E \sigma_p \otimes_E (\sigma_p)^r \mu \end{aligned}$$

donde σ_p es la relación más a la derecha de $a_1 a_2 a_3$.

Lo anterior implica que $\eta_3(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu)$ se anula en este caso.

(III) Si $a_1 a_2 a_3 = W_{\rho'_i}$ para algún $\rho'_i \in R_{\text{nomon}}$,

$$\begin{aligned}\eta_2(\lambda \otimes_E a_1 a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu) &= \eta_2(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 a_3 \otimes_E \mu) \\ &= \lambda \otimes_E \rho'_i \otimes_E \mu\end{aligned}$$

y nuevamente $\eta_3(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu) = 0$.

En conclusión, si $a_1 a_2 \in \mathcal{B}$ y $a_2 a_3 \in \mathcal{B}$:

$$\eta_2(\lambda \otimes_E a_1 a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu) = 0.$$

2. Pasemos ahora al caso en el cual $a_1 a_2 \in \mathcal{B}$ y $a_2 a_3 \in \mathcal{I}$. En este caso,

$$\eta_3(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu) = \lambda(s_2 \eta_2(a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E 1 - 1 \otimes_E a_1 a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E 1))\mu.$$

Por definición de η_2 obtenemos que

$$\eta_3(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu) = \lambda(s_2(a_1(\sigma_p)^l \otimes_E \sigma_p \otimes_E (\sigma_p)^r - a_1(\sigma_p)^l \otimes_E \sigma_p \otimes_E (\sigma_p)^r))\mu$$

ya que la relación más a la derecha de $a_2 a_3$ coincide con la relación más a la derecha de $a_1 a_2 a_3$.

En conclusión, si $a_1 a_2 \in \mathcal{B}$ y $a_2 a_3 \in \mathcal{I}$,

$$\eta_3(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu) = 0.$$

3. Sigamos con el caso simétrico al anterior, o sea $a_1 a_2 \in \mathcal{I}$ y $a_2 a_3 \in \mathcal{B}$.

$$\eta_3(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu) = \lambda(s_2 \eta_2(1 \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 a_3 \otimes_E 1 - 1 \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3))\mu.$$

Aplicando la definición de η_2 en este caso obtenemos que:

$$\eta_3(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu) = \lambda(s_2((\delta_r)^l \otimes_E \delta_r \otimes_E (\delta_r)^r - (\sigma_q)^l \otimes_E \sigma_q \otimes_E (\sigma_q)^r a_3))\mu$$

donde δ_r es la relación más a la derecha de $a_1 a_2 a_3$ y σ_q es la relación más a la derecha de $a_1 a_2$.

Observemos que el primer término se anula ya que $\delta_r(\delta_r)^r$ no contiene 2-ambigüedades. Aplicando s_2 al segundo término obtenemos la siguiente expresión:

$$\lambda\left(\sum (\sigma_q)^l (\sigma_q \sigma_q^r a_3)^{(1)} \otimes_E (\sigma_q \sigma_q^r a_3)^{(2)} \otimes_E (\sigma_q \sigma_q^r a_3)^{(3)}\right)\mu$$

con $(\sigma_q \sigma_q^r a_3)^{(2)} \in V^{(2)}$.

Consideremos el conjunto $\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ de las relaciones monomiales contenidas en $a_1 a_2 a_3$ ordenado de acuerdo al orden de aparición de sus inicios en a_1 . Para cada $1 \leq i \leq p-1$, llamaremos w_i a la 2-ambigüedad que se obtiene a partir de σ_i y σ_{i+1} . Reescribiendo, si $a_1 a_2 \in \mathcal{I}$ y $a_2 a_3 \in \mathcal{B}$:

$$\eta_3(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu) = \sum_{i=q}^{p-1} \lambda(w_i)^r \otimes_E w_i \otimes_E (w_i)^l \mu.$$

4. Por último analizaremos el caso en que $a_1 a_2 \in \mathcal{I}$ y $a_2 a_3 \in \mathcal{I}$. Aquí, luego de aplicar la definición de η_2 resulta que:

$$\eta_3(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu) = \lambda(s_2(a_1 \delta_r^l \otimes_E \delta_r \otimes_E \delta_r^r - \sigma_q^r \otimes_E \sigma_q \otimes_E \sigma_q^l a_3))\mu$$

donde δ_r es la relación más a la derecha de $a_2 a_3$ y σ_q es la relación más a la derecha de $a_1 a_2$. Al igual que en el caso anterior el primer término se anula ya que $\delta_r \delta_r^r$ no contiene 2-ambigüedades.

Observemos además que si δ_r y σ_q son disjuntas, las expresiones $\delta_r^l \otimes_E \delta_r \otimes_E \delta_r^r$ y $\sigma_q^r \otimes_E \sigma_q \otimes_E \sigma_q^l$ se anulan directamente. Si δ_r y σ_q no son disjuntas y consideramos $\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ el conjunto ordenado de las relaciones monomiales contenidas en $a_1 a_2 a_3$ de acuerdo al orden de aparición de sus inicios en $a_1 a_2$,

$$\eta_3(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu) = \sum_{i=q}^{p-1} \lambda(w_i)^r \otimes_E w_i \otimes_E (w_i)^l \mu$$

siendo w_i la 2-ambigüedad que contiene a las relaciones σ_i y σ_{i+1} .

Resumiendo:

$$\eta_3(\lambda \otimes_E a_1 \otimes_E a_2 \otimes_E a_3 \otimes_E \mu) = \begin{cases} \lambda \sum_{i=q}^{p-1} (w_i)^r \otimes_E w_i \otimes_E (w_i)^l \mu & \text{si } a_1 a_2 \in \mathcal{I} \text{ y } \delta_r \cap \sigma_q \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

donde $\{w_i\}_{i=q, \dots, p-1}$ es el conjunto de las 2-ambigüedades contenidas en $a_1 a_2 a_3$, tales que $s(w_i) \geq s(\sigma_q)$ con σ_q la relación más a la derecha de $a_1 a_2$.

Las siguientes proposiciones, aunque no darán la fórmula explícita general para los morfismos de comparación, nos ayudarán a trabajar con ellos y obtener algunos resultados generales en grados más altos.

Proposición 5.2.1. *Dados $i \in \mathbb{N}$ y $w = w_0 \dots w_{i-1} = u_{i-1} \dots u_0$ una $(i-1)$ -ambigüedad. Entonces el morfismo de comparación φ_i aplicado a $e_{s(w)} \otimes_E w \otimes_E e_{t(w)}$ tiene siempre la siguiente forma,*

$$\varphi_i(1 \otimes_E w \otimes_E 1) = \sum_{\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(i+1)} = w} 1 \otimes_E \overline{\alpha^{(1)}} \otimes_E \dots \otimes_E \overline{\alpha^{(i)}} \otimes_E \alpha^{(i+1)}$$

donde $\alpha^{(j)}$ con $1 \leq j \leq i+1$ son caminos no nulos en A .

Demostración. Para los casos en que i es 1, 2 o 3 utilizamos la fórmula explícita hallada anteriormente. Supongamos ahora que se cumple la tesis para un cierto $i-1 \in \mathbb{N}$ par. Utilizando la fórmula inductiva de φ_i ,

$$\begin{aligned} \varphi_i(1 \otimes_E w \otimes_E 1) &= t_{i-1} \varphi_{i-1} d_{i-1} (1 \otimes_E w \otimes_E 1) \\ &= t_{i-1} \varphi_{i-1} (u_{i-1} \otimes_E u_{i-2} \dots u_0 \otimes_E 1) \\ &\quad - t_{i-1} \varphi_{i-1} (1 \otimes_E w_0 \dots w_{i-2} \otimes_E w_{i-1}). \end{aligned}$$

Observemos que el segundo sumando se anula en el complejo Bar reducido luego de aplicar la hipótesis inductiva y la definición de t_{i-1} . Por lo tanto, $\varphi_i(1 \otimes_E w \otimes_E 1)$ será igual a,

$$t_{i-1} (u_{i-1} \varphi_{i-1} (1 \otimes_E u_{i-2} \dots u_0 \otimes_E 1)).$$

Luego, utilizando la hipótesis inductiva en $\varphi_{i-1}(1 \otimes_E u_{i-2} \dots u_0 \otimes_E 1)$ y la definición de t_{i-1} obtenemos el resultado buscado.

Veamos ahora el caso en que $i - 1$ es impar. Aquí,

$$\begin{aligned} \varphi_i(1 \otimes_E w \otimes_E 1) &= t_{i-1} \varphi_{i-1} d_{i-1}(1 \otimes_E w \otimes_E 1) \\ &= \sum_w t_{i-1}(w^{(1)} \varphi_{i-1}(1 \otimes_E w^{(2)} \otimes_E 1) w^{(3)}) \\ &= \sum_w \sum_{b^{(1)} \dots b^{(i)} = w^{(2)}} t_{i-1}(w^{(1)} \otimes_E \overline{b^{(1)}} \otimes_E \dots \otimes_E b^{(i)} w^{(3)}) \\ &= \sum_w \sum_{b^{(1)} \dots b^{(i)} = w^{(2)}} 1 \otimes_E \overline{w^{(1)}} \otimes_E \overline{b^{(1)}} \otimes_E \dots \otimes_E b^{(i)} w^{(3)}. \end{aligned}$$

Así, $w^{(1)} b^{(1)} \dots b^{(i)} w^{(3)} = w$ y la tesis se verifica. \square

Proposición 5.2.2. *Dados $i \geq 3$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ caminos no nulos en $\overline{\mathcal{B}}$. Los morfismos de comparación η_i aplicados a $1 \otimes_E \alpha_1 \otimes_E \dots \otimes_E \alpha_i \otimes_E 1$ tienen siempre la siguiente forma,*

$$\eta_i(1 \otimes_E \alpha_1 \otimes_E \dots \otimes_E \alpha_i \otimes_E 1) = \sum_a \alpha_{(1),(2),(3)} a^{(1)} \otimes_E a^{(2)} \otimes_E a^{(3)}$$

con $\alpha_{(1),(2),(3)} \in k$, $a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)} = a = \alpha_1 \dots \alpha_i$ y $a^{(2)} \in V^{(i-1)}$.

En particular, si el camino $\alpha_1 \dots \alpha_i$ no contiene $(i - 1)$ -ambigüedades

$$\eta_i(1 \otimes_E \alpha_1 \otimes_E \dots \otimes_E \alpha_i \otimes_E 1) = 0.$$

Demostración. El paso base es para $i = 3$ y se prueba con la fórmula explícita. Para el paso inductivo,

$$\begin{aligned} \eta_i(1 \otimes_E \alpha_1 \otimes_E \dots \otimes_E \alpha_i \otimes_E 1) &= s_{i-1} \eta_{i-1} \delta_{i-1}(1 \otimes_E \alpha_1 \otimes_E \dots \otimes_E \alpha_i \otimes_E 1) \\ &= \alpha_1 s_{i-1} \eta_{i-1}(1 \otimes_E \dots \otimes_E \alpha_i \otimes_E 1) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j s_{i-1} \eta_{i-1}(1 \otimes_E \dots \otimes_E \alpha_j \alpha_{j+1} \otimes_E \dots \otimes_k 1) \\ &\quad + (-1)^i s_{i-1} (\eta_{i-1}(1 \otimes_E \alpha_1 \otimes_E \dots \otimes_E 1) \alpha_i). \end{aligned}$$

Utilizando la hipótesis inductiva y la definición de s_{i-1} en todos los sumandos obtenemos el resultado buscado. \square

Proposición 5.2.3. *Dada A un álgebra toupie se cumple que $\eta \circ \varphi = \text{Id}$*

Demostración. Al igual que las proposiciones anteriores, probaremos este resultado por inducción completa. Los casos $i = 0$ e $i = 1$ son casi inmediatos utilizando las fórmulas explícitas correspondientes. Sea $i \geq 2$. Observemos que basta verificar la igualdad para los elementos de la forma $1 \otimes_E u \otimes_E 1 \in P_i$.

Veamos en detalle el caso $i = 2$. Comencemos con una relación monomial σ_i . Aplicando la definición de φ_2 ,

$$\eta_2 \varphi_2(1 \otimes_E \sigma_i \otimes_E 1) = \eta_2 \sum_{\sigma_i} 1 \otimes_E \overline{\sigma_i^{(1)}} \otimes_E \overleftarrow{\sigma_i^{(2)}} \otimes_E \sigma_i^{(3)}$$

$$= 1 \otimes_E \sigma_i \otimes_E 1$$

ya que, por definición de η_2 , el único sumando que no se anula es cuando $\sigma_i^{(3)} = 1$.

Partamos ahora de una relación no monomial de la forma

$$\rho'_i = \alpha^{(k_i)} + \sum_{j > k_i} b_{ij} \alpha^{(j)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \eta_2 \varphi_2(1 \otimes_E \rho'_i \otimes_E 1) &= \sum_{\alpha^{(k_i)}} \eta_2(1 \otimes_E \overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes_E \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}} \otimes_E (\alpha^{(k_i)})^{(3)}) \\ &+ \sum_{j > k_i} b_{ij} \sum_{\alpha^{(j)}} \eta_2(1 \otimes_E \overline{(\alpha^{(j)})^{(1)}} \otimes_E \overleftarrow{(\alpha^{(j)})^{(2)}} \otimes_E (\alpha^{(j)})^{(3)}). \end{aligned}$$

En la primera sumatoria, el único sumando no nulo es cuando $(\alpha^{(k_i)})^{(3)} = 1$ y ese caso nos da $1 \otimes_E \rho'_i \otimes_E 1$. La segunda suma se anula por definición de η_2 y obtenemos la igualdad.

Veamos ahora el caso en que $i \geq 3$. Si $w = w_0 \dots w_{i-1} = u_{i-1} \dots u_0$ es una $(i-1)$ -ambigüedad,

$$\eta_i \varphi_i(1 \otimes_E w \otimes_E 1) = s_{i-1} \eta_{i-1} \delta_{i-1} t_{i-1} \varphi_{i-1} d_{i-1} (1 \otimes_E w \otimes_E 1).$$

Como t_i es una homotopía contractante para el complejo Bar E-reducido se cumple que $\delta_{i-1} t_{i-1} = \text{Id} - t_{i-2} \delta_{i-2}$ y la expresión anterior nos queda igual a

$$s_{i-1} \eta_{i-1} \varphi_{i-1} d_{i-1} (1 \otimes_E w \otimes_E 1) - s_{i-1} \eta_{i-1} t_{i-2} \delta_{i-2} \varphi_{i-1} d_{i-1} (1 \otimes_E w \otimes_E 1).$$

Como φ es un morfismo de complejos entre $C_{\min}(A)$ y $C_{\text{Bar}E}(A)$ tenemos que $\delta_{i-2} \varphi_{i-1} d_{i-1} = \varphi_{i-2} d_{i-2} d_{i-1} = 0$ lo que implica que el segundo término se anula. Utilizando la hipótesis inductiva en el primer término basta probar que

$$s_{i-1} d_{i-1} (1 \otimes_E w \otimes_E 1) = 1 \otimes_E w \otimes_E 1.$$

Comencemos suponiendo que i es impar, entonces

$$\begin{aligned} s_{i-1} d_{i-1} (1 \otimes_E w \otimes_E 1) &= u_{i-1} s_{i-1} (1 \otimes_E u_{i-2} \dots u_0 \otimes_E 1) \\ &- s_{i-1} (1 \otimes_E w_0 \dots w_{i-2} \otimes_E w_{i-1}) \\ &= -(-1)^i 1 \otimes_E w \otimes_E 1. \end{aligned}$$

Por último, si i es par,

$$\begin{aligned} s_{i-1} d_{i-1} (1 \otimes_E w \otimes_E 1) &= s_{i-1} \left(\sum_{w^{(2)} \in V^{(i-2)}} w^{(1)} \otimes_E w^{(2)} \otimes_E w^{(3)} \right) \\ &= 1 \otimes_E w \otimes_E 1 \end{aligned}$$

y el resultado queda probado. □

Proposición 5.2.4. Sea $w = w_0 \dots w_{i-1} = z_{i-1} \dots z_0$ una $(i-1)$ -ambigüedad entonces, para todo $i \geq 1$, $\eta_i(1 \otimes_E \overline{w_0} \otimes_E \dots \otimes_E \overline{w_{i-1}} \otimes_E 1) = 1 \otimes_E w \otimes_E 1$.

Demostración. Observemos en primer lugar que $w_j, z_k \in \overline{\mathcal{B}}$ para $0 \leq j, k \leq i-1$ por lo que no será necesario tomar clase de w_j o z_k en $\overline{\mathcal{A}}$. El caso $i = 1$ es claro utilizando la definición de η_1 . Para $i = 2$, utilizando la fórmula explícita de η_2

$$\eta_2(1 \otimes_E w_0 \otimes_E w_1 \otimes_E 1) = (\sigma_p)^l \otimes_E \sigma_p \otimes_E (\sigma_p)^r$$

donde σ_p es la relación monomial más a la derecha de $w_0 w_1$. Como no puede haber una 1-ambigüedad estrictamente contenida en $w_0 w_1$, necesariamente es $\sigma_p = w_0 w_1$ y se cumple la tesis.

Para el paso inductivo,

$$\begin{aligned} \eta_i(1 \otimes_E w_0 \otimes_E \dots \otimes_E w_{i-1} \otimes_E 1) &= s_{i-1} \eta_{i-1} \delta_{i-1}(1 \otimes_E w_0 \otimes_E \dots \otimes_E w_{i-1} \otimes_E 1) \\ &= s_{i-1} \eta_{i-1}(w_0 \otimes_E \dots \otimes_E w_{i-1} \otimes_E 1) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{i-2} (-1)^{j+1} s_{i-1} \eta_{i-1}(1 \otimes_E \dots \otimes_E w_j w_{j+1} \otimes_E \dots \otimes_E 1) \\ &\quad + (-1)^i s_{i-1} \eta_{i-1}(1 \otimes_E w_0 \otimes_E \dots \otimes_E w_{i-1}). \end{aligned}$$

Los sumandos que no son ni el primero ni el último se anulan ya que $w_j w_{j+1} \in \mathcal{I}$ para todo $j = 0, \dots, i-2$.

Utilizando la hipótesis inductiva en el último sumando, obtenemos que es igual a:

$$(-1)^i s_{i-1}(1 \otimes_E w_0 w_1 \dots w_{i-2} \otimes_E w_{i-1})$$

y por definición de s_{i-1} la expresión es igual a $1 \otimes_E w \otimes_E 1$, ya que w es la única $(i-1)$ -ambigüedad contenida en $w_0 \dots w_{i-1}$.

Por último falta ver que el primer sumando se anula. Utilizando el Lema 5.2.2 $\eta_{i-1}(1 \otimes_E w_1 \otimes_E \dots \otimes_E w_{i-1} \otimes_E 1)$ será combinación lineal de elementos de la forma $a^{(1)} \otimes_E a^{(2)} \otimes_E a^{(3)}$ con $a = a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)}$ un camino de $s(w_1)$ a $t(w_{i-1})$ y $a^{(2)}$ una $(i-2)$ -ambigüedad. Como el camino w_1 no comienza en 0 y el carcaj es toupie, el único camino de $s(w_1)$ a $t(w_{i-1})$ es $w_1 \dots w_{i-1}$. Luego este sumando es igual a $\sum_a w_0 \alpha_{(1),(2),(3)} a^{(1)} \otimes_E a^{(2)} \otimes_E a^{(3)}$ con $\alpha_{(1),(2),(3)} \in k$, $a^{(2)} \in V^{(i-2)}$. Por último, $w_0 s_{i-1}(\sum_a \alpha_{(1),(2),(3)} a^{(1)} \otimes_E a^{(2)} \otimes_E a^{(3)}) = 0$, ya que ningún sumando puede contener una $(i-1)$ -ambigüedad al ser $a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)} = w_1 \dots w_{i-1}$. \square

Capítulo 6

Estructura de Gerstenhaber de $H^*(A)$

En este capítulo será $k = \mathbb{C}$. Para toda k -álgebra A , el k -espacio vectorial $H^1(A)$ con el corchete de Gerstenhaber tiene estructura de álgebra de Lie. Este resultado se encuentra en [15]. Describiremos completamente dicha estructura cuando A es un álgebra toupie en el Teorema 6.4.5. Además, el corchete de Gerstenhaber induce morfismos k -lineales $H^1(A) \oplus H^i(A) \rightarrow H^i(A)$ para todo i que dan a cada $H^i(A)$ estructura de módulo de Lie sobre $H^1(A)$. En las Secciones 6.5 y 6.6 mostraremos una descripción explícita de esta estructura para $i = 2$ e $i = 3$, respectivamente.

6.1. Producto cup

En el artículo [14] se probó que el producto cup de la cohomología de Hochschild de las álgebras toupie se anula en grados positivos. A continuación daremos una prueba alternativa de este resultado con las técnicas que venimos utilizando.

Proposición 6.1.1. *Sean A un álgebra toupie, $\bar{f} \in H^n(A)$ y $\bar{g} \in H^m(A)$ con $m, n > 0$. El producto cup de \bar{f} con \bar{g} se anula en $H^{m+n}(A)$.*

Demostración. Queremos probar que $\overline{f \smile_{\text{red}} g} = \bar{f} \smile \bar{g} = \bar{0}$ en $H^{m+n}(A)$. Supongamos que no, esto implica que $f \smile_{\text{red}} g$ no es un coborde y en particular existen $a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m} \in \bar{A}^{\otimes_{\mathbb{E}}(m+n)}$ tales que

$$f \smile_{\text{red}} g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m}) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)g(a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m}) \neq 0.$$

Necesariamente f no se anula en $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ y g no se anula en $a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m}$. Como existen \tilde{f} y \tilde{g} hallados a partir de la resolución minimal tales que

$$f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \eta_n^*(\tilde{f})(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \tilde{f}(\eta_n(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1))$$

y

$$g(a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m}) = \eta_m^*(\tilde{g})(a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m}) = \tilde{g}(\eta_m(1 \otimes a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m} \otimes 1));$$

tanto $f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)$ como $g(a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m})$ serán combinación lineal de caminos de largo mayor o igual a uno que comienzan en 0 y por lo tanto su producto se anula lo cual es absurdo. En conclusión, $\overline{f \smile_{\text{red}} g} = \bar{0}$. \square

6.2. Corchete de Gerstenhaber

A continuación veremos que si $\bar{f} \in H^m(A)$ y $\bar{g} \in H^n(A)$ con $m, n > 1$, el corchete de Gerstenhaber de \bar{f} con \bar{g} se anula en $H^{m+n-1}(A)$.

Proposición 6.2.1. *Sea $A = kQ/\mathcal{I}$ un álgebra toupie, $\bar{f} \in H^m(A)$ y $\bar{g} \in H^n(A)$ con $m, n > 1$. El corchete de Gerstenhaber $[\bar{f}, \bar{g}]$ se anula en $H^{m+n-1}(A)$.*

Demostración. Queremos probar que $\overline{[f, g]}_{\text{red}} = [\bar{f}, \bar{g}] = \bar{0}$ en $H^{m+n-1}(A)$, o sea, que $[f, g]_{\text{red}}$ es un co-borde. Supongamos que no, en tal caso, en particular debe existir $a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1} \in \bar{A}^{\otimes_E(m+n-1)}$ tal que $[f, g]_{\text{red}}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1}) \neq 0$. Por definición del corchete:

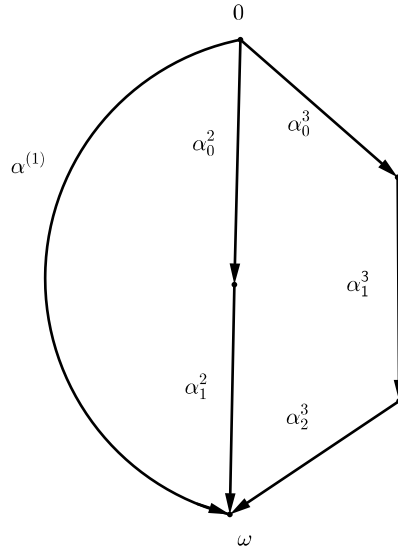
$$[f, g]_{\text{red}} = f \circ g - (-1)^{(m-1)(n-1)} g \circ f.$$

Recordemos que $f \circ g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1})$ es igual a:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{(i-1)(m-1)} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes \overline{g(a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+m-1})} \otimes a_{i+m} \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1}).$$

Veremos que todos los sumandos se anulan. Supongamos que $\overline{g(a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+m-1})} \neq 0$ en \bar{A} . Como $g(a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+m-1}) = \tilde{g}(\eta_m(1 \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+m-1} \otimes 1))$ con \tilde{g} hallado a partir de la resolución minimal, sabemos que será una combinación lineal de caminos de 0 a ω y escribimos $g(a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+m-1}) = \sum_{\alpha^{(j)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega} \lambda_j \alpha^{(j)}$ pero $a_1 \otimes_E \cdots \otimes_E a_{i-1} \otimes_E \overline{\alpha^{(j)}} \otimes_E a_{i+m} \otimes_E \cdots \otimes_E a_{n+m-1}$ se anula en $\bar{A}^{\otimes_E n}$ y $f \circ g = 0$. Con un razonamiento análogo obtenemos que $g \circ f = 0$ y concluimos que $[\bar{f}, \bar{g}] = \bar{0}$ en $H^{m+n-1}(A)$. \square

Ejemplo 6.2.2. *Consideremos el álgebra toupie $A = kQ/\mathcal{I}$ con Q como en la siguiente figura:*



e $\mathcal{I} = \langle \alpha_0^3 \alpha_1^3, \alpha_1^3 \alpha_2^3 \rangle$. Observemos que $\alpha^{(3)} = \alpha_0^3 \alpha_1^3 \alpha_2^3$ es una 2-ambigüedad. Realizando el cálculo de la cohomología de Hochschild obtenemos que,

$$H^i(A) = \begin{cases} \langle \sum_p e_p \parallel e_p : p \in Q_0 \rangle, & \text{si } i=0; \\ \langle \alpha^{(1)} \parallel \alpha_0^2 \alpha_1^2, \alpha_0^3 \parallel \alpha_0^3 \rangle, & \text{si } i=1; \\ \langle \alpha^{(3)} \parallel \alpha^{(1)}, \alpha^{(3)} \parallel \alpha^{(2)} \rangle, & \text{si } i=3; \\ 0, & \text{si } i \neq 0, 1, 3. \end{cases}$$

Como calculamos la cohomología de Hochschild a partir de la resolución minimal debemos utilizar los morfismos de comparación correspondientes para calcular el corchete de Gerstenhaber. Calculemos ahora el corchete de $f = \alpha^{(1)} \parallel \alpha_0^2 \alpha_1^2 \in H^1(A)$ con $g = \alpha^{(3)} \parallel \alpha^{(1)} \in H^3(A)$ aplicado a la 2-ambigüedad $\alpha_0^3 \alpha_1^3 \alpha_2^3$,

$$[f, g](\alpha^{(3)}) = \varphi_3^*[\eta_1^*(f), \eta_3^*(g)](\alpha^{(3)}) = [\eta_1^*(f), \eta_3^*(g)]\varphi_3(1 \otimes \alpha^{(3)} \otimes 1).$$

Aplicando la fórmula explícita de φ_3 obtenemos que

$$\varphi_3(1 \otimes \alpha^{(3)} \otimes 1) = 1 \otimes \alpha_0^3 \otimes 1 \otimes \alpha_1^3 \otimes \alpha_2^3 + 1 \otimes \alpha_0^3 \otimes \alpha_1^3 \otimes \alpha_2^3 \otimes 1$$

y el primer término se anula en el complejo Bar E-reducido. Por lo tanto, aplicando la definición de asociador y corchete de Gerstenhaber,

$$\begin{aligned} [f, g](\alpha^{(3)}) &= [\eta_1^*(f), \eta_3^*(g)](\alpha_0^3 \otimes \alpha_1^3 \otimes \alpha_2^3) \\ &= \eta_1^*(f)(\eta_3^*(g)(\alpha_0^3 \otimes \alpha_1^3 \otimes \alpha_2^3)) - \eta_3^*(g)(\eta_1^*(f)(\alpha_0^3 \otimes \alpha_1^3 \otimes \alpha_2^3)) \\ &\quad - \eta_3^*(g)(\alpha_0^3 \otimes \eta_1^*(f)(\alpha_1^3 \otimes \alpha_2^3)) - \eta_3^*(g)(\alpha_0^3 \otimes \alpha_1^3 \otimes \eta_1^*(f)(\alpha_2^3)). \end{aligned}$$

Trabajemos ahora con cada uno de los cuatro términos.
Comencemos con el primero.

$$\eta_1^*(f)(\eta_3^*(g)(\alpha_0^3 \otimes \alpha_1^3 \otimes \alpha_2^3)) = \eta_1^*(f)(\alpha^{(3)} \parallel \alpha^{(1)}) \eta_3(1 \otimes \alpha_0^3 \otimes \alpha_1^3 \otimes \alpha_2^3 \otimes 1)$$

Aplicando la fórmula explícita de η_3 o la Proposición 5.2.4 sabemos que,

$$\eta_3(1 \otimes \alpha_0^3 \otimes \alpha_1^3 \otimes \alpha_2^3 \otimes 1) = 1 \otimes \alpha^{(3)} \otimes 1$$

y la expresión anterior nos queda,

$$\eta_1^*(f)(\alpha^{(1)}) = (\alpha^{(1)} \parallel \alpha_0^2 \alpha_1^2) \eta_1(1 \otimes \alpha^{(1)} \otimes 1) = \alpha_0^2 \alpha_1^2.$$

Sigamos con el segundo término.

$$\begin{aligned} \eta_3^*(g)(\eta_1^*(f)(\alpha_0^3 \otimes \alpha_1^3 \otimes \alpha_2^3)) &= \eta_3^*(g)((\alpha^{(1)} \parallel \alpha_0^2 \alpha_1^2)(\eta_1(1 \otimes \alpha_0^3 \otimes 1)) \otimes \alpha_1^3 \otimes \alpha_2^3) \\ &= \eta_3^*(g)((\alpha^{(1)} \parallel \alpha_0^2 \alpha_1^2)(\alpha_0^3 \otimes \alpha_1^3 \otimes \alpha_2^3)). \end{aligned}$$

El término anterior se anula ya que $(\alpha^{(1)} \parallel \alpha_0^2 \alpha_1^2)(\alpha_0^3) = 0$.

Razonando en forma análoga el tercer y cuarto término también se anulan.

En conclusión,

$$[\alpha^{(1)} \parallel \alpha_0^2 \alpha_1^2, \alpha^{(3)} \parallel \alpha^{(1)}](\alpha^{(3)}) = \alpha_0^2 \alpha_1^2$$

y el corchete de Gerstenhaber no se anula en este caso.

Generalizando este ejemplo, si consideramos una i -ambigüedad con $i > 1$ en lugar de una 2-ambigüedad podemos construir ejemplos en los cuales el corchete de $H^1(A)$ con $H^i(A)$ es no trivial.

La estructura de $H^1(A)$ como álgebra de Lie y la estructura de $H^i(A)$ como representación de $H^1(A)$ se describirán completamente en capítulos posteriores.

6.3. El corchete de Gerstenhaber en $H^1(A)$

Notación 6.3.1. Dados $\alpha \parallel h \in \text{Hom}_{\mathbb{E}^e}(kQ_1, A)$ y un camino $\tilde{\alpha}$ en A , notaremos $\tilde{\alpha}^{\alpha \parallel h}$ a la suma de todos los caminos no nulos que se obtienen reemplazando cada aparición de α en $\tilde{\alpha}$ por h . Si el camino $\tilde{\alpha}$ no contiene a la flecha α o si al reemplazar α en $\tilde{\alpha}$ por h no resulta un camino no nulo en A , definimos $\tilde{\alpha}^{\alpha \parallel h} = 0$.

Lema 6.3.2. Dados $\alpha \parallel h \in \text{Hom}_{\mathbb{E}^e}(kQ_1, A)$, $b \in \overline{\mathcal{B}}$ y $f \in \text{Hom}_{\mathbb{E}^e}(\overline{A}, A)$, valen las siguientes igualdades:

1. $\eta_1^*(\alpha \parallel h)(b) = b^{\alpha \parallel h}$.
2. $\varphi_1^*(f) = \sum_{\alpha \in Q_1} \sum_{\alpha \parallel c \in Q_1 \parallel \mathcal{B}} \lambda_{\alpha, c} \alpha \parallel c$, si $f(\alpha) = \sum_{c \in \mathcal{B}} \lambda_{\alpha, c} c$.

Demostración. Comencemos probando la primera igualdad. Dados $\alpha \parallel h \in \text{Hom}_{\mathbb{E}^e}(kQ_1, A)$ y $b \in \overline{\mathcal{B}}$, notaremos $\widetilde{(\alpha \parallel h)}$ al elemento de $\text{Hom}_{\mathbb{A}^e}(A \otimes_{\mathbb{E}} kQ_1 \otimes_{\mathbb{E}} A, A)$ obtenido a partir de $\alpha \parallel h$ mediante la identificación canónica de $\text{Hom}_{\mathbb{E}^e}(kQ_1, A)$ con $\text{Hom}_{\mathbb{A}^e}(A \otimes_{\mathbb{E}} kQ_1 \otimes_{\mathbb{E}} A, A)$. Evaluando $\eta_1^*(\alpha \parallel h)$ en b ,

$$\eta_1^*(\alpha \parallel h)(b) = \widetilde{(\alpha \parallel h)} \eta_1(1 \otimes_{\mathbb{E}} b \otimes_{\mathbb{E}} 1) = \widetilde{(\alpha \parallel h)} \sum b^{(1)} \otimes_{\mathbb{E}} \overleftarrow{b^{(2)}} \otimes_{\mathbb{E}} b^{(3)} = \sum b^{(1)} (\alpha \parallel h) (\overleftarrow{b^{(2)}}) b^{(3)}.$$

- Si α es una flecha contenida en b , entonces $\eta_1^*(\alpha||h)(b) = \alpha^l h \alpha^r$ donde α^l es la parte que está a la izquierda de α en b y α^r la parte que está a la derecha.
- Si α no es una flecha contenida en b , entonces $\eta_1^*(\alpha||h)(b) = 0$.

Por lo tanto la igualdad queda probada.

A continuación demostraremos la segunda igualdad. Dados $f \in \text{Hom}_{E^e}(\bar{A}, A)$ y $\alpha \in Q_1$, notaremos \tilde{f} al elemento de $\text{Hom}_{A^e}(A \otimes_E \bar{A} \otimes_E A, A)$ obtenido a partir de f mediante la identificación canónica de $\text{Hom}_{E^e}(\bar{A}, A)$ con $\text{Hom}_{A^e}(A \otimes_E \bar{A} \otimes_E A, A)$. Supongamos que $f(\alpha) = \sum_{c \in \mathcal{B}} \lambda_{\alpha,c} c$,

$$\varphi_1^*(f)(\alpha) = \tilde{f}(\varphi_1(1 \otimes_E \alpha \otimes_E 1)) = \tilde{f}(1 \otimes_E \alpha \otimes_E 1) = f(\alpha).$$

Concluimos que $\varphi_1^*(f) = \sum_{\alpha \in Q_1} \sum_{\alpha||c \in Q_1||\mathcal{B}} \lambda_{\alpha,c} \alpha||c$. \square

El siguiente teorema da una fórmula para el corchete de Gerstenhaber restringido a $H^1(A)$. El resultado correspondiente para álgebras monomiales ya fue probado en [26].

Teorema 6.3.3. *Sea A un álgebra toupie. El corchete de Gerstenhaber en $H^1(A)$ puede expresarse en términos de la resolución minimal como:*

$$[\alpha||h, \beta||b] = \beta||b^{\alpha||h} - \alpha||h^{\beta||b},$$

con $\alpha||h, \beta||b \in \text{Hom}_{E^e}(kQ_1, A)$.

Demostración. Dados $\alpha||h, \beta||b \in \text{Hom}_{E^e}(kQ_1, A)$, calcularemos $[\alpha||h, \beta||b] \in \text{Hom}_{E^e}(kQ_1, A)$ utilizando los morfismos de comparación. Dado $\gamma \in Q_1$,

$$\begin{aligned} [\alpha||h, \beta||b](\gamma) &= \varphi_1^*[\eta_1^*(\alpha||h), \eta_1^*(\beta||b)](\gamma) \\ &= [\eta_1^*(\alpha||h), \eta_1^*(\beta||b)]\varphi_1(1 \otimes_E \gamma \otimes_E 1) \\ &= [\eta_1^*(\alpha||h), \eta_1^*(\beta||b)](\gamma). \end{aligned}$$

Aplicando ahora la definición del corchete de Gerstenhaber en la resolución Bar E-reducida resulta:

$$\begin{aligned} [\eta_1^*(\alpha||h), \eta_1^*(\beta||b)](\gamma) &= \eta_1^*(\alpha||h) \circ \eta_1^*(\beta||b)(\gamma) - \eta_1^*(\beta||b) \circ \eta_1^*(\alpha||h)(\gamma) \\ &= (\gamma^{\beta||b})^{\alpha||h} - (\gamma^{\alpha||h})^{\beta||b}. \end{aligned}$$

- Si $\gamma = \beta$, entonces $\gamma^{\beta||b} = b$ y si a su vez b contiene a α , reemplazamos α por h en b .
- Si $\gamma = \alpha$, entonces $\gamma^{\alpha||h} = h$ y si a su vez h contiene a β , reemplazamos β por b en h .
- Si $\gamma \neq \alpha$ y $\gamma \neq \beta$, entonces $[\alpha||h, \beta||b](\gamma) = 0$.

En conclusión, $[\alpha||h, \beta||b] = \beta||b^{\alpha||h} - \alpha||h^{\beta||b}$.

El cálculo que acabamos de realizar en términos del complejo induce la fórmula del corchete de Gerstenhaber en $H^1(A)$. \square

Observación 6.3.4. Si $\alpha||\alpha$ y $\beta||\beta$ son elementos en $H^1(A)$, entonces $[\alpha||\alpha, \beta||\beta] = 0$.

6.4. Descomposición de $H^1(A)$ como álgebra de Lie

A continuación recordaremos la notación utilizada en el Capítulo 4 para la base de $H^1(A)$.

Escribimos:

- $y_i = \alpha_0^i \parallel \alpha_0^i$ con $\alpha^{(i)}$ una rama con relaciones monomiales.
- $w_{pq} = \alpha^{(p)} \parallel \alpha^{(q)}$ con $p \neq q$ y $p, q = 1, \dots, a$.
- $z_{us} = \alpha^{(r)} \parallel \alpha^{(s)}$ con $u = 1, \dots, a$ y $\alpha^{(s)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega - Z$.
- $x_{r'} = \alpha^{(r')} \parallel \alpha^{(r')} - \alpha^{(1)} \parallel \alpha^{(1)}$ con $r' = 2, \dots, a$.
- $t_k = \sum_{\alpha^{(i)} \in Q_p^k} \alpha_0^i \parallel \alpha_0^i$ con $k = 1, \dots, r$.

Recordamos que $A_1'' = \{y_i : \alpha^{(i)} \text{ es una rama con relaciones monomiales}\}$.

En el próximo teorema utilizaremos la notación dada en la Sección 2.1.

Teorema 6.4.1. *Sea A un álgebra toupie. El álgebra de Lie $H^1(A)$ es abeliana si y solo si $a = 0$ o $D \leq 1$.*

Demostración. Veamos que si $a = 0$ o $D \leq 1$, entonces $H^1(A)$ es abeliana. Recordemos del Capítulo 4 que:

$$\text{Hom}_{\mathbb{E}^e}(kQ_1, A) = k(Q_1 - Z \parallel Q_1 - Z) + k(Z \parallel {}_0\mathcal{B}_\omega).$$

Si $a = 0$, entonces Z es vacío y $\text{Hom}_{\mathbb{E}^e}(kQ_1, A)$ está generado por los elementos de la forma $\alpha \parallel \alpha$ para algún $\alpha \in Q_1$. Utilizando la Observación 6.3.4, concluimos que $H^1(A)$ es abeliano.

Si $D \leq 1$ podemos distinguir dos casos:

- si $a = 0$, argumentamos como lo hicimos anteriormente.
- Si $a = 1$, entonces $Z = \{\alpha^{(1)}\}$ y $\text{Hom}_{\mathbb{E}^e}(kQ_1, A)$ está generado por los elementos de la forma $\alpha \parallel \alpha$ con $\alpha \in Q_1 - Z$ junto con $\{\alpha^{(1)} \parallel \alpha^{(1)}\}$. Utilizando nuevamente la Observación 6.3.4 concluimos que $H^1(A)$ es abeliano.

Para probar el recíproco, supongamos que $a > 0$ y $D > 1$. Aquí consideraremos dos casos:

1. Si $D = a$, hay al menos dos elementos en Z que llamaremos $\alpha^{(1)}$ y $\alpha^{(2)}$. A partir de ellos consideremos w_{21} y w_{12} los elementos de la base de $H^1(A)$ construidos a partir de $\alpha^{(1)}$ y $\alpha^{(2)}$. Calculando el corchete de estos elementos, vemos que:

$$[w_{21}, w_{12}] = [\alpha^{(2)} \parallel \alpha^{(1)}, \alpha^{(1)} \parallel \alpha^{(2)}] = \alpha^{(1)} \parallel (\alpha^{(2)})^{\alpha^{(2)}} \parallel \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} \parallel (\alpha^{(1)})^{\alpha^{(1)}} \parallel \alpha^{(2)} = -x_2 \neq 0.$$

2. Si $D > a$, existe por lo menos un elemento en Z al que llamaremos $\alpha^{(1)}$ y un elemento en ${}_0\mathcal{B}_\omega - Z$ al que llamaremos $\alpha^{(p)}$, que se encuentra en una componente conexa Q_p^k para algún k . Consideremos los elementos de la base z_{1p} y t_k ,

$$\begin{aligned} [z_{1p}, t_k] &= [\alpha^{(1)} \parallel \alpha^{(p)}, \sum_{i: \alpha^{(i)} \in Q_p^k} \alpha_0^i \parallel \alpha_0^i] \\ &= \sum_{i: \alpha^{(i)} \in Q_p^k} (\alpha_0^i \parallel (\alpha_0^i)^{\alpha^{(1)}} \parallel \alpha^{(p)} - \alpha^{(1)} \parallel (\alpha^{(p)})^{\alpha_0^i} \parallel \alpha_0^i) \\ &= -\alpha^{(1)} \parallel \alpha^{(p)} \\ &= -z_{1p} \neq 0. \end{aligned}$$

□

De ahora en adelante supondremos que $a > 0$ y $D > 1$.

Para describir la estructura del álgebra de Lie de $H^1(A)$ demostraremos el siguiente lema.

Lema 6.4.2. Sea A un álgebra toupie con $a > 0$. El centro del álgebra del Lie $H^1(A)$ es el k -espacio vectorial generado por $A_1'' = \{y_i : i = 1, \dots, m\}$.

Demostración. Probemos primero que $A_1'' \subset \mathcal{Z}(H^1(A))$. Dado $y_i \in A_1''$, sabemos que $y_i = \alpha_0^i \|\alpha_0^i$ con $\alpha^{(i)}$ una rama que contiene al menos una relación monomial. Utilizando la Observación 6.3.4, vemos que los corchetes $[y_i, t_k]$ y $[y_i, x_{r'}]$ se anulan para todo t_k y $r' = 2, \dots, a$.

Por otro lado, dado w_{pq} con $p \neq q$ y $p, q = 1, \dots, a$,

$$[y_i, w_{pq}] = [\alpha_0^i \|\alpha_0^i, \alpha^{(p)} \|\alpha^{(q)}] = \alpha^{(p)} \|\alpha^{(q)} \alpha_0^i \|\alpha_0^i - \alpha_0^i \|\alpha^{(p)} \alpha^{(q)} = 0.$$

Notemos que cada término se anula ya que $\alpha^{(p)}$ y $\alpha^{(q)}$ son flechas de 0 a ω , mientras que α_0^i es la primera flecha de una rama que contiene alguna relación monomial.

Finalmente, dado z_{qj} con $q = 1, \dots, a$ y $\alpha^{(j)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega - Z$,

$$[y_i, z_{qj}] = [\alpha_0^i \|\alpha_0^i, \alpha^{(q)} \|\alpha^{(j)}] = \alpha^{(q)} \|\alpha^{(j)} \alpha_0^i \|\alpha_0^i - \alpha_0^i \|\alpha^{(q)} \alpha^{(j)} = 0,$$

donde nuevamente que cada término se anula ya que $\alpha^{(q)}$ es una flecha de 0 a ω , $\alpha^{(j)}$ es una rama que no es flecha sin relaciones monomiales y α_0^i es la primera flecha de una rama que contiene alguna relación monomial.

Veamos ahora que todo elemento del centro del álgebra de Lie puede escribirse como combinación lineal de elementos de A_1'' .

Sea Γ un elemento de $\mathcal{Z}(H^1(A))$. Escribamos Γ en términos de la base de $H^1(A)$:

$$\Gamma = \sum_{r'} A_{r'} x_{r'} + \sum_{p,q} B_{p,q} w_{pq} + \sum_{u,s} C_{u,s} z_{us} + \sum_k D_k t_k + \sum_i E_i y_i.$$

Como el corchete de Γ con cualquier elemento de A_1'' debe ser nulo, veremos a continuación cuales son las restricciones sobre los coeficientes de Γ que esto impone. Sabemos que para todo k ,

$$0 = [\Gamma, t_k] = \left[\sum_{u,s} C_{u,s} z_{us}, t_k \right] = \sum_{u,s} C_{u,s} [z_{us}, t_k] = - \sum_{u,s} C_{u,s} z_{us}.$$

Como el conjunto de los z_{us} es linealmente independiente, necesariamente $C_{u,s}$ se anula para todo s y para todo $u = 1, \dots, a$.

Sabemos también que para todo $r' = 2, \dots, a$:

$$0 = [\Gamma, x_{r'}] = [\Gamma, \alpha^{(r')} \|\alpha^{(r')}] - [\Gamma, \alpha^{(1)} \|\alpha^{(1)}] = \left[\sum_{p,q} B_{p,q} w_{pq}, \alpha^{(r')} \|\alpha^{(r')} \right] - \left[\sum_{p,q} B_{p,q} w_{pq}, \alpha^{(1)} \|\alpha^{(1)} \right],$$

ya que la Observación 6.3.4 implica que $[x_j, \alpha^{(i)} \|\alpha^{(i)}] = 0$ para todo $i = 1, \dots, a$ y que ya sabemos que los coeficientes $C_{r,s}$ se anulan. Siguiendo con el cálculo:

$$\begin{aligned} [\Gamma, x_{r'}] &= - \sum_p (B_{p,r'} w_{pr'} + B_{p,1} w_{p1}) + \sum_q (B_{r',q} w_{r'q} - B_{1,q} w_{1q}) \\ &= -2B_{1,r'} w_{1r'} + 2B_{r',1} w_{r'1} - \sum_{p \neq 1} B_{p,r'} w_{pr'} \\ &\quad + \sum_{q \neq 1} B_{r',q} w_{r'q} + \sum_{p \neq r'} B_{p,1} w_{p1} - \sum_{q \neq r} B_{1,q} w_{1q}. \end{aligned}$$

Como el conjunto de los w_{pq} es linealmente independiente, concluimos que $B_{p,q} = 0$ para todo $p \neq q$ y $p, q = 1, \dots, a$.

Veamos ahora que $A_{r'} = 0$ para $r' = 2, \dots, a$. Si tomamos ahora un elemento de la forma w_{pq} para algún p y algún q con $p \neq q$ y $1 \leq p, q \leq a$, resulta

$$0 = [\Gamma, w_{pq}] = \sum_{r'} A_{r'} [x_{r'}, w_{pq}].$$

Si $p, q \neq 1$:

$$0 = [\Gamma, w_{pq}] = (A_p - A_q)w_{pq}$$

de donde vemos que $A_p = A_q$. Si $p = 1$:

$$\begin{aligned} 0 = [\Gamma, w_{1q}] &= \sum_{r'} A_{r'} [\alpha^{(r')} \parallel \alpha^{(r')}, w_{1q}] - \sum_{r'} A_{r'} [\alpha^{(1)} \parallel \alpha^{(1)}, w_{1q}] \\ &= A_q w_{1q} + \sum_{r'} A_{r'} w_{1q} = a A_q w_{1q}, \end{aligned}$$

por lo tanto $A_q = 0$ para todo $q = 2, \dots, a$.

Finalmente, dados u y s tales que $1 \leq u \leq a$ y $\alpha^{(s)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega$ entonces:

$$0 = [\Gamma, z_{us}] = \sum D_k [t_k, z_{us}] = \sum D_k [t_k, \alpha^{(u)} \parallel \alpha^{(s)}] = D_k z_{us}$$

si $\alpha^{(s)}$ pertenece a Q_ρ^k . Luego $D_k = 0$ para todo k y por lo tanto $\Gamma = \sum_i E_i y_i$. \square

Recordemos que el carcaj a -Kronecker Q_a es un carcaj con dos vértices, uno fuente y el otro pozo, con a flechas que van de la fuente al pozo. En la siguiente proposición probaremos que si el carcaj del álgebra toupie tiene a Q_a como subcarcaj, entonces el álgebra de Lie $H^1(A)$ contiene una subálgebra de Lie isomorfa a la cohomología de grado 1 del álgebra de caminos del carcaj a -Kronecker.

Proposición 6.4.3. *La subálgebra de Lie de $H^1(A)$ generada por*

$$\{x_{r'}, w_{pq} \text{ con } p \neq q; p, q = 1, \dots, a \text{ y } r' = 2, \dots, a\}$$

es isomorfa a $H^1(kQ_a)$.

Demostración. Sea Q_A el carcaj correspondiente al álgebra toupie A . Notemos primero que kQ_a es un álgebra toupie. Por lo tanto tenemos una base de $H^1(kQ_a)$ como la descrita en el Capítulo 4. Explícitamente, la base es:

$$\{x_{r'}, w_{pq} \text{ con } p \neq q; p, q = 1, \dots, a \text{ y } r' = 2, \dots, a\}.$$

La inclusión de Q_a en Q_A induce un morfismo k -lineal inyectivo $kQ_a \rightarrow A$ y también un morfismo k -lineal de $H^1(kQ_a)$ en $H^1(A)$ que manda $x_{r'}$ a $x_{r'}$ y cada w_{pq} a w_{pq} . Este mapa es inyectivo e induce un isomorfismo de álgebras de Lie entre $H^1(kQ_a)$ y su imagen. \square

La prueba de la siguiente proposición se encuentra en [21, Corollary 2.2.4]. Daremos el isomorfismo en forma explícita ya que será utilizado más adelante.

Proposición 6.4.4. *La subálgebra de Lie de $H^1(A)$ generada por el conjunto $\{x_{r'}, w_{pq} \text{ con } p \neq q; p, q = 1, \dots, a \text{ y } r' = 2, \dots, a\}$ es isomorfa a $\mathfrak{sl}_a(\mathbb{C})$.*

Demostración. El isomorfismo lleva a $x_{r'}$ en la matriz diagonal de tamaño $a \times a$ que tiene un 1 en la entrada (r', r') , un -1 en la entrada $(1, 1)$ y cero en el resto de sus entradas, y lleva a w_{pq} en la matriz elemental $E_{q,p}$ de tamaño $a \times a$. \square

En el siguiente teorema daremos una descomposición de $H^1(A)$ como álgebra de Lie.

Teorema 6.4.5. *Sea Q un carcaj toupie, Q_ρ el carcaj descrito en la Sección 4.2 y $\{Q_\rho^k : k = 1, \dots, r\}$ en conjunto de las componentes conexas de Q_ρ . El k -espacio vectorial:*

$$L = \langle t_k, z_{us} : k = 1, \dots, r; u = 1, \dots, a \text{ y } s \text{ tal que } \alpha^{(s)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega - Z \rangle$$

es un ideal soluble de $H^1(A)$. Más aún,

1. si $S_1 = \langle t_k : k = 1, \dots, r \rangle$ y $L_2 = \langle z_{us} : u = 1, \dots, a \text{ y } s : \alpha^{(s)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega - Z \rangle$, entonces S_1 es una subálgebra de Lie abeliana, L_2 es un ideal abeliano, y se cumple que:

$$L = S_1 \simeq L_2.$$

2. $H^1(A) = \langle y_i : y_i \in A_1'' \rangle \oplus \mathfrak{sl}_a(\mathbb{C}) \ltimes (S_1 \ltimes L_2)$.

Demostración. Probaremos primero que L es una subálgebra de Lie de $H^1(A)$. Para esto, utilizando la Observación 6.3.4, vemos que $[t_k, t_{k'}] = 0$ ya que todos los sumandos que aparecen al desarrollar son de la forma $[\alpha \parallel \alpha, \beta \parallel \beta]$.

Además, si $\alpha^{(s)} \in Q_\rho^k$,

$$[t_k, z_{us}] = \sum_{\alpha^{(i)} \in Q_\rho^k} [\alpha_\delta^i \parallel \alpha_\delta^i, \alpha^{(u)} \parallel \alpha^{(s)}] = \sum_{\alpha^{(i)} \in Q_\rho^k} \left(\alpha^{(u)} \parallel (\alpha^{(s)})^{\alpha_\delta^i \parallel \alpha_\delta^i} - \alpha_\delta^i \parallel (\alpha_\delta^i)^{\alpha^{(u)} \parallel \alpha^{(s)}} \right) = z_{us}$$

y cero en cualquier otro caso.

Finalmente,

$$[z_{us}, z_{u's'}] = [\alpha^{(u)} \parallel \alpha^{(s)}, \alpha^{(u')} \parallel \alpha^{(s')}] = \alpha^{(u')} \parallel (\alpha^{(s')})^{\alpha^{(u)} \parallel \alpha^{(s)}} - \alpha^{(u)} \parallel (\alpha^{(s)})^{\alpha^{(u')} \parallel \alpha^{(s')}} = 0$$

ya que $\alpha^{(u)}$ y $\alpha^{(u')}$ son flechas de \emptyset a ω y tanto $\alpha^{(s)}$ como $\alpha^{(s')}$ son ramas que no son flechas.

A continuación verificaremos que L es un ideal. Dada k , $1 \leq k \leq r$, si utilizamos nuevamente la Observación 6.3.4 concluimos que $[x_{r'}, t_k]$ se anula para todo $r' = 2, \dots, a$. Por otro lado, es claro que dados $p \neq q$ con $p, q = 1, \dots, a$ se tiene que $[w_{pq}, t_k]$ se anula, ya que las flechas de \emptyset a ω no participan en t_k .

Finalmente probaremos que dado $u = 1, \dots, a$ y s tal que $\alpha^{(s)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega - Z$, tanto $[w_{pq}, z_{us}]$ como $[x_{r'}, z_{us}]$ pertenecen a L para todos los p, q, r' tales que $p \neq q$ y $p, q = 1, \dots, a$ y además $r' = 2, \dots, a$:

$$[w_{pq}, z_{us}] = [\alpha^{(p)} \parallel \alpha^{(q)}, \alpha^{(u)} \parallel \alpha^{(s)}] = \alpha^{(u)} \parallel (\alpha^{(s)})^{\alpha^{(p)} \parallel \alpha^{(q)}} - \alpha^{(p)} \parallel (\alpha^{(q)})^{\alpha^{(u)} \parallel \alpha^{(s)}} = 0 - \delta_{qu} z_{ps}.$$

$$[x_{r'}, z_{us}] = [\alpha^{(r')} \parallel \alpha^{(r')}, \alpha^{(u)} \parallel \alpha^{(s)}] - [\alpha^{(1)} \parallel \alpha^{(1)}, \alpha^{(u)} \parallel \alpha^{(s)}] = (-\delta_{r'u} + \delta_{1u}) z_{us}.$$

Veamos ahora que L es soluble. Sea L_2 como en el enunciado. Observemos que $[L, L] \subset L_2$ y que L_2 es abeliano.

A partir de los cálculos realizados al comienzo de esta demostración podemos deducir que S_1 es una subálgebra abeliana y que L_2 es un ideal. Además $[L_2, L_2] = 0$ y por lo tanto L_2 es abeliano. Finalmente, como la proyección $\pi' : L \rightarrow L/L_2$ induce un isomorfismo entre S_1 y L/L_2 resulta

$$L = S_1 \times L_2.$$

Por otro lado observemos que $\widetilde{H^1(A)} := H^1(A)/\mathcal{Z}(H^1(A))$ es también un álgebra de Lie. Si consideramos ahora la proyección $\pi : \widetilde{H^1(A)} \rightarrow \widetilde{H^1(A)}/L$, ésta induce, pasando al cociente, un isomorfismo entre $sl_a(\mathbb{C})$ y $\widetilde{H^1(A)}/L$, lo que implica que:

$$\widetilde{H^1(A)} \simeq sl_a(\mathbb{C}) \times L$$

Utilizando este isomorfismo y el lema 6.4.2 que describe el centro del álgebra obtenemos la descomposición buscada para $H^1(A)$. □

Corolario 6.4.6. *Sea A un álgebra toupie y sea L como en el Teorema 6.4.5. El radical del álgebra de Lie de $H^1(A)$ se descompone como sigue:*

$$\text{rad}(H^1(A)) = A_1'' \oplus L.$$

Demostración. Como L es un ideal soluble y A_1'' es abeliano, $L \oplus A_1''$ es un ideal soluble. Además el cociente de $H^1(A)$ por $L \oplus A_1''$ es isomorfo a $sl_a(\mathbb{C})$, que es semisimple. Obtenemos así el resultado buscado. □

El siguiente corolario da una descomposición similar a la del Teorema 6.4.5. Se prueba fácilmente utilizando el corolario anterior y la descomposición de Levi.

Corolario 6.4.7. *Sea A un álgebra toupie y L el ideal del corolario anterior. El álgebra de $H^1(A)$ se descompone de la siguiente forma:*

$$H^1(A) = (L \oplus A_1'') \times sl_a(\mathbb{C}).$$

Vimos antes que $H^1(A)$ es no abeliana si y solo si $a \geq 1$ y $D \geq 2$. El siguiente corolario dice que en esa situación, $H^1(A)$ es semisimple solamente cuando el carcaj de A es el carcaj α -Kronecker.

Corolario 6.4.8. *Sea A un álgebra toupie tal que $H^1(A)$ es no abeliana. El álgebra de Lie $H^1(A)$ es semisimple si y solo si $a = D$ y $m = 0$.*

Demostración. En primer lugar probaremos que si $H^1(A)$ es semisimple, entonces $a = D$ y $m = 0$. Si $H^1(A)$ es semisimple, por definición es $\text{rad}(H^1(A)) = 0$ y por lo tanto $\#A_1'' = m = 0$. Utilizando el Corolario 6.4.6 sabemos que $H^1(A)$ es isomorfo a $sl_a(\mathbb{C})$, mediante la identificación de $sl_a(\mathbb{C})$ con $\langle x_{r'}, w_{pq} : p \neq q; p, q = 1, \dots, a \text{ y } r' = 2, \dots, a \rangle$ como en el Corolario 6.4.4. Al ser $H^1(A)$ no abeliana, existe al menos una flecha de 0 a ω a la que llamaremos $\alpha^{(1)} \in Z$. Si a fuera estrictamente menor que D , entonces existiría una rama $\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega - Z$. El elemento $z_{1i} = \alpha^{(1)} \parallel \alpha^{(i)}$ es no nulo y pertenece a $H^1(A)$, lo cual genera una contradicción.

Probemos ahora el recíproco. Sabemos que si $a = D$ y $m = 0$, la base de $H^1(A)$ no contiene elementos de la forma y_i, z_{us} ni $t_{k'}$, por lo tanto $H^1(A) \simeq sl_a(\mathbb{C})$. □

6.5. $H^2(A)$ como representación de $H^1(A)$

En esta sección describiremos la acción a izquierda del álgebra de Lie $H^1(A)$ en $H^2(A)$. Dado un camino c , llamaremos $\overleftarrow{c^{(1)}}$ a la primera flecha de c . Consideremos en primer lugar una relación monomial σ que sea uno de los generadores del ideal admisible \mathcal{I} . Sean $\alpha \in Q_1$ y b un camino tal que $s(\alpha) = s(b) = 0$ y $t(\alpha) = t(b)$. Sean ρ una relación de 0 a ω y c un camino de 0 a ω en A . Calcularemos $[\alpha \| b, \rho \| c] \in H^2(A)$:

$$\begin{aligned} [\alpha \| b, \rho \| c](\sigma) &= \varphi_2^*[\eta_1^*(\alpha \| b), \eta_2^*(\rho \| c)](\sigma) \\ &= \sum_{\sigma} [\eta_1^*(\alpha \| b), \eta_2^*(\rho \| c)](1 \otimes \overline{\sigma^{(1)}} \otimes \overleftarrow{\sigma^{(2)}} \otimes \sigma^{(3)}) \\ &= \sum_{\sigma} \eta_1^*(\alpha \| b) \circ \eta_2^*(\rho \| c)(\overline{\sigma^{(1)}} \otimes \overleftarrow{\sigma^{(2)}}) \sigma^{(3)} \\ &\quad - \sum_{\sigma} \eta_2^*(\rho \| c)(\overline{\eta_1^*(\alpha \| b)(\overline{\sigma^{(1)}})} \otimes \overleftarrow{\sigma^{(2)}}) \sigma^{(3)} \\ &\quad - \sum_{\sigma} \eta_2^*(\rho \| c)(\overline{\sigma^{(1)}} \otimes \overline{\eta_1^*(\alpha \| b)(\overleftarrow{\sigma^{(2)}})}) \sigma^{(3)}, \end{aligned}$$

donde la suma es sobre todas las descomposiciones posibles de σ como al comienzo de la Subsección 3.1.2.

Comencemos con el cálculo del primer sumando:

$$\sum_{\sigma} \eta_1^*(\alpha \| b) \circ \eta_2^*(\rho \| c)(\overline{\sigma^{(1)}} \otimes \overleftarrow{\sigma^{(2)}}) \sigma^{(3)} = \sum_{\sigma} \eta_1^*(\alpha \| b)((\rho \| c)(\eta_2(1 \otimes \overline{\sigma^{(1)}} \otimes \overleftarrow{\sigma^{(2)}} \otimes 1)) \sigma^{(3)}).$$

Como la relación monomial σ no contiene ninguna otra relación, el término $\eta_2(1 \otimes \overline{\sigma^{(1)}} \otimes \overleftarrow{\sigma^{(2)}} \otimes 1)$ se anulará salvo en el caso en que $\sigma^{(3)}$ sea 1. Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} \eta_1^*(\alpha \| b)((\rho \| c)(\eta_2(1 \otimes \overline{\sigma^{(1)}} \otimes \overleftarrow{\sigma^{(2)}} \otimes 1)) \sigma^{(3)}) &= \eta_1^*(\alpha \| b)(\rho \| c)(\eta_2(1 \otimes \overline{\sigma^{(1)}} \otimes \overleftarrow{\sigma^{(2)}} \otimes 1)) \\ &= \eta_1^*(\alpha \| b)(\overline{(\rho \| c)(\sigma)}) \\ &= \delta_{\rho, \sigma} \eta_1^*(\alpha \| b)(\bar{c}) \\ &= \delta_{\rho, \sigma} (\alpha \| b)(\eta_1(1 \otimes \bar{c} \otimes 1)) \\ &= \delta_{\rho, \sigma} \sum_c (\alpha \| b)(c^{(1)} \otimes \overleftarrow{c^{(2)}} \otimes c^{(3)}). \\ &= \begin{cases} \delta_{\rho, \sigma} c^{\alpha \| b}, & \text{si } \alpha = \overleftarrow{c^{(1)}}; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \end{aligned}$$

En cuanto al segundo sumando,

$$-\sum_{\sigma} \eta_2^*(\rho \| c)(\overline{\eta_1^*(\alpha \| b)(\overline{\sigma^{(1)}})} \otimes \overleftarrow{\sigma^{(2)}}) \sigma^{(3)} = \begin{cases} -\sum_{\sigma} (\rho \| c) \eta_2(1 \otimes \overline{\sigma^{(1)}} \otimes \overleftarrow{\sigma^{(2)}} \otimes 1) \sigma^{(3)}, & \text{si } \alpha = \overleftarrow{\sigma^{(1)}}; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Para el cálculo en el primer caso utilizamos que α debe ser la primera flecha de σ y esto implica que $\alpha = b$. En el segundo caso observamos que $\eta_1^*(\alpha \| b)(\overline{\sigma^{(1)}}) = (\alpha \| b)(\eta_1(1 \otimes \overline{\sigma^{(1)}} \otimes 1)) = 0$.

Tomando en cuenta nuevamente que σ no contiene otras relaciones, sabemos que $\eta_2(1 \otimes \overline{\sigma^{(1)}} \otimes \overleftarrow{\sigma^{(2)}} \otimes 1)$ se anulará salvo cuando $\sigma^{(3)} = 1$; en tal caso,

$$-\sum_{\sigma} (\rho \| c) \eta_2(1 \otimes \overline{\sigma^{(1)}} \otimes \overleftarrow{\sigma^{(2)}} \otimes 1) \sigma^{(3)} = -(\rho \| c) \eta_2(1 \otimes \overline{\sigma^{(1)}} \otimes \overleftarrow{\sigma^{(2)}} \otimes 1) = -(\rho \| c)(\sigma) = -\delta_{\sigma, \rho} c.$$

Terminando la descripción de la acción de $H^1(A)$ en $H^2(A)$ para el caso en que σ es una relación monomial, probaremos que el último sumando se anula. Calculamos:

$$-\sum_{\sigma} \eta_2^*(\rho \| c)(1 \otimes \overline{\sigma^{(1)}} \otimes \overleftarrow{\eta_1^*(\alpha \| b)(\sigma^{(2)})} \otimes 1) \sigma^{(3)} = \begin{cases} -\eta_2^*(\rho \| c)(1 \otimes \overline{1} \otimes \overleftarrow{\sigma^{(1)}} \otimes 1) \sigma^{(2)}, & \text{si } \alpha = \overleftarrow{\sigma^{(1)}}; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Observemos que $1 \otimes \overline{1} \otimes \overleftarrow{\sigma^{(1)}} \otimes 1$ se anula en el complejo Bar E-reducido y por lo tanto el tercer sumando se anula.

Consideremos ahora una relación no monomial, que es necesariamente de la forma

$$\rho_i = \alpha^{(k_i)} + \sum_{j > k_i} b_{ij} \alpha^{(j)}$$

para algún i ,

$$\begin{aligned} [\alpha \| b, \rho \| c](\rho_i) &= \varphi_2^*[\eta_1^*(\alpha \| b), \eta_2^*(\rho \| c)](\rho_i) \\ &= \sum_{\alpha^{(k_i)}} [\eta_1^*(\alpha \| b), \eta_2^*(\rho \| c)](1 \otimes \overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}} \otimes (\alpha^{(k_i)})^{(3)}) \\ &\quad \sum_{j > k_i} b_{ij} \sum_{\alpha^{(j)}} [\eta_1^*(\alpha \| b), \eta_2^*(\rho \| c)](1 \otimes \overline{(\alpha^{(j)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(j)})^{(2)}} \otimes (\alpha^{(j)})^{(3)}) \\ &= \sum_{\alpha^{(k_i)}} \eta_1^*(\alpha \| b) \circ \eta_2^*(\rho \| c)(1 \otimes \overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}} \otimes (\alpha^{(k_i)})^{(3)}) \\ &\quad \sum_{j > k_i} b_{ij} \sum_{\alpha^{(j)}} \eta_1^*(\alpha \| b) \circ \eta_2^*(\rho \| c)(1 \otimes \overline{(\alpha^{(j)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(j)})^{(2)}} \otimes (\alpha^{(j)})^{(3)}) \\ &\quad \sum_{\alpha^{(k_i)}} \eta_2^*(\rho \| c)(\eta_1^*(\alpha \| b)(\overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}})(\alpha^{(k_i)})^{(3)}) \\ &\quad \sum_{j > k_i} b_{ij} \sum_{\alpha^{(j)}} \eta_2^*(\rho \| c)(\eta_1^*(\alpha \| b)(\overline{(\alpha^{(j)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(j)})^{(2)}})(\alpha^{(j)})^{(3)}) \\ &\quad - \sum_{\alpha^{(k_i)}} \eta_2^*(\rho \| c)(\overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \eta_1^*(\alpha \| b)(\overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}}))(\alpha^{(k_i)})^{(3)}) \\ &\quad - \sum_{j > k_i} b_{ij} \sum_{\alpha^{(j)}} \eta_2^*(\rho \| c)(\overline{(\alpha^{(j)})^{(1)}} \otimes \eta_1^*(\alpha \| b)(\overleftarrow{(\alpha^{(j)})^{(2)}}))(\alpha^{(j)})^{(3)}. \end{aligned}$$

Comencemos con el cálculo del primer sumando:

$$\sum_{\alpha^{(k_i)}} \eta_1^*(\alpha \| b) \circ \eta_2^*(\rho \| c)(1 \otimes \overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}} \otimes (\alpha^{(k_i)})^{(3)})$$

$$= \sum_{\alpha^{(k_i)}} \eta_1^*(\alpha \| \mathbf{b}) \overline{((\rho \| \mathbf{c}) (\eta_2(\overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}})) (\alpha^{(k_i)})^{(3)})}.$$

El término $\eta_2(\overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}})$ se anula salvo cuando $(\alpha^{(k_i)})^{(3)} = 1$, y en ese caso da ρ_i . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha^{(k_i)}} \eta_1^*(\alpha \| \mathbf{b}) \overline{((\rho \| \mathbf{c}) (\eta_2(\overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}})) (\alpha^{(k_i)})^{(3)})} &= \eta_1^*(\alpha \| \mathbf{b}) \overline{(\rho \| \mathbf{c}) (\rho_i)} \\ &= \delta_{\rho, \rho_i} \eta_1^*(\alpha \| \mathbf{b}) (\bar{\mathbf{c}}) \\ &= \delta_{\rho, \rho_i} (\alpha \| \mathbf{b}) (\eta_1(1 \otimes \bar{\mathbf{c}} \otimes 1)) \\ &= \begin{cases} \delta_{\rho, \rho_i} \mathbf{c}^{\alpha \| \mathbf{b}}, & \alpha = \overleftarrow{\mathbf{c}^{(1)}}; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \end{aligned}$$

El segundo sumando se anula ya que,

$$\begin{aligned} &\sum_{j > k_i} b_{ij} \sum_{\alpha^{(j)}} \eta_1^*(\alpha \| \mathbf{b}) \circ \eta_2^*(\rho \| \mathbf{c}) (1 \otimes \overline{(\alpha^{(j)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(j)})^{(2)}} \otimes (\alpha^{(j)})^{(3)}) \\ &= \sum_{j > k_i} b_{ij} \sum_{\alpha^{(j)}} \eta_1^*(\alpha \| \mathbf{b}) \overline{((\rho \| \mathbf{c}) (\eta_2(\overline{(\alpha^{(j)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(j)})^{(2)}})) (\alpha^{(j)})^{(3)})} \\ &= 0 \end{aligned}$$

porque $\eta_2(\overline{(\alpha^{(j)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(j)})^{(2)}}) = 0$ para todo $j > k_i$.

Para comenzar a trabajar con el tercer sumando debemos considerar también dos casos.

1. Si α no es la primera flecha de $\alpha^{(k_i)}$ entonces:

$$- \sum_{\alpha^{(k_i)}} \eta_2^*(\rho \| \mathbf{c}) \overline{(\eta_1^*(\alpha \| \mathbf{b}) (\overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}})) (\alpha^{(k_i)})^{(3)}} = 0.$$

2. Si α es la primera flecha de $\alpha^{(k_i)}$, lo que implica que $\mathbf{b} = \alpha$, entonces:

$$\begin{aligned} &- \sum_{\alpha^{(k_i)}} \eta_2^*(\rho \| \mathbf{c}) \overline{(\eta_1^*(\alpha \| \alpha) (\overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}})) (\alpha^{(k_i)})^{(3)}} \\ &= - \sum_{\alpha^{(k_i)}} \eta_2^*(\rho \| \mathbf{c}) \overline{((\alpha \| \alpha) (\eta_1(1 \otimes \overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes 1) \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}})) (\alpha^{(k_i)})^{(3)}} \\ &= - \sum_{\alpha^{(k_i)}} \eta_2^*(\rho \| \mathbf{c}) \overline{(\overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}})) (\alpha^{(k_i)})^{(3)}} \\ &= - \sum_{\alpha^{(k_i)}} (\rho \| \mathbf{c}) \eta_2(\overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}}) (\alpha^{(k_i)})^{(3)}. \end{aligned}$$

El término $\eta_2(\overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}})$ se anula salvo que $(\alpha^{(k_i)})^{(3)} = 1$, y en ese caso $\eta_2(\overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}}) = \rho_i$. Por lo tanto,

$$- \sum_{\alpha^{(k_i)}} (\rho \| \mathbf{c}) \eta_2(\overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}}) (\alpha^{(k_i)})^{(3)} = -(\rho \| \mathbf{c}) \eta_2(\overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}})$$

$$\begin{aligned}
&= -(\rho||c)(\rho_i) \\
&= -\delta_{\rho, \rho_i} c
\end{aligned}$$

El cuarto sumando se anula. Esto puede verse haciendo un cálculo similar al anterior, salvo que aquí $\eta_2(\overline{(\alpha^{(j)})^{(1)}} \otimes \overline{(\alpha^{(j)})^{(2)}}) = 0$ para todo j mayor que k_i .

Finalmente verificaremos que los dos últimos sumandos también se anulan. Para el quinto sumando, observemos que

$-\sum_{\alpha^{(k_i)}} \eta_2^*(\rho||c)(\overline{(\alpha^{(k_i)})^{(1)}} \otimes \overline{\eta_1^*(\alpha||b)(\overline{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}})}) (\alpha^{(k_i)})^{(3)}$ se anula si α no es la primera flecha de $\alpha^{(k_i)}$ y da $-(\rho||c)(\eta_2(\overline{1} \otimes \overline{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}})) (\alpha^{(k_i)})^{(3)}$ si lo es.

A su vez, $\overline{1} \otimes \overline{(\alpha^{(k_i)})^{(2)}}$ se anula en el complejo Bar E-reducido y concluimos que el quinto sumando se anula.

El cálculo del último sumando es similar.

En resumen, dados $\alpha||b \in H^1(A)$ y $\rho||c \in H^2(A)$:

$$[\alpha||b, \rho||c] = \delta_{\alpha, c^{(1)}} \rho||c^{\overleftarrow{c^{(1)}}||b} - \delta_{\alpha, W_\rho^{(1)}} \rho||c$$

Observación 6.5.1. Dada una relación ρ de punta a punta monomial o no monomial. El k -subespacio vectorial $V_\rho = \langle \rho||\alpha^{(k)} : \alpha^{(k)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega \rangle$ es una subrepresentación de Lie de $H^1(A)$ en $H^2(A)$.

A continuación describiremos la acción de $\mathfrak{sl}_a(\mathbb{C})$ como subálgebra de Lie de $H^1(A)$ en $H^2(A)$.

Teorema 6.5.2. Consideremos un álgebra toupie A con $a > 0$ y sea

$$E = \{\rho||\alpha^{(k)} : \rho \text{ es una relación de } 0 \text{ a } \omega \text{ y } \alpha^{(k)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega - Z\}$$

visto como subconjunto de $H^2(A)$. La descomposición de $H^2(A)$ como representación de $\mathfrak{sl}_a(\mathbb{C})$ es:

$$H^2(A) \simeq \bigoplus_{\dim_k \langle E \rangle} V_0 \oplus \bigoplus_{\rho: s(\rho)=0, t(\rho)=\omega} V$$

donde $V_0 \simeq \mathbb{C}$ es la representación trivial y V es la representación estándar de $\mathfrak{sl}_a(\mathbb{C})$.

Demostración. Comencemos observando que: $H^2(A) = \langle \{\rho||\alpha^{(i)} : \rho \text{ es una relación de } 0 \text{ a } \omega \text{ y } \alpha^{(i)} \in Z\} \cup \{\rho||\alpha^{(j)} : \rho \text{ es una relación de } 0 \text{ a } \omega \text{ y } \alpha^{(j)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega - Z\} \rangle$. Aunque la unión de estos conjuntos resulta ser una base de $\text{Hom}_{\mathbb{E}^e}(kR, A)$, al pasar a la cohomología el conjunto formado por las clases de estos elementos no es en general una base de $H^2(A)$.

Utilizando la Proposición 6.4.3 y la Proposición 6.4.4 identificamos a los generadores de $\mathfrak{sl}_a(\mathbb{C})$ con el conjunto $\{x_{r'}, w_{pq} \text{ con } p \neq q; p, q = 1, \dots, a \text{ y } r' = 2, \dots, a\}$ en $H^1(A)$.

Consideremos

$$\mathfrak{h} = \{b_1 \alpha^{(1)}||\alpha^{(1)} + b_2 \alpha^{(2)}||\alpha^{(2)} + \dots + b_a \alpha^{(a)}||\alpha^{(a)} : b_1 + b_2 + \dots + b_a = 0\} = \langle x_{r'} : \text{con } r' = 2, \dots, a \rangle.$$

Sabemos por el Teorema 2.5.15 que \mathfrak{h} actúa en forma diagonalizable en $H^2(A)$. Para cada $i, 1 \leq i \leq a$, sea $L_i \in \mathfrak{h}^*$ definido por $L_i(b_1 \alpha^{(1)}||\alpha^{(1)} + \dots + b_a \alpha^{(a)}||\alpha^{(a)}) = b_i$. Vemos que $\mathfrak{h}^* = \mathbb{C}\{L_1, \dots, L_a\} / \langle L_1 + \dots + L_a \rangle$.

$\dots + L_a$).

Dados $b_1\alpha^{(1)}\|\alpha^{(1)} + \dots + b_a\alpha^{(a)}\|\alpha^{(a)} \in \mathfrak{h}$, ρ una relación de 0 a ω y $\alpha^{(i)} \in Z$,

$$[b_1\alpha^{(1)}\|\alpha^{(1)} + \dots + b_a\alpha^{(a)}\|\alpha^{(a)}, \rho\|\alpha^{(i)}] = b_i\rho\|\alpha^{(i)}$$

para todo $i = 1, \dots, a$ y por lo tanto $\rho\|\alpha^{(i)}$ es vector propio asociado al peso L_i . Veamos que L_1 es peso maximal de $H^2(A)$. Para esto basta observar que dado $w_{ij} = \alpha^{(i)}\|\alpha^{(j)}$ con $j < i$, es $[w_{ij}, \rho\|\alpha^{(1)}] = 0$. Utilizando los Teoremas 2.5.19 y 2.5.20 concluimos que la representación irreducible generada por $\rho\|\alpha^{(1)}$, que resulta ser $\langle \{\rho\|\alpha^{(i)} : \rho \text{ es una relación de } 0 \text{ a } \omega \text{ y } \alpha^{(i)} \in Z\} \rangle$ es isomorfa a la representación estándar para cada ρ de 0 a ω .

Si en cambio $\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega - Z$, resulta

$$[b_1\alpha^{(1)}\|\alpha^{(1)} + \dots + b_a\alpha^{(a)}\|\alpha^{(a)}, \rho\|\alpha^{(i)}] = 0$$

y esto implica que si $\overline{\rho\|\alpha^{(i)}}$ es no nula en $H^2(A)$, entonces es un vector propio asociado al valor propio 0. Como además en tal caso la subrepresentación generada por $\rho\|\alpha^{(i)}$, que es $\mathbb{C}\cdot\rho\|\alpha^{(i)}$, es isomorfa a la representación trivial, obtenemos la descomposición buscada. \square

Teorema 6.5.3. *Sea A un álgebra toupie con $a > 0$. La descomposición de $H^2(A)$ como representación de Lie de $H^1(A)$ es la siguiente:*

$$H^2(A) = \bigoplus_{\rho:s(\rho)=0,t(\rho)=\omega} V_\rho$$

donde $V_\rho = \langle \rho\|\alpha^{(k)} : \alpha^{(k)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega \rangle$. Además, para toda relación ρ de 0 a ω , el $H^1(A)$ -módulo V_ρ es indescomponible. Más aún, si $D = a$, V_ρ es irreducible para todo ρ . El recíproco vale si existe alguna relación monomial ρ de 0 a ω .

Demostración. Es claro que podemos escribir $H^2(A) = \sum_{\rho:s(\rho)=0,t(\rho)=\omega} V_\rho$ y que $V_\rho \cap \sum_{\rho' \neq \rho} V_{\rho'} = \{0\}$ para todo ρ de 0 a ω .

Veamos ahora que V_ρ es indescomponible para toda relación ρ de 0 a ω . Sabemos que, como $a > 0$, existe al menos una flecha de 0 a ω , a la que llamaremos $\alpha^{(1)}$. Podemos asegurar que $\rho\|\alpha^{(1)}$ no se anula en $H^2(A)$ ya que $\rho\|\alpha^{(1)}$ no pertenece a $\text{Im}(D_1)$. En el caso particular en que $D = 1$, se cumple que $\dim V_\rho = 1$ y V_ρ es indescomponible. Si $D > 1$, dado $\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega$ con $i \neq 1$:

$$[\alpha^{(1)}\|\alpha^{(i)}, \rho\|\alpha^{(1)}] = \rho\|\alpha^{(i)}.$$

Esta igualdad implica que la órbita de la acción de $H^1(A)$ sobre $\rho\|\alpha^{(1)}$ es V_ρ y por lo tanto V_ρ es indescomponible.

Probaremos a continuación que si $D = a$, entonces V_ρ es irreducible para toda relación ρ de 0 a ω . Como $D = a$, utilizando el Teorema 6.4.5, sabemos que $H^1(A) = A_1'' \oplus \mathfrak{sl}_a(\mathbb{C})$. Llamemos \widetilde{V}_ρ a la representación de la subálgebra de Lie $\mathfrak{sl}_a(\mathbb{C})$ cuyo espacio vectorial subyacente coincide con V_ρ . Utilizando el Corolario 6.4.8, $\widetilde{V}_\rho \simeq V$ donde V la representación estándar de $\mathfrak{sl}_a(\mathbb{C})$ que, como ya sabemos, es irreducible. Faltaría ver que lo anterior implica que V_ρ también es irreducible. Si V_ρ tuviera alguna subrepresentación estricta no nula M de $H^1(A)$, M también sería una subrepresentación no nula de $\mathfrak{sl}_a(\mathbb{C})$ lo cual es absurdo. Por último probaremos que si existe una

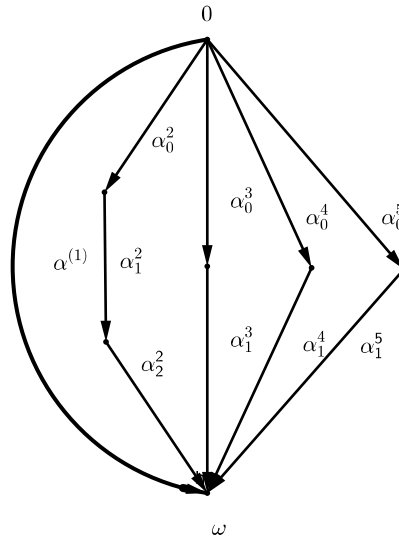
relación monomial ρ de 0 a ω y V_ρ es irreducible, entonces se cumple que $D = a$. Supongamos que $D \neq a$. En ese caso existe $\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega - Z$ tal que $\rho\|\alpha^{(i)}$ es no nulo en $H^2(A)$. Observemos que $H := \langle \rho\|\alpha^{(i)} \rangle$ es una representación de $H^1(A)$ contenida en V_ρ , ya que dado $\alpha\|c \in H^1(A)$,

$$[\alpha\|c, \rho\|\alpha^{(i)}] = \delta_{\alpha, (\alpha^{(i)})(1)} \rho\|\alpha^{(i)} - \delta_{\alpha, \rho(1)} \rho\|\alpha^{(i)}.$$

Finalmente, como $a > 0$, esto es una contradicción al ser V_ρ irreducible; concluimos entonces que $D = a$. □

La última afirmación del enunciado del teorema no tiene por que ser válida cuando ρ es una relación no monomial, para esto veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.5.4. Sea $A = kQ/\mathcal{I}$ con Q :



$$e \mathcal{I} = \langle \alpha_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2, \alpha_0^3 \alpha_1^3, \alpha_0^4 \alpha_1^4 - \alpha_0^5 \alpha_1^5 \rangle.$$

$$\text{Denotemos } \sigma_1 = \alpha_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2, \sigma_2 = \alpha_0^3 \alpha_1^3 \text{ y } \rho'_1 = \alpha_0^4 \alpha_1^4 - \alpha_0^5 \alpha_1^5.$$

Utilizando la notación propuesta en el Capítulo 4, si $y_1 = \overline{\alpha_0^2 \|\alpha_0^2}$, $y_2 = \overline{\alpha_0^3 \|\alpha_0^3}$, $z_{15} = \overline{\alpha^{(1)} \|\alpha^{(5)}}$ y $t_1 = \overline{\alpha_0^4 \|\alpha_0^4} + \overline{\alpha_0^5 \|\alpha_0^5}$ entonces

$$H^1(A) = \langle y_1, y_2, z_{15}, t_1 \rangle.$$

Aplicando el Teorema 6.4.5 y el Corolario 6.4.7 a este ejemplo obtenemos la siguiente descomposición:

$$H^1(A) = (S_1 \times L_1) \oplus A_1''$$

siendo $A_1'' = \langle y_1, y_2 \rangle$, $S_1 = \langle t_1 \rangle$ y $L_1 = \langle z_{15} \rangle$.

En definitiva, el corchete en $H^1(A)$ se anula en todos los elementos de la base elegida salvo en $[t_1, z_{15}] = -[z_{15}, t_1] = z_{15}$.

Con respecto al segundo espacio de cohomología, es sencillo verificar que el conjunto

$$\{\sigma_1 \parallel \alpha_0^5 \alpha_1^5, \sigma_2 \parallel \alpha_0^5 \alpha_1^5, \sigma_1 \parallel \alpha^{(1)}, \sigma_2 \parallel \alpha^{(1)}, \rho'_1 \parallel \alpha^{(1)}, \rho'_1 \parallel \alpha_0^5 \alpha_1^5\}$$

es una base de $\text{Hom}_{\mathbb{E}^e}(kR, A)$ y $\{\rho'_1 \parallel \alpha_0^5 \alpha_1^5\}$ es una base de $\text{Im}(D_1)$ por lo cual

$$H^2(A) = \langle \overline{\sigma_1 \parallel \alpha_0^5 \alpha_1^5}, \overline{\sigma_2 \parallel \alpha_0^5 \alpha_1^5}, \overline{\sigma_1 \parallel \alpha^{(1)}}, \overline{\sigma_2 \parallel \alpha^{(1)}}, \overline{\rho'_1 \parallel \alpha^{(1)}} \rangle.$$

Utilizando la descomposición obtenida en el Teorema 6.5.3,

$$H^2(A) = V_{\sigma_1} \oplus V_{\sigma_2} \oplus V_{\rho'_1}$$

donde V_{σ_1} , V_{σ_2} y $V_{\rho'_1}$ son representaciones indescomponibles.

Aquí se cumple que $V_{\rho'_1} = \langle \overline{\rho'_1 \parallel \alpha^{(1)}} \rangle$ es irreducible pero $D \neq a$. Observemos además que V_{σ_1} y V_{σ_2} no son irreducibles ya que $\langle \overline{\sigma_1 \parallel \alpha_0^5 \alpha_1^5} \rangle$ y $\langle \overline{\sigma_2 \parallel \alpha_0^5 \alpha_1^5} \rangle$ son subrepresentaciones de V_{σ_1} y V_{σ_2} respectivamente.

6.6. $H^3(A)$ como representación de $H^1(A)$

Dados $\alpha \in Q_1$ con $s(\alpha) = 0$, un camino b con el mismo comienzo y final que α , una 2-ambigüedad de 0 a ω $v = v_2 v_1 v_0$ y un camino c de 0 a ω , consideramos $\alpha \parallel b \in H^1(A)$ y $v \parallel c \in H^3(A)$. Supongamos que $w = w_2 w_1 w_0$ es una 2-ambigüedad de 0 a ω y evaluemos el corchete de Gerstenhaber:

$$\begin{aligned} [\alpha \parallel b, v \parallel c](w) &= \varphi_3^*[\eta_1^*(\alpha \parallel b), \eta_3^*(v \parallel c)](w) \\ &= [\eta_1^*(\alpha \parallel b), \eta_3^*(v \parallel c)]\varphi_3(1 \otimes w \otimes 1) \\ &= \sum_{w_1 w_0} [\eta_1^*(\alpha \parallel b), \eta_3^*(v \parallel c)](\overline{w_2} \otimes \overline{(w_1 w_0)^{(1)}} \otimes \overline{(w_1 w_0)^{(2)}})(w_1 w_0)^{(3)}, \end{aligned}$$

que utilizando la definición del corchete de Gerstenhaber resulta igual a:

$$\begin{aligned} &\sum_{w_1 w_0} (\eta_1^*(\alpha \parallel b) \circ \eta_3^*(v \parallel c))(\overline{w_2} \otimes \overline{(w_1 w_0)^{(1)}} \otimes \overline{(w_1 w_0)^{(2)}})(w_1 w_0)^{(3)} - \sum_{w_1 w_0} \eta_3^*(v \parallel c)(\overline{\eta_1^*(\alpha \parallel b)}(\overline{w_2}) \otimes \overline{(w_1 w_0)^{(1)}} \otimes \overline{(w_1 w_0)^{(2)}})(w_1 w_0)^{(3)} \\ &- \sum_{w_1 w_0} \eta_3^*(v \parallel c)(\overline{w_2} \otimes \overline{\eta_1^*(\alpha \parallel b)}(\overline{(w_1 w_0)^{(1)}}) \otimes \overline{(w_1 w_0)^{(2)}})(w_1 w_0)^{(3)} - \\ &\sum_{w_1 w_0} \eta_3^*(v \parallel c)(\overline{w_2} \otimes \overline{(w_1 w_0)^{(1)}} \otimes \overline{\eta_1^*(\alpha \parallel b)}(\overline{(w_1 w_0)^{(2)}}))(w_1 w_0)^{(3)}. \end{aligned}$$

Vamos a analizar cada uno de los cuatro términos por separado. Aplicando la definición de η_3^* al primero, queda:

$$\sum_{w_1 w_0} (\eta_1^*(\alpha \parallel b)((v \parallel c)\eta_3(1 \otimes \overline{w_2} \otimes \overline{(w_1 w_0)^{(1)}} \otimes \overline{(w_1 w_0)^{(2)}} \otimes 1))(w_1 w_0)^{(3)}.$$

Al ser 2-ambigüedad, w no contiene estrictamente otra 2-ambigüedad y por lo tanto es necesario que $(w_1 w_0)^{(3)}$ sea igual a 1 para que el término correspondiente no se anule. En tal caso $\overline{(w_1 w_0)^{(2)}} = w_0$ y por lo tanto $(w_1 w_0)^{(1)} = w_1$. Utilizando la Proposición 5.2.4 $\eta_3(1 \otimes w_2 \otimes w_1 \otimes w_0 \otimes 1) = 1 \otimes w \otimes 1$. Luego, el primer término resulta ser igual a:

$$\eta_1^*(\alpha\|b)(v\|c)(w) = \delta_{v,w}(\alpha\|b) \sum_c c^{(1)} \otimes \overleftarrow{c}^{(2)} \otimes c^{(3)} = \begin{cases} \delta_{v,w}c^{\alpha\|b}, & \text{si } \alpha = \overleftarrow{c}^{(1)}; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Realizando los cálculos correspondientes, el segundo término queda:

$$-\sum_{w_1 w_0} \eta_3^*(v\|c)((\alpha\|b)(1 \otimes \overline{w_2} \otimes 1) \otimes \overline{(w_1 w_0)^{(1)}} \otimes \overleftarrow{(w_1 w_0)^{(2)}})(w_1 w_0)^{(3)} = \begin{cases} -\delta_{v,w}c, & \text{si } \alpha = \overleftarrow{w_2^{(1)}}; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

El tercer y cuarto término se anulan ya que dado un camino f que no comienza en 0 ,

$$\eta_1^*(\alpha\|b)(f) = (\alpha\|b)\eta_1(1 \otimes f \otimes 1) = 0.$$

En resumen, dados $\alpha\|b \in H^1(A)$ y $v\|c \in H^3(A)$:

$$[\alpha\|b, v\|c] = \delta_{\overleftarrow{c}^{(1)}, \alpha} v\|c^{\alpha\|b} - \delta_{\overleftarrow{v}^{(1)}, \alpha} v\|c.$$

Observación 6.6.1. Dada una 2-ambigüedad w de 0 a ω , el k -subespacio vectorial de $H^3(A)$ $V_w = \langle w\|\alpha^{(k)} \text{ con } \alpha^{(k)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega \rangle$ es una representación de Lie de $H^1(A)$ que se inyecta en $H^3(A)$.

A continuación describiremos, al igual que para $H^2(A)$, la acción sobre $H^3(A)$ de la subálgebra de Lie $\mathfrak{sl}_a(\mathbb{C})$.

Teorema 6.6.2. *Consideremos un álgebra toupie A con a mayor que cero. Sea*

$$E = \{w\|\alpha^{(k)} : w \text{ es 2-ambigüedad de } 0 \text{ a } \omega \text{ y } \alpha^{(k)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega - Z\}.$$

La descomposición de $H^3(A)$ como representación de $\mathfrak{sl}_a(\mathbb{C})$ es:

$$H^3(A) \simeq \bigoplus_{i=1}^{D-a} V_0 \oplus \bigoplus_{w:s(w)=0,t(w)=\omega} V$$

donde $V_0 \simeq \mathbb{C}$ es la representación trivial y V es la representación estándar de $\mathfrak{sl}_a(\mathbb{C})$.

La demostración es análoga a la de $H^2(A)$.

Teorema 6.6.3. *Sea A un álgebra toupie con a mayor que cero. La descomposición de $H^3(A)$ como representación de Lie de $H^1(A)$ es la siguiente:*

$$H^3(A) = \bigoplus_{w:s(w)=0,t(w)=\omega} V_w$$

donde $V_w = \langle w\|\alpha^{(k)} \text{ con } \alpha^{(k)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega \rangle$. Notemos además que para toda 2-ambigüedad w de 0 a ω , el módulo V_w es indescomponible. Más aún, la representación V_w es irreducible si y solo si $D = a$.

La demostración de este teorema es también similar a la de $H^2(A)$.

6.7. $H^i(A)$ como representación de $H^1(A)$

Dados $\alpha \in Q_1$ y b un camino no nulo en A tal que $0 = s(\alpha) = s(b)$ y $t(\alpha) = t(b)$ consideremos $\alpha \parallel b \in H^1(A)$. Luego, dada u una $(i-1)$ -ambigüedad de 0 a ω y c un camino en ${}_0\mathcal{B}_\omega$ consideremos $u \parallel c \in H^1(A)$. A continuación calcularemos el corchete de Gerstenhaber de dichos elementos evaluado en una $(i-1)$ -ambigüedad w :

$$\begin{aligned} [\alpha \parallel b, u \parallel c](w) &= \varphi_i^*[\eta_1^*(\alpha \parallel b), \eta_i^*(u \parallel c)](w) \\ &= [\eta_1^*(\alpha \parallel b), \eta_i^*(u \parallel c)]\varphi_i(1 \otimes w \otimes 1) \\ &= \eta_1^*(\alpha \parallel b) \circ \eta_i^*(u \parallel c)(\varphi_i(1 \otimes w \otimes 1)) - \eta_i^*(u \parallel c) \circ \eta_1^*(\alpha \parallel b)(\varphi_i(1 \otimes w \otimes 1)). \end{aligned}$$

Desarrollando el primer término obtenemos que,

$$\begin{aligned} \eta_1^*(\alpha \parallel b) \circ \eta_i^*(u \parallel c)(\varphi_i(1 \otimes w \otimes 1)) &= \eta_1^*(\alpha \parallel b)(\eta_i^*(u \parallel c)(\varphi_i(1 \otimes w \otimes 1))) \\ &= \eta_1^*(\alpha \parallel b)((u \parallel c)\eta_i(\varphi_i(1 \otimes w \otimes 1))) \\ &= \eta_1^*(\alpha \parallel b)(u \parallel c)(1 \otimes w \otimes 1) \\ &= \delta_{u,w}\eta_1^*(\alpha \parallel b)(c) \\ &= \delta_{u,w}(\alpha \parallel b) \sum_c c^{(1)} \otimes \overleftarrow{c^{(2)}} \otimes c^{(3)} \\ &= \begin{cases} \delta_{w,u}c^{\alpha \parallel b}, & \text{si } \alpha = \overleftarrow{c^{(1)}}; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \end{aligned}$$

Observemos que en la tercera igualdad utilizamos la Proposición 5.2.3.

Pasemos ahora al siguiente término. Por la Proposición 5.2.1 que tiene que $\varphi_i(1 \otimes w \otimes 1)$ tiene la siguiente forma

$$\sum_{a^{(1)} \dots a^{(i+1)} = w} 1 \otimes \overline{a^{(1)}} \otimes \dots \otimes \overline{a^{(i)}} \otimes a^{(i+1)}.$$

Entonces,

$$\eta_i^*(u \parallel c) \circ \eta_1^*(\alpha \parallel b)(\varphi_i(1 \otimes w \otimes 1)) = \sum_{a^{(1)} \dots a^{(i+1)} = w} \eta_i^*(u \parallel c) \circ \eta_1^*(\alpha \parallel b)(1 \otimes \overline{a^{(1)}} \otimes \dots \otimes \overline{a^{(i)}} \otimes a^{(i+1)}).$$

A su vez, utilizando la definición de asociador, lo anterior es igual a

$$\sum_{a^{(1)} \dots a^{(i+1)} = w} \eta_i^*(u \parallel c) \sum_{j=1}^i ((\overline{a^{(1)}} \otimes \dots \otimes \eta_1^*(\alpha \parallel b)(\overline{a^{(j)}}) \otimes \dots \otimes \overline{a^{(i)}}) a^{(i+1)}).$$

Si $j \neq 1$, como α es siempre la primera flecha de alguna rama, se tiene que $\eta_1^*(\alpha \parallel b)(\overline{a^{(j)}}) = 0$ por lo tanto de la expresión anterior nos queda,

$$\sum_{a^{(1)} \dots a^{(i+1)} = w} \eta_i^*(u \parallel c)((\eta_1^*(\alpha \parallel b)(\overline{a^{(1)}}) \otimes \dots \otimes \overline{a^{(i)}}) a^{(i+1)}).$$

Luego, aplicando la definición de η_1^* , utilizando nuevamente que α es la primera flecha de alguna rama, la Proposición 5.2.1 y la Proposición 5.2.3 en la tercera igualdad,

$$\eta_i^*(u \parallel c) \circ \eta_1^*(\alpha \parallel b)(\varphi_i(1 \otimes w \otimes 1)) = \delta_{\alpha, \overleftarrow{a^{(1)}}} \sum_{a^{(1)} \dots a^{(i+1)} = w} \eta_i^*(u \parallel c)((\overline{a^{(1)}} \otimes \dots \otimes \overline{a^{(i)}}) a^{(i+1)})$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{\alpha, \mathbf{a}^{(1)}} \overleftarrow{(\mathbf{u} \parallel \mathbf{c})} \eta_i \left(\sum_{\mathbf{a}^{(1)} \dots \mathbf{a}^{(i+1)} = \mathbf{w}} (1 \otimes \overline{\mathbf{a}^{(1)}} \otimes \dots \otimes \overline{\mathbf{a}^{(i)}} \otimes \mathbf{a}^{(i+1)}) \right) \\
&= \delta_{\alpha, \mathbf{a}^{(1)}} \overleftarrow{(\mathbf{u} \parallel \mathbf{c})} (1 \otimes \mathbf{w} \otimes 1) \\
&= \delta_{\mathbf{u}, \mathbf{w}} \delta_{\alpha, \mathbf{a}^{(1)}} \overleftarrow{\mathbf{c}}.
\end{aligned}$$

En resumen, dados $\alpha \parallel \mathbf{b} \in H^1(A)$ y $\mathbf{u} \parallel \mathbf{c} \in H^i(A)$:

$$[\alpha \parallel \mathbf{b}, \mathbf{u} \parallel \mathbf{c}] = \delta_{\mathbf{c}^{(1)}, \alpha} \overleftarrow{\mathbf{u}} \parallel \mathbf{c}^{\alpha \parallel \mathbf{b}} - \delta_{\mathbf{u}^{(1)}, \alpha} \overleftarrow{\mathbf{u}} \parallel \mathbf{c}.$$

Los Teoremas 6.5.3 y 6.5.2 para $i = 2$ se cumplen en general para $i \geq 2$. Los enunciaremos a continuación y la demostración la omitiremos al ser análoga a la de dichos Teoremas.

Observación 6.7.1. Dada una $(i-1)$ -ambigüedad \mathbf{u} de 0 a ω , el k -subespacio vectorial de $H^i(A)$ $V_{\mathbf{u}} = \langle \mathbf{u} \parallel \alpha^{(k)} \text{ con } \alpha^{(k)} \in {}_0\mathcal{B}_{\omega} \rangle$ es una representación de Lie de $H^1(A)$ que se inyecta en $H^i(A)$.

Teorema 6.7.2. Consideremos un álgebra toupie A con \mathbf{a} mayor que cero. La descomposición de $H^i(A)$ como representación de $\mathfrak{sl}_{\mathbf{a}}(\mathbb{C})$ es:

$$H^i(A) \simeq \bigoplus_{i=1}^{D-\mathbf{a}} V_0 \oplus \bigoplus_{\mathbf{u}:s(\mathbf{u})=0, t(\mathbf{u})=\omega} V$$

donde $V_0 \simeq \mathbb{C}$ es la representación trivial y V es la representación estándar de $\mathfrak{sl}_{\mathbf{a}}(\mathbb{C})$.

Teorema 6.7.3. Sea A un álgebra toupie con \mathbf{a} mayor que cero. La descomposición de $H^i(A)$ como representación de Lie de $H^1(A)$ es la siguiente:

$$H^i(A) = \bigoplus_{\mathbf{u}:s(\mathbf{u})=0, t(\mathbf{u})=\omega} V_{\mathbf{u}}$$

donde $V_{\mathbf{u}} = \langle \mathbf{u} \parallel \alpha^{(k)} \text{ con } \alpha^{(k)} \in {}_0\mathcal{B}_{\omega} \rangle$. Notemos además que para toda $(i-1)$ -ambigüedad \mathbf{u} de 0 a ω , el módulo $V_{\mathbf{u}}$ es indescomponible. Más aún, la representación $V_{\mathbf{u}}$ es irreducible si y solo si $D = \mathbf{a}$.

Capítulo 7

Cálculo de las deformaciones del álgebra

En este capítulo construiremos familias uniparamétricas de deformaciones de las álgebras toupie utilizando el cálculo de $H^2(A)$ visto en el Capítulo 4. También veremos que la familia de las álgebras toupie son cerradas bajo dichas deformaciones.

7.1. Forma genérica de un 2-cociclo

Recordemos que en la Sección 2.4 vimos que si dos deformaciones A_{f_t} y A_{g_t} con:

$$f_t(a, b) = ab + f_1(a, b)t + f_2(a, b)t^2 + \dots$$

y

$$g_t(a, b) = ab + g_1(a, b)t + f_2(a, b)t^2 + \dots$$

resultan equivalentes, necesariamente $\overline{f_1} = \overline{g_1}$ en $H^2(A)$. Por lo tanto, si partimos de dos elementos distintos en $H^2(A)$ $\overline{f_1}$ y $\overline{g_1}$ con $f_1, g_1 \in \text{Hom}_k(A \otimes A, A)$ podemos asegurar que A_{f_t} y A_{g_t} no serán equivalentes. Por esta razón comenzaremos considerando un elemento $\overline{\psi} \in H^2(A)$ calculado a partir de la resolución minimal como en el Capítulo 4 y le asociaremos $f_\psi \in \text{Hom}_k(A \otimes A, A)$.

Dada un álgebra toupie $A = kQ/\mathcal{I}$, sea ${}_0R_\omega$ un conjunto minimal de generadores de las relaciones de 0 a ω . Observemos que:

$${}_0R_\omega = {}_0(R_{\text{mon}})_\omega \cup R_{\text{nonmon}}$$

con ${}_0(R_{\text{mon}})_\omega \subset \{\sigma_1, \dots, \sigma_q\}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que ${}_0(R_{\text{mon}})_\omega = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{m_1}\}$. Recordemos que en la Sección 4.3, cuando realizamos el cálculo de $H^2(A)$ aplicando el Lema 4.3.2 y el Teorema 4.3.3, obtuvimos una base de $H^2(A)$ que puede expresarse como la unión de los conjuntos

$$\{\sigma_j \parallel \alpha^{(i)} : j = 1, \dots, m_1; \alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega\}$$

y

$$\{b_g : b_g = \sum_{\substack{\rho'_j \in R_{\text{nonmon}} \\ \alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega}} \lambda_{i,j}^g \rho'_j \parallel \alpha^{(i)} \text{ con } g = 1, \dots, \dim_k H^2(A) - m_1 \text{ y } \lambda_{i,j}^g \in k\}.$$

Definimos $\Gamma_j = \{g : \exists i \text{ con } \lambda_{i,j}^g \neq 0\}$. Un elemento de $H^2(A)$ puede expresarse de la siguiente forma:

$$\bar{\psi} = \sum_{\substack{j=1, \dots, m_1 \\ \alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega}} k_{i,j} \sigma_j \|\alpha^{(i)} + \sum_{g=1}^{\dim_k H^2(A) - m_1 D} \mu_g b_g. \quad (7.1)$$

con $k_{i,j}, \mu_g \in k$.

Con el objetivo de calcular las deformaciones del álgebra debemos considerar el elemento $f_\psi \in \text{Hom}_k(A \otimes A, A)$ correspondiente a $\psi \in \text{Hom}_{E^e}(kR, A)$. Dicho elemento surge de utilizar la resolución Bar de A y aplicar el funtor $\text{Hom}_{A^e}(-, A)$. A lo largo de esta tesis trabajamos con la resolución Bar E -reducida que es una variante de la resolución Bar. En el Apéndice A de [21] se definen morfismos de comparación entre $C_{\text{Bar}}(A)$ y $C_{\text{Bar}E}(A)$ que inducen isomorfismos en cohomología, aquí utilizaremos $p : C_{\text{Bar}}(A) \rightarrow C_{\text{Bar}E}(A)$ que se define como

$$p_i(\lambda \otimes_k a_1 \otimes_k \cdots \otimes_k a_i \otimes_k \mu) = \lambda \otimes_E \bar{a}_1 \otimes_E \cdots \otimes_E \bar{a}_i \otimes_E \mu$$

con $i \in \mathbb{N}$, $\lambda, \mu, a_1, \dots, a_i \in A$.

Explícitamente, dado $\psi \in \text{Hom}_{E^e}(kR, A)$ resulta que $f_\psi = \eta_2^* p_2^*(\psi)$. Evaluando,

$$\begin{aligned} f_\psi(a_1 \otimes_k a_2) &= \eta_2^* p_2^*(\psi)(a_1 \otimes_k a_2) = \eta_2^*(\psi) p_2(1 \otimes_k a_1 \otimes_k a_2 \otimes_k 1) \\ &= \eta_2^*(\psi)(1 \otimes_E \bar{a}_1 \otimes_E \bar{a}_2 \otimes_E 1) = \psi(\eta_2(1 \otimes_E \bar{a}_1 \otimes_E \bar{a}_2 \otimes_E 1)) \end{aligned}$$

$a_1, a_2 \in A$.

Aplicando la definición de η_2 y el hecho de que al evaluar ψ en un camino el resultado puede ser no nulo solo si el camino va de punta a punta, obtenemos que:

$$f_\psi(a_1 \otimes a_2) = \begin{cases} \sum_{\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega} k_{i,j} \alpha^{(i)}, & \text{si } a_1 a_2 = \sigma_j \text{ para algún } j = 1, \dots, m_1; \\ \sum_{g \in \Gamma_j} \sum_{\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega} \lambda_{i,j}^g \alpha^{(i)}, & \text{si } a_1 a_2 = W_{\rho'_j} \text{ para algún } \rho'_j \in R_{\text{nomon}}; \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (7.2)$$

7.2. Integrabilidad y rigidez

En esta sección vamos a estudiar la rigidez de esta familia de álgebras.

Lema 7.2.1. *Sea A un álgebra toupie. Dados $\bar{\psi}$ y $\bar{\chi}$ en $H^2(A)$ sean f_ψ y f_χ los elementos correspondientes a ψ y χ en $\text{Hom}_k(A \otimes A, A)$. El asociador $f_\psi \circ f_\chi$ se anula.*

Demostración. Utilizando la definición de asociador,

$$f_\psi \circ f_\chi(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = f_\psi(f_\chi(a_1 \otimes a_2) \otimes a_3) - f_\psi(a_1 \otimes f_\chi(a_2 \otimes a_3)).$$

Por lo visto en la Ecuación 7.2, tanto $f_\psi(a \otimes b)$ como $f_\chi(a \otimes b)$ son combinaciones lineales de ramas de punta a punta del álgebra toupie para todo $a, b \in A$. Por lo tanto si $f_\chi(a_1 \otimes a_2) \neq 0$, resulta que $f_\psi(f_\chi(a_1 \otimes a_2) \otimes a_3) = 0$, ya que $f_\chi(a_1 \otimes a_2) a_3$ no forma una relación monomial de 0 a ω ni es igual a $W_{\rho'_j}$ para ningún $\rho'_j \in R_{\text{nomon}}$. Con el mismo razonamiento obtenemos que $f_\psi(a_1 \otimes f_\chi(a_2 \otimes a_3)) = 0$ y concluimos que $f_\psi \circ f_\chi = 0$. \square

En la siguiente proposición se prueba que los 2-cociclos construidos en la sección anterior son siempre integrables y que una forma posible de hacerlo es tomando $f_i = 0$ para todo i mayor que 1.

Proposición 7.2.2. *Sea A un álgebra toupie. Dado $\bar{\psi} \in H^2(A)$ y f_ψ su correspondiente en $\text{Hom}_k(A \otimes A, A)$. Si $\{f_i\}_{i \geq 2}$ integra f_ψ para obtener una familia uniparamétrica de deformaciones, entonces todo f_i con $i \geq 2$ es también un 2-cociclo. Además, f_ψ puede integrarse tomando $f_i = 0$ para todo $i \geq 2$.*

Demostración. Dado $\bar{\psi} \in H^2(A)$ y el elemento correspondiente f_ψ en $\text{Hom}_k(A \otimes A, A)$, si $\{f_i\}_{i \geq 2}$ integra f_ψ sabemos que debe ser $f_\psi \circ f_2 = b^2(f_2)$. Utilizando el Lema 7.2.1, lo anterior implica que f_2 también será un 2-cociclo. En particular, si tomamos $f_2 = 0$ se verifica dicha ecuación. La siguiente ecuación nos dice que $f_\psi \circ f_2 + f_2 \circ f_\psi = b^2(f_3)$. Utilizando nuevamente el Lema 7.2.1 concluimos que $f_\psi \circ f_2 = 0$ y $f_2 \circ f_\psi = 0$ y por lo tanto f_3 deberá ser un 2-cociclo y en particular podemos tomar $f_3 = 0$. Continuando inductivamente con este procedimiento obtenemos el resultado buscado. \square

El siguiente corolario es una consecuencia directa de la proposición anterior y muestra que en las álgebras toupie la rigidez es equivalente a que el segundo espacio de cohomología se anule. Esta equivalencia fue probada en [11] para álgebras monomiales de la forma kQ/\mathcal{I} con Q un carcaj dirigido y para álgebras truncadas que satisfacen ciertas condiciones en [10]. También se probó para álgebras fuertemente simplemente conexas de crecimiento polinomial en [25].

Corolario 7.2.3. *Sea A un álgebra toupie. El álgebra A es rígida si y solo si $H^2(A) = 0$.*

Demostración. Si $H^2(A) = 0$, sabemos por el Corolario 2.4.5 que A es rígida. Para probar el recíproco por absurdo, sea $\bar{\psi} \in H^2(A)$ un 2-cociclo que no es coborde, consideremos f_ψ . Utilizando la proposición anterior podemos considerar la deformación que se obtiene de completar f_ψ con $f_i = 0$ para $i > 1$. Como esta deformación debe ser trivial al ser A rígida, utilizando la Proposición 2.4.6 concluimos que f_ψ es un coborde lo cual es absurdo. \square

7.3. Deformaciones con $f_i = 0$ para $i > 1$

A continuación describiremos las deformaciones de A tales que $f_i = 0$ para todo i mayor que uno.

Sea $\bar{\psi}$ un elemento cualquiera de $H^2(A)$ como en la Ecuación 7.1 consideramos $f_t(a_1, a_2) = a_1 a_2 + f_\psi(a_1 \otimes a_2)t$. Utilizando la Ecuación 7.2 obtenemos que:

$$f_t(a_1, a_2) = \begin{cases} a_1 a_2 + (\sum_{\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega} k_{i,j} \alpha^{(i)})t, & \text{si } a_1 a_2 = \sigma_j \text{ para algún } j = 1, \dots, m_1; \\ a_1 a_2 + (\sum_{g \in \Gamma_j} \sum_{\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega} \lambda_{i,j}^g \alpha^{(i)})t, & \text{si } a_1 a_2 = W_{\rho'_j} \text{ para algún } \rho'_j \in \mathbb{R}_{\text{nomon}}; \\ a_1 a_2, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (7.3)$$

Como en el primer caso $a_1 a_2 = \sigma_j$ para algún $j = 1, \dots, m_1$ resulta $a_1 a_2 = 0$ en A . Llamemos $*$ al nuevo producto en $A[[t]]$. La relación σ_j pasa a ser una relación del tipo:

$$a_1 * a_2 = \left(\sum_{\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega} k_{i,j} \alpha^{(i)} \right) t.$$

En el segundo caso $a_1 a_2 = W_{\rho'_j}$ para algún $\rho'_j \in R_{\text{nomon}}$ y por lo tanto $a_1 a_2 = f_{\rho'_j}$ en A . En este caso resulta:

$$a_1 * a_2 = f_{\rho'_j} + \left(\sum_{g \in \Gamma_j} \sum_{\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega} \lambda_{i,j}^g \alpha^{(i)} \right) t.$$

Fijando el t , observemos que el carcaj asociado al álgebra deformada es igual al original pero cambian las relaciones. Notemos además que el nuevo ideal podría no ser admisible ya que alguno de sus generadores puede transformarse en una suma que contenga como alguno de sus sumandos a una flecha de punta a punta. Este problema se soluciona utilizando la siguiente proposición.

Proposición 7.3.1. *Sea $A = kQ/\mathcal{I}$ un álgebra toupie. Si el álgebra deformada A_{f_t} tiene un ideal asociado no admisible por contener en alguno de sus generadores un múltiplo escalar de un camino de largo 1 como sumando, entonces existe otra álgebra toupie $A' = kQ'/\mathcal{I}'$ isomorfa a A_{f_t} .*

Demostración. Supongamos que existe una relación σ en el álgebra deformada que involucra una flecha de punta a punta a la que llamaremos $\alpha^{(p)}$. En primer lugar, realizando operaciones elementales en las nuevas relaciones del álgebra deformada, podemos suponer que $\alpha^{(p)}$ aparece solo en la relación σ . Sea $Q' = Q - \{\alpha^{(p)}\}$ el carcaj que se obtiene del original quitando la flecha $\alpha^{(p)}$.

Consideremos el morfismo de álgebras $F : kQ \rightarrow kQ'$ que manda a todos los vértices en si mismos y a todas las flechas en si mismas salvo $\alpha^{(p)}$. Para definir $F(\alpha^{(p)})$ consideraremos dos casos posibles:

1. Si σ es del tipo $a_1 * a_2 - (\sum_{\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega} k_{i,j} \alpha^{(i)})t$ con $a_1 a_2 = \sigma_j$ para algún $j = 1, \dots, m_1$ definimos

$$F(\alpha^{(p)}) = t^{-1} (k_{p,j})^{-1} (a_1 * a_2 - \sum_{i \in {}_0\mathcal{B}_\omega, i \neq p} k_{i,j} \alpha^{(i)}) t.$$

2. Si σ es del tipo $a_1 * a_2 - f_{\rho'_j} + (\sum_{g \in \Gamma_j} \sum_{i \in {}_0\mathcal{B}_\omega} \lambda_{i,j}^g \alpha^{(i)})t$ con $a_1 a_2 = \rho'_j$ para algún $\rho'_j \in R_{\text{nomon}}$, definimos

$$F(\alpha^{(p)}) = t^{-1} \left(\sum_g \lambda_{p,j}^g \right)^{-1} (a_1 * a_2 - f_{\rho'_j} - \left(\sum_{g \in \Gamma_j, i \neq p} \sum_{\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega, i \neq p} \lambda_{i,j}^g \alpha^{(i)} \right) t).$$

Observemos que si \mathcal{I}_{f_t} es el ideal del álgebra deformada generado por un conjunto minimal R_{f_t} e $\mathcal{I}' = \langle R_{f_t} - \{\sigma\} \rangle$, entonces $F(R_{f_t} - \{\sigma\}) = R_{f_t} - \{\sigma\}$ y $F(\sigma) = 0$. Esto implica que podemos definir a partir de F un morfismo de álgebras $\bar{F} : kQ/\mathcal{I}_{f_t} \rightarrow kQ'/\mathcal{I}'$. El morfismo \bar{F} es un isomorfismo al ser una transformación k -lineal sobreyectiva entre espacios vectoriales de la misma dimensión.

Debemos repetir este proceso en todas las nuevas relaciones del álgebra deformada que contengan alguna flecha de 0 a ω . □

Corolario 7.3.2. *Dada un álgebra toupie A , toda deformación definida a partir de un elemento $\bar{\psi}$ de $H^2(A)$ de la forma:*

$$f_t(a_1, a_2) = a_1 a_2 + f_\psi(a_1 \otimes a_2) t$$

es isomorfa a un álgebra toupie.

Proposición 7.3.3. *Dados un álgebra toupie $A = kQ/\mathcal{I}$, un elemento $\bar{\psi}$ de $H^2(A)$ y A_t la deformación definida a partir de la extensión $k[[t]]$ -bilineal de:*

$$f_t(a_1, a_2) = a_1 a_2 + f_\psi(a_1 \otimes a_2)t,$$

las álgebras deformadas A_{t_1} y A_{t_2} son isomorfas para todo par t_1, t_2 con $t_1 \neq t_2$ y ambos no nulos.

Demostración. Consideremos el endomorfismo $F : kQ \rightarrow kQ$ que manda los vértices a si mismos y las flechas a si mismas salvo las primeras flechas de los $\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega$ que están involucradas en las relaciones de A_{t_1} , las cuales van a $\frac{t_2}{t_1}\alpha_0^{(i)}$. Es claro que F es un isomorfismo. Si \mathcal{I}_{t_1} es el ideal admisible asociado a A_{t_1} e \mathcal{I}_{t_2} el asociado a A_{t_2} , veremos que $F(\mathcal{I}_{t_1}) = \mathcal{I}_{t_2}$. Si $a_1 a_2 = \sigma_j$ para algún $j = 1, \dots, m_1$ y $*$ es el producto en A_{t_1} , resulta que

$$\begin{aligned} F(a_1 *_{t_1} a_2) &= F\left(\sum_{\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega} k_{i,j} \alpha^{(i)}\right)t_1 = \sum_{\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega} k_{i,j} F(\alpha^{(i)})t_1 \\ &= \left(\sum_{\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega} k_{i,j} \frac{t_2}{t_1} \alpha^{(i)}\right)t_1 = \left(\sum_{\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega} k_{i,j} \alpha^{(i)}\right)t_2 = a_1 *_{t_2} a_2. \end{aligned}$$

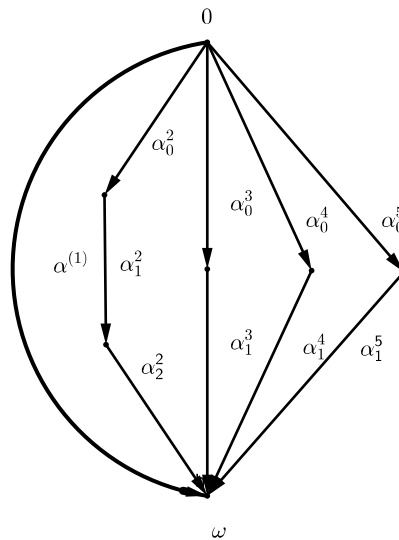
Si $a_1 a_2 = W_{\rho'_j}$ para algún $\rho'_j \in R_{\text{nomon}}$, entonces

$$F(a_1 *_{t_1} a_2) = F\left(\sum_{g \in \Gamma_j} \sum_{\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega} \lambda_{i,j}^g \alpha^{(i)}\right)t_1 = \left(\sum_{g \in \Gamma_j} \sum_{\alpha^{(i)} \in {}_0\mathcal{B}_\omega} \lambda_{i,j}^g F(\alpha^{(i)})\right)t_1 = a_1 *_{t_2} a_2.$$

Por lo tanto F induce un isomorfismo entre A_{t_1} y A_{t_2} . □

Concluimos esta tesis realizando el cálculo de alguna de las deformaciones del álgebra vista en el Ejemplo 6.5.4.

Ejemplo 7.3.4. *Retomemos el Ejemplo 6.5.4. Allí teníamos $A = kQ/\mathcal{I}$ con Q :*



e $\mathcal{I} = \langle \alpha_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2, \alpha_0^3 \alpha_1^3, \alpha_0^4 \alpha_1^4 - \alpha_0^5 \alpha_1^5 \rangle$. Denotando

$$\sigma_1 = \alpha_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2, \sigma_2 = \alpha_0^3 \alpha_1^3 \text{ y } \rho_1' = \alpha_0^4 \alpha_1^4 - \alpha_0^5 \alpha_1^5,$$

obtuvimos que $H^2(A) = \langle \overline{\sigma_1 \| \alpha_0^5 \alpha_1^5}, \overline{\sigma_2 \| \alpha_0^5 \alpha_1^5}, \overline{\sigma_1 \| \alpha^{(1)}}, \overline{\sigma_2 \| \alpha^{(1)}}, \overline{\rho_1' \| \alpha^{(1)}} \rangle$.

Consideremos ahora $\overline{\psi} = \sigma_2 \| \alpha_0^5 \alpha_1^5$, luego $f_\psi = \eta_2^* p_2^*(\psi)$ y

$$\begin{aligned} f_\psi(\alpha_0^3 \otimes_k \alpha_1^3) &= \eta_2^* p_2^*(\psi)(\alpha_0^3 \otimes_k \alpha_1^3) = \eta_2^* \psi(1 \otimes_E \alpha_0^3 \otimes_E \alpha_1^3 \otimes_E 1) \\ &= \psi(\eta_2(1 \otimes_E \alpha_0^3 \otimes_E \alpha_1^3 \otimes_E 1)) = \psi(1 \otimes_E \sigma_2 \otimes_E 1) \\ &= \alpha_0^5 \alpha_1^5 \end{aligned}$$

Observemos además que f_ψ se anula para el resto de los tensores elementales en $A \otimes_k A$. Por lo tanto, si consideramos la familia uniparamétrica de deformaciones A_{f_t} con

$$f_t(a, b) = ab + f_\psi(a, b)t$$

y llamamos $*$ al nuevo producto en A_{f_t} obtenemos que:

$$\alpha_0^3 * \alpha_1^3 = (\alpha_0^5 \alpha_1^5)t$$

En definitiva, fijado $t \in k^*$, el álgebra A_{f_t} es isomorfa a kQ/\mathcal{I}_{f_t} con Q el carcaj original de A e $\mathcal{I}_{f_t} = \langle \alpha_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2, \alpha_0^3 \alpha_1^3 - (\alpha_0^5 \alpha_1^5)t, \alpha_0^4 \alpha_1^4 - \alpha_0^5 \alpha_1^5 \rangle$.

Tomemos ahora $\overline{\phi} = \rho_1' \| \alpha^{(1)}$ y g_ϕ el elemento correspondiente en $\text{Hom}_k(A \otimes_k A, A)$. Evaluado en el tensor elemental $\alpha_0^4 \otimes \alpha_1^4$ obtenemos,

$$g_\phi(\alpha_0^4 \otimes_k \alpha_1^4) = \phi(\eta_2(p_2(1 \otimes_k \alpha_0^4 \otimes_k \alpha_1^4 \otimes_k 1)) = \alpha^{(1)}.$$

Consideremos ahora la familia uniparamétrica de deformaciones A_{g_t} con

$$g_t(a, b) = ab + g_\phi(a, b)t$$

y llamemos \star al nuevo producto en A_{g_t} . Se tiene que

$$\alpha_0^4 \star \alpha_1^4 = \alpha_0^5 \alpha_1^5 + (\alpha^{(1)})t$$

En este caso el nuevo ideal no resulta admisible y debemos utilizar la Proposición 7.3.1. Así, fijado $t \in k^*$, A_{g_t} es isomorfa a kQ'/\mathcal{I}_{g_t} con Q' que se obtiene de Q quitando la flecha $\alpha^{(1)}$ e $\mathcal{I}_{g_t} = \langle \alpha_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2, \alpha_0^3 \alpha_1^3 \rangle$.

Bibliografía

- [1] G. Ames, L. Cagliero, and P. Tiraó, *Comparison morphisms and the Hochschild cohomology ring of truncated quiver algebras*, J. Algebra **322** (2009), no. 5, 1466–1497.
- [2] D. Artenstein, *Clasificación de Álgebras Toupie*, Universidad de la República, 2011. Disponible en http://www.cmat.edu.uy/cmat/biblioteca/documentos/tesis/maestria/pdfs/dalia_artenstein.
- [3] M. J. Bardzell, *The alternating syzygy behavior of monomial algebras*, J. Algebra **188** (1997), no. 1, 69–89.
- [4] G. Bergman, *The diamond lemma for ring theory*, Adv. Math. **29** (1978), 178–218.
- [5] J. C. Bustamante, *The cohomology structure of string algebras*, J. Pure Appl. Algebra **204** (2006), 616–626.
- [6] D. Castonguay, J. Dionne, F. Huard, and M. Lanzilotta, *Toupie algebras, some examples of laura algebras*. Disponible en <http://arxiv.org/abs/1011.5136>.
- [7] Y. Chen, Y. Guo, and X. Yunge, *The Gerstenhaber bracket of Hochschild cohomology of triangular quadratic monomial algebra*, Indian J. Pure Appl. Math. **46** (2015), 172–190.
- [8] S. Chouhy, *Deformaciones de álgebras envolventes de álgebras de Lie de dimensión 3*, Universidad de Buenos Aires, 2012. Disponible en http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/2012/Chouhy_Sergio.pdf.
- [9] S. Chouhy and A. Solotar, *Projective resolutions of associative algebras and ambiguities*, J. Algebra **432** (2015), 22–61.
- [10] C. Cibils, *Rigidity of Truncated quiver algebras*, Adv. Math. **79** (1990), 18–42.
- [11] C. Cibils, *Rigid monomial algebras*, Math. Ann. **289** (1991), 95–109.
- [12] C. Cibils, *Hochschild cohomology algebra of radical square zero algebras*, Algebras and modules, II, 1998, pp. 93–101.
- [13] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory: A First Course*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer, 1991.
- [14] A. Gatica and M. Lanzilotta, *Hochschild cohomology of a generalisation of canonical algebras*, São Paulo J. Math. Sci. **4** (2010), no. 2, 251–271.
- [15] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. Math. **78** (1963), no. 2, 267–288.
- [16] M. Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras*, Ann. Math. **79** (1964), no. 1, 59–103.
- [17] M. Gerstenhaber and S. D. Schack, *Relative Hochschild cohomology, rigid algebras, and the Bockstein*, J. Pure Appl. Algebra **43** (1986), no. 1, 53–74.
- [18] D. Happel, *Hochschild Cohomology of piecewise hereditary algebras*, Colloq. Math. **78** (1998), no. 2, 261–266.
- [19] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer, 1972.
- [20] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Math., vol. 1099, Springer, 1984.
- [21] S. C. Sánchez-Flores, *La structure de Lie de la cohomologie de Hochschild d'algèbres monomiales.*, Montpellier II, 2009. Disponible en <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00464064/document>.
- [22] S. C. Sánchez-Flores, *The Lie module structure on the Hochschild cohomology groups of monomial algebras with radical square zero*, J. Algebra **320** (2008), no. 12, 4249–4269.
- [23] S. C. Sánchez-Flores, *On the semisimplicity of the outer derivations of monomial algebras*, Comm. Algebra **39** (2011), no. 9, 3410–3434.
- [24] E. Skölberg, *A contracting homotopy for Bardzell's resolution*, Math. Proc. R. Ir. Acad. **108** (2008), no. 2, 111–117.

- [25] A. Skowroński, *Simply connected algebras and Hochschild cohomologies*, Can. Math. Soc. Conf. Proc. **14** (1993), 431-447.
- [26] C. Strametz, *The Lie algebra structure on the first Hochschild cohomology group of a monomial algebra.*, J. Algebra Appl. **5** (2006), no. 3, 245-270.
- [27] C. M. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, 1994.