

Transformadas Generalizadas de Esscher en la calibración de modelos para precios de opciones

Juan Cirielli

31 de Agosto de 2011

Resumen

En los últimos tiempos se han desarrollado una gran variedad de modelos basados en procesos de Lévy que buscan reproducir las propiedades empíricas de los precios de las opciones y de los retornos de sus subyacentes. Si bien este objetivo ha sido alcanzado razonablemente, los mismos no son capaces de explicar de forma satisfactoria la conexión entre la probabilidad histórica –que reproduce la dinámica del subyacente– y la de riesgo neutral¹ –la cual se encuentra implícita en los precios de opciones.

Otra rama de la investigación ha optado por priorizar este nexo. La transformada clásica de Esscher forma parte de la misma, define una probabilidad libre de riesgo de forma que deviene equivalente con la histórica y un proceso de riesgo neutral que, al igual que el supuesto para el subyacente, resulta un proceso de Lévy. Sin embargo, el desajuste con los precios de mercado de las opciones es, en general, no despreciable.

El núcleo del trabajo consiste en la propuesta de dos generalizaciones paramétricas para la transformada de Esscher que, sin resignar las propiedades mencionadas, logre que los precios teóricos de opciones se ajusten de forma razonable a las de mercado. La parte final del artículo incluye ilustración del método aplicado al índice S&P 500.

Tutor:

Dr. Ernesto Mordecki Pupko

¹ A lo largo del trabajo se utilizarán indistintamente las expresiones “probabilidad libre de riesgo” o “probabilidad de riesgo neutral” como sinónimo de la probabilidad implícita en el precio de las opciones.

Tabla de contenido

1	Introducción	3
2	Procesos de Lévy	5
3	Transformaciones generalizadas de Esscher	9
3.1	Función característica del proceso bajo la probabilidad libre de riesgo	11
3.2	Transformada y transformadas generalizadas de Esscher	12
3.3	Aplicaciones	13
3.3.1	Aplicación al modelo de saltos-difusión de Merton	13
3.3.2	Aplicación al modelo de saltos-difusión de Kou	15
3.3.3	Aplicación al modelo de Variance Gamma	16
4	Ilustración del Método para el índice S&P 500	21
4.1	Transformada rápida de Fourier para el cálculo de precios de opciones	21
4.2	Aplicación al modelo de saltos-difusión de Merton	25
4.2.1	Estimación de los parámetros del modelo bajo la probabilidad histórica	26
4.2.2	Calibración del modelo de saltos-difusión de Merton para S&P 500	29
4.3	Aplicación al modelo Variance Gamma	34
4.3.1	Estimación de los parámetros del modelo bajo la probabilidad histórica	34
4.3.2	Calibración del modelo Variance Gamma para S&P 500	35
5	Conclusiones y perspectivas	38
6	Bibliografía y Referencias	39
7	Anexo de cálculo	41

1 Introducción

En el conjunto de procesos estocásticos aplicados a finanzas aparece en un lugar destacado los llamados movimientos Brownianos o procesos de Wiener. Un movimiento Browniano o proceso de Wiener se puede definir como:

Definición.- Un proceso de Wiener real $W = (W_t)_{t \in [0, \infty)}$ en (Ω, \mathcal{F}, P) es un proceso aleatorio tal que cumple las siguientes propiedades:

- i) Tiene trayectorias continuas, esto es, las funciones $W_t(\omega): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas para cada ω fijo como funciones de t .
- ii) Tiene incrementos independientes, esto es, dados $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, entonces las variables aleatorias $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son independientes.
- iii) $W_0 = 0$, y $W_t - W_s$ se distribuyen normales con media cero y varianza $t - s$ para todo $s < t$, esto es, $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$.

Estos procesos fueron utilizados para modelar los precios de una gran variedad de activos financieros desde que, en 1900, Louis Bachelier² propuso su implementación en la Bolsa de París. Notando como S_t al precio de un activo en tiempo t , el modelo se planteó como:

$$S_t = S_0 + \sigma W_t.$$

El uso de la versión multiplicativa del mismo se generalizó a partir de 1965 cuando Samuelson propuso un modelo que garantiza la positividad de los precios:

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma W_t).^3$$

Más adelante, F. Black y M. Scholes⁴ utilizaron este modelo para valuar el precio de opciones call⁵ sobre activos que no pagan dividendos. Este trabajo junto con el desarrollado por Robert Merton mereció el Nobel de Economía de 1997.

Para ello consideraron un modelo matemático de mercado financiero en tiempo continuo, con $t \in [0, T]$, que se integra con dos activos:

- $B = \{B_t\}_{t \in [0, T]}$, el activo considerado libre de riesgo, típicamente un bono⁶ con la mejor calificación, cuya evolución es determinística y cumple las siguientes condiciones:

$$B_0 = 1, \quad dB_t = B_t r dt$$

donde r es la tasa de interés del bono por unidad de tiempo.

- $S = \{S_t\}_{t \in [0, T]}$, el activo riesgoso, típicamente una acción, de evolución aleatoria y que cumple las condiciones:

$$S_0 = cte, \quad dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW$$

² En Ref. [1].

³ Ref. [31].

⁴ Ref. [5].

⁵ Una opción call europea da a su comprador el *derecho* -pero no la obligación- de comprar un activo a un precio predeterminado (precio de ejercicio) en una fecha concreta. El vendedor de la opción call tiene la *obligación* de vender el activo en el caso de que el comprador ejerza el derecho a comprar. Si la opción fuese americana el comprador puede ejercer su derecho en cualquier fecha siendo su límite la fecha estipulada en el contrato.

⁶ Aunque en realidad funciona como una cuenta corriente.

donde μ es el retorno medio del activo por unidad de tiempo y σ es su volatilidad.

Además se verifica que:

- Las acciones no pagan dividendos.
- No hay costos de transacción en la compra o la venta de acciones u opciones.
- Es posible pedir prestado cualquier fracción del valor de la acción a una tasa de interés r .

En el mercado descrito se introduce un tercer activo llamado opción call europea. Este es un contrato entre dos partes, el vendedor de la opción o emisor y el comprador de la misma o tenedor, con las siguientes características:

- El tenedor de la opción posee el *derecho* -pero no la obligación- de comprar una unidad del activo S (activo subyacente) a un precio predeterminado K (precio de ejercicio) en una fecha concreta T (tiempo de ejercicio).
- El vendedor de la opción call tiene la obligación de vender el activo S al precio K en tiempo T en caso de que el comprador ejerza el derecho a comprar.
- Como el poseedor de la opción ejercerá el derecho únicamente si $S_T > K$ (pues ejecutar la opción en caso contrario implicaría una pérdida), el valor que debe recibir éste del emisor -premio de la opción- es:

$$\text{máx}(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+.$$

Con estos antecedentes los autores se plantearon el problema de determinar el valor de la opción. La solución al mismo se basó en la construcción de un portafolio compuesto por los primeros dos activos, que tuviera la propiedad de replicar la opción⁷ y que fuera autofinanciante⁸, dando origen a la conocida fórmula:

$$C^{BS}(S_0, K, T, \sigma) = S_0 \Phi(d_+) - Ke^{-rT} \Phi(d_-)$$

donde:

- S_0 es el precio actual del subyacente
- $d_{\pm} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$
- Φ es la función de distribución de la normal estándar.

La relación que vincula el precio de esta opción con el de una opción put europea⁹ (llamada paridad put-call) permite la deducción del precio teórico de esta última para el modelo citado:

$$C^{BS}(S_0, K, T, \sigma) - P^{BS}(S_0, K, T, \sigma) = S_0 - Ke^{-rT}$$

⁷ Esto es que el portafolio en tiempo T debe valer el premio de la opción: $(S_T - K)^+$.

⁸ Este concepto indica que no se inyecta capital adicional, los cambios en el portafolio se generan por la compra-venta de bonos y acciones y de acciones y bonos por sus equivalentes en cada momento.

⁹ Una opción put europea da a su poseedor el *derecho* -pero no la obligación- de vender un activo a un precio predeterminado en una fecha concreta. Si la opción fuese americana el comprador puede ejercer su derecho en cualquier fecha siendo su límite la estipulada en el contrato. A su vez, el vendedor de la opción put tiene la *obligación* de comprar el activo subyacente si el tenedor de la opción (comprador del derecho de vender) decide ejercer su derecho.

2 Procesos de Lévy

El movimiento browniano geométrico descrito en el numeral anterior reproduce algunas de las propiedades que se observan en la de los precios reales de mercado: continuidad (al menos de a trozos) de las trayectorias, invariancia en la escala, independencia de los incrementos. Existen, sin embargo, otras características las cuales no es capaz de reproducir el modelo citado: distribución asimétrica de los incrementos, colas pesadas, autocorrelación positiva en el valor absoluto de los retornos, los efectos llamados “volatility clustering” y “leverage”, saltos (aleatorios e infrecuentes) en las trayectorias de los precios.

Los hechos mencionados motivan la migración hacia un conjunto muy variado de modelos más generales e incluso, no exclusivamente gaussianos. Dentro de ese grupo se encuentran los procesos de Lévy:

Definición.- Un proceso de Lévy es un proceso estocástico cadlag $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ en (Ω, \mathcal{F}, P) con valores en R^d que satisface las siguientes propiedades:

- 1) El proceso parte del origen, esto es, $P(X_0 = 0) = 1$
- 2) Los incrementos son independientes: para cualquier conjunto de subíndices $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$, las variables aleatorias $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.
- 3) Los incrementos son estacionarios: la ley de $X_{t+h} - X_t$ no depende de t .
- 4) Continuidad estocástica: $\forall \varepsilon > 0, \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0$

Observación 1.- La propiedad cadlag (continuidad a la derecha y límite a la izquierda) no impone restricciones a la definición ya que excluyendo la misma, se puede probar que existe una única modificación del proceso que es cadlag.

Observación 2.- La cuarta condición difiere radicalmente de la continuidad de las trayectorias. Simplemente sirve para excluir los procesos que saltan en momentos del tiempo fijos (por ejemplo los lunes, luego de feriados largos, etc.). En otras palabras, la propiedad excluye los “efectos calendarios”.

Observación 3.- Un proceso de Wiener es un proceso de Lévy.

Con esta definición es posible generalizar el modelo propuesto por Samuelson sustituyendo el movimiento browniano con tendencia $(\mu t + \sigma W_t)$ por un proceso de Lévy $(rt + X_t)$. El modelo resultante es el llamado *exponential Lévy model*¹⁰ y su representación es la siguiente:

$$S_t = S_0 \exp(rt + X_t)$$

Definición.- Una distribución de probabilidad F se dice infinitamente divisible en R^d , si para todo entero $n \geq 2$, existen n variables independientes e idénticamente distribuidas Y_1, Y_2, \dots, Y_n tales que $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ tiene distribución F .

Con esta definición es posible probar la siguiente importante proposición:

¹⁰ Este modelo será empleado en el resto del presente trabajo, particularmente en las aplicaciones e ilustraciones a ser expuestas en los siguientes capítulos.

PROPOSICIÓN

Sea $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ un proceso de Lévy. Entonces, para todo t , X_t tiene una distribución infinitamente divisible. Recíprocamente, si F es una distribución infinitamente divisible, entonces existe un proceso de Lévy $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ tal que la distribución de X_1 es F .

La demostración de la implicación directa se realiza a continuación. El recíproco puede consultarse en la referencia [32] Corolario 11.6.

Demostración

Sea $\Phi_t(z) = E(e^{izX_t})$ la función característica de X_t , un proceso de Lévy. Entonces:

$$\Phi_{t+s}(z) = \Phi_{X_{t+s}}(z) = \Phi_{X_{t+s}-X_s+X_s}(z) = \Phi_{X_{t+s}-X_s} \Phi_{X_s}(z) = \Phi_{X_t} \Phi_{X_s}(z) = \Phi_t(z) \Phi_s(z)$$

La tercera igualdad se debe a la propiedad de independencia y la cuarta a la de homogeneidad. Por lo tanto, la función característica es multiplicativa como función de t .

Además, debido a la continuidad estocástica:

$$X_t \xrightarrow{p} X_s \text{ cuando } t \rightarrow s, \text{ y entonces } X_t \xrightarrow{d} X_s, \text{ o equivalentemente } \Phi_t \xrightarrow[t \rightarrow s]{} \Phi_s$$

Entonces, la función $t \rightarrow \Phi_t$ es multiplicativa y continua, lo que implica que es exponencial. Esto es:

$$\Phi_t(z) = E(e^{izX_t}) = e^{t\psi(z)}$$

Observación.- Consecuencia de lo anterior es que el único grado de libertad en la especificación de un proceso de Lévy es la distribución de X_t para un t fijo. Por ejemplo si $t = 1$:

$$\Phi_1(z) = e^{\psi(z)} \Rightarrow \Phi_t(z) = e^{t\psi(z)} = (e^{\psi(z)})^t = (\Phi_1(z))^t$$

Finalmente, llamando ψ al exponente característico:

$$\psi_{X_t} = t \psi_{X_1} = t \psi$$

Utilizando las definiciones que se exponen a continuación es posible enunciar otra importante proposición llamada la Descomposición de Lévy-Ito.

Definición.- Sea $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ un proceso de Lévy en R^d . La medida ν definida en R^d por la fórmula:

$$\nu(A) = E[\# \{t \in [0, 1]: \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A\}], \quad A \in \mathcal{B}(R^d)$$

es la llamada medida de Lévy del proceso X .

CONSTRUCCIÓN DE LA "MEDIDA DE LOS SALTOS"

A cada $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ proceso cadlag con valores en R^d se le puede asociar una medida aleatoria J_X con valores en $[0, T] \times R^d$ del siguiente modo. Observando que $\{t \in [0, T], \Delta X_T = X_t - X_{t-} \neq 0\}$ es numerable debido a la propiedad cadlag, este

conjunto de elementos define una sucesión $(T_n)_{n \geq 1}$ que indica los tiempos de salto del proceso.

En tiempo T_n el proceso X tiene una discontinuidad de magnitud $Y_n = X_{T_n} - X_{T_n-} \in R^d \setminus \{0\}$ y por ello, $(T_n, Y_n)_{n \geq 1}$ define un proceso llamado de "punto marcado" en $[0, T] \times R^d \setminus \{0\}$ que contiene toda la información respecto de los saltos de X : los tiempos de salto T_n y sus amplitudes Y_n . De este modo:

$$J_X(\omega, \cdot) = \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n(\omega), Y_n(\omega))} = \sum_{t \in [0, T]}^{\Delta X_t \neq 0} \delta_{(t, \Delta X_t)}$$

Definición.- Un proceso de "punto marcado" en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ es una sucesión $(T_n, Y_n)_{n \geq 1}$ que cumple:

- $(T_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión creciente de tiempos aleatorios no anticipativos tales que, casi seguramente, $T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$
- $(Y_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias que toman valores en $E \subset R^d$
- Y_n es \mathcal{F}_{T_n} -medible

En forma intuitiva, para cada subconjunto A medible en R , $J_X([0, T], A)$ es el número de saltos de X que ocurren entre 0 y t , y cuya amplitud pertenece a A .

Definición.- Sea (Ω, \mathcal{F}, P) , un espacio de probabilidad, $E \subset R^d$, y μ una medida (positiva) de Radon en (E, \mathcal{E}) . Una medida aleatoria de Poisson en E con medida de intensidad μ es una medida a valores naturales:

$$M: \Omega \times \mathcal{E} \rightarrow N$$

tal que:

- para casi todo $\omega \in \Omega$, $M(\omega, \cdot)$ es una medida de Radon de E a valores naturales, esto es, para cada conjunto $A \subset E$, medible y acotado, $M(A) < \infty$ es una variable aleatoria con valores en los naturales.
- para cada conjunto medible $A \subset E$, $M(\cdot, A) = M(A)$ es una variable aleatoria con distribución Poisson con parámetro $\mu(A)$:

$$\forall k \in N, P(M(A) = k) = e^{-\mu(A)} \frac{(\mu(A))^k}{k!}$$

- Dados $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{E}$, conjuntos disjuntos y medibles, las variables aleatorias $M(A_1), M(A_2), \dots, M(A_n)$ son independientes.

PROPOSICIÓN (Descomposición de Lévy-Ito)

Dado $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ un proceso de Lévy en R^d y ν su medida de Lévy, se cumplen las siguientes condiciones:

- ν es una medida de Radon en $R^d \setminus \{0\}$ y satisface:

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \nu(dx) < \infty, \quad \int_{|x| \geq 1} \nu(dx) < \infty$$

- La medida de saltos de X , que notamos con J_X , es una medida aleatoria de Poisson en $[0, \infty) \times R$, con medida de intensidad $\nu(dx)dt$.
- Existe un vector γ y un movimiento Browniano d -dimensional $(B_t)_{t \in [0, \infty)}$ con matriz de covarianzas A tal que:

$$X_t = \gamma t + B_t + X_t^l + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tilde{X}_t^\varepsilon$$

con:

$$X_t^l = \int_{|x| \geq 1, s \in [0, t]} x J_X(ds \times dx) < \infty$$

$$\tilde{X}_t^\varepsilon = \int_{\varepsilon \leq |x| < 1, s \in [0, t]} x \{J_X(ds \times dx) - \nu(dx)ds\} < \infty$$

Los términos de la primera ecuación son independientes y la convergencia del último término es casi-segura y uniforme en $t \in [0, T]$. Una demostración puede consultarse en la referencia [8], Proposición 3.7, pág. 79.

A la terna (A, ν, γ) se la llama **tripleta característica**.

Utilizando la proposición anterior y refiriéndolo a la función característica se puede demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE LÉVY-KHINCHIN

Sea $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ un proceso de Lévy en R^d con tripleta característica (A, ν, γ) . Entonces:

$$E(e^{iuX_t}) = e^{t\psi(u)}, \quad u \in R^d$$

con:
$$\psi(u) = -\frac{1}{2} u \cdot Au + i\gamma \cdot u + \int_R (e^{iu \cdot x} - 1 - iu \cdot x I_{\{|x| \leq 1\}}) \nu(dx)$$

Dicho de otro modo, la tripleta característica define la distribución del proceso.

3 Transformadas generalizadas de Esscher

Sabido es que la fórmula de Black y Scholes ha sido referencia en lo que concierne a valuación de opciones. También es conocido desde ya hace tiempo que, tanto *el modelo de probabilidad asumido para el subyacente –probabilidad histórica–* así como los precios de opciones obtenidos al aplicar la fórmula de referencia no son ajustados a la realidad.

En respuesta al primer aspecto citado y como se mencionó en el numeral anterior, los procesos de Wiener han pasado a ser sustituidos por los de Lévy a modo de generalización de aquellos y con el objetivo de disminuir los inconvenientes del modelo asumido.

Relacionado con el segundo punto –los precios de las opciones– los antecedentes aparecen en la propia fórmula de Black y Scholes desde que los autores prueban que la misma es equivalente a:

$$C^{BS}(S_0, K, T, \sigma) = e^{-rT} E^Q((S_T - K)^+),$$

donde E^Q es la esperanza bajo una probabilidad Q , distinta a la probabilidad histórica P , aunque vinculada a la misma¹¹. A la probabilidad Q se la denomina *probabilidad de riesgo neutral o libre de riesgo* y cumple que proceso descontado $\{\tilde{S}_t\}_{t \geq 0} = \{e^{-rt} S_t\}_{t \geq 0}$ es una Q -martingala.

El sentido común parecería indicar la existencia de un vínculo entre la dinámica histórica de los precios de un subyacente y las expectativas del mercado expresadas en las opciones sobre éste. Si bien existe en la actualidad una gran variedad de modelos que logran reproducir razonablemente las propiedades empíricas de los precios de las opciones y de los retornos de sus subyacentes, los mismos no arrojan luz en cuanto al nexo aludido.

La transformada clásica de Esscher¹² es un método que propone un modelo para el vínculo citado. Su nombre se debe al actuario Fredrik Esscher quien la introdujo para un caso especial en 1932¹³. Se define para transformaciones de medidas de probabilidad del siguiente modo:

Definición.- Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , una variable aleatoria X y un parámetro θ , la transformada de Esscher Q^θ se define de acuerdo a la siguiente igualdad:

$$dQ^\theta = \frac{e^{\theta X}}{E(e^{\theta X})} dP$$

Llamando P a la probabilidad histórica y Q a la de riesgo neutral, el vínculo entre ambas queda explícito y esta última resulta absolutamente continua respecto de la primera¹⁴. Sin embargo cuando se comparan los precios teóricos de opciones

¹¹ Mientras que ésta queda definida por la ecuación diferencial estocástica: $dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW$, la probabilidad Q , queda especificada por: $dS_t = S_t r dt + S_t \sigma dW^*$.

¹² En la literatura estadística también es conocida como *exponential tilting*.

¹³ Ref. [10].

¹⁴ Esta propiedad es equivalente a la ausencia de arbitraje en el mercado. Existe posibilidad de arbitraje cuando, con probabilidad no nula, se puede obtener una ganancia positiva sin arriesgar capital alguno.

calculados según la probabilidad libre de riesgo obtenida por este método y los de mercado la divergencia es, generalmente, notoria¹⁵.

Las generalizaciones paramétricas de Esscher que se pondrán a consideración más adelante buscan conservar las propiedades deseables explicitadas, esencialmente que la probabilidad de riesgo neutral Q generada por el método sea absolutamente continua respecto de la probabilidad histórica P y subsanar el déficit de ajuste respecto de los precios de mercado.

A los efectos planteados, siguiendo el libro *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distribution* de K. Sato (Ref. [32]), resulta conveniente enunciar el siguiente teorema:

TEOREMA (de las probabilidades equivalentes)¹⁶

Sean (X_t, P) y (X_t, Q) dos procesos de Levy en R^d con tripletas características (A^P, ν^P, γ^P) y (A^Q, ν^Q, γ^Q) respectivamente. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1) $P/\mathcal{F}_t \approx Q/\mathcal{F}_t$, para todo $t \in (0, \infty)$
- 2) Las tripletas características satisfacen:
 - a) $A^P = A^Q$
 - b) $\nu^P \approx \nu^Q$, y definiendo la función $\varphi(x)$ tal que $\frac{d\nu^Q}{d\nu^P} = e^{\varphi(x)}$ satisface:
 - i) $\int_{R^d} (e^{\frac{\varphi(x)}{2}} - 1)^2 \nu^P(dx) < \infty$
 - ii) $\gamma^Q - \gamma^P - \int_{|x| \leq 1} x (\nu^Q - \nu^P)(dx) \in \text{Rec}(A)$

OBSERVACIÓN: Dado un proceso de Levy (X_t, P) con tripleta característica (A, ν, γ) se puede definir la componente de saltos como:

$$X_t^\nu = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\sum_{(s, X_s - X_{s-}) \in [0, t] \times |x| > \varepsilon} (X_s - X_{s-}) - t \int_{\varepsilon < |x| \leq 1} x \nu(dx) \right)$$

donde la convergencia es uniforme en t cualquier intervalo acotado de tiempo P c. s..

También se puede definir la parte continua como:

$$X_t^c = X_t - X_t^\nu$$

Más aún, los procesos (X_t^c, P) y (X_t^ν, P) son procesos de Levy independientes con tripletas $(0, \nu, 0)$ y $(A, 0, \gamma)$ respectivamente.

¹⁵ La figura de la pág. 32 es una evidencia de este hecho enmarcado en la ilustración de las generalizaciones propuestas para la transformada de Esscher.

¹⁶ Su demostración puede ser consultada en Ref. [32] Teorema 33.1 pág. 218

3.1 FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DEL PROCESO BAJO LA PROBABILIDAD LIBRE DE RIESGO

En adelante y de acuerdo a lo mencionado anteriormente, se asumirá un modelo exponencial de Lévy para el activo de riesgo. Esto es:

$$S_t = S_0 \exp(rt + X_t)$$

donde $(X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Lévy en R .

Además se admitirá que $S_0 = 1$ y se impondrá la condición de que el proceso descontado, $\{\tilde{S}_t = S_t e^{-rt}\}_{t \geq 0}$ sea una Q -martingala. La primera propiedad no impone ninguna restricción al proceso, simplemente sirve para realizar los cálculos en unidades del subyacente. Por otra parte, para que se cumpla la segunda condición basta admitir, en realidad, que $E^Q(e^{uX_t}) < \infty$ para algún $u \in R$ y que $E^Q(e^{X_t}) = \Phi_t^Q(-i) = e^{t\psi_X^Q(-i)} = 1$ ó equivalentemente $\psi_X^Q(-i) = 0$, de acuerdo a la proposición de la página 22 del presente trabajo.

Se desea destacar las condiciones citadas en la medida que poseen importancia central **en lo que refiere al cálculo del precio de una opción** desde que el mismo es igual a:

$$C(S_0, K, T, \sigma) = e^{-rT} E^Q((S_T - K)^+).$$

Comenzando entonces con el cálculo, de acuerdo al Teorema de Representación de Levy-Khinchin la función característica de un proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ en R , con tripleta característica $((\sigma^Q)^2, \nu^Q, \gamma^Q)$ bajo Q se puede escribir de la forma siguiente:

$$E^Q(e^{iuX_t}) = e^{t\psi^Q(u)}$$

$$\text{con: } \psi^Q(u) = -\frac{1}{2} (\sigma^Q)^2 u^2 + i\gamma^Q u + \int_R (e^{iux} - 1 - iuxI_{\{|x| \leq 1\}}) \nu^Q(dx)$$

Aplicando el Teorema de las probabilidades equivalentes, para que la probabilidad libre de riesgo Q sea absolutamente continua respecto de la probabilidad histórica P , es suficiente que se cumplan las siguientes propiedades:

- a) $\sigma^P = \sigma^Q = \sigma$
- b) $\nu^P \approx \nu^Q$, y definiendo la función $\varphi(x)$ tal que $\frac{d\nu^Q}{d\nu^P} = e^{\varphi(x)}$ satisfice:
 - i) $\int_{R^d} (e^{\frac{\varphi(x)}{2}} - 1)^2 \nu^P(dx) < \infty$
 - ii) $\gamma^Q - \gamma^P - \int_{|x| \leq 1} x (\nu^Q - \nu^P)(dx) = \eta\sigma^2$

Despejando γ^Q en la última ecuación y sustituyendo en el exponente característico del proceso bajo la probabilidad de riesgo neutral resulta:

$$\begin{aligned} \psi^Q(u) &= -\frac{1}{2} \sigma^2 u^2 + i\gamma^Q u + \int_R (e^{iux} - 1 - iuxI_{\{|x| \leq 1\}}) \nu^Q(dx) = -\frac{1}{2} \sigma^2 u^2 + i\gamma^P u \\ &\quad + iu \int_{|x| \leq 1} x (\nu^Q - \nu^P)(dx) + iu\eta\sigma^2 + \int_R (e^{iux} - 1 - iuxI_{\{|x| \leq 1\}}) e^{\varphi(x)} \nu^P(dx) \end{aligned}$$

Por otra parte, la condición de martingala impone la restricción:

$$\psi^Q(-i) = \frac{1}{2} \sigma^2 + \gamma^P$$

$$+ \int_{|x| \leq 1} x (v^Q - v^P) (dx) + \eta \sigma^2 + \int_R (e^x - 1 - xI_{\{|x| \leq 1\}}) e^{\varphi(x)} v^P(dx) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma^P = -\frac{1}{2} \sigma^2$$

$$- \int_{|x| \leq 1} x (v^Q - v^P) (dx) - \eta \sigma^2 - \int_R (e^x - 1 - xI_{\{|x| \leq 1\}}) e^{\varphi(x)} v^P(dx)$$

Entonces:

$$\psi^Q(u) = -\frac{1}{2} \sigma^2 u^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 iu$$

$$-iu \int_{|x| \leq 1} x (v^Q - v^P) (dx) - iu\eta\sigma^2 - iu \int_R (e^x - 1 - xI_{\{|x| \leq 1\}}) e^{\varphi(x)} v^P(dx) +$$

$$iu \int_{|x| \leq 1} x (v^Q - v^P) (dx) + iu\eta\sigma^2 + \int_R (e^{iux} - 1 - iuxI_{\{|x| \leq 1\}}) e^{\varphi(x)} v^P(dx) =$$

$$-\frac{1}{2} \sigma^2 u^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 iu - iu \int_R (e^x - 1 - xI_{\{|x| \leq 1\}}) e^{\varphi(x)} v^P(dx)$$

$$+ \int_R (e^{iux} - 1 - iuxI_{\{|x| \leq 1\}}) e^{\varphi(x)} v^P(dx)$$

Finalmente:

$$\psi^Q(u) = -\frac{1}{2} \sigma^2 u^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 iu + \int_R [e^{iux} - 1 - iu(e^x - 1)] e^{\varphi(x)} v^P(dx)$$

3.2 TRANSFORMADA Y TRANSFORMADAS GENERALIZADAS DE ESSCHER

La transformada de Esscher es una conocida forma de encontrar una medida equivalente a otra de modo que la resultante sea martingala. Fue presentada en 1994 por Hans Gerber y Elias Shiu en su artículo *Option pricing by Esscher Transforms*¹⁷ para valuar derivados cuando los rendimientos logarítmicos de los subyacentes tienen incrementos estacionarios e independientes.

En efecto, dado un proceso de Lévy (X_t, P) con tripleta característica $((\sigma^P)^2, \nu^P, \gamma^P)$, $\theta \in R$ y asumiendo que $\int_R (e^{\frac{\varphi(x)}{2}} - 1)^2 \nu^P(dx) < \infty$ se puede aplicar el Teorema de las probabilidades equivalentes para $\varphi(x) = \theta x$ y $\eta = \theta$ obteniéndose la transformación mencionada.

En particular, es fácil verificar que, utilizando el resultado del apartado anterior al modelo de Black-Scholes¹⁸, el exponente característico del proceso descontado bajo la probabilidad libre de riesgo se puede expresar como:

$$\psi^Q(u) = -\frac{1}{2} \sigma^2 u^2 - \frac{1}{2} iu \sigma^2$$

¹⁷ Ref [14].

¹⁸ El cual sólo contiene la componente de difusión, esto es, $\nu = 0$.

Esto resulta equivalente a que el logaritmo de los precios descontados posee una distribución gaussiana con media $(-\frac{1}{2}\sigma^2)$ y varianza σ^2 . Con ello, es inmediato deducir la fórmula del precio de una opción call.

En este trabajo, se generalizará la transformada de Esscher de dos formas diferentes, si el proceso X_t posee una componente de difusión no trivial, esto es, $\sigma^2 \neq 0$:

Caso i) aplicando el Teorema de las probabilidades equivalentes para $\varphi(x) = \theta x$ y η sin restricciones.

De este modo, se logra una medida equivalente, transformación de la probabilidad "a priori", que es martingala y que posee un parámetro libre¹⁹. Posteriormente a la estimación de los parámetros del modelo utilizado con precios históricos del subyacente, el parámetro libre será empleado para calibrar modelos de acuerdo a precios de opciones de mercado.

Caso ii) Aplicando Teorema de las probabilidades equivalentes para $\varphi(x) = \theta_1 x I_{\{x < 0\}} + \theta_2 x I_{\{x \geq 0\}}$ y η sin restricciones. En este caso dos serían los parámetros libres para calibrar modelos según los precios de las opciones.

Si, por el contrario el proceso X_t no posee una componente de difusión, esto es, $\sigma^2 = 0$, la condición de martingala sería satisfecha dependiendo de la función $\varphi(x)$ y por ello, las generalizaciones propuestas deben ser adaptadas al modelo que se aplique. Esta situación se ilustrará con el modelo Variance Gamma.

3.3 APLICACIONES

3.3.1 APLICACIÓN AL MODELO DE SALTO-DIFUSIÓN DE MERTON

Todo proceso de salto-difusión posee la forma siguiente:

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

donde $(N_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Poisson que cuenta los saltos de X y Y_i son variables i.i.d. que identifican la magnitud de los saltos.

En el modelo de Merton los saltos de los precios logarítmicos de X_t se asumen normales: $Y_i \sim N(\mu, \delta^2)$. De acuerdo a ello y al resultado anterior, el exponente característico de un proceso que sigue el modelo de Merton se puede formular del siguiente modo:

¹⁹ Si bien, en principio se emplean dos parámetros, la condición de martingala genera que reste un solo grado de libertad. En efecto, para cualquier θ fijo, la misma resulta en una ecuación lineal de primer grado en η , por lo que existe (y es única) la raíz de la misma.

$$\begin{aligned}\psi^Q(u) &= -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - iu \left[\frac{1}{2}\sigma^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_R e^{\varphi(x)}(e^x - 1) \nu^P(dx) \right] + \int_R (e^{iux} - 1) e^{\varphi(x)} \nu^P(dx)\end{aligned}$$

siendo $\nu^P = \lambda f_Y$ y $f_Y(\mu, \delta^2)$ la densidad de una distribución normal Y con media μ y varianza δ^2 .

Por ello, para las generalizaciones de Esscher propuestas, el exponente característico resulta según las siguientes formulaciones²⁰:

$$\begin{aligned}\text{Caso i)} \quad \psi^Q(u) &= -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - iu \left[\frac{1}{2}\sigma^2 + \int_R \lambda e^{\theta x}(e^x - 1) f_Y(x, \mu, \delta^2) dx \right] + \\ &\quad \int_R \lambda (e^{iux} - 1) e^{\theta x} f_Y(x, \mu, \delta^2) dx = \\ &= -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - iu \left[\frac{1}{2}\sigma^2 + \lambda \left(e^{\mu(\theta+1) + \frac{1}{2}(\theta+1)^2\delta^2} - e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\theta^2\delta^2} \right) \right] + \\ &\quad + \lambda e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\theta^2\delta^2} (e^{iu(\mu+\theta\delta^2) - \frac{1}{2}\delta^2 u^2} - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Caso ii)} \quad \psi^Q(u) &= -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - iu \left[\frac{1}{2}\sigma^2 + \int_{-\infty}^0 \lambda e^{\theta_1 x}(e^x - 1) f_Y(x, \mu, \delta^2) dx + \right. \\ &\quad \left. \int_0^{+\infty} \lambda e^{\theta_2 x}(e^x - 1) f_Y(x, \mu, \delta^2) dx \right] + \int_{-\infty}^0 \lambda e^{\theta_1 x}(e^{iux} - 1) f_Y(x, \mu, \delta^2) dx \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \lambda e^{\theta_2 x}(e^{iux} - 1) f_Y(x, \mu, \delta^2) dx = \\ &= -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - iu \left[\frac{1}{2}\sigma^2 + \lambda e^{\mu(\theta_1+1) + \frac{1}{2}(\theta_1+1)^2\delta^2} \Phi\left(-\frac{\mu + (\theta_1+1)\delta^2}{\delta}\right) - \right. \\ &\quad \left. \lambda e^{\mu\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_1^2\delta^2} \Phi\left(-\frac{\mu + \theta_1\delta^2}{\delta}\right) + \lambda e^{\mu(\theta_2+1) + \frac{1}{2}(\theta_2+1)^2\delta^2} \right. \\ &\quad \left. \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu + (\theta_2+1)\delta^2}{\delta}\right) \right] - \lambda e^{\mu\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_2^2\delta^2} \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu + \theta_2\delta^2}{\delta}\right) \right] \right] + \\ &\quad \lambda e^{\mu\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_1^2\delta^2} \int_{-\infty}^0 e^{iux} f_Y(x, \mu + \theta_1\delta^2, \delta^2) dx - \lambda e^{\mu\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_1^2\delta^2} \Phi\left(-\frac{\mu + \theta_1\delta^2}{\delta}\right) + \\ &\quad \lambda e^{\mu\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_2^2\delta^2} \int_0^{+\infty} e^{iux} f_Y(x, \mu + \theta_2\delta^2, \delta^2) dx - \lambda e^{\mu\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_2^2\delta^2} \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu + \theta_2\delta^2}{\delta}\right) \right]\end{aligned}$$

No existe fórmula cerrada para las integrales de integrando complejo. Su cálculo se puede efectuar utilizando la descomposición $e^{iux} = \cos(ux) + i \operatorname{sen}(ux)$ y evaluando las integrales reales resultantes por métodos numéricos.

²⁰ Cálculos intermedios pueden ser consultados en el Anexo de cálculo.

3.3.2 APLICACIÓN AL MODELO DE SALTO-DIFUSIÓN DE KOU

En el modelo de Kou los saltos de los precios logarítmicos de X_t se asumen doble exponenciales: $Y_i \sim DExp(p, \eta_1, \eta_2)$, cuya función de densidad está dada por la fórmula:

$$f_Y(x) = p\eta_1 e^{-\eta_1 x} I_{\{x < 0\}} + q\eta_2 e^{-\eta_2 x} I_{\{x \geq 0\}}, \text{ con } q = 1 - p$$

De forma análoga que para el modelo de Merton el exponente característico de un proceso que sigue el modelo de Kou se puede formular del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \psi^Q(u) = & -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - iu \left[\frac{1}{2}\sigma^2 \right. \\ & \left. + \int_R e^{\varphi(x)}(e^x - 1) \nu^P(dx) \right] + \int_R (e^{iux} - 1) e^{\varphi(x)} \nu^P(dx) \end{aligned}$$

Siendo $\nu^P = \lambda f_Y$ y $f_Y(p, \eta_1, \eta_2)$ la densidad de una distribución doble exponencial Y , con $Y \sim DExp(p, \eta_1, \eta_2)$.

Entonces, para las generalizaciones de Esscher propuestas:

$$\begin{aligned} \text{Caso i)} \quad \psi^Q(u) = & -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - iu \left[\frac{1}{2}\sigma^2 + \int_R \lambda e^{\theta x}(e^x - 1) f_Y(p, \eta_1, \eta_2) dx \right] + \\ & \int_R \lambda (e^{iux} - 1) e^{\theta x} f_Y(p, \eta_1, \eta_2) dx = -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - iu \left[\frac{1}{2}\sigma^2 + \right. \\ & \left. \int_R \lambda e^{\theta x}(e^x - 1)(p\eta_1 e^{-\eta_1 x} I_{\{x < 0\}} + q\eta_2 e^{-\eta_2 x} I_{\{x \geq 0\}}) dx \right] + \\ & \int_R \lambda (e^{iux} - 1) e^{\theta x} (p\eta_1 e^{-\eta_1 x} I_{\{x < 0\}} + q\eta_2 e^{-\eta_2 x} I_{\{x \geq 0\}}) dx = \\ & -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - iu \left[\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{\lambda p \eta_1}{[(\theta + 1) - \eta_1]} - \frac{\lambda q \eta_2}{[(\theta + 1) - \eta_2]} - \frac{\lambda p \eta_1}{[\theta - \eta_1]} + \frac{\lambda q \eta_2}{[\theta - \eta_2]} \right] + \\ & \frac{\lambda p \eta_1}{[iu + \theta - \eta_1]} - \frac{\lambda q \eta_2}{[iu + \theta - \eta_2]} - \frac{\lambda p \eta_1}{[\theta - \eta_1]} + \frac{\lambda q \eta_2}{[\theta - \eta_2]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Caso ii)} \quad \psi^Q(u) = & -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - iu \left[\frac{1}{2}\sigma^2 + \int_{-\infty}^0 \lambda e^{\theta_1 x}(e^x - 1) f_Y(p, \eta_1, \eta_2) dx + \right. \\ & \left. \int_0^{+\infty} \lambda e^{\theta_2 x}(e^x - 1) f_Y(p, \eta_1, \eta_2) dx \right] + \int_{-\infty}^0 \lambda (e^{iux} - 1) e^{\theta_1 x} f_Y(p, \eta_1, \eta_2) dx + \\ & \int_0^{+\infty} \lambda (e^{iux} - 1) e^{\theta_2 x} f_Y(p, \eta_1, \eta_2) dx = \\ & -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - iu \left[\frac{1}{2}\sigma^2 + \int_{-\infty}^0 \lambda e^{\theta_1 x}(e^x - 1) p\eta_1 e^{-\eta_1 x} I_{\{x < 0\}} dx + \right. \\ & \left. \int_0^{+\infty} \lambda e^{\theta_2 x}(e^x - 1) q\eta_2 e^{-\eta_2 x} I_{\{x \geq 0\}} dx \right] + \int_{-\infty}^0 \lambda e^{\theta_1 x}(e^{iux} - 1) p\eta_1 e^{-\eta_1 x} I_{\{x < 0\}} dx + \\ & \int_0^{+\infty} \lambda e^{\theta_2 x}(e^{iux} - 1) q\eta_2 e^{-\eta_2 x} I_{\{x \geq 0\}} dx = \\ & -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - iu \left[\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{\lambda p \eta_1}{[(\theta_1 + 1) - \eta_1]} - \frac{\lambda q \eta_2}{[(\theta_2 + 1) - \eta_2]} - \frac{\lambda p \eta_1}{[\theta_1 - \eta_1]} + \frac{\lambda q \eta_2}{[\theta_2 - \eta_2]} \right] + \\ & + \frac{\lambda p \eta_1}{[iu + \theta_1 - \eta_1]} - \frac{\lambda q \eta_2}{[iu + \theta_2 - \eta_2]} - \frac{\lambda p \eta_1}{[\theta_1 - \eta_1]} + \frac{\lambda q \eta_2}{[\theta_2 - \eta_2]} \end{aligned}$$

3.3.3 APLICACIÓN AL MODELO DE VARIANCE GAMMA

Este modelo puede ser construido cambiando el tiempo de un proceso Browniano con otro proceso de Levy especial llamado subordinador, que cumple:

$$X_t \geq 0 \text{ c.s. } \forall t > 0$$

La nueva escala de tiempo se interpreta como el “tiempo de negocios” y de acuerdo con lo dicho el proceso es Browniano si se mira en esta escala.

El resultado final de la construcción es un proceso que carece de componente gaussiana, con infinita cantidad de saltos aunque de variación finita.

La medida de los saltos está dada por la siguiente fórmula:

$$\nu(x) = \frac{1}{\kappa |x|} e^{Ax - B|x|}, \quad \text{con } A = \frac{\mu}{\sigma^2} \text{ y } B = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2/\kappa}}{\sigma^2}$$

i) PRIMERA PROPUESTA DE GENERALIZACIÓN ($\varphi(x) = \theta x$)

En lo relativo a las propuestas de generalización de Esscher, si bien el exponente característico libre de riesgo de un proceso que sigue el modelo de Variance Gamma se puede formular de forma análoga que para los modelos anteriores, **la condición de martingala pierde un grado de libertad debido a la carencia de componente gaussiana no trivial ($\sigma^2 = 0$) y de acuerdo a ello, la primera propuesta de generalización resulta igual al modelo de Esscher clásico.**

Esta condición se formula específicamente para el modelo Variance Gamma y la función $\varphi(x) = \theta x$ del siguiente modo:

$$\int_{\mathbb{R}} [e^{\theta x}(e^x - 1) - x I_{\{|x| \leq 1\}}] \frac{1}{\kappa |x|} e^{A^P x - B^P |x|}(dx) + \gamma^P = 0$$

Es fácil observar que la integral de la ecuación es convergente si y sólo si se cumple que:

$$-(A^P + B^P) < \theta < B^P - A^P - 1 \text{ }^{21}$$

Adicionalmente, para que el espacio paramétrico de θ sea no nulo, se debe cumplir la condición adicional $B^P > 1/2$.

Aplicando el cálculo 15. del Anexo la condición de martingala se puede expresar del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} [e^{\theta x}(e^x - 1)] \frac{1}{\kappa |x|} e^{A^P x - B^P |x|}(dx) + \gamma^P - \int_{\mathbb{R}} x I_{\{|x| \leq 1\}} \frac{1}{\kappa |x|} e^{A^P x - B^P |x|}(dx) \\ = \int_{\mathbb{R}} [e^{\theta x}(e^x - 1)] \frac{1}{\kappa |x|} e^{A^P x - B^P |x|}(dx) + b = 0 \end{aligned}$$

²¹ Estas desigualdades surgen de las condiciones de convergencia para las ramas negativa y positiva de la integral.

$$\text{con } b = \gamma^P - \int_{\mathbb{R}} x I_{\{|x| \leq 1\}} \frac{1}{\kappa |x|} e^{A^P x - B^P |x|} (dx) = \gamma^P - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{e^{-(A^P + B^P)} - 1}{(A^P + B^P)} + \frac{e^{(A^P - B^P)} - 1}{(A^P - B^P)} \right).$$

Este parámetro puede ser interpretado como el valor de la componente de la tripleta característica para una función de truncado nula. Al contrario de γ^P que no es un parámetro intrínseco y que depende de la función de truncado que se usa en la representación de Lévy-Khinchin, b posee una interpretación intrínseca como el drift de la parte continua (trivial, dado que $\sigma^2 = \mathbf{0}$) del proceso.

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MARTINGALA EN EL MODELO VARIANCE GAMMA PARA $\varphi(x) = \theta x$

Aplicando los cálculos 13. y 14. del Anexo la ecuación resulta:

$$\frac{1}{\kappa} \text{Ln} \left(\frac{(A^P + B^P + \theta)}{(A^P + B^P + \theta + 1)} \right) - \frac{1}{\kappa} \text{Ln} \left(\frac{(B^P - A^P - \theta - 1)}{(B^P - A^P - \theta)} \right) + b = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\kappa} \text{Ln} \left(\frac{(B^P)^2 - (A^P + \theta + 1)^2}{(B^P)^2 - (A^P + \theta)^2} \right) = b \Leftrightarrow \frac{(B^P)^2 - (A^P + \theta + 1)^2}{(B^P)^2 - (A^P + \theta)^2} = e^{\kappa b} \Leftrightarrow$$

$$(B^P)^2 - (A^P + \theta + 1)^2 = e^{\kappa b} [(B^P)^2 - (A^P + \theta)^2] \Leftrightarrow$$

$$(e^{\kappa b} - 1) \theta^2 + 2 [(e^{\kappa b} - 1) A^P - 1] \theta - [(B^P)^2 - (A^P)^2] (e^{\kappa b} - 1) - 2A^P - 1 = 0$$

Las dos soluciones de la ecuación anterior son:

$$\theta^{\pm} = -A^P \pm \frac{\sqrt{(B^P)^2 (e^{\kappa b} - 1)^2 + e^{\kappa b} - 1}}{(e^{\kappa b} - 1)}$$

Finalmente, con un simple aunque tedioso cálculo se puede demostrar que las restricciones sobre los parámetros descartan a θ^+ como solución, por lo que θ^- es el parámetro de Esscher.

EXPONENTE CARACTERÍSTICO EN EL MODELO VARIANCE GAMMA PARA LA TRANSFORMADA GENERALIZADA DE ESSCHER

El exponente característico libre de riesgo se puede calcular de acuerdo a lo que sigue:

$$\begin{aligned} \psi^Q(u) &= -\frac{1}{2} \sigma^2 u^2 - iu \left[\frac{1}{2} \sigma^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} e^{\varphi(x)} (e^x - 1) \nu^P(dx) \right] + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) e^{\varphi(x)} \nu^P(dx) = \\ &\quad -iu \int_{\mathbb{R}} e^{\varphi(x)} (e^x - 1) \nu^P(dx) + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) e^{\varphi(x)} \nu^P(dx) \end{aligned}$$

Esta última igualdad debido a que, como se dijo, en este modelo $\sigma^2 \equiv 0$. Entonces, para este caso, el exponente característico resulta:

$$\psi^Q(u) = iu \int_{-\infty}^0 e^{\theta x} (e^x - 1) \frac{1}{\kappa x} e^{(A^P + B^P)x} dx - iu \int_0^{+\infty} e^{\theta x} (e^x - 1) \frac{1}{\kappa x} e^{(A^P - B^P)x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{-\infty}^0 (e^{iux} - 1) e^{\theta x} \frac{1}{\kappa x} e^{(A^P+B^P)x} dx + \int_0^{+\infty} (e^{iux} - 1) e^{\theta x} \frac{1}{\kappa x} e^{(A^P-B^P)x} dx = \\
&= iu \left(\frac{\text{Ln}(A^P + B^P + \theta + 1) - \text{Ln}(A^P + B^P + \theta)}{k} + \frac{\text{Ln}(B^P - A^P - \theta - 1) - \text{Ln}(B^P - A^P - \theta)}{k} \right) \\
&\quad - \left(\frac{\text{Ln}(A^P + B^P + \theta + iu) - \text{Ln}(A^P + B^P + \theta)}{k} + \frac{\text{Ln}(B^P - A^P - \theta - iu) - \text{Ln}(B^P - A^P - \theta)}{k} \right) = \\
&= \frac{1}{k} \left[iu \text{Ln} \left(\frac{(A^P + B^P + \theta + 1)(B^P - A^P - \theta - 1)}{(A^P + B^P + \theta)(B^P - A^P - \theta)} \right) - \text{Ln} \left(\frac{(A^P + B^P + \theta + iu)(B^P - A^P - \theta - iu)}{(A^P + B^P + \theta)(B^P - A^P - \theta)} \right) \right] \\
&\quad = -\frac{1}{k} \text{Ln} \left(1 - \frac{2i(A^P + \theta)}{(B^P)^2 - (A^P + \theta)^2} u + \frac{1}{(B^P)^2 - (A^P + \theta)^2} u^2 \right) \\
&\quad \quad + \frac{1}{k} \text{Ln} \left(\frac{(B^P)^2 - (A^P + \theta + 1)^2}{(B^P)^2 - (A^P + \theta)^2} \right) iu
\end{aligned}$$

El primer término de la última igualdad es el exponente característico de un modelo Variance Gamma donde el parámetro B^Q permanece igual al parámetro histórico B^P y A^P cambia por $A^Q = (A^P + \theta)$, **siendo θ el valor hallado para que se cumpla la condición de martingala**. El segundo término es el drift del proceso el cual fue establecido de modo que cumpla el Teorema de las probabilidades equivalentes.

En la formulación más amplia los parámetros cumplen las siguientes igualdades:

- $\kappa^Q = \kappa^P$
- $\frac{\mu^P}{(\sigma^P)^2} + \theta = A^P + \theta = A^Q = \frac{\mu^Q}{(\sigma^Q)^2}$
- $\frac{\sqrt{(\mu^P)^2 + 2(\sigma^P)^2/\kappa^P}}{(\sigma^P)^2} = B^P = B^Q = \frac{\sqrt{(\mu^Q)^2 + 2(\sigma^Q)^2/\kappa^Q}}{(\sigma^Q)^2}$

De acuerdo a ello la equivalencia es la siguiente:

- $\kappa^Q = \kappa^P$
- $\sigma^Q = \sqrt{\frac{2}{\kappa((B^Q)^2 - (A^Q)^2)}}$
- $\mu^Q = \frac{2A^Q}{\kappa((B^Q)^2 - (A^Q)^2)}$

ii) SEGUNDA PROPUESTA DE GENERALIZACIÓN ($\varphi(x) = \theta_1 x I_{\{x < 0\}} + \theta_2 x I_{\{x \geq 0\}}$)

La condición de martingala se formula específicamente para el modelo Variance Gamma y la función $\varphi(x) = \theta_1 x I_{\{x < 0\}} + \theta_2 x I_{\{x \geq 0\}}$ del siguiente modo:

$$\int_{\mathcal{R}} [e^{\theta_1 x I_{\{x < 0\}} + \theta_2 x I_{\{x \geq 0\}}} (e^x - 1) - x I_{\{|x| \leq 1\}}] \frac{1}{\kappa |x|} e^{A^P x - B^P |x|} (dx) + \gamma^P = 0$$

La integral anterior es convergente si y sólo si se cumplen las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} -(A^P + B^P) < \theta_1 \\ \theta_2 < B^P - A^P - 1 \end{cases}$$

Aplicando los cálculos **13, 14 y 15** del Anexo la condición de martingala se puede expresar del siguiente modo:

$$\int_{-\infty}^0 e^{\theta_1 x} (e^x - 1) \frac{1}{\kappa x} e^{(A^P + B^P)x} dx + \int_0^{+\infty} e^{\theta_2 x} (e^x - 1) \frac{1}{\kappa x} e^{(A^P - B^P)x} dx + b = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{k} \text{Ln} \left(\frac{(A^P + B^P + \theta_1 + 1)(B^P - A^P - \theta_2 - 1)}{(A^P + B^P + \theta_1)(B^P - A^P - \theta_2)} \right) = b$$

donde $b = \gamma - \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{I}_{\{|x| \leq 1\}} \frac{1}{\kappa |x|} e^{Ax - B|x|} (dx) = \gamma - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{e^{-(A+B)} - 1}{(A+B)} + \frac{e^{(A-B)} - 1}{(A-B)} \right)$.

De acuerdo a lo anterior resulta que:

$$\theta_1 = -(A^P + B^P) + \frac{(B^P - A^P - \theta_2 - 1)}{(B^P - A^P - \theta_2 - 1) - e^{\kappa b} (B^P - A^P - \theta_2)}$$

EXPONENTE CARACTERÍSTICO EN EL MODELO VARIANCE GAMMA PARA

$$\varphi(x) = \theta_1 x \mathbf{I}_{\{x < 0\}} + \theta_2 x \mathbf{I}_{\{x \geq 0\}}$$

El exponente característico libre de riesgo en este caso se puede calcular del modo siguiente:

$$\psi^Q(u) =$$

$$iu \int_{-\infty}^0 e^{\theta_1 x} (e^x - 1) \frac{1}{\kappa x} e^{(A^P + B^P)x} dx - iu \int_0^{+\infty} e^{\theta_2 x} (e^x - 1) \frac{1}{\kappa x} e^{(A^P - B^P)x} dx -$$

$$\int_{-\infty}^0 (e^{iux} - 1) e^{\theta_1 x} \frac{1}{\kappa x} e^{(A^P + B^P)x} dx + \int_0^{+\infty} (e^{iux} - 1) e^{\theta_2 x} \frac{1}{\kappa x} e^{(A^P - B^P)x} dx =$$

$$iu \left(\frac{\text{Ln}(A^P + B^P + \theta_1 + 1) - \text{Ln}(A^P + B^P + \theta_1)}{k} + \frac{\text{Ln}(B^P - A^P - \theta_2 - 1) - \text{Ln}(B^P - A^P - \theta_2)}{k} \right)$$

$$- \left(\frac{\text{Ln}(A^P + B^P + \theta_1 + iu) - \text{Ln}(A^P + B^P + \theta_1)}{k} + \frac{\text{Ln}(B^P - A^P - \theta_2 - iu) - \text{Ln}(B^P - A^P - \theta_2)}{k} \right)$$

$$= \frac{1}{k} \left[iu \text{Ln} \left(\frac{(A^P + B^P + \theta_1 + 1)(B^P - A^P - \theta_2 - 1)}{(A^P + B^P + \theta_1)(B^P - A^P - \theta_2)} \right) - \text{Ln} \left(\frac{(A^P + B^P + \theta_1 + iu)(B^P - A^P - \theta_2 - iu)}{(A^P + B^P + \theta_1)(B^P - A^P - \theta_2)} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{k} \text{Ln} \left(1 - \frac{2i \left(A^P + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)}{\left(B^P + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)^2 - \left(A^P + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)^2} u + \frac{1}{\left(B^P + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)^2 - \left(A^P + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)^2} u^2 \right)$$

$$+ \frac{1}{k} \text{Ln} \left(\frac{(A^P + B^P + \theta_1 + 1)(B^P - A^P - \theta_2 - 1)}{(A^P + B^P + \theta_1)(B^P - A^P - \theta_2)} \right) iu$$

El primer término de esta última igualdad es el exponente característico de un modelo Variance Gamma con:

- $A^Q = A^P + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$
- $B^Q = B^P + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$
- $\theta_1 = -(A^P + B^P) + \frac{(B^P - A^P - \theta_2 - 1)}{(B^P - A^P - \theta_2 - 1) - e^{\kappa b} (B^P - A^P - \theta_2)}$

El segundo término es el drift del proceso el cual fue establecido de modo que cumpla el Teorema de las probabilidades equivalentes.

En la formulación más amplia los parámetros cumplen las siguientes igualdades:

- $\kappa^Q = \kappa^P$
- $\frac{\mu^P}{(\sigma^P)^2} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = A^P + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = A^Q = \frac{\mu^Q}{(\sigma^Q)^2}$
- $\frac{\sqrt{(\mu^P)^2 + 2(\sigma^P)^2/\kappa^P}}{(\sigma^P)^2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = B^P + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = B^Q = \frac{\sqrt{(\mu^Q)^2 + 2(\sigma^Q)^2/\kappa^Q}}{(\sigma^Q)^2}$

De acuerdo a ello la equivalencia es la misma que para el caso anterior²²:

- $\kappa^Q = \kappa^P$
- $\sigma^Q = \sqrt{\frac{2}{\kappa((B^Q)^2 - (A^Q)^2)}}$
- $\mu^Q = \frac{2 A^Q}{\kappa((B^Q)^2 - (A^Q)^2)}$

²² Salvo el cambio de los valores de A^Q y B^Q .

4 Ilustración del Método para el Índice S&P 500

4.1 TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER PARA EL CÁLCULO DE PRECIOS DE OPCIONES

Contrariamente al caso clásico con la fórmula de Black-Scholes, en los modelos Lévy-exponenciales no existen fórmulas explícitas para precios de opciones call a causa de que *la densidad de un proceso de Lévy es típicamente no conocida en forma cerrada*.

Sin embargo, la función característica de esta densidad puede, en general, ser expresada en términos de funciones elementales para la mayoría de los procesos de Lévy aplicados en la literatura. Esto ha llevado al desarrollo de los métodos de valuación de opciones basados en la transformada de Fourier para modelos Lévy-exponenciales. Para estos métodos, si bien se necesita evaluar una transformada de Fourier numéricamente, como éstos, simultáneamente, dan precios de opciones para un rango de strikes y la transformada de Fourier puede ser eficientemente calculada con el algoritmo llamado FFT, la complejidad total del método es comparable al generado por la fórmula de Black-Scholes.

Existen básicamente dos métodos para la valuación de opciones basados en la transformada de Fourier. El primero debido a Carr y Madan es fácil de implementar pero tiene bajas tasas de convergencia. El segundo, debido a Lewis, converge más rápido pero necesita una decisión inteligente que hace más delicada la producción de una implementación robusta automática.

Recordemos que la transformada de Fourier de una función f se define como:

$$\mathcal{F}f(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivx} f(x) dx$$

Usualmente v es real, pero también puede tomar valores complejos.

La inversa de la transformada de Fourier está dada por la fórmula:

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivx} f(v) dv$$

Recordemos también que para $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f$, aunque funciona también en otros casos.

En lo que sigue detallaremos el método de Carr y Madan, el que posteriormente será aplicado a los datos propuestos.

Asumiremos para ello que $S_0 = 1$, esto es, que en tiempo 0 todos los precios están expresados en unidades del subyacente y notaremos $k = \ln K$ por logaritmo natural del strike (precio de ejercicio). Otra hipótesis necesaria de este método es que el precio del activo tiene momento de orden $1 + \alpha$, para cierto $\alpha > 0$:

$$\exists \alpha > 0: \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(s) e^{(1+\alpha)s} ds < \infty$$

donde ρ_T es la densidad de la probabilidad libre de riesgo. 0, en términos de la densidad de Lévy:

$$\exists \alpha > 0: \int_{|y| \geq 1} \nu(dy) e^{(1+\alpha)y} < \infty$$

Con esta hipótesis se puede probar la siguiente:

PROPOSICIÓN

Si $E(e^{uX_t}) < \infty$ para algún $u \in \mathbb{R}$, entonces $\left(\frac{e^{uX_t}}{E(e^{uX_t})}\right)_{t \in [0, \infty)}$ es martingala.

Demostración

$$\begin{aligned} E\left(\frac{e^{uX_t}}{E(e^{uX_t})} / \mathcal{F}_s\right) &= E\left(\frac{e^{u(X_t - X_s + X_s)}}{E(e^{u(X_t - X_s + X_s)})} / \mathcal{F}_s\right) = E\left(\frac{e^{u(X_t - X_s)} e^{uX_s}}{E(e^{u(X_t - X_s)}) E(e^{uX_s})} / \mathcal{F}_s\right) \\ &= \frac{E(e^{u(X_t - X_s)} / \mathcal{F}_s) E(e^{uX_s} / \mathcal{F}_s)}{E(e^{u(X_t - X_s)}) E(e^{uX_s})} = \frac{E(e^{uX_s} / \mathcal{F}_s)}{E(e^{uX_s})} = \frac{e^{uX_s}}{E(e^{uX_s})} \end{aligned}$$

Las igualdades anteriores se cumplen por la independencia entre $(X_t - X_s)$ y X_s para $s < t$ y la medibilidad de X_s respecto de \mathcal{F}_s .

Por lo tanto, para $u \leq 1 + \alpha$ se satisface la hipótesis de la proposición y de acuerdo a ello, $\left(\frac{e^{uX_t}}{E(e^{uX_t})}\right)_{t \in [0, \infty)}$ es martingala.

En particular para $u = 1$, $\left(\frac{e^{X_t}}{E(e^{X_t})}\right)_{t \in [0, \infty)}$ es martingala con $E\left(\frac{e^{X_t}}{E(e^{X_t})}\right) = E\left(\frac{e^{X_0}}{E(e^{X_0})}\right) = 1$

Además, si $E(e^{X_t}) = 1, \forall t \Rightarrow (e^{X_t})_{t \in [0, \infty)}$ es martingala y en ese caso:

$$E(e^{X_t}) = \Phi_X(-i) = 1 \text{ ó equivalentemente } \Psi_X(-i) = 0$$

Estas hipótesis son satisfechas en la mayoría de los modelos que se utilizan para modelar activos financieros imponiendo una condición en el decaimiento exponencial para saltos positivos (saltos negativos no afectan).

DEDUCCIÓN DEL PRECIO DE UNA OPCIÓN CALL PARA UN RANGO DE STRIKES APLICANDO LA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

Sea $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ proceso de los rendimientos logarítmicos descontados por la tasa libre de riesgo. El precio de una opción call puede ser expresada en términos del strike del siguiente modo:

$$C(k) = e^{-rT} E[(S_T - K)^+] = e^{-rT} E[(e^{rT+X_T} - K)^+] = e^{-rT} E\left[\left(e^{rT+X_T} - e^k\right)^+\right]$$

Quisiéramos expresar la transformada de Fourier del precio en función del strike $C(k)$ en términos de la función característica $\Phi_T(v)$ de X_T para luego hallar los precios de opciones call para un rango de strikes invirtiendo la transformada de Fourier.

Lamentablemente no podemos realizar esto directamente porque $C(k)$ no es integrable²³. La idea clave para solucionar este problema es calcular la transformada de Fourier para un valor de la opción modificado, esto es, por ejemplo para:

$$z_T(k) = e^{-rT} E \left[(e^{rT+X_T} - e^k)^+ \right] - (1 - e^{k-rT})^+$$

siendo su transformada de Fourier:

$$\zeta_T(v) = \mathcal{F}z_T(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} z_T(k) dk$$

Esta función puede ser expresada en términos de la función característica de X_T de acuerdo al razonamiento que sigue. En primer lugar:

$$\begin{aligned} z_T(k) &= e^{-rT} E[(e^{rT+X_T} - e^k)^+] - (1 - e^{k-rT})^+ \\ &= e^{-rT} E[(e^{rT+X_T} - e^k) I_{\{rT+X_T \leq k\}}] - (1 - e^{k-rT}) I_{\{k \leq rT\}} = \end{aligned}$$

Entonces como $(e^{X_t})_{t \in [0, \infty)}$ es martingala y $E(e^{X_T}) = E(e^{X_0}) = E(S_0) = 1$:

$$\begin{aligned} &= e^{-rT} E[(e^{rT+X_T} - e^k) I_{\{rT+X_T \leq k\}}] - E[(e^{X_T} - e^{k-rT}) I_{\{k \leq rT\}}] \\ &= e^{-rT} E[(e^{rT+X_T} - e^k) I_{\{rT+X_T \leq k\}}] - e^{-rT} E[(e^{rT+X_T} - e^k) I_{\{k \leq rT\}}] \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{rT+x} - e^k) (I_{\{rT+X_T \leq k\}} - I_{\{k \leq rT\}}) \rho_T(x) dx \end{aligned}$$

El intercambio de integrales es posible debido a la condición de hipótesis:

i) para $x < 0$, integrando respecto de k :

$$\int_{rT+x}^{rT} |e^{rT+x} - e^k| dk = \int_{rT+x}^{rT} (e^k - e^{rT+x}) dk = (e^k - e^{rT+x}k) \Big|_{rT+x}^{rT} \leq (e^{rT} - e^{rT+x})$$

Al multiplicar esta última expresión por la función de densidad de X_T , la resultante es integrable respecto de x .

ii) para $x \geq 0$:

$$\int_{rT}^{rT+x} |e^{rT+x} - e^k| dk = (e^{rT+x}k - e^k) \Big|_{rT}^{rT+x} \leq e^{rT+x} x I_{\{x > 0\}}$$

De igual modo, cuando se multiplica esta última expresión por la función de densidad de X_T , resulta ser integrable respecto de x (observar que es para este resultado que se necesita la finitud de un momento exponencial mayor que 1).

²³ Si se cumplen las condiciones pág. 98, proposición 3.18. de [8]: $\lim_{k \rightarrow -\infty} C(k) = E(e^{X_t}) = E(e^{X_0}) = 1$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\zeta_T(v) &= \mathcal{F}z_T(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} z_T(k) dk = \\
&= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} (e^{rT+x} - e^k) (I_{\{rT+X_T \leq k\}} - I_{\{k \leq rT\}}) \rho_T(x) dx = \\
&= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(x) dx \int_{x+rT}^{rT} e^{ivk} (e^k - e^{rT+x}) dk = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{ivrT} (1 - e^x)}{iv + 1} - \frac{e^{ivrT+x}}{iv(iv + 1)} + \frac{e^{(iv+1)x+ivrT}}{iv(iv + 1)} \right) \rho_T(x) dx
\end{aligned}$$

El primer término entre paréntesis desaparece debido a la condición de martingala y operando obtenemos:

$$\begin{aligned}
\zeta_T(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{e^{ivrT+x}}{iv(iv + 1)} + \frac{e^{(iv+1)x+ivrT}}{iv(iv + 1)} \right) \rho_T(x) dx = \\
&= \frac{e^{ivrT}}{iv(iv + 1)} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ivx+x} - e^x) \rho_T(x) dx = \frac{e^{ivrT}}{iv(iv + 1)} [\Phi_T(v - i) - \Phi_T(-i)] = \\
&= \frac{e^{ivrT}}{iv(iv + 1)} [\Phi_T(v - i) - \Phi_T(-i)] = \frac{e^{ivrT}}{iv(iv + 1)} [\Phi_T(v - i) - 1]
\end{aligned}$$

Debido a la condición de hipótesis el numerador resulta una función analítica (es igual a cero para $v = 0$) y entonces $\zeta_T(v)$ tiene un límite finito para $v \rightarrow 0$.

Finalmente, el precio de la opción puede ser hallado invirtiendo la transformada de Fourier y realizando algún cálculo adicional:

$$\begin{aligned}
z_T(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivk} \zeta_T(v) dv \\
C(k) &= z_T(k) + (1 - e^{k-rT})^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivk} \zeta_T(v) dv + (1 - e^{k-rT})^+
\end{aligned}$$

Nota: aunque para derivar la fórmula se necesita la condición de hipótesis nótese que no se necesita el valor exacto de α para realizar el cálculo, lo que hace que el método sea fácil de implementar.

El precio a pagar por ello es una lenta convergencia del algoritmo: como $\Phi_T(z) \rightarrow 0$ cuando $\Re z \rightarrow \infty$, $\zeta_T(v)$ es equivalente a $|v|^{-2}$ en el infinito, el error de truncado en la evaluación numérica de la integral -de menos a más infinito- es importante. Esta lenta convergencia ocurre porque el valor adicionado a $C(k)$ no es suficientemente liso y por ello la transformada de Fourier no decae suficientemente rápido en el infinito.

Para la mayoría de los modelos la convergencia puede ser drásticamente mejorada reemplazando el valor del tiempo por una función lisa que dependa del strike. Siguiendo a Cont y Tankov, en vez de sustraer el valor intrínseco de la opción (que es no diferenciable) respecto de su precio, es recomendable extraer el precio de

una opción call valuada según Black-Scholes con una volatilidad adecuada. La función resultante es, a la vez, integrable y lisa:

$$\tilde{z}_T(k) = e^{-rT} E[(e^{rT+X_T} - e^k)^+] - C_{BS}^\sigma(k)$$

donde $C_{BS}^\sigma(k)$ es el precio, según Black-Scholes, de una opción call con una volatilidad del activo subyacente igual a σ y logaritmo del valor de ejercicio igual a k . Con igual razonamiento que el expuesto arriba, se puede deducir que:

$$\tilde{\zeta}_T(v) = \frac{e^{ivrT}}{iv(iv+1)} [\Phi_T(v-i) - \Phi_T^\sigma(v-i)]$$

$$\text{con } \Phi_T^\sigma(v) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 T}{2} (v^2 + iv)\right)$$

Como para la mayor parte de los modelos usados habitualmente la función característica decae más rápidamente que cualquier potencia de su argumento en el infinito (no es cierto para el modelo variance gamma), esto implica que esta última expresión decae más rápido que cualquier potencia de v cuando $\Re z \rightarrow \infty$ y la integral de la inversa de la transformada de Fourier converge muy rápido.

4.2 APLICACIÓN AL MODELO DE SALTOS-DIFUSIÓN DE MERTON

(En este numeral se utilizó exclusivamente el software libre: R Development Core Team (2010). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.)

Como se sabe, la diferencia de los logaritmos de los precios en un proceso de difusión Black-Scholes se modela mediante la distribución normal. Ello no ocurre así en la realidad y de allí la necesidad de apelar a otros modelos más generales como los modelos de saltos-difusión. La diferencia de los logaritmos de los precios del Índice S&P 500 para datos desde el 01/01/04 al 31/12/07, no resultan normales de acuerdo a las salidas de los tests aplicados con el software indicado, paquete “**nortest**”²⁴:

```
Anderson-Darling normality test
data: dlbid
A = 5.8108, p-value = 2.611e-14
Cramer-von Mises normality test
data: dlbid
W = 1.0946, p-value = 7.59e-10
Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test
data: dlbid
D = 0.0632, p-value = 3.731e-10
Pearson chi-square normality test
data: dlbid
P = 87.6806, p-value = 8.247e-08
Shapiro-Francia normality test
data: dlbid
W = 0.9768, p-value = 1.444e-10
```

²⁴ Juergen Gross (2006). Nortest: Tests for Normality. R package version 1.0.

En el modelo de Merton, de acuerdo a lo expuesto anteriormente, se asume que los saltos en la diferencia de los logaritmos de los precios poseen una distribución normal: $Y_i \sim N(\mu, \delta^2)$. Considerando este supuesto y la parte del proceso que se corresponde con una difusión (con drift γ y desviación estándar σ) es posible establecer la densidad de X_t :

$$p_t(x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k \exp\left(-\frac{(x - \gamma t - k\mu)^2}{2(\sigma^2 t + k\delta^2)}\right)}{k! \sqrt{2\pi(\sigma^2 t + k\delta^2)}}$$

Siguiendo a Cont y Tankov²⁵ o a Peter Honoré²⁶ esta densidad se puede aproximar para los modelos de salto-difusión y particularmente en el modelo de Merton, en pequeños intervalos de tiempo Δ , por:

$$p_{\Delta}(x) \cong \lambda \Delta f_1(x) + (1 - \lambda \Delta) f_0(x) \quad (1)$$

donde:

- f_0 es la densidad correspondiente a situaciones “normales”, esto es, con distribución $N(\gamma, \sigma^2)$.
- $f_1 = f_0 * \nu_0$ es la convolución de f_0 con la distribución de la longitud de los saltos $\nu_0 \sim N(\mu, \delta^2)$.
- $\lambda \Delta$ indica la frecuencia esperada de la cantidad de saltos en un intervalo de tiempo Δ

Si se aplica a $\Delta=1$ día resulta:

$$p_{\Delta}(x) \cong \lambda \Delta \frac{\exp\left(-\frac{(x - \gamma - \mu)^2}{2(\sigma^2 + \delta^2)}\right)}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + \delta^2)}} + (1 - \lambda \Delta) \frac{\exp\left(-\frac{(x - \gamma)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

Esto se puede interpretar como la mezcla de dos normales, una indicando la distribución de los rendimientos cuando en un día no ocurrió ningún salto y la otra en el caso de que haya ocurrido exactamente un salto. Las probabilidades que implican la ocurrencia de dos o más saltos en un mismo día son despreciadas en la aproximación.

4.2.1 ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO BAJO LA PROBABILIDAD HISTÓRICA

La estimación de los cinco parámetros utilizados en el modelo se llevaron a cabo utilizando los siguientes métodos:

- a) **Método Generalizado de los Momentos:** este método, debido a su propiedad de consistencia, sólo requiere que las condiciones en sus momentos sean correctamente especificadas. El GMM²⁷ es robusto respecto a la inexacta especificación de la distribución de los datos pagando con menos eficiencia dicha ventaja. Además, es fácil de implementar debido a que las funciones

²⁵ Ref. [8], pág 214 y siguientes.

²⁶ Ref. [18], pág 4, version revisada Noviembre 1998.

²⁷ Por las siglas en inglés: Generalized Method of Moments

características de las distribuciones involucradas son conocidas en formas cerradas y por ello son conocidos también sus momentos.

En el Modelo de Merton las estadísticas de los cinco primeros momentos son:

- i) $E(X_t) = (\lambda\mu + \gamma) t$
- ii) $V(X_t) = (\sigma^2 + \lambda\delta^2 + \lambda\mu^2) t$
- iii) $E(X_t^3) = \lambda (3\delta^2\mu + \mu^3) t$
- iv) $E(X_t^4) = \lambda (3\delta^4 + 6\delta^2\mu^2 + \mu^4) t$
- v) $E(X_t^5) = \lambda (15\delta^4\mu + 10\delta^2\mu^3 + \mu^5) t$

Utilizando el paquete “gmm”²⁸ de R y aplicando este método a la diferencia de los logaritmos de los precios del Índice S&P 500 descontada la tasa libre de riesgo, se obtuvieron las siguientes estimaciones:

λ	μ	δ	γ	σ
0.04757536	-0.00714719	0.02267298	0.00056517	0.01523073

b) **Método de Máxima Verosimilitud:** es el método más común para estimar los parámetros de un modelo de distribución de los retornos en finanzas. De acuerdo al mismo, se eligen los parámetros θ que maximizan la función de verosimilitud del modelo o el logaritmo de ella para los datos observados:

$$\text{máx}_{\theta} \prod_{t=1}^N f(X_t; \theta) \quad \text{ó} \quad \text{máx}_{\theta} \sum_{t=1}^N \text{Ln}(f(X_t; \theta))$$

Ocurre que, en general, los funcionales $f(\cdot; \theta)$ de un conjunto importante de procesos de Levy no son conocidos en forma cerrada y por ello, tanto estos como las funciones a maximizar deber ser calculadas numéricamente, lo que agrega una complejidad computacional importante al método. Adicionalmente, la función de verosimilitud o su logaritmo no siempre es –la mayor parte de las veces no lo es– una función cóncava en los parámetros. Ello implica la posible existencia de múltiples máximos locales por lo que, conjuntamente con la cantidad de dimensiones del espacio paramétrico, generan una complejidad que está lejos de ser trivial y pueden hacer que los algoritmos –usualmente basados en métodos de gradiente descendente– no converjan al máximo absoluto.

Más importante aún que la observación anterior resulta el hecho de que **no es válida la utilización del Método de Máxima Verosimilitud estándar para el Modelo de Merton** e incluso para modelos más simples como los llamados Modelos Bernoulli de Saltos-Difusión²⁹. El argumento es fácil de comprender siguiendo a Kiefer y reparametrizando la fórmula (1):

$$p(x_i) = w f(x_i; m_1, s_1^2) + (1 - w) f(x_i; m_2, s_2^2)$$

²⁸ Pierre Chausse (2010). Computing Generalized Method of Moments and Generalized Empirical Likelihood with R. Journal of Statistical Software, 34(11), 1-35. URL <http://www.jstatsoft.org/v34/i11/>.

²⁹ Ref [18].

Eligiendo $\hat{m}_1 = x_i$ para algún i , si \hat{s}_1 tiende a cero entonces $p(x_i)$ tiende a ∞ . En las otras observaciones eligiendo fijos \hat{m}_2 y \hat{s}_2 , el segundo miembro de la igualdad queda acotado inferiormente por un número distinto de cero con lo que se asegura que la verosimilitud diverja.

Sin embargo, este inconveniente puede ser fácilmente levantado con la restricción de las desviaciones a un compacto³⁰. Similar consecuencia también es posible lograr estableciendo un valor fijo para la razón de volatilidades. Una vez ejecutado alguno de los procedimientos citados, se aplica Máxima Verosimilitud en la forma habitual.

En lo que a este último método refiere, cabe destacar que existe una gran cantidad de algoritmos que tienen como objetivo la maximización de funciones en general y del logaritmo de la verosimilitud en particular con ventajas y desventajas que le son propias. Algunos de ellos son:

- **NR**, por Newton-Raphson. Se basa en la aproximación de una función por un polinomio de grado 2 de acuerdo a la expansión dada por el Teorema de Taylor.
- **BFGS**, por Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno. Es un método derivado de los de Newton pero que no utiliza la matriz Hessiana de las derivadas segundas de la función.
- **NM**, por Nelder-Mead. Es un algoritmo numérico que permite encontrar una solución óptima de un problema de maximización o minimización buscando en los vértices de un polígono³¹.
- **BHHH**, por Berndt-Hall-Hall-Hausman. Es un algoritmo de optimización del tipo de los de tipo Gauss-Newton. Está basado en la relación estadística de que la matriz de covarianza del estimador es igual a la matriz de covarianza del gradiente de la función de verosimilitud.
- **SANN**, por simulated annealing o recorrido simulado. A diferencia de los algoritmos tradicionales que parten de un punto inicial el cual se va optimizando iterativamente hasta que no es posible mejora alguna, este método permite movimientos hacia soluciones peores controlando los escapes mediante una función de probabilidad que hará disminuir la probabilidad de esos movimientos hacia soluciones peores conforme avanza la búsqueda, quedando previsiblemente más cerca del óptimo global.

Se aplicaron los dos procedimientos citados arriba para lograr acotar la log-verosimilitud. El primero fue ejecutado utilizando la función logística³² y el segundo siguiendo el sugerido por P. Honoré. Posteriormente, utilizando el paquete "**maxLik**"³³ se aplicaron los algoritmos referidos a los datos con valor inicial –como primera opción– igual a la estimación de los parámetros por el

³⁰ A un intervalo cerrado que incluya valores razonables para dichos parámetros.

³¹ O simplex, un polígono de $N+1$ vértices contenido en un espacio de dimensión N .

³² Para lograr que un parámetro θ "viva" en un intervalo $[\theta_l, \theta_D]$, el mismo se puede reparametrizar en función de otro parámetro, digamos ξ , de la forma siguiente: $\theta = \theta_l + (\theta_D - \theta_l) l(\xi)$, siendo l la función logística.

³³ Ott Toomet <otoomet@ut.ee>, Arne Henningsen <arne.henningsen@googlemail.com>, with contributions from Spencer Graves and Yves Croissant (2010). maxLik: Maximum Likelihood Estimation. R package version 1.0-0. <http://CRAN.R-project.org/package=maxLik>.

método generalizado de los momentos. A continuación, empleando el mismo paquete, se tomaron distintos valores iniciales iguales al punto medio del intervalo especificado para el respectivo parámetro. Algunos resultados arrojaron problemas de convergencia del algoritmo, otras salidas valores fuera del espacio paramétrico teórico o con valores estadísticamente no significativos. No siendo este problema específico el objeto del presente trabajo, de entre los resultados aceptados como válidos se selecciona el siguiente de acuerdo al criterio del autor:

λ	μ	δ	γ	σ
0.03842416	- 0.002181616	0.01578651	0.0005563094	0.006697282

c) **Algoritmo E-M (Expectation-Maximitation):** es un método para la estimación de parámetros que utiliza Máxima Verosimilitud y donde el modelo empleado depende de variables no observadas. E-M es un algoritmo iterativo que alterna el cómputo de la esperanza del logaritmo de la Verosimilitud dada la distribución actual de la variable (paso E) con una etapa de maximización que computa los parámetros que maximizan la esperanza del logaritmo de la verosimilitud (paso M). Estos parámetros serán utilizados para determinar la distribución de la variable en el próximo E-escalón.

Aplicando este algoritmo a los datos utilizando el paquete “**mixtools**”³⁴ de R, resulta en salidas que serían incompatibles con el modelo teórico donde se espera que los saltos en el mismo sean eventos ocasionalmente raros.

```
summary of normalmixEM object:
      comp 1      comp 2
lambda 0.41216020 0.587839800
mu      0.00110467 -0.000560452
sigma   0.00363827 0.009317855
loglik at estimate: 3519.488>
```

De acuerdo a los resultados anteriores en adelante se aplicará en la ilustración del método para la calibración, la estimación por máxima verosimilitud calculada en b).

4.2.2 CALIBRACION DEL MODELO DE SALTOS-DIFUSIÓN DE MERTON PARA S&P 500

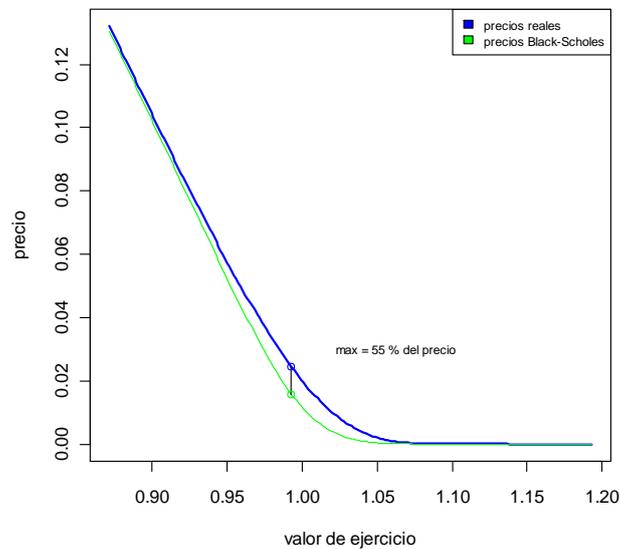
La calibración se aplica utilizando opciones call sobre el Índice S&P 500 con vencimiento 19/01/2008. Los datos corresponden a precios de compra promedio ponderados de fecha 02/01/2008 y por ello se valuarán con plazo igual a 12 días hábiles. El hecho de tomar un exiguo plazo de vencimiento para las opciones genera una mayor liquidez de estos derivados financieros y con ello un mejor ajuste a los precios de mercado.

En las figuras que siguen se grafican los precios de las opciones en comparación con los Precios teóricos valuados por la fórmula de Black-Scholes. Como se observa

³⁴ Tatiana Benaglia, Didier Chauveau, David R. Hunter, Derek Young (2009). mixtools: An R Package for Analyzing Finite Mixture Models. Journal of Statistical Software, 32(6), 1-29. URL <http://www.jstatsoft.org/v32/i06/>.

existe una importante diferencia entre los mismos ratificando una vez más, para el caso en particular, la necesidad de su valoración mediante modelos alternativos.

Precio de call sobre S&P 500 Venc. 19/01/08



En lo que sigue se realizará la calibración de tres modelos a efectos de su comparación. En todos los casos se utilizará el método de mínimos cuadrados ponderados de acuerdo a la conocida fórmula:

$$\arg \left\{ \min_{\theta} \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i (C_{i,\theta}^{\text{modelo}} - C_i^{\text{mercado}})^2 \right) \right\}$$

donde:

- $C_{i,\theta}^{\text{modelo}}$ es el precio teórico (dado por el modelo utilizado) de la opción call para un valor de ejercicio K_i , un plazo determinado y fijo T^{35} y cuyos parámetros están dados por el vector θ .
- C_i^{mercado} es el precio de mercado de la opción call para un valor de ejercicio K_i y un plazo determinado y fijo T .
- θ es el vector de parámetros del modelo³⁶.
- λ_i son los ponderadores del método de mínimos cuadrados³⁷.
- N es la cantidad de datos³⁸.

Se emplearán tres modelos para la valuación de los precios teóricos:

- 1) **B-S:** corresponde a la fórmula de Black-Scholes con parámetro libre σ . La estimación de este valor se correspondería con la volatilidad promedio ponderada que mejor ajusta a los precios de mercado. Este modelo se

³⁵ La calibración se efectúa en forma independiente para cada plazo.

³⁶ Como veremos a continuación este espacio tendrá dimensión 1 o 2 de acuerdo al modelo teórico utilizado.

³⁷ En nuestro ejemplo se utiliza como ponderadores una doble exponencial simétrica centrada en un valor de ejercicio igual a 1 y con factor de decaimiento de 0,98.

³⁸ En esta implementación $N=22001$, lo cual se logra utilizando splines cúbicos en la interpolación de los precios de mercado. Esto es necesario para la implementación mediante la transformada rápida de Fourier.

genera a efectos de su comparación con las propuestas de generalización del modelo de Esscher.

- 2) **Esscher 1:** corresponde a una primera generalización de Esscher aplicando el Teorema de las probabilidades equivalentes con $\varphi(x) = \theta x$ y η sin restricciones.
- 3) **Esscher 2:** corresponde a la segunda generalización de Esscher con $\varphi(x) = \theta_1 x I_{\{x < 0\}} + \theta_2 x I_{\{x \geq 0\}}$ y η sin restricciones.

Empleando, entonces, mínimos cuadrados ordinarios y la transformada rápida de Fourier para el cálculo de precios de opciones, se realizó la calibración utilizando las funciones “nls” (nonlinear least squares) y “fft” (fast fourier transform) del paquete “stats”³⁹ de R. Los resultados fueron los siguientes:

Call Vencimiento 19/01/08		
Modelo	Parámetros	Cálculo
Modelo B-S	σ	0.01380018
Modelo Esscher 1	θ	-98.566960
Modelo Esscher 2	θ_1	-98.61927
	θ_2	-444.06618

De las salidas anteriores se pueden extraer las conclusiones que siguen:

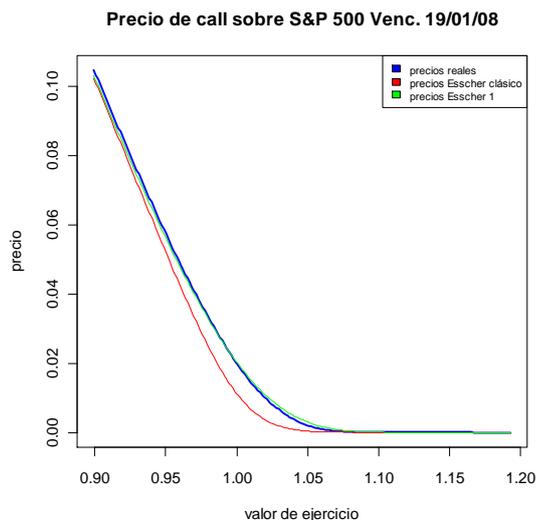
1. **La estimación de la volatilidad promedio implícita en los precios de las opciones es sensiblemente superior a la histórica, situación consistente con la conocida característica de “aversión al riesgo”.** En efecto, mientras que esta última se sitúa en el entorno de 0,76% diario (12,16% anual)⁴⁰, la implícita es del orden de 1,13% (18,08% anual).
2. Para el modelo de saltos-difusión de Merton la aplicación tradicional de la transformada de Esscher conjuntamente con la condición de martingala da como resultado $\theta = -10.60$. Sin embargo, **en las dos generalizaciones propuestas del modelo de Esscher las estimaciones del θ de los parámetros resultan sustancialmente inferiores a las anteriores** ratificando nuevamente la propiedad de “aversión al riesgo” citada en la observación anterior.

En la siguiente gráfica queda evidenciado este hecho⁴¹ así como una clara discrepancia entre los precios de mercado y los teóricos que arroja el modelo Esscher clásico:

³⁹ R Development Core Team (2010). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.

⁴⁰ Aplicando el modelo de difusión puro a los rendimientos logarítmicos del S&P 500 descontados por la probabilidad libre de riesgo se obtiene como resultado una volatilidad diaria igual a 0,007561819 siendo el drift estadísticamente no significativo.

⁴¹ Dado que precios teóricos inferiores del modelo Esscher clásico con respecto al modelo Esscher 1 implica menor riesgo implícito.



Gráfica comparativa de precios de mercado de opciones call y precios teóricos utilizando los modelos Esscher clásico ($\theta=-10.60$) y Esscher 1 ($\theta=-98.56696$)

Efectivamente, mientras que el componente de saltos de la probabilidad histórica en el modelo de Merton se distribuye $N(\mu = -0.002181616; \delta^2 = 0.01578651^2)$ con intensidad $\lambda = 0.03842416$ saltos por día, dicha componente, bajo la probabilidad libre de riesgo y aplicando Esscher clásico resulta $N(\mu + \theta\delta^2 = -0.0048241, \delta^2)$ con intensidad $\lambda e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\theta^2\delta^2} = 0.03987814$ saltos. Sin embargo, en la calibración de precios de opciones con vencimiento 19/01/08, el componente de saltos se distribuye $N(\mu + \theta\delta^2 = -0.026745872; \delta^2)$ con intensidad $\lambda e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\theta^2\delta^2} = 0.159865641$, *lo que implica que, la media de los saltos en esta probabilidad libre de riesgo es 12 veces la histórica mientras que su intensidad resulta 4 veces superior.*

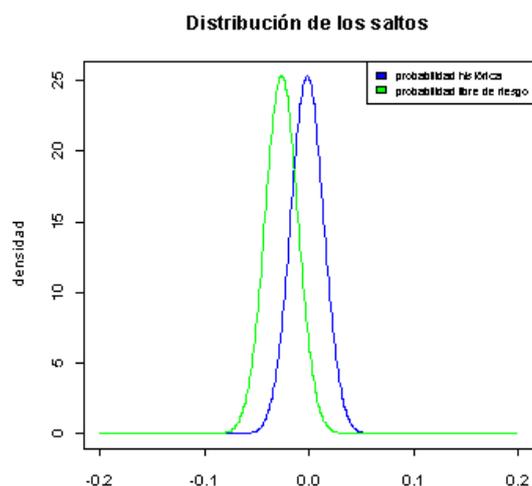


Ilustración de la distribución de los saltos en la probabilidad histórica y en la libre de riesgo

En cuanto a las propuestas de generalización de la transformada de Esscher, los resultados evidencian *la escasa diferencia entre los mismos para el ejemplo elegido, por lo que, de acuerdo a la regla de parsimonia se debería optar por el modelo más simple.* Esta exigua discrepancia queda particularmente evidenciada en la comparación entre las distribuciones de los saltos de los dos modelos:

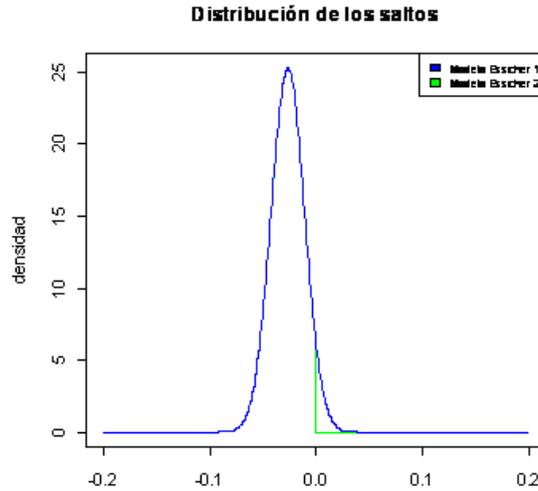
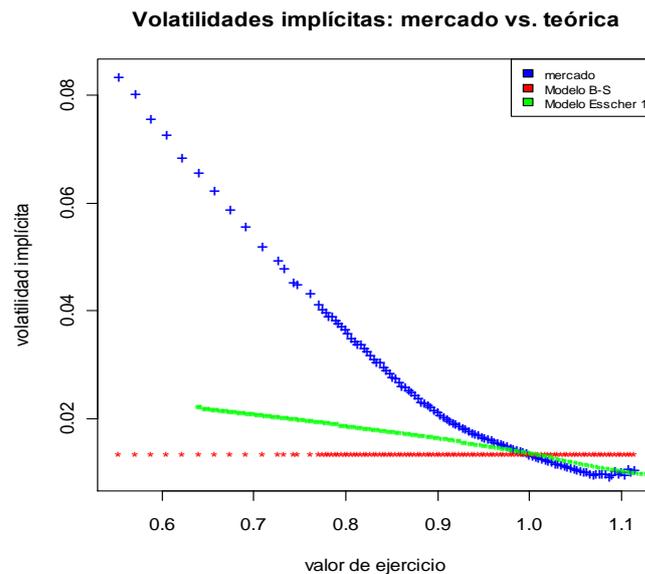


Ilustración de la distribución de los saltos en los modelos propuestos

Más en general, se podría concluir que el modelo Esscher 2 es apropiado cuando las distribuciones de los saltos están más o menos centradas en cero: caso contrario, como sucede en esta ilustración, una cola⁴² puede resultar escasamente relevante y por ello, el modelo Esscher 1 ser el más adecuado.

Un argumento adicional a favor del modelo con un solo parámetro es el hecho de ser extremadamente económico computacionalmente hablando. En efecto, mientras que en la estimación del parámetro del modelo Esscher 1 se emplean tan sólo unos segundos, la estimación de los parámetros del modelo Esscher 2 se miden en horas dado que, para el modelo de Merton, involucran cálculos numéricos de integrales para las cuales no existen fórmulas cerradas⁴³.

3. Sin embargo, cuando se observan las volatilidades implícitas, aún se aprecia una importante discrepancia entre los modelos teóricos y el mercado:



⁴² La cola positiva en nuestro caso, aunque podría ser la negativa en otras aplicaciones.

⁴³ Véase ecuaciones 9) y 10) del Anexo de cálculo.

4.3 APLICACIÓN AL MODELO VARIANCE GAMMA

(En este numeral se utilizó exclusivamente el software libre: R Development Core Team (2010). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.)

Contrariamente a lo que sucede en la mayoría de los modelos la densidad de un proceso Variance Gamma es conocida en forma cerrada. Está dado por la fórmula:

$$p_t(x) = a(c, \sigma, \mu, \kappa) e^{\left[\frac{\mu(x-c)}{\sigma^2}\right]} |x - c|^{1/\kappa - 1/2} K_{1/\kappa - 1/2} \left(\frac{|x-c| \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\kappa} + \mu^2}}{\sigma^2} \right)$$

$$\text{con: } a(c, \sigma, \mu, \kappa) = \frac{2}{\sigma \sqrt{2\pi} \kappa^{1/\kappa} \Gamma(1/\kappa)} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\kappa} + \mu^2}} \right)^{1/\kappa - 1/2}$$

K_ν es la función modificada de Bessel de tercer tipo de orden ν

Las estadísticas de los cuatro primeros momentos son:

- i) $E(X_t) = (\mu + c) t$
- ii) $V(X_t) = (\sigma^2 + \kappa\mu^2) t$
- iii) $E([X_t - E(X_t)]^3) = (2\mu^3\kappa^2 + 3\sigma^2\kappa\mu) t$
- iv) $E([X_t - E(X_t)]^4) = (3\sigma^4\kappa + 12\sigma^2\mu^2\kappa^2 + 6\mu^4\kappa^3) t$

La estimación de los cuatro parámetros utilizados se llevarán a cabo a continuación utilizando los Métodos de los Momentos y de Máxima Verosimilitud.

4.3.1. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO BAJO LA PROBABILIDAD HISTÓRICA

- a) **Método Generalizado de los Momentos:** la estimación se realiza utilizando el software R, paquete “**gmm**”⁴⁴, aplicado a la diferencia de los logaritmos de los precios del Índice S&P 500 descontada la tasa libre de riesgo, para los datos correspondientes al año 2007⁴⁵. Los resultados son los siguientes:

c	μ	σ	κ
-0.0015435	0.0014725	0.009786429	1.331000

- b) **Método de Máxima Verosimilitud:** se utilizaron los algoritmos disponibles en el software R, paquete “**Variance Gamma**”⁴⁶:

⁴⁴ Pierre Chausse (2010). Computing Generalized Method of Moments and Generalized Empirical Likelihood with R. Journal of Statistical Software, 34(11), 1-35. URL <http://www.jstatsoft.org/v34/i11/>.

⁴⁵ A diferencia que para el modelo de Merton donde se utilizaron los datos correspondientes a los años 2004-2007, para el caso Variance Gamma se ha preferido variar la cantidad de datos utilizados para la ilustración por considerarlo más adecuado a esta distribución. Simultáneamente y aunque no se expone en el presente trabajo, se realizaron los cálculos para la anterior situación: las conclusiones fueron similares a las que se exponen en esta ilustración.

⁴⁶ David Scott <d.scott@auckland.ac.nz> and Christine Yang Dong <c.dong@auckland.ac.nz> (2010). VarianceGamma: The Variance Gamma Distribution. R package version 0.3-0. <http://CRAN.R-project.org/package=VarianceGamma>.

- **BFGS**, ya descrito en ocasión de la estimación de los parámetros del modelo de Merton.
- **NM**, ya descrito en ocasión de la estimación de los parámetros del modelo de Merton.
- **NLM**, siglas en inglés de minimización no lineal. Busca el mínimo de una función utilizando un algoritmo del tipo de los de Newton. Si la función posee atributos como el gradiente o el hessiano ellos son usados en el cálculo; de otro modo, se utilizan derivadas numéricas.

Los valores iniciales –como primera opción– fueron iguales a la estimación de los parámetros por el método generalizado de los momentos. Posteriormente se utilizaron otros valores iniciales generados por algoritmos disponibles en el paquete citado. De las salidas enumeradas a continuación se expone la que arrojó un mayor valor para la verosimilitud:

c	μ	σ	κ
0.001054	-0.001161	0.011407	1.760642

4.3.2 CALIBRACION DEL MODELO VARIANCE GAMMA PARA S&P 500

La calibración se aplica a las mismas opciones call sobre el Índice S&P 500 con vencimiento 19/01/2008 a efectos de su comparación con los otros modelos explicitados.

Al igual que para el modelo de Merton se emplearán sus tres equivalentes para la valuación de los precios teóricos:

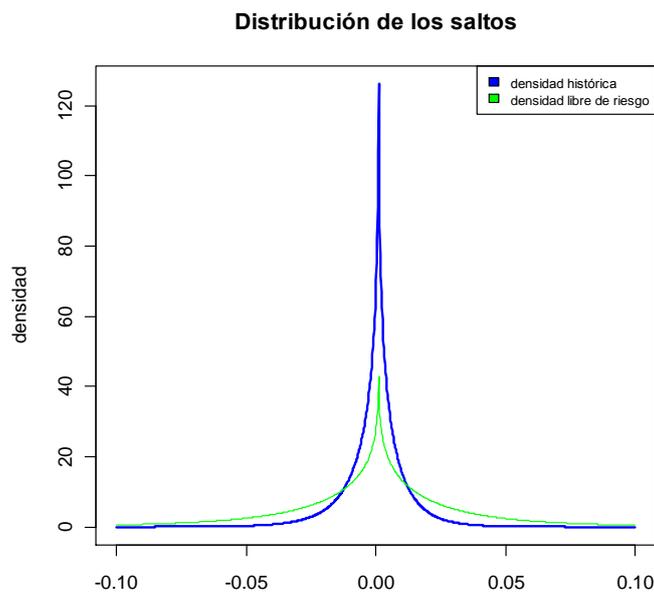
- 1) **B-S**: corresponde a la fórmula de Black-Scholes con parámetro libre σ . La estimación de este valor se correspondería con la volatilidad promedio ponderada que mejor ajusta a los precios de mercado. Este modelo se genera a efectos de su comparación con las propuestas de generalización del modelo de Esscher.
- 2) **Esscher 1**: debido a la carencia de la componente gaussiana no trivial, el caso del modelo Variance Gamma resulta igual al modelo Esscher clásico en el que no resta parámetro libre para la calibración: este simplemente se calcula.
- 3) **Esscher2**: corresponde a la generalización de Esscher con $\varphi(x) = \theta_1 x I_{\{x < 0\}} + \theta_2 x I_{\{x \geq 0\}}$ que, para el modelo Variance Gamma, conserva un solo parámetro libre para calibración.

De los procedimientos se obtuvieron los siguientes resultados:

Call Vencimiento 19/01/08		
Modelo	Parámetros	Cálculo
Modelo B-S	σ	0.01380018
Modelo Esscher 1	θ	0.3097551
Modelo Esscher 2	θ_1	-58.34262
	θ_2	73.75379

A partir de ello se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. El modelo de Esscher aplicado al Variance Gamma -Esscher 1- resulta en una distribución similar a la histórica. Mientras que los parámetros de esta última son: $c = 0.001054$, $\mu = -0.001161$, $\sigma = 0.011407$, $\kappa = 1.760642$, el de la primera es: $c = 0.001054$, $\mu = -0.001119998$, $\sigma = 0.01140345$, $\kappa = 1.760642$.
2. En cambio, al aplicar el modelo Esscher 2, la probabilidad libre de riesgo se diferencia notoriamente de la histórica en los parámetros no invariantes: $\mu = -0.001790698$, $\sigma = 0.03835932$.



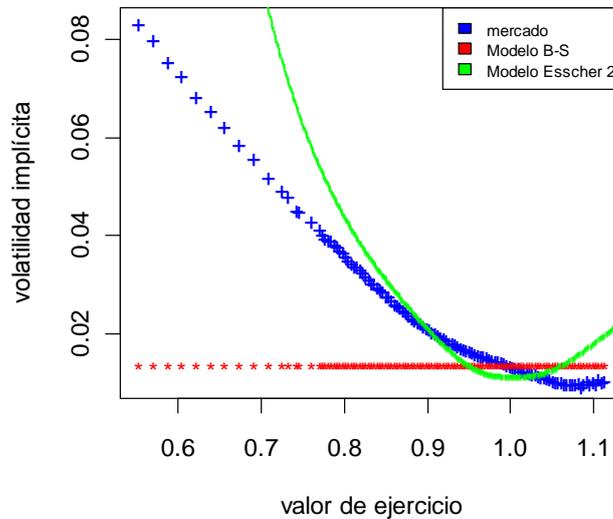
Las estadísticas de ambas distribuciones son las siguientes:

Estadísticas de las distribuciones		
	Histórica	Libre de Riesgo
Media	-0.000107	-0.000737
Varianza	0.000132	0.001477
Asimetría	-0.529575	-0.245787
Curtosis	5.469451	5.322226

Las mismas evidencian la característica de “aversión al riesgo” en la probabilidad calibrada, particularmente en relación a la media y varianza de la misma.

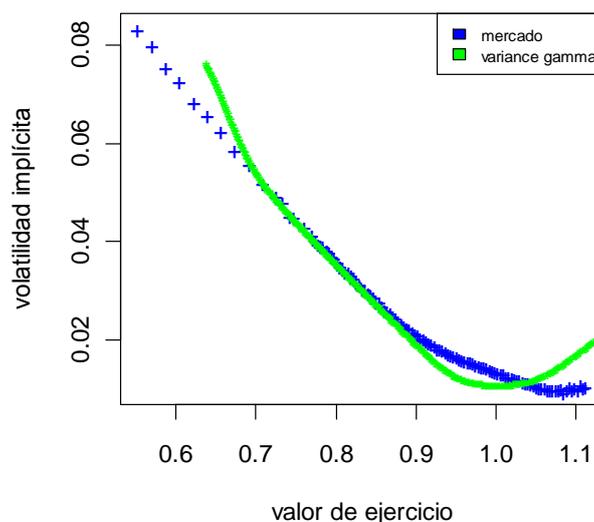
3. Si bien al observar las volatilidades implícitas, aún se aprecia discrepancia entre el modelo teórico y el mercado, la correspondiente al Modelo Esscher 2 reproduce la típica “mueca” (“smirk”) que caracteriza el gráfico de volatilidades implícitas de mercado.

Volatilidades implícitas: mercado vs. teórica



4. Resulta posible la calibración del modelo Variance Gamma en forma más ajustada al mercado que las explicitadas en los dos numerales anteriores. En efecto, para valores de los parámetros: $c = -0.005086$, $\mu = 0.000083$, $\sigma = 0.011356$, $\kappa = 1.760642$ la distribución consiguiente reproduce de mejor modo el gráfico de volatilidades implícitas como se observa en el gráfico que sigue. *Sin embargo, esta probabilidad no resulta absolutamente continua respecto de la histórica debido a que los parámetros de posición⁴⁷ no son coincidentes y por ello no cumplen con el Teorema 1 (de las probabilidades equivalentes).* Este fenómeno fue observado por primera vez por P. Carr, H. Geman, D. Madan y M. Yor en “*The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation*”⁴⁸

Volatilidades implícitas: mercado vs. teórica



⁴⁷ $c^{histórica} = 0.0001054 \neq -0.000147 = c^{calibrada}$

⁴⁸ Ref [7].

5 Conclusiones y perspectivas

La inexistencia de oportunidades de arbitraje es un supuesto habitual en la teoría financiera siendo conocida la equivalencia de este principio con la existencia de una medida de martingala equivalente a la probabilidad histórica.

La transformada clásica de Esscher es un procedimiento que postula una probabilidad libre de riesgo de forma que resulta equivalente a la histórica y es frecuentemente citada y utilizada para lograr el mencionado objetivo. Sin embargo, el desajuste que se observa entre los precios teóricos que se generan a partir de este método y los de mercado es notorio debido a la petición de principio que lo sustenta.

El núcleo de este trabajo consistió en la propuesta y la experimentación de dos generalizaciones paramétricas de la transformada de Esscher para los modelos de Merton y Variance Gamma. Los resultados fueron pobres en el caso de la primera modelización y más auspiciosos para el modelo Variance Gamma. En este último caso, si bien al observar las volatilidades implícitas aún se aprecia discrepancia entre el modelo teórico y el mercado, la correspondiente al Modelo Esscher 2 reproduce la típica “mueca” (“smirk”) que caracteriza el gráfico de volatilidades implícitas de mercado y aproxima razonablemente los precios de mercado para valores de ejercicio próximos al precio spot del subyacente.

En cuanto a las perspectivas de análisis existen dos vías principales a explorar:

- La primera refiere a la determinación del conjunto de información que se utilizará, por una parte, para la estimación de la probabilidad histórica y por otra, para la calibración de la medida libre de riesgo. Si bien parece bastante claro que la periodicidad de los datos sea diaria, no es tan evidente -al menos en lo referente a las prácticas habituales- la extensión y ventana temporales a aplicarse en la estimación ni la relación que las mismas debieran tener con la fecha de los precios de las opciones a emplearse en la calibración⁴⁹.
- La segunda vía a explorar está relacionada con la distribución utilizada para la modelización, particularmente de la probabilidad histórica. Desde el punto de vista estadístico el objetivo final es el no rechazo de la hipótesis nula en la prueba de bondad de ajuste. Hasta el presente esto no ha sido alcanzado siendo la frecuente la postulación de la distribución a ser aplicada en este caso e incluso en la calibración de la probabilidad libre de riesgo. Si bien se han logrado ciertos avances, en este campo existe aún mucho camino a recorrer.

⁴⁹ Como fue mencionado, para la ilustración del método propuesto se empleó, en la estimación de la probabilidad histórica, una ventana temporal de cuatro años (2004-2007) y el primer día hábil posterior a ésta (02/01/2008) como la fecha de los precios de las opciones a utilizarse en la calibración.

6 BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

- [1] L. Bachelier. Théorie de la spéculation, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 17 (1900), pág. 21-86.
- [2] D. Bates. The Skewness Premium: Option Pricing Under Asymmetric Processes (1996).
- [3] E. Baver. Variance Gamma Option Model (2003).
- [4] D. Belomestny, M. Reib. Spectral calibration of exponential Lévy models (2006).
- [5] F. Black, M. Scholes. *The pricing of Options and Corporate Liabilities*. Chicago Journals (1973).
- [6] P. Carr, D. Madan. *Option Valuation Using the Fast Fourier Transform* (1999).
- [7] P. Carr, H. Geman, D. Madan, M. Yor. *The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation*. Journal of Business 75 (2002).
- [8] R. Cont, P. Tankov. *Financial Modelling With Jump Processes* (2004).
- [9] R. Cont, P. Tankov. *Non-parametric calibration of jump-diffusion option pricing models*. Springer (2004).
- [10] F. Esscher. *On the Probability Function in the Collective Theory of Risk*. Skandinavisk Aktuarietidskrift 15 (1932).
- [11] J. Fajardo, E. Mordecki. *Duality and Derivative Pricing with Lévy Processes* (2003).
- [12] J. Fajardo, E. Mordecki. *Symmetry and Duality in Lévy Markets* (2005).
- [13] H. Föllmer, P. Imkeller. *Exponential of Lévy processes as a stock price – Arbitrage opportunities, completeness and derivatives valuation* (2006).
- [14] H. Gerber, E. Shiu. *Option pricing by Esscher Transforms*. Translation of Society of Actuaries, Vol. 46 (1994).
- [15] H. Gerber, E. Shiu. *Actuarial Approach to Option Pricing* (1999).
- [16] T. Goll, L. Rüschendorf. *Minimax and minimal distance martingale measures and their relationship to portfolio optimization* (2000).
- [17] P. Grandits, T. Rheinländer. *On The Minimal Entropy Martingale Measure* (2001).
- [18] P. Honoré. *Pitfalls in Estimating Jump_Diffusion Models* (1998).
- [19] F. Hubalek, C. Sgarra. *Esscher transforms and the minimal entropy martingale measure for exponential Lévy models* (2005).
- [20] J. Kiessling. *Calibration of a Jump-Diffusion Process Using Optimal Control* (2010).
- [21] K. Krol, U. Küchler. *Minimal Entropy Martingale Measure for Lévy Processes* (2009).

- [22] A. Lewis. *A Simple Option Formula For General Jump-Diffusion And Other Exponential Lévy Processes* (2001).
- [23] D. Madan, P. Carr, E. Chang. *The Variance Gamma Process and Option Pricing* (1998).
- [24] K. Matsuda. *Calibration of Lévy Option Pricing Models: Application to S&P 500 Futures Option* (2005).
- [25] K. Matsuda. *Parametric Calibration of Merton Jump-Diffusion Model with Relative Entropy: What Difference Does It Make?* (2005).
- [26] Y. Miyahara, A. Novikov. *Geometric Lévy Process Pricing Model* (2001).
- [27] Y. Miyahara. *A note on Esscher Transformed Martingale Measures for Geometric Lévy Processes* (2004).
- [28] E. Mordecki, P. Salminen. *Optimal stopping of Hunt and Lévy processes* (2006).
- [29] M. Pistorius. *Pricing Equity-Default Swaps under the CGMY Lévy Model* (2005).
- [30] K. Prause. *The Generalized Hyperbolic Model: Estimation, Financial Derivatives and Risk Measures* (1999).
- [31] P. Samuelson. *Rational theory of warrant pricing*. Industrial Management Review 6 (1965).
- [32] K. Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distribution* (1999).
- [33] P. Tankov, E. Voltchkova. *Jump-diffusion models: a practitioner's guide* (2007).
- [34] N. Tuzov. *GMM parameter estimation for the Double Exponential Jump-Diffusion Process* (2006).
- [35] J. Varma. *Rupee-Dollar Option Pricing and Risk Measurement: Jump Processes, Changing Volatility and Kurtosis Shifts* (1999).

7 ANEXO DE CÁLCULO

$$\begin{aligned}
 1. \int_{\mathbb{R}} e^{\theta x} f_Y(x, \mu, \delta^2) dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2-2\mu x+\mu^2-2\theta\delta^2 x}{\delta^2}} dx = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2-2(\mu+\theta\delta^2)x+\mu^2+2\mu\theta\delta^2+\theta^2\delta^4}{\delta^2}} e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\theta^2\delta^2} dx = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\theta^2\delta^2} f_Y(x, \mu + \theta\delta^2, \delta^2) dx = e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\theta^2\delta^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \int_{\mathbb{R}} e^{\theta x} e^x f_Y(x, \mu, \delta^2) dx &= \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{(\theta+1)x} f_Y(x, \mu, \delta^2) dx = e^{\mu(\theta+1)+\frac{1}{2}(\theta+1)^2\delta^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \int_{\mathbb{R}} e^{iux} e^{\theta x} f_Y(x, \mu, \delta^2) dx &= \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{iux} e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\theta^2\delta^2} f_Y(x, \mu + \theta\delta^2, \delta^2) dx = e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\theta^2\delta^2} e^{iu(\mu+\theta\delta^2)-\frac{1}{2}\delta^2 u^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \int_{-\infty}^0 e^{\theta x} f_Y(x, \mu, \delta^2) dx &= \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\theta^2\delta^2} f_Y(x, \mu + \theta\delta^2, \delta^2) dx = e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\theta^2\delta^2} \Phi\left(-\frac{\mu+\theta\delta^2}{\delta}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \int_0^{+\infty} e^{\theta x} f_Y(x, \mu, \delta^2) dx &= \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\theta^2\delta^2} f_Y(x, \mu + \theta\delta^2, \delta^2) dx = e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\theta^2\delta^2} \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu+\theta\delta^2}{\delta}\right)\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \int_{-\infty}^0 e^{\theta x} e^x f_Y(x, \mu, \delta^2) dx &= \int_{-\infty}^0 e^{(\theta+1)x} f_Y(x, \mu, \delta^2) dx = \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{\mu(\theta+1)+\frac{1}{2}(\theta+1)^2\delta^2} f_Y(x, \mu + (\theta+1)\delta^2, \delta^2) dx = \\
 &= e^{\mu(\theta+1)+\frac{1}{2}(\theta+1)^2\delta^2} \Phi\left(-\frac{\mu+(\theta+1)\delta^2}{\delta}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \int_0^{+\infty} e^{\theta x} e^x f_Y(x, \mu, \delta^2) dx &= \int_0^{+\infty} e^{(\theta+1)x} f_Y(x, \mu, \delta^2) dx = \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{\mu(\theta+1)+\frac{1}{2}(\theta+1)^2\delta^2} f_Y(x, \mu + (\theta+1)\delta^2, \delta^2) dx = \\
 &= e^{\mu(\theta+1)+\frac{1}{2}(\theta+1)^2\delta^2} \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu+(\theta+1)\delta^2}{\delta}\right)\right]
 \end{aligned}$$

$$8. \int_{-\infty}^0 e^{iux} e^{\theta x} f_Y(x, \mu, \delta^2) dx = \int_{-\infty}^0 e^{iux} e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\theta^2\delta^2} f_Y(x, \mu + \theta\delta^2, \delta^2) dx = \\ = e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\theta^2\delta^2} \int_{-\infty}^0 e^{iux} f_Y(x, \mu + \theta\delta^2, \delta^2) dx$$

$$9. \int_0^{+\infty} e^{iux} e^{\theta x} f_Y(x, \mu, \delta^2) dx = \int_0^{+\infty} e^{iux} e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\theta^2\delta^2} f_Y(x, \mu + \theta\delta^2, \delta^2) dx = \\ = e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\theta^2\delta^2} \int_0^{+\infty} e^{iux} f_Y(x, \mu + \theta\delta^2, \delta^2) dx$$

$$10. \int_{\mathbb{R}} x I_{\{|x| \leq 1\}} f_Y(x, \mu, \delta^2) dx = \int_{-1}^1 x f_Y(x, \mu, \delta^2) dx = \\ = \int_{-1}^1 [x - \mu + \mu] f_Y(x, \mu, \delta^2) dx \\ = \int_{-1}^1 \frac{[x - \mu]}{\sqrt{2\pi} \delta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2} dx + \int_{-1}^1 \mu f_Y(x, \mu, \delta^2) dx =$$

Realizando el cambio de variable $\begin{cases} y = \frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2 \\ dy = \frac{x-\mu}{\delta} \frac{1}{\delta} \end{cases}$ en la primera integral resulta:

$$= \int_{\frac{1}{2}\left(\frac{-1-\mu}{\delta}\right)^2}^{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\mu}{\delta}\right)^2} \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} dy + \mu \left[\Phi\left(\frac{1-\mu}{\delta}\right) - \Phi\left(\frac{-1-\mu}{\delta}\right) \right] = \\ = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\mu}{\delta}\right)^2} - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\mu}{\delta}\right)^2} \right) + \mu \left[\Phi\left(\frac{1-\mu}{\delta}\right) - \Phi\left(\frac{-1-\mu}{\delta}\right) \right]$$

$$11. \int_{\mathbb{R}} \lambda e^{\theta x} e^x (p\eta_1 e^{-\eta_1 x} I_{\{x < 0\}} + q\eta_2 e^{-\eta_2 x} I_{\{x \geq 0\}}) dx] = \\ = \lambda p\eta_1 \int_{-\infty}^0 e^{[(\theta+1)-\eta_1]x} dx + \lambda q\eta_2 \int_0^{+\infty} e^{[(\theta+1)-\eta_2]x} dx = \\ = \lambda p\eta_1 \frac{e^{[(\theta+1)-\eta_1]x}}{[(\theta+1)-\eta_1]} \Big|_{-\infty}^0 + \lambda q\eta_2 \frac{e^{[(\theta+1)-\eta_2]x}}{[(\theta+1)-\eta_2]} \Big|_0^{+\infty} = \\ = \frac{\lambda p\eta_1}{[(\theta+1)-\eta_1]} - \frac{\lambda q\eta_2}{[(\theta+1)-\eta_2]} \quad \text{si } \eta_1 \leq \theta + 1 \leq \eta_2$$

$$12. \int_{\mathbb{R}} \lambda e^{\theta x} (p\eta_1 e^{-\eta_1 x} I_{\{x < 0\}} + q\eta_2 e^{-\eta_2 x} I_{\{x \geq 0\}}) dx] = \\ = \lambda p\eta_1 \int_{-\infty}^0 e^{[\theta-\eta_1]x} dx + \lambda q\eta_2 \int_0^{+\infty} e^{[\theta-\eta_2]x} dx = \\ = \lambda p\eta_1 \frac{e^{[\theta-\eta_1]x}}{[\theta-\eta_1]} \Big|_{-\infty}^0 + \lambda q\eta_2 \frac{e^{[\theta-\eta_2]x}}{[\theta-\eta_2]} \Big|_0^{+\infty} = \\ = \frac{\lambda p\eta_1}{[\theta-\eta_1]} - \frac{\lambda q\eta_2}{[\theta-\eta_2]} \quad \text{si } \eta_1 \leq \theta \leq \eta_2$$

$$13. \int_{\mathbb{R}} \lambda e^{iux} e^{\theta x} (p\eta_1 e^{-\eta_1 x} I_{\{x < 0\}} + q\eta_2 e^{-\eta_2 x} I_{\{x \geq 0\}}) dx] = \\ = \lambda p\eta_1 \int_{-\infty}^0 e^{[iu+\theta-\eta_1]x} dx + \lambda q\eta_2 \int_0^{+\infty} e^{[iu+\theta-\eta_2]x} dx = \\ = \lambda p\eta_1 \frac{e^{[iu+\theta-\eta_1]x}}{[iu+\theta-\eta_1]} \Big|_{-\infty}^0 + \lambda q\eta_2 \frac{e^{[iu+\theta-\eta_2]x}}{[iu+\theta-\eta_2]} \Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{\lambda p \eta_1}{[iu + \theta - \eta_1]} - \frac{\lambda q \eta_2}{[iu + \theta - \eta_2]} \quad \text{si } \eta_1 \leq \theta \leq \eta_2$$

$$14. \int_{-\infty}^0 -e^{\theta x} (e^x - 1) \frac{1}{\kappa x} e^{(A^p + B^p)x} dx =$$

$$= -\frac{1}{\kappa} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x} (e^{(A^p + B^p + \theta + 1)x} - e^{(A^p + B^p + \theta)x}) dx \right]$$

Realizando el cambio de variable $\begin{cases} y = -x \\ dy = -dx \end{cases}$ la integral anterior resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{y} (e^{-(A^p + B^p + \theta + 1)y} - e^{-(A^p + B^p + \theta)y}) dy \right] &= \\ &= \frac{1}{\kappa} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\int_x^{\infty} \frac{1}{y} (e^{-(A^p + B^p + \theta + 1)y} - e^{-(A^p + B^p + \theta)y}) dy \right] = \\ &= -\frac{1}{\kappa} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\int_x^{\infty} \frac{1}{y} e^{-(A^p + B^p + \theta)y} dy - \int_x^{\infty} \frac{1}{y} e^{-(A^p + B^p + \theta + 1)y} dy \right] \end{aligned}$$

Aplicando nuevos cambios de variable a las dos integrales:

$$\begin{cases} t = (A^p + B^p + \theta + 1)y \\ dt = (A^p + B^p + \theta + 1) dy \end{cases} \quad \begin{cases} t = (A^p + B^p + \theta)y \\ dt = (A^p + B^p + \theta) dy \end{cases}$$

Resulta:

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\kappa} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\int_{(A^p + B^p + \theta)x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dx - \int_{(A^p + B^p + \theta + 1)x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dx \right] = \\ &= \frac{1}{\kappa} \lim_{x \rightarrow 0} Ei((A^p + B^p + \theta)x) - Ei((A^p + B^p + \theta + 1)x) = \\ &= \frac{1}{\kappa} \lim_{x \rightarrow 0} (\gamma + Ln((A^p + B^p + \theta)x) - (\gamma + Ln((A^p + B^p + \theta + 1)x))) = \\ &= \frac{1}{\kappa} \lim_{x \rightarrow 0} Ln\left(\frac{(A^p + B^p + \theta)x}{(A^p + B^p + \theta + 1)x}\right) = \frac{1}{\kappa} Ln\left(\frac{(A^p + B^p + \theta)}{(A^p + B^p + \theta + 1)}\right) \end{aligned}$$

$$15. \int_0^{\infty} e^{\theta x} (e^x - 1) \frac{1}{\kappa x} e^{(A^p - B^p)x} dx =$$

$$= \frac{1}{\kappa} \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{x} (e^{(A^p - B^p + \theta + 1)x} - e^{(A^p - B^p + \theta)x}) dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\kappa} \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{y} (e^{-(B^p - A^p - \theta - 1)y} - e^{-(B^p - A^p - \theta)y}) dy \right] =$$

$$= \frac{1}{\kappa} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\int_x^{\infty} \frac{1}{y} (e^{-(B^p - A^p - \theta - 1)y} - e^{-(B^p - A^p - \theta)y}) dy \right] =$$

$$= \frac{1}{\kappa} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\int_x^{\infty} \frac{1}{y} e^{-(B^p - A^p - \theta - 1)y} dy - \int_x^{\infty} \frac{1}{y} e^{-(B^p - A^p - \theta)y} dy \right]$$

Aplicando cambios de variable a las dos integrales:

$$\begin{cases} t = (B^p - A^p - \theta - 1)y \\ dt = (B^p - A^p - \theta - 1) dy \end{cases} \quad \begin{cases} t = (B^p - A^p - \theta)y \\ dt = (B^p - A^p - \theta) dy \end{cases}$$

Resulta:

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\kappa} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\int_{(B^p - A^p - \theta - 1)x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dx - \int_{(B^p - A^p - \theta)x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dx \right] = \\ &= -\frac{1}{\kappa} \lim_{x \rightarrow 0} Ei((B^p - A^p - \theta - 1)x) - Ei((B^p - A^p - \theta)x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\kappa} \lim_{x \rightarrow 0} (\gamma + \text{Ln}((B^P - A^P - \theta - 1)x) - (\gamma + \text{Ln}((B^P - A^P - \theta)x)) = \\
&= -\frac{1}{\kappa} \lim_{x \rightarrow 0} \text{Ln} \left(\frac{(B^P - A^P - \theta - 1)x}{(B^P - A^P - \theta)x} \right) = -\frac{1}{\kappa} \text{Ln} \left(\frac{(B^P - A^P - \theta - 1)}{(B^P - A^P - \theta)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{16.} \int_{\mathbb{R}} x I_{\{|x| \leq 1\}} \frac{1}{\kappa |x|} e^{Ax - B|x|}(dx) &= \int_{-1}^0 -\frac{1}{\kappa} e^{(A+B)x}(dx) + \int_0^1 \frac{1}{\kappa} e^{(A-B)x}(dx) = \\
&= -\frac{1}{\kappa} \frac{e^{(A+B)x}}{(A+B)} \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{\kappa} \frac{e^{(A-B)x}}{(A-B)} \Big|_0^1 = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{e^{-(A+B)} - 1}{(A+B)} + \frac{e^{(A-B)} - 1}{(A-B)} \right)
\end{aligned}$$