

TESIS DE MAESTRÍA

---

**Pérdida de dimensión para  
caminatas al azar en grupos de  
Schottky**

---

Maestría en Matemática - Pedeciba - Universidad de la República

Estudiante: Ernesto García

Orientador: Pablo Lessa

Setiembre 2022

*Para Cami.*

### Resumen

Dado un conjunto finito de matrices de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  que generan libremente un grupo de Schottky y una probabilidad soportada en estas matrices, probamos que la medida estacionaria de la caminata al azar asociada tiene dimensión de Hausdorff estrictamente más chica que el conjunto límite del grupo en el borde del plano hiperbólico. En particular, si fijamos un punto del plano hiperbólico, la medida de Patterson Sullivan correspondiente es singular con respecto a la medida estacionaria de la caminata. Esto prueba casos particulares de una conjetura aún abierta debida a Vadim Kaimanovich y Vincent LePrince.

### Abstract

Given a finite set of  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  matrices freely generating a Schottky group and a probability measure supported on these matrices, we prove that the stationary measure of the associated random walk has strictly-smaller Hausdorff dimension than the limit set of the group on the boundary of the hyperbolic plane. In particular, if we fix a point on the hyperbolic plane, the corresponding Patterson Sullivan measure is singular with respect to the stationary measure of the random walk. This proves particular cases of a still-open conjecture due to Vadim Kaimanovich and Vincent LePrince.



# Índice general

<b>1. Dimensión y medida de Hausdorff</b>	<b>13</b>
1.1. Dimensión de Hausdorff . . . . .	14
1.2. Dimensión de Hausdorff de una medida de Borel . . . . .	19
1.3. Teorema de Moran-Hutchinson . . . . .	21
1.3.1. Conjuntos autosimilares . . . . .	21
1.3.2. Ejemplo: dos contracciones en el intervalo separadas . . . . .	24
<b>2. Grupos de Schottky en el plano hiperbólico</b>	<b>29</b>
2.1. Preliminares de geometría hiperbólica plana . . . . .	29
2.1.1. El disco de Poincaré . . . . .	30
2.1.2. El semiplano superior . . . . .	32
2.1.3. La métrica hiperbólica en coordenadas polares . . . . .	34
2.1.4. El grupo de isometrías . . . . .	35
2.1.5. Trigonometría hiperbólica . . . . .	40
2.1.6. El borde del plano hiperbólico . . . . .	41
2.2. Grupos fuchsianos . . . . .	47
2.2.1. Conjunto límite . . . . .	49
2.2.2. Región de Nielsen y grupos convexos cocompactos . . . . .	49
2.2.3. Grafo de Cayley, Lema de Švarc-Milnor y Lema de Morse . . . . .	51
2.2.4. Grupos de Schottky . . . . .	53
2.3. Enunciado Principal: pérdida de dimensión para caminatas de vecinos más cercanos . . . . .	59
<b>3. Formalismo Termodinámico</b>	<b>61</b>
3.1. Medidas de equilibrio . . . . .	65
3.2. El potencial geométrico . . . . .	67

<b>4. Pérdida de dimensión para caminatas a vecinos más cercanos</b>	<b>73</b>
4.1. Potenciales localmente constantes y medidas de Markov . . . . .	84
4.2. Pérdida de dimensión para caminatas a vecinos más cercanos . . . . .	88
<b>5. Apéndice</b>	<b>91</b>
5.1. Apéndice al Capítulo 2. . . . .	91
5.2. Apéndice al Capítulo 4 . . . . .	95
5.2.1. Potenciales localmente constante y medidas Markov. . . . .	95

# Introducción

**La conjetura de Kaimanovich-Le Prince:** Este trabajo está motivado por una conjetura aún abierta enunciada por V. Kaimanovich y V. Le Prince en [KLP11] sobre productos aleatorios de matrices invertibles. Fijada una ley de probabilidad  $\mu$  en  $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ , consideramos sucesiones i.i.d  $\{X_j\}_j \subset \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$  y es de interés conocer propiedades asintóticas sobre los productos sucesivos

$$X_1 \cdots X_n \cdots . \tag{0.0.1}$$

El teorema de Oseledets <sup>1</sup> afirma que si  $\mu$  tiene primer momento finito y su soporte genera un subgrupo Zariski denso, casi toda sucesión tiene asociada una *bandera completa* en  $\mathbb{R}^d$ , esto es: una sucesión encajada de subespacios vectoriales  $V_1 \subset \cdots \subset V_{d-1}$  con  $\dim(V_j) = j$ . La distribución de probabilidad  $\nu = \nu(\mu)$  de estas banderas se conoce como la *medida armónica asociada a  $\mu$* . Por otro lado el espacio de banderas admite una estructura diferenciable como subvariedad del producto de las grasmanianas  $G(1, \mathbb{R}^d) \times \cdots \times G(d-1, \mathbb{R}^d)$  donde las matrices ortogonales actúan transitivamente y hay una única medida invariante por dicha acción. Diremos que esta es la *medida geométrica natural*. Basándose en ejemplos conocidos en ese momento ([GLJ93] para  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  por ejemplo) Kaimanovich y Le Prince [KLP11, pg. 3] conjeturan que si  $\mu$  da peso solamente a finitas matrices entonces las dos medidas son singulares. Además prueban que siempre existe una tal  $\mu$  y se referencia bibliografía que proporciona ejemplos donde la conjetura falla si se admite  $\mu$  con soporte infinito. La conjetura enunciada de esta manera fue refutada independientemente por [BPS12] y [Bou12] en dimensión dos, y el último fue extendido por Benoist y Quint [BQ18] a grupos de Lie semisimples en general. Tanto [Bou12] como [BQ18] prueban la existencia de medidas  $\mu$  con soporte finito y con medida armónica cuya densidad tiene regularidad arbitraria con respecto a la medida geométrica natural. Todos los contraejemplos a la conjetura conocidos hasta ahora

---

<sup>1</sup>ver por ejemplo [AB08, Theorem 1.5] para  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

cumplen que el soporte de  $\mu$  genera grupos densos por lo que en la actualidad se buscan ejemplos discretos. La conjetura aún abierta es entonces: *¿existe una probabilidad  $\mu$  soportada en finitas matrices de  $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$  que generen un grupo discreto y Zariski denso y cuya medida armónica asociada sea continua con respecto a la medida geométrica natural?*

Una propiedad clave que cumple la medida armónica es ser la única probabilidad  $\mu$ -estacionaria [Fur63, Fur11] por la acción lineal de las matrices en el espacio de banderas: esto es, si el soporte de  $\mu$  es discreto,  $\nu$  es la única probabilidad en el espacio de banderas que satisface la ecuación

$$\mu * \nu := \sum_{g \in \mathrm{supp}(\mu)} \mu(g) g * \nu = \nu. \quad (0.0.2)$$

Observar que  $\mu * \nu$  es la distribución de  $g(x)$  si  $g \in \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$  tiene distribución  $\mu$  y  $x$  tiene distribución  $\nu$ .

**Dimensión dos:** Nos restringiremos al caso  $d = 2$ , donde el espacio de banderas es el espacio proyectivo  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) := (\mathbb{R}^2 - \{0\}) / \sim$  con  $x \sim \lambda x, \forall \lambda \neq 0, x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ , y la medida rotacionalmente invariante es (proporcional a) Lebesgue. Denotemos por  $\mathbb{H}$  al semiplano complejo  $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$  y por  $\partial\mathbb{H} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  a su frontera como subconjunto de la esfera de Riemann. Identificando a cada recta del plano complejo con su pendiente tenemos un mapa  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  equivariante por las acciones, lineal en  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$  y por transformaciones de Möbius en  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ . Esto surge de observar simplemente que

$$\frac{ax + by}{cx + dy} = \frac{a\frac{x}{y} + b}{c\frac{x}{y} + d}.$$

Las transformaciones de Möbius asociadas a matrices de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  actúan por isometrías para la métrica hiperbólica en  $\mathbb{H}$ . Fijado un punto base  $\mathbf{o} \in \mathbb{H}$  y una probabilidad  $\mu$  que da peso a un conjunto finito de matrices que generan un grupo Zariski denso de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ , la imagen de  $\mathbf{o}$  por (0.0.1) converge con probabilidad 1 a algún punto de  $\partial\mathbb{H}$ . La distribución del límite (que resulta independiente del punto base) es estacionaria en el sentido de (0.0.2) y por unicidad coincide con  $\nu$  (la medida armónica de  $\mu$ ). Es desde esta perspectiva que estudiamos la singularidad de la medida armónica o estacionaria con respecto a la medida geométrica natural. En esta línea resultados recientes [Kos21, KT20] prueban la singularidad de la medida estacionaria con respecto a Lebesgue, en el caso en que  $\mu$  es simétrica (i.e  $\mu(g) = \mu(g^{-1})$ ) y soportada en traslaciones

que identifican lados opuestos de un polígono en  $\mathbb{H}$ . La técnica usada se basa en un resultado muy general [BHM11, Corollary 1.4, Theorem 1.5]. En un contexto similar pero con técnicas diferentes [CLP21] muestran la singularidad de la medida armónica para una familia infinita de grupos fuchsianos cocompactos si  $\mu$  le da igual probabilidad a los elementos de un generador particular. De una manera u otra las formas de probar la singularidad pasan por probar algo más fuerte: *la pérdida de dimensión*. Decimos que una probabilidad pierde dimensión si tiene dimensión de Hausdorff estrictamente menor a su soporte. Equivalentemente, existe un conjunto con medida total de dimensión de Hausdorff estrictamente menor a la del soporte de la medida (el soporte es el *cerrado* de medida total “más pequeño”). El caso de un grupo fuchsiano cocompacto sigue abierto en general, salvo por los trabajos mencionados. En este trabajo nos concentramos en ciertos grupos fuchsianos *convexos cocompactos* pero no cocompactos: grupos de Schottky sin elementos parabólicos. La conjetura de Kaimanovich y Le Prince en este caso resulta trivial ya que el conjunto límite de estos grupos es un conjunto de Cantor de dimensión menor a uno, por lo que no puede soportar una medida continua con respecto a Lebesgue. Sin embargo sí tiene sentido comparar la medida estacionaria con respecto a la medida (técnicamente una familia de medidas en la misma clase) de Patterson-Sullivan [Pat76, Sul79]. El objetivo de todo este trabajo es probar esta extensión de la conjetura a estos grupos de Schottky y para caminatas a vecinos más cercanos, esto es,  $\mu$  soportada en un generador libre del grupo. El resultado principal se puede enunciar como sigue:

**Teorema.** *Sea  $G$  un grupo de Schottky en  $\mathbb{H}$  sin elementos parabólicos, libre en un generador finito  $F$  y  $\mu$  una probabilidad soportada en  $F$ . Esto es,  $\mu(a) > 0$ ,  $\forall a \in F$  y  $\sum_{a \in F} \mu(a) = 1$ . Entonces la medida  $\mu$ -estacionaria  $\nu$  está soportada en el conjunto límite del grupo, pero su dimensión de Hausdorff es estrictamente menor. En otras palabras, el conjunto límite de  $G$  es el cerrado de  $\nu$ -medida total más pequeño, pero contiene conjuntos de dimensión estrictamente más chica, que también tienen medida total.*

Este trabajo contiene al menos dos grandes simplificaciones que representan obstáculos a la hora de generalizar algo de lo hecho acá. En primer lugar, los grupos en los que trabajamos son grupos libres. Esto permite una codificación simbólica biyectiva del conjunto límite con un subshift de tipo finito, con lo que la maquinaria del formalismo termodinámico se aplica sin grandes dificultades. Esta es quizás la primera gran dificultad a superar para atacar con esta estrategia el caso cocompacto o si admitimos

elementos parabólicos. Trabajos como [BS79, Ser81, Ser86] dan una codificación simbólica en otros casos más complejos y queda aún por explorar hasta dónde los argumentos de este trabajo pueden funcionar. La segunda gran simplificación (relacionada con la anterior) es al considerar caminatas a vecinos más cercanos. La principal consecuencia de esto es que la medida estacionaria resulta de Markov. Esta propiedad parece perderse (aunque tampoco es obvio) si cambiamos el generador libre del grupo de Schottky en cuestión por algún otro, por ejemplo si al generador libre le agregamos productos de pares de elementos. En esta línea hemos conseguido algún resultado parcial que extiende mínimamente lo hecho aquí, pero el problema permanece mayoritariamente abierto y no forma parte de esta tesis. Para caminatas con soporte finito en grupos fuchsianos finitamente generados en general, es sabido ([Ser83]) que la medida estacionaria entra en el contexto del formalismo termodinámico; pero el potencial asociado es en general más difícil de tratar que en nuestro caso.

**Organización del trabajo:** En el Capítulo 1, luego de las definiciones básicas presentamos un ejemplo clásico, donde calculamos la dimensión de Hausdorff del atractor de (un semigrupo de) contracciones en el intervalo. En el proceso requerimos una codificación simbólica del conjunto y medidas auxiliares cuyas dimensiones acotan por debajo la dimensión del conjunto. Entre esas medidas auxiliares, hay una que realiza la dimensión del conjunto. En cambio en nuestro ejemplo de interés, si bien el compacto invariante por la dinámica es un conjunto de Cantor en  $\mathbb{R}$  (con distorsiones controladas) no encontramos una medida “sencilla” que realice la dimensión. En definitiva, una consecuencia de este trabajo es que la estrategia no se traduce directamente al sustituir contracciones del intervalo con transformaciones de Möbius .

Todos los preliminares sobre geometría hiperbólica plana, la acción de grupos discretos de isometrías y su conjunto límite están en el Capítulo 2. Sobre el final de ese capítulo presentamos nuestros grupos de interés desde un punto de vista geométrico y enunciamos el resultado preciso que probaremos. En el Capítulo 3 nos meteremos en la codificación simbólica del grupo y de su conjunto límite e introduciremos los resultados principales del formalismo termodinámico que nos permitirán comparar las dos medidas de interés. Es allí donde explotamos al máximo nuestra primer simplificación, la codificación simbólica biyectiva. En el Capítulo 4 se presentan las particularidades probabilísticas de nuestro problema. Se presentan los resultados principales necesarios sobre caminatas al azar en árboles, tomados del trabajo de Ledrappier [Led01] y entre ellos la propiedad de Markov de la medida estacionaria de la caminata. Es esta

propiedad la que nos permite comparar, al final del capítulo, nuestras dos medidas de interés.



# Capítulo 1

## Dimensión y medida de Hausdorff

Este trabajo gira en torno a una noción<sup>1</sup> de *dimensión* de un conjunto. Esta noción proviene de la geometría pura del espacio: hay una distancia en el ambiente y medimos la distorsión en las distancias entre puntos cercanos si reescalamos de alguna manera el conjunto.

Un trabajo de B. Mandelbrot [Man67] sostiene basado en ciertas interpolaciones empíricas, que tiene sentido asumir que la costa oeste británica tiene dimensión  $D = 1,25$ .<sup>2</sup> Ese trabajo se basa en mediciones previas hechas por L. Richardson,<sup>3</sup> que estimó la relación

$$L(G) = FG^{1-D},$$

siendo  $L(G)$  la longitud entre dos puntos fijos interpolada tomando puntos consecutivos a distancia  $G$  sobre la línea de la costa,  $F$  una constante positiva y  $D$  la dimensión para Mandelbrot, otra constante, mayor o igual a uno. Fronteras mas suaves tienen dimensión cercana a uno y crece cuanto más “irregular” es la curva. En particular, salvo que la dimensión sea exactamente 1, la longitud total se hace arbitrariamente grande si la escala  $G$  se achica lo suficiente. Así, parecería ser que la noción de longitud pierde sentido en las costas geográficas. Sin embargo, *la tasa* con la que la longitud crece como función de  $G$  potencialmente nos permite distinguir curvas e incluso proporciona un orden de complejidad entre ellas. Esta idea es bien capturada por la “dimensión de Hausdorff” de un conjunto, junto con otras propiedades básicas esperadas. El desafío es

---

<sup>1</sup>la que nos interesa está lejos de ser la única posible, ver por ejemplo <https://terrytao.wordpress.com/2009/05/19/245c-notes-5-hausdorff-dimension-optional/>

<sup>2</sup>Se plantean también  $D = 1,15$  para la frontera terrestre alemana,  $D = 1,13$  para Australia, entre otros

<sup>3</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Lewis\\_Fry\\_Richardson](https://en.wikipedia.org/wiki/Lewis_Fry_Richardson)

cómo calcular o al menos acotar la dimensión de Hausdorff de un conjunto dado. La idea presentada más arriba de aproximar un conjunto por otros conjuntos que poseen cantidades conocidas permite en general conseguir cotas superiores para la dimensión. Conseguir cotas inferiores sin embargo, en general requiere herramientas más finas.

## 1.1. Dimensión de Hausdorff

Lo que sigue es una construcción general atribuida a Carathéodory, de la cual la medida de Hausdorff es una instancia particular. Referimos a [MT10]. Comencemos fijando un espacio métrico  $(M, d)$ , que supondremos de ahora en más completo y separable. La única  $\sigma$ -álgebra a considerar en  $M$  es la de Borel para la topología inducida por  $d$ .

Para una familia de subconjuntos de  $M$ ,  $\mathcal{F} \subset 2^M$  y una función *calibre*  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  consideramos para cada  $A \subset M$ ,  $\delta \geq 0$

$$\phi_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi(A_n) : A \subset \bigcup_n A_n \right\}, \quad (1.1.1)$$

el ínfimo tomado sobre todos los cubrimientos numerables  $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$  con  $\text{diam}(A_n) \leq \delta$ . La propiedad clave es que al achicar  $\delta$  la familia de cubrimientos posibles se restringe y por lo tanto  $\phi_\delta(A)$  es no decreciente. Adoptamos la convención que si para ciertos  $A$  y  $\delta$  el ínfimo se toma sobre un conjunto vacío entonces  $\phi_\delta(A) = +\infty$ . Además suponemos  $\emptyset \in \mathcal{F}$  y  $\phi(\emptyset) = 0$ ,  $\forall \delta$ .

Para cada  $\delta \geq 0$ ,  $\phi_\delta$  como función del conjunto  $A$  es una medida exterior (ver [SS05, Chapter 6] definiciones). Sin embargo esta familia de medidas no necesariamente es de Borel (i.e. los borelianos son conjuntos medibles). Usando la monotonía en  $\delta$  se define entonces *la medida de Carathéodory respecto a  $\mathcal{F}$  y  $\phi$*  como

$$\varphi(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \phi_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \phi_\delta(A).$$

El siguiente criterio debido a Carathéodory muestra que  $\varphi$  es una medida de Borel en  $M$ .

**Teorema.** *Sea  $\mu_*$  medida exterior en un espacio métrico  $(M, d)$ . Entonces  $\mu_*$  es de Borel si y solo si*

$$\mu_*(E \cup F) = \mu_*(E) + \mu_*(F), \quad \forall E, F \subset M : d(E, F) > 0;$$

es decir, si y solo si  $\mu_*$  es una medida exterior métrica. En este caso, la restricción de  $\mu_*$  a la sigma álgebra de Borel es una medida.

Este criterio es fácil de verificar en la construcción anterior: si  $\delta < \frac{1}{2}d(E, F)$ , un cubrimiento de  $E \cup F$  de diámetro menor a  $\delta$  es unión disjunta de uno de  $E$  y uno de  $F$ , de donde  $\phi_\delta(E \cup F) = \phi_\delta(E) + \phi_\delta(F)$ . Tomando límite vemos que  $\varphi$  verifica el criterio.

**Definición 1.1.** La *medida s-dimensional de Hausdorff*  $\mathcal{H}^s$  es la medida de Carathéodory asociada a

$$\mathcal{F} = \{B(x, r); x \in M, r > 0\},$$

y calibre

$$\phi : A \mapsto \text{diam}(A)^s.$$

*Apunte 1.2.* Así definida a veces se denomina *medida esférica de Hausdorff*, y se reserva el término *medida de Hausdorff* cuando  $\mathcal{F} = 2^M$ . Sin embargo, estas medidas resultan equivalentes a menos de constantes multiplicativas uniformes ([MT10, Remark 1.4.6]), lo que bastará para nuestro interés.

*Ejemplo 1.3.* Si  $M = \mathbb{R}^d$  con la distancia euclídea usual, la medida de Lebesgue, que denotamos  $m$ , es la medida de Carathéodory asociada a  $\mathcal{F} = \{R = I_1 \times \cdots \times I_d : I_j \text{ intervalo en } \mathbb{R}\}$  y  $\phi(R) = \prod_j \text{diam}(I_j)$ . Más en general para un natural  $k \leq d$  la medida  $k$ -dimensional de Hausdorff en  $\mathbb{R}^d$  corresponde a la medida de volumen en subvariedades suaves de dimensión  $k$ .

*Ejemplo 1.4.* La medida  $\mathcal{H}^0$  es la medida de conteo. En particular, cualquier conjunto infinito tiene medida 0-dimensional infinita.

**Lema 1.5** (Propiedades básicas). *Las siguientes son propiedades de la medida de Hausdorff de dimensión s verificables a partir de su definición:*

(I)  $\mathcal{H}^s(f(A)) = \mathcal{H}^s(A)$  para cualquier isometría<sup>4</sup>  $f : M \rightarrow M$ .

(II) *Reescalado en*  $M = \mathbb{R}^d$ :  $\mathcal{H}^s(r \cdot A) = r^s \mathcal{H}^s(A)$ ,  $\forall r > 0$ .

(III) Para  $0 \leq s < t$  tenemos:

■ si  $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$  entonces  $\mathcal{H}^t(A) = 0$

---

<sup>4</sup>es decir  $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \forall x, y \in M$

- si  $0 < \mathcal{H}^t(A)$  entonces  $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$ .

DEMOSTRACIÓN: El primer ítem se basa en el hecho que las isometrías llevan cubrimientos por bolas en cubrimientos por bolas del mismo diámetro.

Para el segundo ítem, observar que

$$A \subset \bigcup_n A_n \iff r \cdot A \subset \bigcup_n r \cdot A_n.$$

Aplicando la homotecia de  $\mathbb{R}^d$   $x \mapsto r \cdot x$  a un cubrimiento de  $A$  de diámetro menor a  $\delta$  obtenemos uno de  $r \cdot A$  de diámetro menor a  $r \cdot \delta$ . La homotecia distorsiona los diámetros por un factor  $r$ . Por lo tanto, para el calibre  $\phi(E) = \text{diam}(E)^s$ , tomando ínfimo sobre los cubrimientos de  $A$  se concluye

$$\phi_{r\delta}(r \cdot A) \leq r^s \phi_\delta(A).$$

La homotecia  $x \mapsto \frac{1}{r}x$  lleva cubrimientos de  $r \cdot A$  de diámetro  $\delta$  en cubrimientos de  $A$  de diámetro  $\frac{\delta}{r}$  y tomando ínfimo sobre los cubrimientos de  $r \cdot A$  obtenemos

$$\phi_{\frac{\delta}{r}}(A) \leq \frac{1}{r^s} \phi_\delta(r \cdot A).$$

Como

$$\lim_{\delta} \phi_{\frac{\delta}{r}}(A) = \lim_{\delta} \phi_\delta(A) = \mathcal{H}^s(A)$$

y

$$\lim_{\delta} \phi_\delta(r \cdot A) = \lim_{\delta} \phi_{r\delta}(r \cdot A) = \mathcal{H}^s(r \cdot A)$$

obtenemos la igualdad del segundo ítem.

Para el tercero observamos que dado un cubrimiento  $\{A_n\}$  de  $A$  de diámetro menor a  $\delta$  se tiene

$$\sum_n \text{diam}(A_n)^t \leq \delta^{t-s} \sum_n \text{diam}(A_n)^s.$$

Tomando ínfimo sobre los cubrimientos resulta que los valores de (1.1.1) asociados a los calibres  $\phi(\cdot) := \text{diam}(\cdot)^s$  y  $\hat{\phi}(\cdot) := \text{diam}(\cdot)^t$  verifican

$$\hat{\phi}_\delta(A) \leq \delta^{t-s} \phi_\delta(A).$$

Por lo tanto si  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \phi_\delta(A) = \mathcal{H}^s(A) < +\infty$  entonces  $\mathcal{H}^t(A) = 0$  y si  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\phi}_\delta(A) = \mathcal{H}^t(A) > 0$  entonces  $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$ .

□

El tercer punto de la proposición anterior nos dice que hay a lo sumo un valor de  $s$  que le da medida de Hausdorff positiva y finita a un conjunto. Este valor es lo que definiremos como dimensión de Hausdorff.

**Definición 1.6** (Dimensión de Hausdorff). Dado  $A \subset M$ , la *dimensión de Hausdorff* de  $A$  es

$$\dim_{\mathbb{H}}(A) = \inf_s \{\mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup_s \{\mathcal{H}^s(A) = +\infty\}.$$

Se puede ver que la dimensión de Hausdorff es monótona con respecto a la inclusión

$$A \subset B \Rightarrow \dim_{\mathbb{H}}(A) \leq \dim_{\mathbb{H}}(B),$$

y numerablemente estable

$$\dim_{\mathbb{H}} \left( \bigcup_n^{+\infty} A_n \right) = \sup_n \dim_{\mathbb{H}}(A_n).$$

**Definición 1.7.** Una función  $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$  entre espacios métricos se dice:

- $c, \alpha$ -Hölder si  $d_2(f(x), f(y)) \leq cd_1(x, y)^\alpha$  para todos  $x, y \in M_1$ .
- $c$ -Lipschitz si  $f$  es  $c, 1$ -Hölder .
- $c$ -biLipschitz si  $f$  invertible y tanto  $f$  como su inversa son  $c$ -Lipschitz.

**Proposición 1.8.** Sea  $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$  una función  $c, \alpha$ -Hölder . Entonces:

$$\dim_{\mathbb{H}}(f(A)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_{\mathbb{H}}(A).$$

En particular la dimensión de Hausdorff de un conjunto es un invariante bi-Lipschitz.

DEMOSTRACIÓN:

Tomemos  $s > \dim_{\mathbb{H}}(E)$  cualquiera. Observando que  $A \subset \bigcup_n A_n$  implica  $f(A) \subset \bigcup_n f(A_n)$  y que  $\text{diam}(f(A_n)) \leq \text{diam}(A_n)^\alpha$  obtenemos

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(E)) \leq \mathcal{H}^s(E) = 0.$$

Por lo tanto

$$\frac{s}{\alpha} \geq \dim_{\mathbb{H}}(f(E)).$$

En general no es fácil calcular la dimensión de un conjunto a partir de la definición. Como se mencionó en la introducción del capítulo, cotas superiores son en general más fáciles: para probar que la dimensión de un conjunto dado es menor que un cierto número  $s$ , alcanza encontrar para cada  $\delta > 0$  algún cubrimiento tal que la suma de los diámetros a la  $s$  quedan controlados. Veremos varios ejemplos de esto en las secciones siguientes. Por otro lado, las cotas inferiores son más delicadas ya que debemos controlar *todos* los cubrimientos de diámetro menor a  $\delta$ . En esta dirección un resultado clásico es el siguiente:

**Teorema 1.9** (Principio de distribución de masa y lema de Frostman).

- (I) Si existe una medida de Borel  $\nu$  tal que  $\nu(A) > 0$  y para todo  $x \in A \subset M$  y todo  $r$  suficientemente chico se cumple

$$\nu(B(x, r)) \leq r^s,$$

entonces

$$\mathcal{H}^s(A) > 0.$$

En particular,  $\dim_{\mathbb{H}}(A) \geq s$ .

- (II) Si  $\mathcal{H}^s(A) > 0$  y  $A$  es compacto entonces existe una medida de Borel  $\nu$  positiva en  $A$  tal que

$$\nu(B(x, r)) \leq r^s, \text{ si } B(x, r) \subset M.$$

El primer punto del teorema (llamado “Principio de distribución de masa”) dice que podemos acotar inferiormente la dimensión de un conjunto si encontramos una cierta medida auxiliar. La prueba es sencilla y la vemos a continuación. El segundo, conocido como “lema de Frostman” dice que siempre existe una tal medida. Una prueba en el caso  $M = \mathbb{R}^d$  puede hallarse en [Mat95, Theorem 8.8].

DEMOSTRACIÓN:(Teorema 1.9 (I)) La clave es que cualquier conjunto  $E$  está contenido en una bola de radio  $2\text{diam}(E)$ . Supongamos  $A \subset \bigcup_n A_n$ , entonces

$$\sum_n \text{diam}(A_n)^s \geq \frac{1}{2^s} \sum_n \nu(A_n) \geq \frac{1}{2^s} \nu(A) > 0.$$

Como el cubrimiento es arbitrario, concluimos que

$$\dim_{\mathbb{H}}(A) \geq s.$$

□

## 1.2. Dimensión de Hausdorff de una medida de Borel

Para aplicar el principio de distribución de masa, se nos exige controlar los valores que toma alguna medida auxiliar en las bolas centradas en los puntos del conjunto en cuestión. En esta sección refinamos el análisis para conseguir resultados un poco más prácticos.

**Definición 1.10.** Sea  $\nu$  una medida finita de Borel en un espacio métrico  $(M, d)$ . El soporte de  $\nu$  es

$$\text{supp}(\nu) = \{x \in M : \forall r > 0, \nu(B(x, r)) > 0\}.$$

Como  $M \setminus \text{supp}(\nu)$  es una unión numerable<sup>5</sup> de abiertos de medida cero, el soporte de una medida es un conjunto cerrado de medida total.

**Definición 1.11** (Dimensión de Hausdorff de una medida). Una medida de Borel  $\nu$  se dice *de dimensión exacta* si existe  $\delta \geq 0$  y un conjunto de  $\nu$ -medida total  $B$  tal que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \nu(B(x, r))}{\log r} = \delta, \quad \forall x \in B.$$

En este caso, decimos que  $\delta$  es la *dimensión de Hausdorff de  $\nu$* , que denotaremos por

$$\dim_{\text{H}}(\nu).$$

**Proposición 1.12.** Sea  $\nu$  una medida de Borel finita de dimensión exacta. Entonces

$$\dim_{\text{H}}(\nu) \leq \dim_{\text{H}}(\text{supp}(\nu)).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\delta = \dim_{\text{H}}(\nu)$  y tomemos  $\epsilon > 0$ . Vamos a encontrar un subconjunto  $B \subset \text{supp}(\nu)$  con medida de Hausdorff  $(\delta - \epsilon)$ -dimensional mayor a cero. Por el principio de distribución de masa vamos a concluir que

$$\delta - \epsilon \leq \dim_{\text{H}}(B) \leq \dim_{\text{H}}(\text{supp}(\nu)).$$

Consideremos

$$B_n = \left\{ x \in \text{supp}(\nu) : \frac{\log \nu(B(x, r))}{\log r} \geq \delta - \epsilon, \forall r < 1/n \right\}.$$

---

<sup>5</sup>(un espacio métrico separable tiene una base numerable)

Como la unión de los conjuntos  $B_n$  tiene medida total, a partir de cierto  $n$ ,  $\nu(B_n) > 0$ . Sea  $B$  cualquiera de ellos. Tenemos que para todo  $r < 1/n$  y  $x \in B$ :

$$\frac{\log \nu(B(x, r))}{\log r} \geq \delta - \epsilon \iff \log \nu(B(x, r)) \leq (\delta - \epsilon) \log r \iff \nu(B(x, r)) \leq r^{\delta - \epsilon}.$$

Aplicando el principio de distribución de masa se concluye la prueba ya que  $\epsilon$  es arbitrario. □

No siempre es posible estimar el crecimiento de la medida de las bolas *para todo* radio  $r > 0$ , si no que conocemos la medida en alguna sucesión de radios. El siguiente es un lema técnico al que recurriremos repetidamente.

**Lema 1.13.** *Sea  $\nu$  una probabilidad de Borel. Sea  $x \in \text{supp}(\nu)$  y una sucesión  $r_n(x) \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow +\infty$  tal que:*

$$\lim_n \frac{\log r_{n+1}(x)}{\log r_n(x)} = 1.$$

Entonces,

$$\lim_n \frac{\log \nu(B(x, r_n(x)))}{\log r_n(x)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \nu(B(x, r))}{\log r}.$$

En particular si para  $\nu$ - casi todo  $x \in \text{supp}(\nu)$  existe una sucesión  $r_n \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow +\infty$  que cumple:

- $\lim_n \frac{\log \nu(B(x, r_{n+1}))}{\log r} = \delta$ , y
- $\lim_n \frac{\log r_{n+1}}{\log r_n} = 1$ .

Entonces  $\nu$  es de dimensión exacta y

$$\dim_{\text{H}}(\nu) = \delta.$$

*Demostración.* Fijemos  $x$  y  $\{r_n\}_n$  como en la hipótesis. Suponemos además  $r_1 < 1$ . Para cada  $r > 0$  y suficientemente chico ( $r < r_1$  alcanza) tomamos  $n$  tal que  $r_{n+1} < r \leq r_n$ . Entonces

$$\log \nu(B(x, r_{n+1})) < \log \nu(B(x, r)) \leq \log \nu(B(x, r_n)), \text{ y}$$

$$\frac{\log \nu(B(x, r_{n+1}))}{\log r} > \frac{\log \nu(B(x, r))}{\log r} \geq \frac{\log \nu(B(x, r_n))}{\log r}.$$

Para evitar complicaciones con los signos, observar que

$$\frac{\log \nu(B(x, r_{n+1}))}{\log r} = \left| \frac{\log \nu(B(x, r_{n+1}))}{\log r} \right| \leq \left| \frac{\log \nu(B(x, r_{n+1}))}{\log r_n} \right|$$

pues  $|\log r|^{-1} \leq |\log r_n|^{-1}$ . De la misma manera obtenemos

$$\frac{\log \nu(B(x, r_{n+1}))}{\log r} \geq \left| \frac{\log \nu(B(x, r_n))}{\log r_{n+1}} \right|.$$

Como  $\lim_n \left| \frac{\log r_n}{\log r_{n+1}} \right| = \lim_n \left| \frac{\log r_{n+1}}{\log r_n} \right| = 1$ , obtenemos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \nu(B(x, r))}{\log r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \nu(B(x, r_n(x)))}{\log r_n(x)}.$$

Si el límite anterior vale  $\delta$  para todo  $x$  en un conjunto de medida total, por definición  $\nu$  es de dimensión exacta igual a  $\delta$ .  $\square$

### 1.3. Teorema de Moran-Hutchinson

Lo que sigue es una exposición simplificada de resultados de [Hut81]. En este trabajo se prueba, entre otras cosas la existencia y unicidad de un compacto no vacío invariante bajo la acción de un semigrupo de mapas contractivos en un espacio métrico completo. Probamos este hecho para similaridades en  $\mathbb{R}^d$ .

Bajo cierta hipótesis adicional de “separación” se puede calcular la dimensión de Hausdorff del compacto invariante en términos de los factores de contracción. Esto había sido hecho previamente por Moran en [Mor46]. Realizaremos esto en detalle para dos contracciones en el intervalo con imágenes disjuntas<sup>6</sup>, en cuyo caso el compacto invariante es un conjunto de Cantor en  $[0, 1]$ .

#### 1.3.1. Conjuntos autosimilares

Consideremos  $n$  similaridades  $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , es decir cada  $f_i$  cumple

$$d(f_i(x), f_i(y)) = r_i \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d,$$

para algún factor de contracción  $r_i \in (0, 1)$ . Cada  $f_i$  es una contracción en  $\mathbb{R}^d$  y por lo tanto tiene un único punto fijo  $x_i$ , es decir  $f_i(x_i) = x_i$ . Se puede probar [Hut81, Proposition (1), section 2.2] que las similaridades en  $\mathbb{R}^d$  son composiciones del tipo  $h \circ \tau \circ R$  donde  $h$  es una homotecia,  $\tau$  una traslación y  $R$  una transformación ortogonal.

**Proposición 1.14.** *Existe un único compacto no vacío  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  tal que*

$$\Lambda = f_1(\Lambda) \cup \dots \cup f_n(\Lambda).$$

<sup>6</sup>es la manera más fácil de satisfacer la hipótesis de separación

Para probar la proposición usaremos la siguiente noción de distancia entre subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^d$ . Dado un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^d$  sea  $A^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, A) < \epsilon\}$ . Dados dos subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^d$ ,  $E$  y  $F$  su *distancia de Hausdorff* se define por

$$d(E, F) = \inf\{\epsilon > 0 : E \subset F^\epsilon \text{ y } F \subset E^\epsilon\}.$$

Para cualquier terna de compactos  $E, F, G \subset \mathbb{R}^d$  se verifican las siguientes propiedades

- $d(E, F) = 0 \iff E = F$ ,
- $d(E, F) = d(F, E)$
- $d(E, F) \leq d(E, G) + d(G, F)$
- Sean  $f_1, \dots, f_n$  similaridades con radios de contracción respectivos  $r_i \in (0, 1)$ . Notar que si todo punto de  $E$  tiene un punto de  $F$  a distancia a lo sumo  $\epsilon$  entonces todo punto de  $f_j(E)$  tiene un punto de  $f_j(F)$  a no más de  $r_j \cdot \epsilon$ . Con esto se puede chequear que

$$d\left(\bigcup_{i=1}^n f_i(E), \bigcup_{i=1}^n f_i(F)\right) \leq \max_j \{r_j\} \cdot d(E, F).$$

DEMOSTRACIÓN:(Proposición 1.14) Este resultado es en espíritu un teorema de punto fijo de contracciones. En efecto, como mencionamos arriba aplicar una cantidad finita de similaridades contrae la distancia de Hausdorff entre conjuntos. Nos basamos en la prueba de [SS05].

**Afirmación.** *Existe una bola  $B \subset \mathbb{R}^n$  tal que para todo  $j = 1, \dots, n$*

$$f_j(\overline{B}) \subset B.$$

Para probar la afirmación, consideremos  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$ . Veremos que si  $d(\bar{x}, x) \leq R$  para algún  $R$  suficientemente grande, entonces  $d(\bar{x}, f_j(x)) < R$  y podremos tomar  $B = B(\bar{x}, R)$ .

Para eso tomamos cualquier  $j = 1, \dots, n$  y calculamos:

$$\begin{aligned}
d(\bar{x}, f_j(x)) &= \|\bar{x} - f_j(x)\| \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_i (\|x_i - x_j\| + \|x_j - f_j(x)\|) \\
&\leq \left( \frac{1}{n} \sum_i \|x_i - x_j\| \right) + r_j \cdot \|x_j - x\| \\
&\leq \left( \frac{1}{n} \sum_i \|x_i - x_j\| \right) + r_j \cdot (\|x_j - \bar{x}\| + \|\bar{x} - x\|) \\
&\leq \left( \frac{1+r_j}{n} \sum_i \|x_i - x_j\| \right) + r_j \cdot \|\bar{x} - x\|.
\end{aligned}$$

Basta tomar  $R$  de manera que para todo  $j = 1, \dots, n$  se tenga:

$$\frac{\left( \frac{1+r_j}{n} \sum_i \|x_i - x_j\| \right) + r_j \cdot R}{R} < 1,$$

y queda probada la afirmación.

A partir del compacto  $\bar{B}$  de la afirmación anterior, consideramos una sucesión de conjuntos compactos  $\{F_k\}$  dada por  $F^1 = \bar{B}$  y

$$F^{k+1} = \bigcup_{i=1}^n f_i(F^k), \quad \forall k \geq 1.$$

Como  $F^2 \subset F^1$ , recursivamente tenemos que  $F^{k+1} \subset F^k$  para todo  $k$ , y definimos

$$\Lambda = \bigcap_{k \geq 1} F^k.$$

$\Lambda$  es no vacío y es compacto. Además<sup>7</sup>

$$\bigcup_{i=1}^n f_i(\Lambda) = \bigcup_{i=1}^n f_i \left( \bigcap_{k \geq 1} F^k \right) = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{i=1}^n f_i(F^k) = \bigcap_{k \geq 1} F^{k+1} = \Lambda.$$

Para ver la unicidad de  $\Lambda$  suponemos que hay otro compacto no vacío  $\hat{\Lambda} = \bigcup_{i=1}^n f_i(\hat{\Lambda})$ . Observamos que

$$d(\Lambda, \hat{\Lambda}) = d \left( \bigcup_{i=1}^n f_i(\Lambda), \bigcup_{i=1}^n f_i(\hat{\Lambda}) \right) \leq \max_j \{r_j\} \cdot d(\Lambda, \hat{\Lambda}).$$

<sup>7</sup>la igualdad vale porque en nuestro caso  $F^{k+1} \subset F^k$  para todo  $k$  y consideramos finitas  $f_i$ . En general solo valen las inclusiones  $\subset$ .

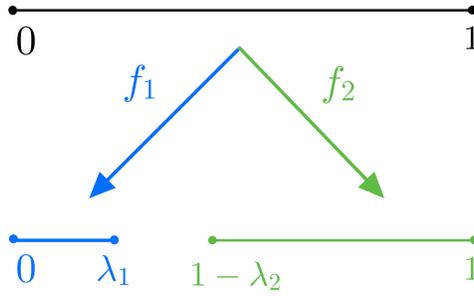


Figura 1.1: Dos contracciones en el intervalo  $[0, 1]$

Como  $\max_j \{r_j\} < 1$  necesariamente  $d(\Lambda, \hat{\Lambda}) = 0$  y  $\Lambda = \hat{\Lambda}$ .

□

El sistema  $\{f_1, \dots, f_n\}$  es un ejemplo de un IFS (iterated function system) y se dice que  $\Lambda$  es el *atractor* del IFS. Decimos que un conjunto es *autosimilar* si es el atractor de un IFS formado por similaridades.

### 1.3.2. Ejemplo: dos contracciones en el intervalo separadas

Fijemos dos números reales positivos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de manera que  $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$  y consideremos las dos contracciones en el intervalo  $f_1, f_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dadas por

$$f_1(t) = \lambda_1 t, \text{ y } f_2(t) = 1 - \lambda_2 + \lambda_2 t.$$

Denotemos por  $\Lambda$  al atractor del sistema  $\{f_1, f_2\}$ , es decir, el único compacto en  $[0, 1]$  que verifica

$$\Lambda = f_1(\Lambda) \cup f_2(\Lambda).$$

Persiguiendo la prueba de la Proposición 1.14 tenemos que

$$\Lambda = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, 2\}^k} f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}([0, 1]).$$

Para cada  $k \geq 1$ ,  $\bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, 2\}^k} f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}([0, 1])$  es una unión de intervalos cerrados, el diámetro de cada uno de los cuales es a lo sumo  $(\max\{\lambda_1, \lambda_2\})^k$ . En particular, ningún punto de  $\Lambda$  es aislado. Esta unión es además disjunta: dados  $(i_1, \dots, i_k) \neq (j_1, \dots, j_k)$ , si  $l$  es la primera coordenada donde difieren, entonces

$$d(f_{i_l} \circ \dots \circ f_{i_k}([0, 1]), f_{j_l} \circ \dots \circ f_{j_k}([0, 1])) > 1 - \lambda_1 - \lambda_2.$$

Por lo tanto

$$d(f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_k}([0, 1]), f_{j_1} \circ \cdots \circ f_{j_k}([0, 1])) > (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{k-1}}.$$

Podemos concluir entonces, que para una sucesión  $\omega = \{i_j\}_j \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$

$$\bigcap_k f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_k}([0, 1])$$

consiste en exactamente un punto de  $\Lambda$ , y además entre dos puntos de  $\Lambda$  hay un intervalo que no está contenido en  $\Lambda$ . En resumen, hemos visto que  $\Lambda$  es un conjunto compacto, perfecto y totalmente desconexo, es decir, un conjunto de Cantor.

Notar que obtuvimos una codificación simbólica para los elementos de  $\Lambda$ , identificando cada uno con una sucesión de símbolos. Usaremos la notación  $x = \lim_n [x_1, \dots, x_n]$  para referirnos a

$$x = \bigcap_n [x_1, \dots, x_n].$$

Nos dirigimos a probar el teorema de Morán-Hutchinson en este caso:

**Teorema 1.15.** *la dimensión de Hausdorff de  $\Lambda$  es  $\delta$ , el único real que verifica*

$$\lambda_1^\delta + \lambda_2^\delta = 1. \quad (1.3.1)$$

Más aún,  $0 < \mathcal{H}^\delta(\Lambda) < +\infty$ .

Probaremos las dos desigualdades por separado.

**Proposición 1.16.** *Con las notaciones anteriores tenemos*

$$\dim_H(\Lambda) \leq \delta.$$

DEMOSTRACIÓN: Para  $k \in \mathbb{N}$ , el conjunto de iterados de orden  $k$

$$\bigcup_{i_j \in \{1, 2\}} f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_k}([0, 1]) \quad (1.3.2)$$

es un cubrimiento de  $\Lambda$  por  $2^k$  compactos de diámetro a lo sumo  $(\max\{\lambda_1, \lambda_2\})^k$ . Más aún el diámetro de  $f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_k}([0, 1])$  es

$$\lambda_1^r \lambda_2^{k-r}$$

si  $r$  es la cantidad de índices  $i_j$  que valen 1.

Denotemos por  $\mathcal{C}_k = \{C_i\}_{i=1}^{2^k}$  al cubrimiento de la forma (1.3.2) para cada  $k$ . Estos verifican

$$\sum_i (\text{diam}(C_i))^s = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda_1^{sj} \lambda_2^{s(k-j)} = (\lambda_1^s + \lambda_2^s)^k.$$

Para cualquier  $s \geq \delta$ , la expresión  $(\lambda_1^s + \lambda_2^s)^k$  está acotada uniformemente. Como estos cubrimientos se pueden tomar con diámetro arbitrariamente chico concluimos que

$$\dim_{\text{H}}(\Lambda) \leq \delta.$$

□

Para probar la otra desigualdad construiremos una medida de probabilidad de dimensión  $\delta$  soportada en  $\Lambda$ . Notar que  $\Lambda$  es un espacio métrico con la distancia heredada de  $[0, 1]$ . Para cada  $k$ -upla  $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, 2\}^k$  definimos el *cilindro*

$$[i_1 \cdots i_k] = \Lambda \cap f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_k}([0, 1]).$$

Los cilindros generan la misma topología que las bolas

$$\{\Lambda \cap B(x, r) : r > 0, x \in \Lambda\}.$$

Por lo tanto la  $\sigma$ -álgebra de Borel también es generada los cilindros.

Fijemos un peso  $p \in (0, 1)$  (a determinar luego) y para cada cilindro definimos la premedida

$$\nu([i_1 \cdots i_k]) = \prod_{j=1}^k p \cdot \delta_1(i_j) + (1 - p) \cdot \delta_2(i_j).$$

A un cilindro con  $r$  coordenadas iguales a 1 y  $k - r$  coordenadas iguales a 2 mide  $p^r(1 - p)^{k-r}$ . El conjunto de uniones finitas de cilindros es un álgebra<sup>8</sup>, y  $\nu$  se extiende a una única probabilidad  $\sigma$ -finita en la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\Lambda$  (ver [SS05, Theorem 1.5]).

A partir de la Proposición 1.12 sabemos que  $\dim_{\text{H}}(\nu) \leq \dim_{\text{H}}(\Lambda)$ . Veremos a continuación que  $\nu$  es de dimensión exacta y que para cierta elección del peso  $p$ , la dimensión de  $\nu$  vale exactamente  $\delta$ . Para eso, necesitaremos aplicar el Lema 1.13. Sin embargo no conocemos la medida en las bolas sino en los cilindros. El pasaje de bolas a cilindros está dado por el siguiente lema técnico.

<sup>8</sup>(i.e. es cerrado por complementos y uniones e intersecciones finitas)

**Lema 1.17.** *Para todo  $x = \lim_n [x_1, \dots, x_n] \in \Lambda$  vale*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \nu(B(x, r))}{\log r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \nu([x_1, \dots, x_n])}{\log \text{diam}([x_1, \dots, x_n])}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sean  $x = \lim_n [x_1, \dots, x_n]$  y  $\hat{x} = \lim_n [\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n]$  dos puntos de  $\Lambda$ . Sea  $k \geq 1$  la primer coordenada en que difieren, esto es

$$x_k \neq \hat{x}_k, \text{ y } x_i = \hat{x}_i \quad \forall i < k.$$

En ese caso

$$\begin{aligned} d(x, \hat{x}) &\geq (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot \lambda_{x_1} \cdots \lambda_{x_{k-1}} \\ &\geq \frac{1 - \lambda_1 - \lambda_2}{\text{máx}\{\lambda_1, \lambda_2\}} \cdot \lambda_{x_1} \cdots \lambda_{x_k} \\ &= \frac{1 - \lambda_1 - \lambda_2}{\text{máx}\{\lambda_1, \lambda_2\}} \cdot \text{diam}([x_1, \dots, x_k]). \end{aligned}$$

Sea  $\theta = \frac{1 - \lambda_1 - \lambda_2}{\text{máx}\{\lambda_1, \lambda_2\}}$  y para cada natural  $n$  definimos

$$r_n(x) = \frac{\theta}{2} \cdot \text{diam}([x_1, \dots, x_n]).$$

Por lo anterior, si  $\hat{x} \in B(x, r_n(x))$ , necesariamente  $\hat{x} \in [x_1, \dots, x_n]$  y por lo tanto

$$\nu(B(x, r_n(x))) \leq \nu([x_1, \dots, x_n]).$$

Esto nos permitirá controlar por arriba la medida de las bolas con estos radios. Para la cota inferior, es claro que si tomamos  $m$  suficientemente grande,  $[x_1, \dots, x_{n+m}] \subset B(x, r_n(x))$ . La clave sin embargo, es que  $m$  se puede tomar uniforme en  $x$  y  $n$ : tomamos

$$m = \text{mín} \left\{ k : (\text{máx}\{\lambda_1, \lambda_2\})^m \leq \frac{\theta}{2} \right\}.$$

Con este valor de  $m$  obtenemos que

$$\text{diam}([x_1, \dots, x_{n+m}]) \leq \frac{\theta}{2} \cdot \text{diam}([x_1, \dots, x_n]) = r_n(x).$$

Por lo tanto

$$[x_1, \dots, x_{n+m}] \subset B(x, r_n(x))$$

Hasta ahora tenemos que

$$\frac{\log \nu([x_1, \dots, x_{n+m}])}{\log \text{diam}([x_1, \dots, x_n])} \leq \frac{\log \nu(B(x, r_n(x)))}{\log r} \leq \frac{\log \nu([x_1, \dots, x_n])}{\log \text{diam}([x_1, \dots, x_{n+m}])}, \quad (1.3.3)$$

pero siendo  $m$  uniforme,  $\lim_n \frac{\log \text{diam}([x_1, \dots, x_{n+m}])}{\log \text{diam}([x_1, \dots, x_n])} = 1$  y por lo tanto

$$\lim_n \frac{\log \nu(B(x, r_n(x)))}{\log r} = \lim_n \frac{\log \nu([x_1, \dots, x_n])}{\log \text{diam}([x_1, \dots, x_n])}.$$

Para rematar observamos que  $\lim_n \frac{\log r_{n+1}(x)}{\log r_n(x)} = 1$  y por el lema 1.13 concluimos que

$$\lim_n \frac{\log \nu(B(x, r_n(x)))}{\log r_n(x)} = \lim_n \frac{\log \nu(B(x, r))}{\log r}.$$

□

**Proposición 1.18.** *Con las notaciones anteriores tenemos*

$$\dim_{\text{H}}(\Lambda) \geq \delta.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideramos la medida  $\nu$  construida antes con pesos  $p$  y  $1 - p$ . Usando el Lema 1.17, para calcular la dimensión de  $\nu$  debemos calcular

$$\lim_n \frac{\log \nu([x_1, \dots, x_n])}{\log \text{diam}([x_1, \dots, x_n])},$$

para todos los puntos  $x = \lim_n [x_1, \dots, x_n]$  en un conjunto de medida total. Para cada natural  $k$ , sea  $r_k : \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$  la variable aleatoria

$$r_k(x) = \#\{i \leq k : x_i = 1, \text{ si } x = \lim_n [x_1, \dots, x_n]\},$$

por la ley de los grandes números existe un conjunto de medida total  $B$  tal que

$$\lim_k \frac{r_k(x)}{k} = p.$$

Para cualquier  $x \in B$  tenemos entonces

$$\begin{aligned} \lim_k \frac{\log \nu([x_1, \dots, x_k])}{\log \text{diam}([x_1, \dots, x_k])} &= \lim_k \frac{r_k(x) \log p + (k - r_k(x)) \log(1 - p)}{r_k(x) \log \lambda_1 + (k - r_k(x)) \log \lambda_2} \\ &= \frac{p \log p + (1 - p) \log(1 - p)}{p \log \lambda_1 + (1 - p) \log \lambda_2}. \end{aligned}$$

La fórmula anterior vale para cualquier valor de  $p \in (0, 1)$ . En particular, si  $p = \lambda_1^\delta$  con  $\delta$  dado por (1.3.1), obtenemos

$$\dim_{\text{H}}(\nu) = \delta.$$

□

# Capítulo 2

## Grupos de Schottky en el plano hiperbólico

En este capítulo presentamos una familia de grupos discretos de isometrías del plano hiperbólico.

### 2.1. Preliminares de geometría hiperbólica plana

El objetivo de esta sección es introducir la terminología básica y las notaciones a usar en el espacio geométrico subyacente en todo este trabajo: *el plano hiperbólico*. Topológicamente, es un subconjunto abierto y simplemente conexo del plano complejo  $\mathbb{C}$ . Gracias al teorema de Riemann [SS10, Theorem 3.1] cualquier tal conjunto que no sea todo el plano se identifica vía transformaciones de Möbius con el disco unitario

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Las transformaciones de Möbius se pueden codificar con una matriz compleja  $2 \times 2$  de determinante no nulo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left( z \in \mathbb{C} \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \right).$$

Todas las biyecciones conformes de  $\mathbb{C}$  y más aún, los de la esfera de Riemann  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  que preservan orientación están dados por una transformación de esta clase. Los círculos en la esfera de Riemann son círculos euclídeos en  $\mathbb{C}$  o rectas del plano complejo compactificadas con el punto  $\infty$ . Las transformaciones de Möbius preservan los círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

### 2.1.1. El disco de Poincaré

Sobre  $\mathbb{D}$  definimos la *métrica hiperbólica*

$$ds(x)(u, v) = \frac{2}{1 - |x|^2} dz(x)(u, v) = 2 \frac{\sqrt{\langle u, v \rangle}}{1 - |x|^2} = 2 \frac{\sqrt{u_1 v_1 + u_2 v_2}}{1 - (x_1^2 + x_2^2)},$$

donde  $x = x_1 + ix_2 \in \mathbb{D}$ ,  $u = (u_1, u_2)$  y  $v = (v_1, v_2)$  son vectores del tangente  $T_x \mathbb{D}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y  $|\cdot|$  son el producto interno y el módulo usual en  $\mathbb{C}$  dadas por la métrica euclídea  $dz$ . Esta métrica tiene curvatura gaussiana constante igual a  $-1$  (ver por ejemplo [Hub06, Proposition 2.1.12]). Por definición  $ds$  es conforme a  $dz$ , por lo que los ángulos entre curvas coinciden para la métrica euclídea y la hiperbólica. Los mapas conformes que preservan el disco son bien conocidos:

**Proposición 2.1** ([Dal10, Proposition 1.1]). *Los difeomorfismos conformes de  $\mathbb{D}$  en  $\mathbb{D}$  que preservan orientación son transformaciones de Möbius de la forma*

$$z \mapsto \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \text{ con } |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Si  $f$  es una transformación de como en la proposición anterior, su derivada es

$$f'(z) = \frac{1}{(\bar{b}z + \bar{a})^2}.$$

Derivando y usando que  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ , vemos que la métrica hiperbólica es invariante por  $f$ :

$$\begin{aligned} \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} &= \frac{|\bar{b}z + \bar{a}|^{-2}}{|\bar{b}z + \bar{a}|^2 - |az + b|^2} |\bar{b}z + \bar{a}|^2 \\ &= (|bz|^2 + |a|^2 + \bar{b}az + \bar{a}zb - |az|^2 - |b|^2 - \bar{a}zb - \bar{b}az)^{-1} \\ &= (1 - |z|^2)^{-1}. \end{aligned}$$

El *grupo especial unitario*,  $\mathrm{SU}(1, 1)$  es el grupo de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \text{ con } |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Recordar que la identificación entre matrices y transformaciones de Möbius siempre es a menos de múltiplos escalares, por lo que el grupo de isometrías de  $\mathbb{D}$  que preservan orientación  $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{D})$  no es exactamente  $\mathrm{SU}(1, 1)$  pero se identifica con el cociente

$$\mathrm{SU}(1, 1)/\{\pm \mathrm{Id}\}.$$

Por más detalles consultar [SS10]. El plano hiperbólico tiene un grupo grande de isometrías, en particular  $\mathbf{Isom}^+(\mathbb{D})$  actúa transitivamente en  $\mathbb{D}$ <sup>1</sup>.

Si  $z$  es un punto de  $\mathbb{D}$ , el segmento euclídeo que une  $0 \in \mathbb{D}$  con  $z$  está parametrizado por  $\gamma(t) = tz$ ,  $t \in [0, 1]$  y para la métrica hiperbólica tiene largo

$$l(\gamma) = \int_0^1 ds(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))dt = \int_0^1 \frac{2|z|}{1-t^2|z|^2} dt = \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right). \quad (2.1.1)$$

Se puede chequear directamente que es la curva de  $0$  a  $z$  que minimiza esta longitud. Por lo tanto, las geodésicas por el origen para la métrica hiperbólica son restricciones de las rectas de  $\mathbb{C}$  a  $\mathbb{D}$ .

**Definición 2.2** (Distancia hiperbólica). Dados dos puntos  $z, \hat{z} \in \mathbb{D}$  la distancia entre ambos según la métrica hiperbólica es

$$d_{\mathbb{D}}(z, \hat{z}) = \inf\{l(\gamma) : \gamma \text{ es una curva diferenciable a trozos que los une.}\}$$

En el caso en que uno de los puntos es el origen, la distancia a cualquier otro está dada por (2.1.1). Además como la fórmula depende solamente del módulo euclídeo de  $z$ , el círculo euclídeo con centro  $0$  y radio  $r$  es el círculo hiperbólico con mismo centro y radio

$$\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = 2 \operatorname{arctanh}(r). \quad (2.1.2)$$

Una transformación de Möbius que preserva el disco lleva círculos en círculos. Con esto y la transitividad de la acción de  $\mathbf{Isom}^+(\mathbb{D})$  tenemos que el círculo de radio  $r$  alrededor de un punto  $z \in \mathbb{D}$  para la métrica hiperbólica, es también un círculo euclídeo aunque no con el mismo centro. En particular, ambas métricas generan la misma topología en  $\mathbb{D}$ .

Ya conocemos las geodésicas por el origen en el disco de Poincaré. Como los ángulos se preservan sus imágenes por  $\mathbf{Isom}^+(\mathbb{D})$  son arcos de círculo perpendiculares al borde del disco (los complejos de módulo uno) y por lo tanto éstos son también geodésicas. Más aún dado cualquier punto de  $\mathbb{D}$  y un arco de círculo perpendicular al borde que lo contenga, consideremos una isometría que lleve el punto a  $0$ . El arco se mapea en un diámetro del disco con extremos  $e^{it}$  y  $e^{i(\pi+t)}$  para algún  $t$ . Por otro lado la rotación

---

<sup>1</sup>Observar que la transformación con  $a = 1$  y  $b = \hat{z}$  lleva  $0 \in \mathbb{D}$  en  $\hat{z}$ . Componiendo transformaciones de esta forma y sus inversas podemos llevar cualquier punto de  $\mathbb{D}$  en cualquier otro por un elemento de  $\mathbf{Isom}^+(\mathbb{D})$

$z \mapsto e^{-it}z$  asociada a la matriz

$$\begin{pmatrix} \exp(\frac{-it}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(\frac{it}{2}) \end{pmatrix},$$

lleva los extremos a  $-1$  y  $1$ . Por lo tanto podemos mapear el arco de círculo en la geodésica horizontal por el origen. Componiendo transformaciones de esta forma y sus inversas podemos llevar cualquier arco de círculo perpendicular al borde en cualquier otro y en cualquier diámetro. En otras palabras, la acción de  $\text{Isom}^+(\mathbb{D})$  no solo es transitiva en los puntos del disco pero también lo es en el conjunto de geodésicas con un punto marcado.

### 2.1.2. El semiplano superior

El otro modelo del plano hiperbólico en el que trabajaremos es el del semiplano superior

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}.$$

El mapa  $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$  dado por

$$F(z) = \frac{z - i}{z + i} \tag{2.1.3}$$

es una biyección conforme entre  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{H}$ , con inversa

$$F^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H} : F^{-1}(z) = i \cdot \frac{1 + z}{1 - z}.$$

El pullback de la métrica hiperbólica en  $\mathbb{D}$  por  $F$  resulta

$$F^*(ds)(z)(u_1, u_2) = ds(F(z))(F'(z) \cdot u_1, F'(z) \cdot u_2) = \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\text{Im}(z)},$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto interno usual en  $\mathbb{C}$ ,  $z$  es un punto de  $\mathbb{H}$  y  $u_1, u_2$  son vectores del tangente  $T_z\mathbb{H}$ . En particular, un vector de módulo euclídeo 1 en  $T_z\mathbb{H}$  tiene norma según la métrica hiperbólica muy grande si  $\text{Im}(z)$  es cercana a cero y muy pequeña si  $\text{Im}(z)$  es muy grande. Por simplicidad denotaremos también por  $ds$  a  $F^*(ds)$ .

Observar también que la geodésica horizontal en  $\mathbb{D}$  (los puntos de  $\mathbb{D}$  con parte imaginaria nula) se mapean por  $F^{-1}$  en la recta (euclídea) vertical

$$\{\text{Re}(z) = 0\} \subset \mathbb{H}.$$

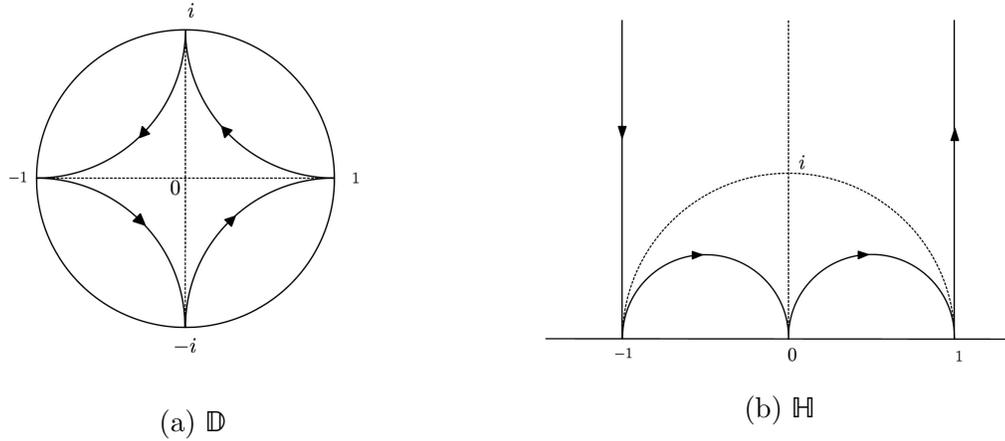


Figura 2.1: El disco de Poincaré y el semiplano superior

En particular esta recta es una geodésica para la métrica hiperbólica en  $\mathbb{H}$ . La curva  $\gamma(t) = e^t \cdot i$  está parametrizada por longitud de arco:

$$ds(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t)) = \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} = \frac{e^t}{e^t} = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.1.4)$$

La extensión natural de  $F^{-1}$  al borde del disco  $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , lo lleva al eje real extendido  $\partial\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}$ , con las identificaciones

- $F^{-1}(-1) = 0$ ,
- $F^{-1}(1) = \infty$ ,
- $F^{-1}(i) = -1$  y
- $F^{-1}(-i) = 1$ .

Como  $F^{-1}$  preserva los ángulos, las geodésicas del disco de Poincaré se mapean en rectas verticales (i.e. de parte real constante) y arcos de círculo perpendiculares al eje real en  $\mathbb{H}$  (círculos con centro en la recta real). Dados dos puntos de  $\mathbb{H}$  existe una única geodésica que los une: una recta vertical si ambos puntos tienen la misma parte real y un arco de círculo perpendicular al borde si no.

Denotamos por  $d_{\mathbb{H}}$  a la distancia inducida por la métrica hiperbólica en  $\mathbb{H}$ :

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \inf\{l(\gamma) : \gamma \text{ es un camino en } C^1 \text{ a trozos en } \mathbb{H} \text{ que une } x \text{ con } y\}.$$

**Proposición 2.3** ([Kat92, Theorem 1.2.6]). *Tenemos la siguiente fórmula para la distancia hiperbólica en  $\mathbb{H}$ ; dados  $x, y \in \mathbb{H}$  vale:*

$$\sinh\left(\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}}(x, y)\right) = \frac{|x - y|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(x)\operatorname{Im}(y)}}.$$

### 2.1.3. La métrica hiperbólica en coordenadas polares

La métrica euclídea en coordenadas polares para  $\mathbb{D}$  corresponde al pull-back por el mapa diferenciable

$$f : (0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D} - \{0\} : (r, \theta) \rightarrow re^{i\theta}.$$

En vista de (2.1.2) y que  $dz^2$  y  $ds^2$  son conformemente equivalentes, para la métrica hiperbólica vamos a considerear el difeomorfismo

$$g : \mathbb{D} - \{0\} \rightarrow \mathbb{D} - \{0\} : re^{i\theta} \rightarrow \tanh(r/2)e^{i\theta}.$$

La métrica en polares ahora está dada por el pull-back de  $ds^2$  por el mapa  $h = g \circ f$ . Observar que  $h$  es un mapa conforme. Si a la métrica obtenida la denotamos por  $dw$  tenemos

$$dw(r, \theta)(u, v) = ds(h(r, \theta))(dh_{(r, \theta)}u, dh_{(r, \theta)}v) = 2\frac{\sqrt{\langle dh_{(r, \theta)}u, dh_{(r, \theta)}v \rangle}}{1 - |h(r, \theta)|^2}.$$

Escribiendo  $dw^2 = E(r, \theta)^2 dr^2 + G(r, \theta)^2 d\theta^2$ , obtenemos

$$E(r, \theta) = 2\frac{\sqrt{\langle h_r, h_r \rangle}}{1 - |h(r, \theta)|^2} = \frac{(\cosh(r/2))^{-2}}{(\cosh(r/2))^{-2}} = 1, \quad y$$

$$\begin{aligned} G(r, \theta) &= 2\frac{\sqrt{\langle h_\theta, h_\theta \rangle}}{1 - |h(r, \theta)|^2} \\ &= 2\frac{\sqrt{\langle \tanh(r/2)ie^{i\theta}, \tanh(r/2)ie^{i\theta} \rangle}}{1 - (\tanh(r/2))^2} \\ &= 2\cosh(r/2)\sinh(r/2) \\ &= \sinh(r). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$dw^2 = dr^2 + \sinh(r)^2 d\theta^2.$$

Con esto conseguimos:

(I) si desde el origen abrimos un ángulo  $\epsilon$ , el arco determinado sobre el círculo de radio  $R$  mide

$$\int_0^\epsilon \sinh(R) d\theta = \epsilon \cdot \sinh(R). \quad (2.1.5)$$

En particular el perímetro del círculo es

$$\int_0^{2\pi} \sinh(R) d\theta = 2\pi \sinh(R),$$

(II) y el área hiperbólica del disco de radio  $R$ :

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \sinh(r) d\theta dr = \int_0^R 2\pi \sinh(r) dr = 2\pi(\cosh(R) - 1).$$

Observar que cuando  $r \rightarrow 0$ , el perímetro del círculo de radio  $r$  es equivalente a  $2\pi r$  y el área a  $\pi r^2$ . Cuando  $r \rightarrow \infty$  ambos son equivalentes a  $\pi e^r$ .

#### 2.1.4. El grupo de isometrías

Presentamos ahora el grupo de isometrías del plano hiperbólico. Como mencionamos antes, en el disco de Poincaré este grupo es isomorfo a un cociente de  $\mathrm{SU}(1, 1)$ . Presentaremos brevemente el grupo de isometrías del semiplano, conjugado a  $\mathrm{SU}(1, 1)$  por el mapa  $F$ . Por más detalles de esta sección referimos a [Kat92, And05, Dal10, Bea95] o a mi monografía de licenciatura [Gar19].

A partir del grupo de matrices

$$\mathrm{S}^*\mathrm{L}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, \text{ y } ad - bc \in \{-1, 1\} \right\},$$

consideramos

$$\mathrm{PS}^*\mathrm{L}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{S}^*\mathrm{L}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \mathrm{Id}\}.$$

**Teorema 2.4** ([Kat92, Theorem 1.3.1]). *El grupo de isometrías del semiplano superior  $\mathrm{Isom}(\mathbb{H})$  es isomorfo a  $\mathrm{PS}^*\mathrm{L}(2, \mathbb{R})$ .*

Nos concentraremos principalmente en el subgrupo  $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$  de las isometrías que preservan orientación. Estas son transformaciones de Möbius asociadas a matrices del subgrupo de  $\mathrm{S}^*\mathrm{L}(2, \mathbb{R})$

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, \text{ y } ad - bc = 1 \right\}.$$

Como una matriz y su opuesta inducen la misma transformación la identificación pasa al cociente

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \mathrm{Id}\},$$

y los elementos de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  están en biyección con las isometrías de  $\mathbb{H}$  que preservan orientación. Observar que  $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$  tiene índice dos en  $\mathrm{Isom}(\mathbb{H})$ . De aquí en más identificaremos constantemente un elemento de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  con su transformación de Möbius asociada.

Como vimos en el disco de Poincaré, las isometrías que preservan orientación actúan transitivamente en el conjunto de geodésicas con uno de sus puntos marcados. Conjugando por el mapa  $F$  lo mismo vale para la acción de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  en  $\mathbb{H}$ .

Hay tres tipos de elementos en  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  según la acción lineal en  $\mathbb{R}^2$  de (cualquiera de) sus dos matrices de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  asociadas. Una matriz de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) - \{\mathrm{Id}\}$  diagonalizable es conjugada en  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  a una de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

para algún  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ . A la matriz y a su isometría de  $\mathbb{H}$  asociada les llamaremos *hiperbólicas*. Una matriz de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$  con un único valor propio real es conjugada a una de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

con  $a \in \{-1, 1\}$ . A ella y su isometría asociada les diremos *parabólicas*. Por último, una matriz sin valores propios reales es conjugada a una rotación

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

para algún  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ . A la matriz y a su isometría asociada les diremos *elípticas*. Los nombres provienen de las curvas invariantes por la acción lineal en  $\mathbb{R}^2$ : hipérbolas y elipses para matrices hiperbólicas y elípticas respectivamente, y el término parabólico como caso intermedio.

Los tres tipos se distinguen al tomar la traza en valor absoluto de la matriz, una cantidad invariante por conjugación y que pasa al cociente  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Una matriz  $A$  tiene  $|\mathrm{tr}(A)|$ :

- $|\lambda + \lambda^{-1}|$  si  $A$  es hiperbólica, y por lo tanto  $|\mathrm{tr}(A)| > 2$ ,

- exactamente 2 si  $A$  es parabólica o  $\text{Id}$  y
- $2 \cdot \cos(\theta) < 2$  si  $A$  es elíptica.

La dinámica de la acción por isometrías en el plano hiperbólico es esencialmente diferente en cada uno de estos tres casos. Si consideramos la isometría dada por una matriz de determinante uno

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

y busquemos sus puntos fijos

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

obtenemos

$$z = \frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones diferentes en  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  si y solo si la matriz es hiperbólica, una única en  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  si es parabólica y una única en  $\mathbb{H}$  si es elíptica. Observar que  $\infty$  es fijo si y solo si  $c = 0$ .

#### 2.1.4.1. Dinámica de una isometría hiperbólica

Dada una matriz hiperbólica, su *eje de traslación* es la única geodésica en  $\mathbb{H}$  cuyos extremos son los puntos fijos por la acción de la matriz. Como preserva orientación y no tiene otros puntos fijos, ésta es la única geodésica invariante por la acción de la matriz.

**Proposición 2.5.** *Sea una  $g \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$  isometría hiperbólica con matriz asociada  $A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Entonces*

$$l(g) := \inf_{x \in \mathbb{H}} \{d_{\mathbb{H}}(x, g(x))\} > 0.$$

*Esta cantidad se dice el largo de traslación de  $g$  y es realizada por los puntos de la única geodésica invariante por  $g$ . Sobre esta geodésica  $g$  actúa como una traslación con distancia  $l(g)$ . Además valen las siguientes igualdades:*

- $|\text{tr}(A)| = 2 \cosh\left(\frac{l(g)}{2}\right),$
- si  $\lambda$  es uno de los dos valores propios de  $A$ , entonces  $l(g) = 2|\log(\lambda)|.$
- Para cualquier  $x \in \mathbb{H}$  se tiene que

$$\lim_n \frac{d_{\mathbb{H}}(x, g^n(x))}{n} = l(g).$$

DEMOSTRACIÓN: Tanto la traza como los valores propios de la matriz son invariantes por conjugación. Por lo tanto a menos de conjugación en  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  podemos suponer

$$A = \begin{pmatrix} \exp(t/2) & 0 \\ 0 & \exp(-t/2) \end{pmatrix},$$

para cierto  $t > 0$ . La transformación de Möbius asociada es  $g : z \mapsto \exp(t) \cdot z$ . La única geodésica invariante por esta transformación es el eje imaginario  $\{\mathrm{Re} = 0\}$ .

De (2.1.4) surge que

$$d_{\mathbb{H}}(i, A \cdot i) = d(i, \exp(t) \cdot i) = t.$$

Se tiene entonces que  $|\mathrm{tr}(A)| = \exp(\frac{t}{2}) + \exp(-\frac{t}{2}) = 2 \cosh(\frac{t}{2})$  y  $t$  también cumple el segundo ítem. Veamos a continuación que  $l(g) = t$ .

Para cualquier  $x \in \mathbb{H}$ , por el teorema 2.3 vale

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(x, e^t \cdot x)}{2}\right) &= \frac{\exp(t/2) - \exp(-t/2)}{2} \frac{|x|}{\mathrm{Im}(x)} \\ &\geq \frac{\exp(t/2) - \exp(-t/2)}{2} \\ &= \sinh\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(i, e^t \cdot i)}{2}\right). \end{aligned}$$

Como  $\sinh^{-1}$  es creciente y la igualdad se da si y solo si  $\mathrm{Re}(x) = 0$ , hemos probado que

$$d_{\mathbb{H}}(x, A \cdot x) \geq d_{\mathbb{H}}(i, A \cdot i), \quad \forall x \in \mathbb{H},$$

y la igualdad se da si y solo si  $\mathrm{Re}(x) = 0$ .

Para ver el último ítem sean  $x \in \mathbb{H}$  cualquiera y un punto  $o$  en la geodésica invariante por  $g$ . Por la desigualdad triangular y usando que  $g$  es una isometría tenemos

$$\begin{aligned} |d_{\mathbb{H}}(x, g^n(x)) - nl(g)| &= |d_{\mathbb{H}}(x, g^n(x)) - d_{\mathbb{H}}(o, g^n(o))| \\ &\leq d_{\mathbb{H}}(o, x) + d_{\mathbb{H}}(g^n(x), g^n(o)) \\ &= 2d_{\mathbb{H}}(o, x). \end{aligned}$$

Dividiendo entre  $n$  el límite es cero y concluimos. □

Supongamos  $B$  una matriz hiperbólica y  $P \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  tal que

$$B = P \cdot A \cdot P^{-1},$$

donde  $A$  es como en la demostración anterior. Al punto  $P(\infty)$  le decimos el *atractor* de  $B$  y a  $P(0)$  le decimos el *repulsor* de  $B$ .

### 2.1.4.2. Dinámica de una isometría parabólica

A menos de conjugación, una matriz parabólica de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La isometría asociada es  $h : z \mapsto z + 1$  y su único punto fijo es  $\infty$ . Las curvas invariantes por la acción de la matriz anterior son las rectas horizontales llamadas *horociclos basados en  $\infty$* . La órbita de cualquier punto de  $\mathbb{H}$  por los iterados esta matriz van hacia  $\infty$ , tanto a futuro como a pasado.

Procediendo como con elementos hiperbólicos, vemos que para cualquier  $x \in \mathbb{H}$

$$\sinh\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(x, x+1)}{2}\right) = \frac{1}{2 \cdot \mathrm{Im}(x)}.$$

En particular  $\inf_{x \in \mathbb{H}} \{d_{\mathbb{H}}(x, h(x))\} = 0$  y no se realiza en  $\mathbb{H}$ .

Si  $B \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  es una matriz parabólica cualquiera, existe  $P \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  tal que

$$B = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Su único punto fijo es  $P(\infty) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Si  $P(\infty) \neq \infty$  los horociclos correspondientes son las imágenes de las rectas horizontales por  $P$ : círculos tangentes al eje real en el punto  $P(\infty)$ .

### 2.1.4.3. Dinámica de una isometría elíptica

Las matrices de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  sin valores propios reales, fijan un único punto de  $\mathbb{H}$  y por lo tanto  $\inf_{x \in \mathbb{H}} \{d_{\mathbb{H}}(x, h(x))\} = 0$  y este valor se realiza en el punto fijo.

**Proposición 2.6.** *La rotación de ángulo  $\theta$  en sentido horario que fija  $i \in \mathbb{H}$  está dada por la matriz*

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN: Primero veamos que  $i$  es fijo por  $R_{\theta}$ . Para eso calculamos

$$R_{\theta} \cdot i = \frac{i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{i \exp(i\theta/2)}{\exp(i\theta/2)} = i.$$

Para probar que  $R_\theta$  rota un ángulo  $\theta$  los elementos de  $\mathbb{H}$  alrededor de  $i$  vemos que  $R'_\theta(\theta) = \exp(-i\theta)$ , por lo que un vector  $v \in T_i\mathbb{H}$  se mapea en  $\exp(-i\theta) \cdot v$ . Por lo tanto la geodésica por  $i$  con dirección  $v$  va en la geodésica por  $i$  con dirección  $\exp(-i\theta) \cdot v$ . Como  $R_\theta$  es una isometría, cada círculo centrado en  $i$  se preserva y concluimos que  $R_\theta$  es una rotación de ángulo  $\theta$  en sentido horario en cada uno de ellos.  $\square$

En general un elemento elíptico  $R$  de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  de la forma

$$R = P \cdot R_\theta \cdot P^{-1},$$

(con  $P \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ ) es una rotación de ángulo  $\theta$  con centro  $P(i)$ .

### 2.1.5. Trigonometría hiperbólica

Las siguientes propiedades pueden encontrarse en [And05, Section 5.6] o [Kat92, Theorem 1.5.2].

**Proposición 2.7.** *Supongamos  $T$  un triángulo hiperbólico de lados  $a, b$  y  $c$  con ángulos opuestos respectivos  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ . Entonces se verifican:*

(I) **Ley del seno:**

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}.$$

(II) **Primera ley del coseno:**

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cdot \cosh(c) - \sinh(b) \cdot \sinh(c) \cdot \cos(\alpha).$$

(III) **Segunda ley del coseno:**

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cosh(c).$$

Con la primera ley del coseno y la ley del seno, como con sus análogos en la geometría euclídea, un triángulo queda determinado dados dos lados y un ángulo o dos ángulos y un lado. Sin embargo la geometría euclídea no tiene una regla análoga a la segunda ley del coseno. Así, un triángulo hiperbólico queda determinado dados sus tres ángulos internos.

### 2.1.6. El borde del plano hiperbólico

Nos concentramos ahora en el “horizonte” del plano hiperbólico. Para comenzar explotamos el hecho de que todo nuestro espacio está encajado en un espacio conocido más grande (la esfera de Riemann). Como mencionamos antes el *borde* del plano hiperbólico (o el *círculo al infinito*) es:

$$\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

en el modelo del semiplano o

$$\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

en el disco de Poincaré. Ambos son conjuntos compactos y el mapa  $F$  en (2.1.3) es una identificación biholomorfa entre los dos, en particular es un mapa bi-Lipschitz entre ambos. Esto será importante cuando estudiemos la dimensión de Hausdorff de subconjuntos del borde, en vista de la Proposición 1.8.

Como la distancia de cualquier punto del plano hiperbólico a los elementos de una sucesión que converge (topológicamente) a un punto del borde tiende a infinito, la noción de distancia hiperbólica pierde sentido para comparar puntos del borde con puntos interiores. La noción de convergencia al borde que usaremos será topológica, simplemente como subconjuntos de la esfera de Riemann.

La acción por transformaciones de Möbius de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  en la esfera de Riemann también preserva  $\partial\mathbb{H}$ , por lo que la acción por isometrías en  $\mathbb{H}$  se extiende naturalmente al borde.

#### 2.1.6.1. Funciones de Busemann, sombras y producto de Gromov

Dados  $x, y, z \in \mathbb{H}$  sea

$$b_z(x, y) := d_{\mathbb{H}}(x, z) - d_{\mathbb{H}}(y, z).$$

Si  $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}$  parametriza un rayo geodésico con  $\sigma(0) = z$  y  $\lim_t \sigma(t) = \zeta \in \partial\mathbb{H}$  el límite

$$b_\zeta(x, y) := \lim_{t \rightarrow +\infty} b_{\sigma(t)}(x, y)$$

existe y no depende del  $z$  elegido. La función  $b_\zeta(\cdot, \cdot) : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  se llama *función de Busemann basada en  $\zeta$* . Para ver esta construcción en detalle en el semiplano superior referimos a la sección 1.1.4 de [Dal10]. Resumimos las propiedades básicas a continuación.

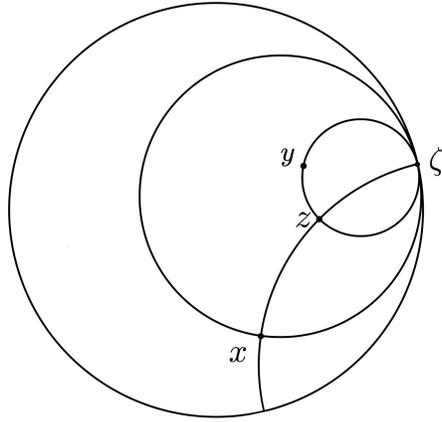


Figura 2.2:  $b_\zeta(x, y) = b_\zeta(x, z) = d_{\mathbb{H}}(x, z) > 0$ .

**Proposición 2.8.** Para  $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ ,  $\zeta \in \partial\mathbb{H}$  y  $x, y, z \in \mathbb{H}$  tenemos:

- (I)  $b_{g(\zeta)}(g(x), g(y)) = b_\zeta(x, y)$ ,
- (II)  $b_\zeta(x, y) = b_\zeta(x, z) + b_\zeta(z, y)$ ,
- (III)  $-d_{\mathbb{H}}(x, y) \leq b_\zeta(x, y) \leq d_{\mathbb{H}}(x, y)$ ,
- (IV)  $b_\zeta(x, y) = -b_\zeta(y, x)$ ,
- (V)  $b_\zeta(x, y) = d_{\mathbb{H}}(x, y)$  si y solo si y pertenece al rayo geodésico  $[x, \zeta)$ .

Se puede ver que las curvas de nivel de la función  $b_\zeta(x, \cdot)$  de Busemann son los horociclos basados en  $\zeta$ . En general  $b_\zeta(x, y)$  mide la distancia entre el horociclo basado en  $\zeta$  que pasa por  $x$  y el que pasa por  $y$ , con signo positivo si el horociclo por  $y$  esta contenido en el “interior” del horociclo por  $x$  (Figura 2.2).

Un amplio contexto para el siguiente resultado puede encontrarse en [Qui] o en [BH99].

**Proposición 2.9.** En el disco de Poincaré se tiene, para  $x, y \in \mathbb{D}$ ,  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ :

$$b_\zeta(x, y) = \log \left( \frac{P(y, \zeta)}{P(x, \zeta)} \right),$$

donde  $P : \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  es el núcleo de Poisson

$$P(z, \zeta) = \frac{1 - \|z\|^2}{\|\zeta - z\|^2}.$$

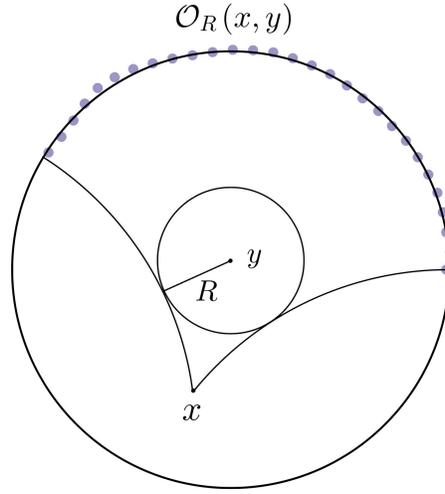


Figura 2.3: La sombra de  $x$  a  $y$  de radio  $R$  en el disco de Poincaré.

**Definición 2.10.** Dados dos puntos  $x, y \in \mathbb{H}$  y  $r > 0$  definimos la *sombra de  $x$  a  $y$  de radio  $R$* , como los límites de rayos geodésicos que parten de  $x$  y pasan por la bola  $B(y, R)$ :

$$\mathcal{O}_R(x, y) := \{\zeta \in \partial\mathbb{H} : [x, \zeta] \cap B(y, R) \neq \emptyset\}.$$

Ver Figura 2.3.

**Proposición 2.11.** Si  $\zeta \in \mathcal{O}_R(x, y)$  entonces

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) - 2R \leq b_{\zeta}(x, y) \leq d_{\mathbb{H}}(x, y).$$

DEMOSTRACIÓN: Ver Apéndice 5.1. □

El *producto de Gromov* entre dos puntos  $\eta, \zeta \in \partial\mathbb{H}$  desde un punto  $x \in \mathbb{H}$  es

$$(\eta \cdot \zeta)_x = \frac{b_{\eta}(x, z) + b_{\zeta}(x, z)}{2},$$

donde  $z \in \mathbb{H}$  es un punto cualquiera de la geodésica que une  $\eta$  y  $\zeta$ . Para ver que no depende de la elección supongamos que  $\hat{z}$  es otro punto de la geodésica, en el rayo  $[z, \zeta)$ .

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} (\eta \cdot \zeta)_x &= \frac{b_{\eta}(x, z) + b_{\zeta}(x, z)}{2} \\ &= \frac{b_{\eta}(x, \hat{z}) + b_{\eta}(\hat{z}, z) + b_{\zeta}(x, \hat{z}) + b_{\zeta}(\hat{z}, z)}{2} \\ &= \frac{b_{\eta}(x, \hat{z}) + d_{\mathbb{H}}(z, \hat{z}) + b_{\zeta}(x, \hat{z}) - d_{\mathbb{H}}(z, \hat{z})}{2}. \end{aligned}$$

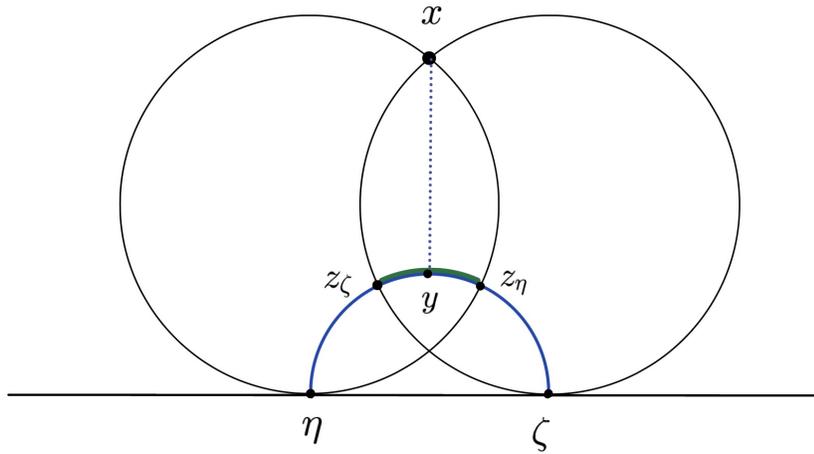


Figura 2.4

Una primera intuición es que  $(\eta \cdot \zeta)_x$  mide la distancia entre los horociclos por  $x$  basados en los dos puntos del borde, medido sobre la geodésica entre ellos. Para ver esto tomemos  $\eta, \zeta \in \partial\mathbb{H}$  y  $x \in \mathbb{H}$ . Denotamos por  $(\eta, \zeta)$  a la geodésica que une los dos puntos del borde. Elegimos  $y$  como el punto de la geodésica que minimiza la distancia a  $x$ . Ahora sean  $z_\eta$  el punto de corte entre el horociclo basado en  $\eta$  por  $x$  y  $z_\zeta$  el análogo para el horociclo basado en  $\zeta$ . Obtenemos algo como en la Figura 2.4.

Entonces

$$\begin{aligned} 2 \cdot (\eta \cdot \zeta)_x &= b_\eta(x, y) + b_\zeta(x, y) \\ &= b_\eta(z_\eta, y) + b_\zeta(z_\zeta, y). \end{aligned}$$

Por construcción  $y \in [z_\eta, \eta) \cap [z_\zeta, \zeta)$  y por lo tanto

$$b_\eta(z_\eta, y) + b_\zeta(z_\zeta, y) = d_{\mathbb{H}}(z_\eta, y) + d_{\mathbb{H}}(z_\zeta, y) = d_{\mathbb{H}}(z_\eta, z_\zeta).$$

Otra intuición es que el producto de Gromov  $(\eta \cdot \zeta)_x$  mide a grandes rasgos la distancia  $d_{\mathbb{H}}(x, (\eta, \zeta))$ . Comencemos con el producto de Gromov *entre puntos de*  $\mathbb{H}$ :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{H}, \quad (y \cdot z)_x := \frac{1}{2} (d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(x, z) - d_{\mathbb{H}}(y, z)).$$

El producto de Gromov entre puntos del borde es una extensión de éste: tomemos una geodésica  $(\eta, \zeta)$  y dos sucesiones  $z_t$  y  $\hat{z}_t$  en la geodésica de manera que  $z_t \rightarrow \eta$  y

$\hat{z}_t \rightarrow \zeta$  con  $t \rightarrow +\infty$ . Fijemos  $y$  otro punto de  $(\eta, \zeta)$ . Entonces, por definición:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (\eta \cdot \zeta)_x &= \lim_t d_{\mathbb{H}}(x, z_t) - d_{\mathbb{H}}(y, z_t) + d_{\mathbb{H}}(x, \hat{z}_t) - d_{\mathbb{H}}(y, \hat{z}_t) \\ &= \lim_t d_{\mathbb{H}}(x, z_t) + d_{\mathbb{H}}(x, \hat{z}_t) - d_{\mathbb{H}}(z_t, \hat{z}_t) \\ &= \lim_t (z_t \cdot \hat{z}_t)_x. \end{aligned}$$

Con un ingrediente adicional conseguimos que  $(\eta \cdot \zeta)_x$  es comparable con  $d_{\mathbb{H}}(x, (\eta, \zeta))$ . Este ingrediente es la siguiente definición: Un triángulo geodésico con vértices  $x, y, z \in \mathbb{H}$  se dice  $\delta$ -fino si cualquiera de los tres lados está contenido en la unión de los  $\delta$ -entornos de otros dos. El siguiente resultado corresponde a [GdlH90, Lemme 17].

**Lema 2.12.** *Si  $\Delta$  es un triángulo geodésico  $\delta$ -fino con vértices  $x, y, z \in \mathbb{H}$  entonces,*

$$(y \cdot z)_x \leq d_{\mathbb{H}}(x, [y, z]) \leq (y \cdot z)_x + \delta,$$

donde  $[y, z]$  es el segmento geodésico que une  $y$  con  $z$ .

Por la discusión anterior, si tomamos  $y_n$  y  $z_n$  sucesiones de puntos sobre una geodésica fija de manera que  $y_n$  tiende a uno de sus extremos y  $z_n$  al otro, conseguimos estimativas similares para dos puntos del borde: para  $\eta, \zeta \in \partial\mathbb{H}$ :

$$2 \cdot (\eta \cdot \zeta)_x \leq d_{\mathbb{H}}(x, (\eta, \zeta)) \leq 2 \cdot (\eta \cdot \zeta)_x + \delta. \quad (2.1.6)$$

Un espacio métrico se dice *hiperbólico* si existe  $\delta > 0$  tal que todo triángulo es  $\delta$ -fino. Referimos a [GdlH90]. Se sabe que el plano hiperbólico es  $\log 2$ -hiperbólico y este valor es óptimo [Nv16].

### 2.1.6.2. Métrica visual en el borde y diámetro de las sombras

A partir del producto de Gromov podemos definir para cada  $z \in \mathbb{H}$  una distancia en  $\partial\mathbb{H}$ , que llamamos la *métrica visual en  $z$* :

$$d_z(\eta, \zeta) := \exp(-(\eta \cdot \zeta)_z).$$

**Teorema 2.13** ([Bou95]). *En cualquier punto de un espacio  $CAT(-1)$  la distancia visual definida arriba es una distancia en el borde.*

En nuestro caso, la distancia obtenida es equivalente a otra muy bien conocida:

**Proposición 2.14.** *La métrica visual en el origen en  $0 \in \mathbb{D}$  es bi-Lipschitz equivalente a la métrica euclídea en el círculo  $\partial\mathbb{D}$ . Más precisamente, existe una constante  $C > 1$  tal que, dados dos puntos del borde  $\eta$  y  $\zeta$ , si  $\alpha \in (0, \pi]$  es el ángulo que forman los rayos geodésicos  $[0, \eta)$  y  $[0, \zeta)$  con vértice en  $0$ , entonces:*

$$C^{-1}\alpha \leq d_0(\eta, \zeta) \leq C\alpha.$$

DEMOSTRACIÓN: Ver Apéndice 5.1. □

**Observación 2.15.** ■ Componiendo con una isometría de  $\mathbb{D}$  obtenemos una identificación bi-Lipschitz entre  $d_0(\cdot, \cdot)$  y  $d_x(\cdot, \cdot)$ , por lo que tenemos un resultado análogo al anterior para cualquier punto  $x \in \mathbb{D}$ .

- Notar que en el modelo del semiplano obtenemos el mismo resultado. Esto se deduce simplemente de que el mapa  $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$  es una identificación bi-Lipschitz entre los bordes en cada modelo.
- Como corolario de los items anteriores, a la hora estudiar la dimensión de Hausdorff de subconjuntos del borde del plano hiperbólico, resulta indiferente hacerlo en cualquiera de los dos modelos, con la distancia visual desde cualquier punto o con la distancia euclídea.

**Proposición 2.16.** *Fijados  $x, y \in \mathbb{H}$ , la asociación*

$$\zeta \in \partial\mathbb{H} \mapsto b_\zeta(x, y)$$

*es Lipschitz para la distancia visual  $d_0$ , es decir existe una constante  $C$  tal que para todos  $\eta, \zeta \in \partial\mathbb{H}$ :*

$$|b_\eta(x, y) - b_\zeta(x, y)| \leq C \cdot d_0(\eta, \zeta).$$

DEMOSTRACIÓN: Ver Apéndice 5.1. □

Cerramos la sección con una estimativa del diámetro de las sombras.

**Proposición 2.17.** *Dados  $x, y \in \mathbb{H}$  y  $R > 0$ , sean  $\eta, \zeta \in \partial\mathbb{H}$  los extremos de la sombra  $\mathcal{O}_R(x, y)$ , entonces existe  $C > 1$  tal que*

$$C^{-1} \cdot \exp(-d_{\mathbb{H}}(x, y)) \leq d_x(\eta, \zeta) \leq C \cdot \exp(-d_{\mathbb{H}}(x, y)). \quad (2.1.7)$$

DEMOSTRACIÓN: Ver Apéndice 2.17. □

**Proposición 2.18.** *Para cualquier elemento  $g \in \text{Isom}(\mathbb{H})$ ,  $x \in \mathbb{H}$  y  $\eta, \zeta \in \partial\mathbb{H}$  vale:*

$$\frac{d_x(g\eta, g\zeta)}{d_x(\eta, \zeta)} = \exp\left(\frac{b_\eta(x, g^{-1}(x)) + b_\zeta(x, g^{-1}(x))}{2}\right).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea  $z \in \mathbb{H}$  perteneciente a la geodésica que une  $\eta$  y  $\zeta$ . Usando las propiedades de las funciones de Busemann calculamos:

$$\begin{aligned} d_x(g\eta, g\zeta) &= \exp\left(-\frac{b_{g(\eta)}(x, g(z)) + b_{g(\zeta)}(x, g(z))}{2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{b_\eta(g^{-1}(x), z) + b_\zeta(g^{-1}(x), z)}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{b_\eta(z, g^{-1}(x)) + b_\zeta(z, g^{-1}(x))}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{b_\eta(z, x) + b_\eta(x, g^{-1}(x))}{2} + \frac{b_\zeta(z, x) + b_\zeta(x, g^{-1}(x))}{2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{b_\eta(x, z) + b_\zeta(x, z)}{2}\right) \exp\left(\frac{b_\eta(x, g^{-1}(x)) + b_\zeta(x, g^{-1}(x))}{2}\right) \\ &= d_x(\eta, \zeta) \exp\left(\frac{b_\eta(x, g^{-1}(x)) + b_\zeta(x, g^{-1}(x))}{2}\right) \end{aligned}$$

□

## 2.2. Grupos fuchsianos

Al tener identificado el grupo  $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$  con un (cociente de) un grupo de matrices, éste hereda una topología y una estructura diferenciable. Como la función determinante es una función suave en  $\mathbb{R}^4$  cuyo único valor crítico es 0,

$$\text{SL}(2, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$$

es una variedad diferenciable de dimensión 3 en  $\mathbb{R}^4$ . Más aún, es un grupo de Lie ya que multiplicar por una matriz fija o invertir una matriz  $2 \times 2$  son operaciones diferenciables. Con la estructura de grupo de Lie podemos probar el siguiente criterio:

**Proposición 2.19.** *Un subgrupo  $G$  de  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  no tiene puntos de acumulación en  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  si y solo si la identidad es un elemento aislado en  $G$ .*

DEMOSTRACIÓN: Ver Apéndice 5.1.

□

Como cada elemento de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  tiene solamente dos preimágenes en  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , el resultado anterior puede reescribirse en  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Por lo tanto un subgrupo discreto de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  no tiene puntos de acumulación en  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

**Definición 2.20.** ■ Un *grupo fuchsiano* es un subgrupo discreto de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

- La acción de un grupo  $G$  en  $\mathbb{H}$  se dice *discontinua* si cualquier compacto contiene a lo sumo finitos elementos de la  $G$ -órbita de un punto dado.

**Teorema 2.21.** *Un grupo  $G \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  es discreto si y solo si actúa discontinuamente en  $\mathbb{H}$ .*

Una prueba puede encontrarse en la Sección 3.1 de mi monografía de licenciatura [Gar19].

**Corolario 2.22.** *Si  $G$  es un grupo fuchsiano la  $G$ -órbita de cualquier punto  $z \in \mathbb{H}$ ,*

$$\{g \cdot z : g \in G\}$$

*es un conjunto discreto.*

La acción de un grupo fuchsiano *tesela* el plano hiperbólico; esto es: existe un subconjunto  $D \subset \mathbb{H}$  que satisface:

- $D$  es cerrado en  $\mathbb{H}$  y tiene interior no vacío,
- $\bigcup_{g \in G} g \cdot D = \mathbb{H}$ ,
- $\mathrm{int}(D) \cap g \cdot \mathrm{int}(D) = \emptyset, \forall g \in G$ .

Un conjunto  $D$  que satisface las tres condiciones anteriores se dice *un dominio fundamental* para la acción de  $G$ . Es posible construir para cualquier grupo fuchsiano, y cada generador del grupo, los llamados *dominios de Dirichlet*: dominios fundamentales que resultan ser polígonos convexos localmente finitos<sup>2</sup> aunque en general no necesariamente compactos (pueden tener vértices en  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ). Por detalles de esta construcción ver [Dal10, Section 1.2] o el apéndice de [Gar19].

---

<sup>2</sup>finitos lados por vértice

### 2.2.1. Conjunto límite

Para los detalles de esta sección referimos a [Dal10, Section 1.3].

**Definición 2.23.** Sea  $G$  un grupo de isometrías del plano hiperbólico, definimos si *conjunto límite* de  $G$  como el conjunto de puntos de acumulación en el borde de cualquier  $G$ -órbita: dado  $z \in \mathbb{H}$  cualquiera

$$\Lambda_G := \overline{G \cdot z} \cap \partial\mathbb{H}.$$

No es difícil ver que la definición no depende del punto  $z$  elegido.

El conjunto límite contiene a todos los puntos fijos de isometrías hiperbólicas o parabólicas de  $G$ , lo que permite probar:

**Proposición 2.24.** *Si un grupo  $G \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  contiene dos elementos hiperbólicos sin puntos fijos en común, entonces  $\Lambda_G$  es un conjunto infinito.*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que si  $g$  y  $h$  son dos hiperbólicos sin fijos en común entonces los elementos de la forma

$$h^{-n} \cdot g \cdot h^n$$

tienen fijos diferentes para cada  $n$ .

□

Un grupo fuchsiano se dice *elemental* si su conjunto límite es finito, posiblemente vacío (por ejemplo al grupo generado por un elíptico lo consideramos elemental). Se puede ver que los grupos fuchsianos elementales están generados por un único elemento a menos de índice dos ([Dal10, Proposition 3.3],[Kat92]).

**Proposición 2.25.** *La acción de un grupo no elemental  $G$  en  $\Lambda_G$  es minimal. Esto es,  $\Lambda_G$  es el menor cerrado (resp. a la inclusión) no vacío en  $\partial\mathbb{H}$  invariante por la acción de  $G$ .*

DEMOSTRACIÓN: Ver [Dal10, Proposition 3.6].

### 2.2.2. Región de Nielsen y grupos convexos cocompactos

La acción de un grupo de isometrías del plano hiperbólico discreto y no elemental tiene un subconjunto asociado que es cerrado, invariante y convexo, y además minimal

con respecto a estas propiedades. Este conjunto se llama *región de Nielsen de  $G$* , la denotaremos  $N(G)$  y resulta ser la envolvente convexa del conjunto límite en el siguiente sentido:  $N(G)$  es la unión de segmentos geodésicos en  $\mathbb{H}$  entre puntos del conjunto:

$$\{z \in \mathbb{H} : \text{existen } \eta, \zeta \in \Lambda_G \text{ y } z \in (\eta, \zeta)\}.$$

Nos será útil mirar la acción de  $G$  restringida a  $N(G)$ . Obviamente  $N(G)$  hereda la métrica hiperbólica de  $\mathbb{H}$  y  $G$  actúa por isometrías en  $N(G)$ . Si  $D$  es un dominio fundamental para la acción  $G \curvearrowright \mathbb{H}$  entonces  $D \cap N(G)$  es un dominio fundamental para la acción  $G \curvearrowright N(G)$  y en particular  $D \cap N(G)$  tesela  $N(G)$ .

**Proposición 2.26.** *Sea  $x \in N(G)$  y  $\zeta \in \Lambda_G$ . Entonces el rayo geodésico  $[x, \zeta)$  está contenido en  $N(G)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos una sucesión  $\{z_n\}_n \subset N(G)$ , con  $z_n \rightarrow \zeta$  si  $n \rightarrow +\infty$ . Por convexidad, el segmento geodésico  $[x, z_n] \subset N(G)$ . Sea  $\zeta_n \in \partial\mathbb{H}$  el extremo del rayo geodésico  $[x, z_n)$ . Tenemos entonces  $\zeta_n \rightarrow \zeta$ . Como  $d_{\mathbb{H}}(x, z_n) \rightarrow +\infty$ , para cada  $N \in \mathbb{N}$  encontramos una sucesión  $x_{n,N} \in [x, \zeta_n]$  a distancia  $N$  de  $x$  y nuevamente, por convexidad  $x_{n,N} \in N(G)$  para todo  $n$  suficientemente grande y todo  $N$ . Tomando límite en  $n$ , para cada  $N$  encontramos puntos a distancia  $N$  de  $x$  en el rayo  $[x, \zeta)$  acumulados por puntos de  $N(G)$ . Como  $N(G)$  es cerrado éstos límites también pertenecen al conjunto. Haciendo  $N$  arbitrariamente grande vemos que todo el rayo geodésico está contenido en  $N(G)$ .

□

**Definición 2.27.** Un grupo discreto y no elemental de isometrías de  $\mathbb{H}$  se dice *convexo cocompacto* si existe un dominio fundamental  $D$  para su acción en  $\mathbb{H}$  tal que  $D \cap N(G)$  es compacto. Si además  $N(G) = \mathbb{H}$  (o equivalentemente  $\Lambda_G = \partial\mathbb{H}$ ) decimos simplemente que el grupo es *cocompacto*.

Nuestros ejemplos de interés serán convexos cocompactos no cocompactos.

**Observación 2.28.** Si  $G$  convexo cocompacto tenemos que:

- (I) para  $\mathbf{o} \in D \cap N(G)$  cualquiera, como  $D \cap N(G)$  tesela  $N(G)$ , todo punto de  $N(G)$  tiene un elemento de la  $G$ -órbita de  $\mathbf{o}$  a distancia a lo sumo  $\text{diam}(D \cap N(G))$ .
- (II)  $G \backslash N(G)$  es compacto con la topología cociente.

**Corolario 2.29.** Sean  $G$  un grupo convexo cocompacto,  $D$  un dominio fundamental en  $\mathbb{H}$  tal que  $D \cap N(G)$  es compacto,  $x \in D \cap N(G)$ , y  $R = \text{diam}(D \cap N(G))$ . Entonces, todo  $\zeta \in \Lambda_G$  pertenece a  $\mathcal{O}_R(x, g(x))$  para infinitos  $g \in G$ .

DEMOSTRACIÓN: Usando la proposición y la observación anteriores, basta observar que el rayo geodésico  $[x, \zeta) \subset N(G)$  es cubierto por alguna sucesión de bolas  $\{B(g_n(x), R)\}_n$ .  $\square$

### 2.2.3. Grafo de Cayley, Lema de Švarc-Milnor y Lema de Morse

Enunciamos ahora dos lemas clásicos, importantes para el capítulo siguiente. Ambos resultados nos permiten vincular la geometría intrínseca del grupo con la del espacio donde actúan.

**Definición 2.30.** El grafo de Cayley de un grupo  $G$  con respecto a un generador  $F$  es el grafo cuyos vértices son los elementos de  $G$ , y entre dos de ellos  $g$  y  $h$  hay una arista si y solo si  $h^{-1}g \in F$ . Nos restringiremos a generadores  $F$  donde  $g \in F$  sii  $g^{-1} \in F$ , por lo que el grafo se puede pensar no dirigido. La *distancia de palabras* entre dos elementos de  $G$ ,  $g$  y  $h$ , se define como la mínima cantidad de letras necesarias para escribir  $g^{-1} \cdot h$  como producto de elementos de  $F$ , o equivalentemente algún camino más corto entre  $g$  y  $h$  siguiendo las aristas del grafo de Cayley.

Si cambiamos la elección del generador, la distancia de palabras cambia, pero de forma “controlada”.

**Definición 2.31.** Un *encaje cuasi-isométrico* entre dos espacios métricos  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  es una función  $f : X \rightarrow Y$  para la cual existen constantes positivas  $A$  y  $B$  tales que  $\forall x_1, x_2 \in X$

$$A^{-1} \cdot d_Y(f(x_1), f(x_2)) - B \leq d_X(x_1, x_2) \leq A \cdot d_Y(f(x_1), f(x_2)) + B.$$

Si además existe una constante  $C$  tal que para todo  $y \in Y$

$$d_Y(y, f(X)) < C$$

decimos que  $f$  es una *cuasi-isometría* (o *cuasi isometría*).

No profundizaremos más de lo indispensable, pero mencionamos simplemente que la noción de cuasi isometría induce una relación de equivalencia entre espacios métricos y que la hiperbolicidad de un espacio (como la definimos antes) es un invariante de las cuasi isometrías. Referimos por ejemplo a [BH99], [BKS91, Chapter 10], [GdlH90] o las notas [Kai14, BP03].

**Proposición 2.32.** *Si  $F'$  es otro generador finito del grupo  $G$  entonces  $id : (G, d_F) \rightarrow (G, d_{F'})$  es una cuasi isometría.*

El primer lema es un resultado muy general que dice esencialmente que si un grupo actúa “lindo” en un espacio métrico “lindo” entonces una órbita del grupo no es distinguible “a gran escala”<sup>3</sup> del espacio en el que actúa. Una prueba puede encontrarse en [BH99, Proposition 8.19].

**Lema 2.33** (Švarc-Milnor). *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo, localmente compacto y geodésico<sup>4</sup> y  $G$  un grupo actuando discontinuamente, por isometrías, en  $X$ . Supongamos además que el cociente  $G \backslash X$  es compacto con la topología cociente. Entonces  $G$  es finitamente generado. Además, dado cualquier generador finito  $F$  de  $G$  y dado cualquier punto  $\mathbf{o} \in X$ , el mapa*

$$\text{orb} : (G, d_F) \rightarrow (X, d) : g \mapsto g(\mathbf{o})$$

*es una cuasi isometría.*

Para grupos convexo cocompactos de  $\text{Isom}(\mathbb{H})$ , el resultado se aplica directamente con  $X = N(G)$ .

**Definición 2.34.** Una *cuasi geodésica* (resp *segmento cuasi geodésico*, *rayo cuasi geodésico*) es una curva imagen de  $\mathbb{R}$  (resp un segmento  $[0, L]$ ,  $[0, +\infty)$ ) por un encaje cuasi isométrico.

El segundo lema nos dice que un espacio métrico hiperbólico los segmentos cuasi geodésicos están uniformemente “cerca” de segmentos geodésicos.

**Lema 2.35** (Morse). *Existe  $R = R(A, B)$  tal que todo segmento cuasi geodésico con constantes  $A, B$  está contenido en el  $R$ -entorno del segmento geodésico que une sus extremos.*

---

<sup>3</sup>(a menos de cuasi isometría)

<sup>4</sup>esto es, que entre cualquier par de puntos hay al menos una geodésica

Nos será útil en general el siguiente corolario del Lema de Morse para rayos cuasi geodésicos en  $\mathbb{H}$ .

**Corolario 2.36.** *Sea  $\alpha$  a un encaje cuasi isométrico de  $[0, +\infty)$  en  $\mathbb{H}$ . Entonces existe el límite  $\alpha_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t$  y es un punto de  $\partial\mathbb{H}$ . Además si  $\beta : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}$  es el rayo geodésico de  $\alpha_0$  a  $\alpha_\infty$  entonces*

$$\sup_{t \in [0, +\infty)} \{d_{\mathbb{H}}(\alpha_t, \beta_t)\} \leq R.$$

DEMOSTRACIÓN: Abuso de notación mediante, denotamos también por  $\alpha$  al rayo cuasi geodésico imagen del encaje. Por compacidad hay algún punto de acumulación de  $\alpha$  en  $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ . Como  $\alpha$  se escapa de cualquier compacto todos sus puntos de acumulación pertenecen a  $\partial\mathbb{H}$ . Para ver que hay un único punto de acumulación basta observar que para todo  $t > 0$ , por Morse, los puntos  $\alpha_s$  con  $s \in [0, t]$  están a distancia acotada (uniforme en  $s$  y  $t$ ) del segmento geodésico  $[\alpha_0, \alpha_t]$ ; por lo que no puede haber subsucesiones en  $[0, +\infty)$  convergiendo a puntos diferentes de  $\partial\mathbb{H}$ .

Sea  $\beta : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}$  es el rayo geodésico de  $\alpha_0$  a  $\alpha_\infty$ . Consideremos una sucesión cualquiera  $\{T_n\}_n \subset [0, +\infty)$  tal que  $T_n > T_{n-1}$  para todo  $n$  y tal que  $\lim_n T_n = +\infty$ . Para cada  $n$  sea  $\beta_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}$  el rayo geodésico desde  $\alpha_0$  y que pasa por  $\alpha_{T_n}$ . Como cada  $\beta_n$  es 1-Lipschitz, por Arzela-Áscoli existe una subsucesión  $\beta_{n_k}$  tal que  $\beta_{n_k}|_{[0, T_1]}$  converge uniformemente a  $\beta|_{[0, T_1]}$ . Además para todo  $s \in [0, T_1]$  tenemos

$$d_{\mathbb{H}}(\beta_s, \alpha_s) = \lim_n d_{\mathbb{H}}((\beta_n)_s, \alpha_s) \leq R. \quad (2.2.1)$$

De la sucesión  $\{\beta_{n_k}\}_k$  se puede tomar una nueva subsucesión que converge uniformemente en  $[0, T_2]$  y satisface (2.2.1) en dicho intervalo. Procedemos de la misma manera para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

□

## 2.2.4. Grupos de Schottky

Podemos ahora presentar los grupos fuchsianos que nos interesarán para este trabajo: los grupo de Schottky. En algún sentido son los subgrupos discretos de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  no elementales más sencillos.

**Proposición 2.37.** *Un grupo fuchsiano no elemental contiene elementos hiperbólicos con ejes de traslación diferentes.*

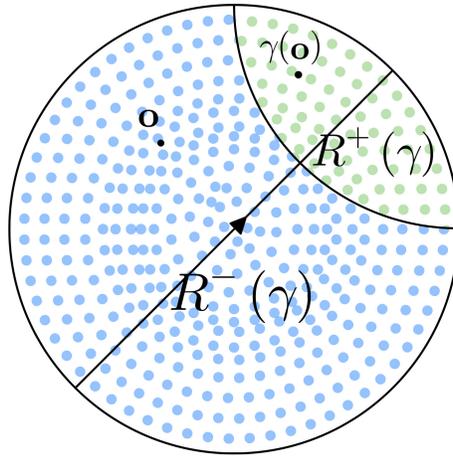


Figura 2.5: Los semiplanos  $R^\pm(\gamma)$  y  $r(\gamma)$  la geodésica borde.

DEMOSTRACIÓN: Si el grupo es no elemental su conjunto límite es infinito y el resultado se deduce de [Dal10, Proposition 3.3].

□

Fijado un punto  $\mathbf{o} \in N(G)$  y un elemento hiperbólico  $\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{H})$  consideramos los semiplanos

$$R^+(\gamma) := \{z \in \mathbb{H} : d_{\mathbb{H}}(z, \gamma \cdot \mathbf{o}) \leq d_{\mathbb{H}}(z, \mathbf{o})\} \text{ y } R^-(\gamma) := \{z \in \mathbb{H} : d_{\mathbb{H}}(z, \gamma \cdot \mathbf{o}) \geq d_{\mathbb{H}}(z, \mathbf{o})\}$$

y denotamos por  $r(\gamma)$  a la geodésica  $R^+(\gamma) \cap R^-(\gamma)$ . Ver Figura 2.5. Observar que con las definiciones análogas para  $\gamma^{-1}$  se tiene que  $\gamma(R^+(\gamma^{-1})) = R^-(\gamma)$ ,  $\gamma(R^-(\gamma^{-1})) = R^+(\gamma)$  y en particular  $\gamma(r(\gamma^{-1})) = r(\gamma)$ .

En general, al considerar un grupo discreto de isometrías generado por un conjunto  $F = \{\gamma_1^{\pm 1}, \dots, \gamma_k^{\pm 1}\}$ , el dominio de Dirichlet (mencionado previamente) para un punto  $\mathbf{o}$ , que no es fijo por ningún elemento no trivial del grupo<sup>5</sup>, es por definición

$$R(\mathbf{o}) := \bigcap_{\gamma \in F} R^-(\gamma).$$

Veremos ahora que si los largos de traslación dos elementos hiperbólicos son suficientemente grandes el grupo que generan es discreto.

**Proposición 2.38.** *Sean  $g, h \in \text{Isom}(\mathbb{H})$  dos isometrías hiperbólicas sin puntos fijos en común. Supongamos además que para  $\gamma, \hat{\gamma} \in F := \{g, g^{-1}, h, h^{-1}\}$  con  $\gamma \neq \hat{\gamma}$  se tiene*

$$d_{\mathbb{H}}(R^+(\gamma), R^+(\hat{\gamma})) > 0.$$

<sup>5</sup>como el grupo es numerable necesariamente existen tales puntos

Entonces el grupo generado por  $F$  es libre y discreto, y  $F$  es un generador libre.

DEMOSTRACIÓN: Veremos que el grupo generado por  $F$  no tiene relaciones no triviales con un argumento estándar llamado usualmente de “ping-pong”. La clave será usar inductivamente un hecho observado previamente: que para todo  $\gamma \in F$

$$\gamma(R^-(\gamma^{-1})) = R^+(\gamma).$$

Tomamos entonces cualquier composición de largo  $k$  de elementos de  $F$   $\gamma_1 \cdots \gamma_k$  con  $\gamma_i \neq \gamma_{i+1}^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, k-1$  y tenemos que

$$\gamma_k(R(\mathbf{o})) \subset \gamma_k(R^-(\gamma_k^{-1})) = R^+(\gamma_k).$$

Como  $\gamma_k \neq \gamma_{k-1}^{-1}$  sabemos que  $R^+(\gamma_k) \cap R^+(\gamma_{k-1}^{-1}) = \emptyset$ , por lo tanto  $R^+(\gamma_k) \subset R^-(\gamma_{k-1}^{-1})$ . Con el mismo argumento, concluimos que

$$\gamma_{k-1}\gamma_k(R(\mathbf{o})) \subset \gamma_{k-1}(R^+(\gamma_k)) \subset \gamma_{k-1}(R^-(\gamma_{k-1}^{-1})) \subset R^+(\gamma_{k-1}).$$

Procediendo inductivamente, se concluye que  $\gamma_1 \cdots \gamma_k(R(\mathbf{o})) \subset R^+(\gamma_1)$ . En particular,  $\gamma_1 \cdots \gamma_k(R(\mathbf{o})) \cap R(\mathbf{o})$  y  $\gamma_1 \cdots \gamma_k \neq \text{Id} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Esto prueba que la identidad en el grupo generado por  $g$  y  $h$  es un elemento aislado (y por lo tanto el grupo es discreto) pero también que toda palabra finita con letras en  $F$  sin inversos consecutivos es diferente de la identidad, por lo que el grupo es isomorfo al grupo libre y  $F$  es un generador libre.  $\square$

La proposición anterior se extiende sin complicaciones a una cantidad arbitraria de generadores. Estos serán los grupos en los que nos concentraremos para este trabajo.

**Definición 2.39.** Un grupo fuchsiano se dice *un grupo de Schottky* si tiene algún generador  $F = \{g_1^{\pm 1}, \dots, g_k^{\pm 1}\}$  tal que cada  $g_i \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  es un elemento hiperbólico y para todos  $\gamma \neq \hat{\gamma}$  elementos de  $F$ ,

$$d_{\mathbb{H}}(R^+(\gamma), R^+(\hat{\gamma})) > 0.$$

**Observación 2.40.** La definición anterior contiene todos los casos de interés para este trabajo. En general se admiten como grupos de Schottky, grupos con generadores infinitos, con elementos parabólicos y relajando la hipótesis de distancia positiva entre las regiones  $R^+(\cdot)$ , pidiendo que sean disjuntas en  $\mathbb{H}$  (pudiendo ser tangentes en  $\partial\mathbb{H}$ ). Casos con elementos parabólicos son tratados, por ejemplo en el Capítulo II de [Dal10].

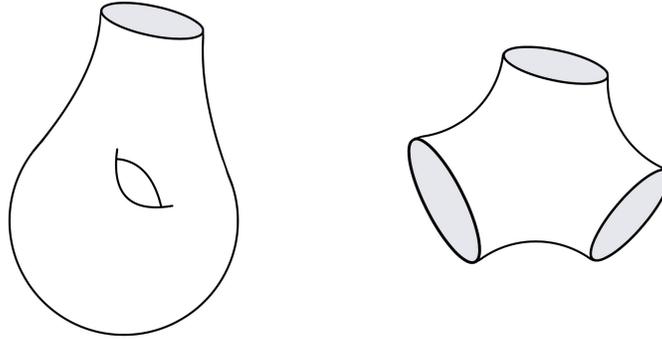


Figura 2.6: Cociente  $G \setminus N(G)$  con  $G$  generado por dos hiperbólicos. En el caso de la izquierda los ejes del generador se intersectan y en el de la derecha no.

En vista de la proposición anterior, los elementos de un grupo de Schottky  $G$  se identifican biyectivamente con las palabras finitas con letras en un generador libre de  $G$  y sin inversos consecutivos. Una palabra sin inversos consecutivos se dice *reducida* y su *largo* es la cantidad de letras. El grafo de Cayley asociado es un árbol regular con  $2k$  vecinos por vértice. En el caso de dos generadores, el cociente  $G \setminus N(G)$  es una superficie orientable con borde como en la Figura 2.6.

**Proposición 2.41.** *Sea  $\Gamma$  un grupo de Schottky generado por hiperbólicos  $g_1^{\pm 1}, \dots, g_k^{\pm 1} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Entonces todo elemento de  $\Gamma - \{\text{Id}\}$  es hiperbólico.*

DEMOSTRACIÓN: Ver [Dal10, Property 1.9].

□

**Proposición 2.42.** *Sea  $G$  un grupo de Schottky. Entonces  $G$  es convexo cocompacto si y solo si tiene un generador libre formado por elementos hiperbólicos.*

El siguiente resultado será importante en el Capítulo 4 y lo tomamos de [FF21].

**Proposición 2.43.** *Consideremos dos elementos hiperbólicos  $g$  y  $h$  sin puntos fijos en común. Denotemos por  $g^+, h^+$  y  $g^-, h^-$  a los atractores y repulsores respectivos. Se tienen las siguientes desigualdades para las longitudes de traslación:*

- (I) *si los ejes de traslación se cortan, entonces  $l(g \cdot h) < l(g) + l(h)$ ;*
- (II) *si los ejes de traslación no se cortan y el orden  $g^+ < h^+ < h^- < g^-$  es compatible con una orientación en el círculo entonces  $l(g \cdot h) > l(g) + l(h)$ ;*

- (III) *si los ejes de traslación no se cortan y el orden  $g^+ < h^- < h^+ < g^-$  es compatible con una orientación en el círculo entonces  $l(g^{-1} \cdot h) > l(g) + l(h)$ .*

DEMOSTRACIÓN:

- (I) Fijemos  $o \in \mathbb{D}$  el punto de corte de los ejes. Aplicando triangulares tenemos

$$\begin{aligned} l(gh) &\leq d_{\mathbb{H}}(o, gh(o)) \\ &\leq d_{\mathbb{H}}(o, g(o)) + d_{\mathbb{H}}(g(o), gh(o)) \\ &= d_{\mathbb{H}}(o, g(o)) + d_{\mathbb{H}}(o, h(o)) \\ &= l(g) + l(h). \end{aligned}$$

Como  $h$  no preserva la misma geodésica que  $g$ , los puntos  $o, g(o)$  y  $gh(o)$  no están alineados, por lo tanto la segunda desigualdad es estricta.

- (II) En este caso escribimos a las dos isometrías como composiciones de simetrías axiales (ver [Bea95, Section 7.38]). Para ello tomamos  $r_1$  la única geodésica perpendicular a ambos ejes de traslación y  $s_1$  la simetría axial por dicha geodésica. Luego quedan determinadas otras dos geodésicas,  $r_2$  y  $r_3$ , perpendiculares a los ejes de  $g$  y  $h$  respectivamente de manera que

$$g = s_2 \circ s_1, \text{ y } h = s_1 \circ s_3;$$

siendo  $s_2$  y  $s_3$  las simetrías axiales correspondientes. Ver Figura 2.7. El eje de traslación del producto

$$g \cdot h = s_2 \circ s_1 \circ s_1 \circ s_3 = s_2 \circ s_3$$

es la geodésica perpendicular común a  $r_2$  y  $r_3$ , y se tiene la desigualdad

$$l(g \cdot h) = 2d_{\mathbb{H}}(r_2, r_3) > 2(d_{\mathbb{H}}(r_2, r_1) + d_{\mathbb{H}}(r_1, r_3)) = l(g) + l(h).$$

- (III) Inmediato a partir de la parte anterior.

□

Enunciamos a continuación una caracterización del conjunto límite de un grupo de Schottky, que muestra en particular que el conjunto límite de un grupo de Schottky es

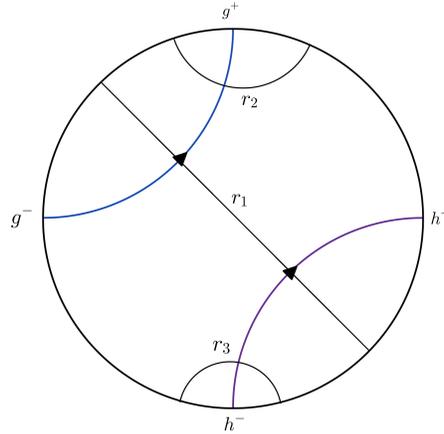


Figura 2.7: Descomposición en simetrías axiales de  $g \cdot h$

topológicamente un conjunto de Cantor en  $\partial\mathbb{H}$ . En el capítulo siguiente obtendremos una codificación simbólica que nos permitirá manipular más cómodamente las propiedades métricas (y medibles) del conjunto límite.

Fijado un punto  $\mathbf{o} \in N(G)$ , usamos como antes la notación

$$R^+(\gamma) = \{z \in \mathbb{H} : d_{\mathbb{H}}(z, \gamma \cdot \mathbf{o}) \leq d_{\mathbb{H}}(z, \mathbf{o})\},$$

para  $\gamma \in F$ . Para un elemento  $\gamma_1 \cdots \gamma_r \in G$  en su forma reducida definimos

$$R^+(\gamma_1 \cdots \gamma_r) = \gamma_1 \cdots \gamma_{r-1} \cdot R^+(\gamma_r).$$

En particular

$$R^+(\gamma_1 \cdots \gamma_r) \subset R^+(\gamma_1 \cdots \gamma_{r-1}) \subset \cdots \subset R^+(\gamma_1).$$

**Proposición 2.44.**

$$\Lambda_G = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{\substack{\gamma_1 \cdots \gamma_k \\ \text{palabra reducida} \\ \text{de largo } k}} \overline{R^+(\gamma_1 \cdots \gamma_k)},$$

con la clausura de  $R^+(\cdot)$  tomada en  $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$  como subconjunto de  $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ .

DEMOSTRACIÓN: Ver [Dal10, Proposition 1.11].

□

## 2.3. Enunciado Principal: pérdida de dimensión para caminatas de vecinos más cercanos

Fijemos un grupo de Schottky  $G$  con neutro  $e$  y generado libremente por  $2d$  elementos hiperbólicos  $a_1, \dots, a_{2d}$  de manera que  $a_{d+j} = a_j^{-1}$ . En  $G$  consideramos una caminata al azar con incrementos soportados en dicho generador. Esto es, consideramos pesos  $p_j \in (0, 1)$  con  $\sum_{j=1}^{2d} p_j = 1$  y una sucesión de variables aleatorias  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que toman valores en  $F = \{a_j\}_j$  con probabilidades

$$\mathbb{P}(X_n = a_j) = p_j, \quad a_j \in F, n \in \mathbb{N}.$$

La *caminata al azar* en  $G$  asociada a estos pesos es la sucesión productos sucesivos

$$Z_n = \begin{cases} Z_0 = e \\ X_1 \cdots X_n, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Como los incrementos de la caminata son los elementos del generador libre  $F$ , decimos que la caminata es *de vecinos más cercanos*.

Para dirigirnos al teorema principal de este trabajo, optamos por minimizar los resultados previos, postergando los detalles al Capítulo 4.

Fijado un punto base  $\mathbf{o} \in \mathbb{H}$  cada  $Z_n$  tiene asociado naturalmente el punto

$$Z_n(\mathbf{o}) \in \mathbb{H}.$$

Se puede ver (Teorema 4.7) que el largo de la palabra  $Z_n$ , como palabra reducida con letras en  $F$  tiende a infinito casi seguramente. Con esto obtendremos que la sucesión  $\{Z_n(\mathbf{o})\}_n$  tiene un límite bien definido en  $\Lambda_G$ . Es decir, con probabilidad uno, la caminata en  $\mathbb{H}$  converge a algún punto del borde. La *medida estacionaria de la caminata* <sup>6</sup>, que a un boreliano  $E \subset \partial\mathbb{H}$  le asigna

$$\nu(E) := \mathbb{P}(\lim_n Z_n(\mathbf{o}) \in E),$$

tiene como soporte todo  $\Lambda_G$  y resulta ser de dimensión exacta<sup>7</sup>. Por la Proposición 1.12, la dimensión de Hausdorff de la medida está mayorada por la de  $\Lambda_G$ . Diremos que la

---

<sup>6</sup>o *medida armónica*, como se le suele llamar también

<sup>7</sup>Una versión muy general de este resultado junto con una fórmula del tipo “entropía sobre exponente de Lyapunov” para su dimensión puede encontrarse en [Tan19]

medida estacionaria (o que la caminata) *pierde dimensión* cuando la desigualdad es estricta.

En la demostración de la Proposición 1.18 donde teníamos dos similaridades en  $\mathbb{R}$ , construimos una medida que realiza la dimensión del conjunto de Cantor que la soporta tomando pesos convenientes. En el contexto de esta sección, tenemos un conjunto finito de transformaciones de Möbius (los elementos del generador  $F$ ) que determinan un conjunto de Cantor en  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ : el conjunto límite del grupo que generan. Sobre este conjunto, para cada elección de pesos iniciales sobre los elementos de  $F$  tenemos una probabilidad natural sobre el conjunto límite: la media estacionaria de la caminata. El objetivo principal de este trabajo es probar la pérdida de dimensión para estas caminatas al azar en grupos de Schottky.

**Teorema Principal 1.** *Sean  $G$  un grupo de Schottky con generador libre y finito  $F$ ,  $\mu$  una probabilidad soportada en  $F$  y  $\nu$  la probabilidad  $\mu$ -estacionaria en el conjunto límite  $\Lambda_G$ . Entonces  $\nu$  pierde dimensión; esto es:*

$$\dim_{\mathbb{H}}(\nu) < \dim_{\mathbb{H}}(\Lambda_G).$$

# Capítulo 3

## Formalismo Termodinámico

La teoría que presentaremos ahora estudia medidas en secuencias de símbolos sobre un alfabeto finito  $F$ . Sobre las sucesiones de símbolos hay una dinámica natural que corresponde a eliminar el primer término de la sucesión. El estudio de medidas invariantes por esta transformación es a grandes rasgos lo que se denomina *formalismo termodinámico* y nos basaremos en el enfoque llevado a cabo por uno de sus mayores exponentes: **Rufus Bowen** (1947–1978). Las referencias principales para este capítulo son [Bow08] y [BP11]. Nuestro ejemplo de interés es siempre  $\Sigma$ : el conjunto de palabras infinitas reducidas en un generador libre de un grupo de Schottky, y es con respecto a quién enunciaremos todos los resultados relevantes. El formalismo termodinámico proporciona una maquinaria potente una vez obtenida una buena codificación simbólica de la dinámica que se quiere estudiar <sup>1</sup>, y como consecuencia los contextos de aplicación de la teoría son variados y con ello va la dispersión de resultados en la literatura. El principio del survey [BP11] es una buena guía para lo que necesitaremos de la teoría en este trabajo.

De aquí en más fijamos un grupo de Schottky  $G$  con generador libre

$$F = \{a_1, \dots, a_{2d}\}, \quad a_{d+j} = a_j^{-1}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Denotamos por  $\Lambda$  a su conjunto límite y por  $\Sigma$  al conjunto de palabras reducidas infinitas en  $F$ :

$$\Sigma = \{\omega_1 \cdots \omega_n \cdots : \omega_i \in F \text{ y } \omega_i \neq \omega_{i+1}\}.$$

En general denotaremos por  $\omega$  a un elemento  $\omega_1 \cdots \omega_n \cdots \in \Sigma$ .  $\Sigma$  se puede ver también como el conjunto de caminos admisibles siguiendo las aristas de un grafo dirigido con

---

<sup>1</sup>por ejemplo, la estrategia que usaremos en este trabajo fue desarrollada por Bowen para estudiar difeomorfismos “Axioma A” [Bow08] y el conjunto límite de grupos cuasi-Fuchsianos [Bow79]

vértices  $F$  y aristas entre cualquier par de vértices no inversos. En el caso de dos generadores y sus inversos, el grafo tiene vértices  $\{g, h, g^{-1}, h^{-1}\}$  y la matriz de adyacencias respectiva es:

$$M_{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bowen desarrolla su teoría para “subshifts de tipo finito irreducibles”. Un *subshift*  $\mathcal{X}$  es un conjunto de sucesiones de  $F^{\mathbb{N}}$ , donde  $F$  es un alfabeto finito definidos por un cierto conjunto  $\mathcal{F}$  de palabras finitas “prohibidas”

$$\mathcal{X} = \{\omega_1 \dots \omega_n \dots : \forall i < j, \omega_i \omega_{i+1} \dots \omega_j \notin \mathcal{F}\}.$$

$\mathcal{X}$  no determina un único conjunto  $\mathcal{F}$ , pero decimos que es un *subshift de tipo finito (SFT)* si  $\mathcal{F}$  se puede tomar como un conjunto finito. En  $\mathcal{X}$  definimos el *shift unilateral a izquierda*

$$\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} : \sigma(\omega_1 \omega_2 \dots) = \omega_2 \omega_3 \dots$$

Una familia particular de SFT, en la que nuestro caso entra, son los caminos admisibles de un grafo dirigido finito<sup>2</sup>, donde el conjunto  $\mathcal{F}$  se puede tomar como pares de vértices sin arista del primero al segundo. Estos se denominan *topological Markov chains* (TMC) ([Par77]) o *intrinsic Markov chains* ([Par64]). Un TMC se dice *irreducible* si su matriz de adyacencia asociada tiene alguna potencia con todas sus entradas estrictamente positivas. Esto equivale a que el grafo asociado sea fuertemente conexo o que el shift  $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  es topológicamente mixing ([Bow08, Lema 1.3]). Nuestro ejemplo de interés claramente cae en esta clase: podemos tomar  $\mathcal{F} = \{a_j a_j^{-1} : j = 1, \dots, 2d\}$  y  $M_{\Sigma}^2$  tiene todas sus entradas positivas.

En  $\Sigma$  consideramos la distancia dada por:

$$d_{\Sigma}(\omega, \hat{\omega}) = \exp(-\text{máx}\{n : \omega_i = \hat{\omega}_i, \forall i \leq n\}),$$

y  $d_{\Sigma}(\omega, \omega) = 0$ . Una base de entornos para un elemento  $\omega$  son los *cilindros*

$$[\omega_1 \dots \omega_n] = \{\hat{\omega} \in \Sigma : \hat{\omega}_i = \omega_i, \forall i \leq n\}.$$

Con esta distancia,  $\Sigma$  es un espacio métrico compacto, completo, separable y totalmente disconexo. La única sigma álgebra a considerar en  $\Sigma$  es la de Borel (generada por los

---

<sup>2</sup>finitos vértices y finitas aristas

cilindros). Por el Teorema de extensión de Carathéodory, dos medidas sigma finitas no pueden coincidir en todos los cilindros de  $\Sigma$ . A menos que se especifique lo contrario, todas las medidas a considerar son probabilidades de Radón, sigma finitas y definidas en los boreleanos de  $\Sigma$ .

**Proposición 3.1.** *Sea  $\mathbf{o}$  un punto cualquiera en la región de Nielsen de  $G$ . Entonces existe un homeomorfismo Hölder continuo  $\pi : (\Sigma, d_\Sigma) \rightarrow (\Lambda, d_\mathbf{o})$  tal que  $\forall \omega \in \Sigma$*

$$\pi(\omega) = \lim_n \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o}.$$

Para simplificar la exposición postergamos brevemente esta prueba. Es la codificación simbólica  $\pi$  la que nos introducirá al formalismo termodinámico, donde podremos comparar las dos medidas que nos interesan en el Teorema 1: la de Hausdorff de  $\Lambda$  contra la medida estacionaria de una caminata al azar en el grupo. Las definiciones pertinentes se darán más adelante, pero vale la pena tener en mente que el shift  $\sigma$  admite muchas medidas invariantes<sup>3</sup>. Sin embargo, existe para cada una de nuestras dos medidas de interés una única invariante y ergódica, con respecto a las cuales son absolutamente continuas respectivamente. Comparar estas dos medidas invariantes es lo que nos permitirá concluir que la medida estacionaria tiene dimensión menor que el conjunto límite. Más concretamente, para demostrar el teorema usaremos el contrarrecíproco del siguiente resultado:

**Lema 3.2.** *Sea  $\nu$  una probabilidad shift invariante y ergódica. Si se cumple  $\dim_{\mathbb{H}}(\nu) = \dim_{\mathbb{H}}(\Lambda) = \delta$ , entonces existe una constante uniforme  $C > 1$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  y todo cilindro  $[\omega_1 \cdots \omega_n] \subset \Sigma$  vale:*

$$C^{-1} \cdot \exp(-\delta d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o})) \leq \nu(\pi[\omega_1 \cdots \omega_n]) \leq C \cdot \exp(-\delta d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o})).$$

La prueba del lema será el objetivo de todo este capítulo. Cerramos esta sección con la prueba pendiente:

DEMOSTRACIÓN:(Proposición 3.1)

Sea  $\omega \in \Sigma$  una palabra infinita reducida cualquiera. Por Švarc-Milnor (Lema 2.33)  $\{\omega_1 \cdots \omega_n(\mathbf{o})\}_n \subset \mathbb{H}$  es un rayo cuasi geodésico en  $\mathbb{H}$ . Por el Corolario 2.36 existe el

<sup>3</sup>Por ejemplo, sobre una órbita periódica para el shift podemos colocar peso uniforme y obtenemos una medida  $\sigma$ -invariante y ergódica. Notar que los puntos periódicos de  $\Sigma$  forman un conjunto denso y hay órbitas periódicas de período arbitrariamente grande.

límite

$$\lim_n \omega_1 \cdots \omega_n(\mathbf{o}) =: \pi(\omega) \in \partial\mathbb{H}.$$

Recordar que  $\omega_1 \cdots \omega_n(\mathbf{o}) \in R^+(\omega_1 \cdots \omega_n)$  para todo  $n$ , por lo que cualquier palabra límite con el prefijo  $\omega_1 \cdots \omega_n$  pertenece a  $\overline{R^+(\omega_1 \cdots \omega_n)}$ ; y además si  $\omega_n \neq \hat{\omega}_n$  entonces  $R^+(\omega_1 \cdots \omega_{n-1}\omega_n) \cap R^+(\omega_1 \cdots \omega_{n-1}\hat{\omega}_n) = \emptyset$ , por lo que  $\pi$  resulta inyectiva. La sobreyectividad se concluye del Lema 2.44 ya que si  $\zeta \in \bigcap_{n \geq 1} \overline{R^+(\omega_1 \cdots \omega_n)}$  entonces es aproximado por la sucesión  $\{\omega_1 \cdots \omega_n(\mathbf{o})\}_n$ .

Para ver que  $\pi$  es una función Hölder tomamos  $\omega \neq \hat{\omega}$  y  $\gamma := \omega_1 \cdots \omega_n = \hat{\omega}_1 \cdots \hat{\omega}_n$  y  $\omega_{n+1} \neq \hat{\omega}_{n+1}$ ; es decir  $d_\Sigma(\omega, \hat{\omega}) = \exp(-n)$ . Por (2.1.6) conseguimos  $\beta > 0$  tal que

$$d_{\mathbf{o}}(\pi(\omega), \pi(\hat{\omega})) \leq \text{const} \cdot \exp(-\beta d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, (\pi(\omega), \pi(\hat{\omega}))).$$

Aplicando el Lema de Morse conseguimos  $R$  tal que los rayos geodésicos  $[\mathbf{o}, \pi(\omega)]$  y  $[\mathbf{o}, \pi(\hat{\omega})]$ , y la geodésica  $(\pi(\omega), \pi(\hat{\omega}))$  están a distancia menor a  $R$  de  $\gamma(\mathbf{o})$ . Por lo tanto

$$d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, (\pi(\omega), \pi(\hat{\omega}))) \geq d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \gamma(\mathbf{o})) - R \quad (3.0.1)$$

y concluimos, por Švarc-Milnor que existe  $\beta' > 0$  tal que

$$d_{\mathbf{o}}(\pi(\omega), \pi(\hat{\omega})) \leq \text{const} \cdot \exp(-\beta' n).$$

□

**Observación 3.3.** ■ Si aplicamos el mismo argumento que usamos en la demostración anterior para concluir (3.0.1) a las geodésicas  $r(\omega_1 \cdots \omega_k)$  en vez de  $(\pi(\omega), \pi(\hat{\omega}))$  podemos probar que el diámetro visual de  $R^+(\omega_1 \cdots \omega_k) \rightarrow 0$  con  $k$ , por lo que las intersecciones encajadas  $\bigcap_{k \geq 1} \overline{R^+(\omega_1 \cdots \omega_k)}$  consisten en un punto, dando así una prueba para el Lema 2.44.

- A partir del ítem anterior, vemos que la acción de  $G$  en  $\Lambda$  se corresponde con la concatenación de símbolos seguido de eliminar inversos consecutivos. Más específicamente, si  $\gamma_1 \cdots \gamma_n$  es una palabra finita reducida, y  $\zeta = \zeta_1 \cdots$  un elemento de  $\Sigma$ , entonces

$$\gamma_1 \cdots \gamma_n \cdot \zeta = \bigcap_{k \geq 1} \gamma_1 \cdots \gamma_n \overline{R^+(\zeta_1 \cdots \zeta_k)} = \bigcap_{k \geq 1} \overline{R^+(\gamma_1 \cdots \gamma_{n-t} \cdot \zeta_{t+1} \cdots \zeta_k)}, \quad (3.0.2)$$

donde  $1 \leq t \leq n$  es tal que  $\gamma_{n-t} \neq \zeta_{t+1}^{-1}$  y  $\gamma_{n-t+i} = \zeta_i^{-1}$  para todo  $i = 1, \dots, t$ .

**Proposición 3.4.** *Dado un punto cualquiera  $\mathbf{o} \in N(G)$  existen  $R > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$  tales que para todo  $\omega \in \Sigma$*

$$\pi(\omega) \in \mathcal{O}_R(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n(\mathbf{o})).$$

DEMOSTRACIÓN: Dado  $\omega \in \Sigma$  cualquiera, por Švarc-Milnor la imagen del rayo geodésico  $[id, \omega)$  según la distancia de palabras  $d_F$  en  $G$  es una cuasi-geodésica en la región de Nielsen  $N(G)$ . Por el Lema de Morse esta cuasi-geodésica está a distancia a lo sumo  $R$  (uniforme) del rayo geodésico  $[\mathbf{o}, \pi(\omega))$ . Por lo tanto

$$\pi(\omega) \in \mathcal{O}_R(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n(\mathbf{o})).$$

□

### 3.1. Medidas de equilibrio

Una medida  $\mu$  se dice *shift invariante* si  $\sigma_*\mu = \mu$ , donde  $\sigma_*\mu$  es el push-forward de  $\mu$  por  $\sigma$ . Una medida shift invariante  $\mu$  se dice *ergódica* si para cualquier conjunto  $A \subset \Sigma$  invariante (i.e.  $\sigma^{-1}(A) = A$ ) se tiene  $\mu(A) \in \{0, 1\}$ .

**Definición 3.5.** Dada una función continua  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos:

- La  $n$ -ésima suma de Birkhoff de  $\psi$

$$S_n\psi(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ \sigma^i(\omega).$$

- Para cada natural  $k$  definimos

$$\text{var}_k(\psi) = \sup \{ |\psi(\omega) - \psi(\hat{\omega})| : \omega_i = \hat{\omega}_i \ \forall i \leq k \}.$$

- Si existen constantes  $c > 0$  y  $\alpha \in (0, 1)$  tales que para todo  $k$

$$\text{var}_k(\psi) \leq c \cdot \alpha^k,$$

diremos que  $\psi$  es un *potencial Hölder*. Esta condición corresponde a ser Hölder con respecto a la distancia  $d_\Sigma$ , con constantes  $c$  y  $-\log \alpha$ .

**Teorema 3.6** ([Bow08, Theorem 1.2]). *Sea  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  un potencial Hölder. Entonces existe una única medida de probabilidad  $\nu_\psi$  en  $\Sigma$ , invariante y ergódica para el shift que cumple lo siguiente:*

*Existen constantes  $C_1, C_2 > 0$  y  $P \in \mathbb{R}$ , tales que para todo natural  $n$  y todo  $\omega \in \Sigma$ :*

$$C_1 \cdot \exp(-n \cdot P + S_n \psi(\omega)) \leq \nu_\psi[\omega_1 \cdots \omega_n] \leq C_2 \cdot \exp(-n \cdot P + S_n \psi(\omega)). \quad (3.1.1)$$

*Notación.* Usaremos la notación  $a \asymp b$  para indicar que el cociente  $\frac{a}{b}$  está acotado por constantes uniformes positivas. Así, (3.1.1) lo reescribimos como

$$\nu_\psi[\omega_1 \cdots \omega_n] \asymp \exp(-n \cdot P + S_n \psi(\omega)).$$

La probabilidad  $\nu_\psi$  que da el teorema se llama *medida de Gibbs* o *medida de equilibrio* del potencial  $\psi$ . El teorema se puede leer “la medida de equilibrio asociada a un potencial  $\psi$  es la única probabilidad shift invariante cuyo valor en los cilindros es comparable con las sumas de Birkhoff de  $\psi - P$ ”, donde “comparable” significa a menos de constantes multiplicativas uniformes.

La constante  $P$ , que depende sólo de  $\psi$ , se denomina *presión topológica de  $\psi$*  y se caracteriza por el siguiente principio variacional

$$P = \sup \left\{ h_\mu(\sigma) + \int_\Sigma \psi(\omega) d\mu(\omega) : \mu \text{ probabilidad shift invariante en } \Sigma \right\}, \quad (3.1.2)$$

donde  $h_\mu(\sigma)$  es la *entropía medible* o *entropía de Kolmogorov-Sinai* del shift con respecto a la probabilidad  $\mu$ . La medida de equilibrio de  $\psi$  se caracteriza también en términos de la presión:

**Teorema 3.7** ([Bow08, Theorem 1.22]). *Sea  $\psi$  como en las hipótesis del Teorema 3.6. Entonces el supremo en (3.1.2) es un máximo y es alcanzado solamente por la medida de Gibbs  $\nu_\psi$ .*

**Teorema 3.8** ([Bow08, Theorem 1.28]). *Sean  $\varphi, \psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  dos potenciales Hölder. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (I)  $\nu_\varphi = \nu_\psi$ ;
- (II) *existe una constante  $K$  tal que  $S_n \varphi(\omega) - S_n \psi(\omega) = n \cdot K$ , siempre que  $\sigma^n(\omega) = \omega$ ;*
- (III) *existen una constante  $K$ , y una función  $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\varphi(\omega) - \psi(\omega) = K + u(\sigma(\omega)) - u(\omega), \quad \forall \omega \in \Sigma;$$

(IV) existen constantes  $K$  y  $L$  tales que para todo  $\omega \in \Sigma$  y todo  $n > 0$

$$|S_n \varphi(\omega) - S_n \psi(\omega) - n \cdot K| \leq L.$$

Si estas condiciones se cumplen, entonces

$$K = P_\varphi - P_\psi,$$

donde  $P_\varphi$  y  $P_\psi$  son las presiones topológicas respectivas.

Bajo cualquiera de las condiciones en el teorema anterior diremos que  $\varphi$  y  $\psi$  son potenciales *cohomólogos*.

## 3.2. El potencial geométrico

En esta sección estudiaremos un potencial Hölder en  $\Sigma$  cuya medida de equilibrio es equivalente a la medida de Hausdorff en  $\Lambda$ . Fijamos de ahora en más un punto  $\mathbf{o} \in N(G)$ . Comencemos considerando la función

$$\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} : \psi(\omega) = b_{\pi(\omega)}(\mathbf{o}, \omega_1(\mathbf{o})).$$

**Proposición 3.9.**  *$\psi$  es un potencial Hölder estrictamente positivo. Sus sumas de Birkhoff tienen cumplen:*

$$S_n \psi(\omega) = b_{\pi(\omega)}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o}).$$

DEMOSTRACIÓN: Por compacidad alcanza con ver que  $\psi$  es *localmente* Hölder. Por un lado,  $\pi$  es Hölder (Proposición 3.1) y por otro, por la Proposición 2.16 tenemos que  $\zeta \mapsto b_\zeta(\mathbf{o}, \omega_1 \cdot \mathbf{o})$  es Lipschitz si fijamos  $\omega_1 \in F$ . Como  $\omega_1 = \hat{\omega}_1$  si  $d_\Sigma(\omega, \hat{\omega}) < 1$ , concluimos que  $\psi$  es localmente Hölder.

Para la segunda parte, por la aditividad de las funciones de Busemann, tenemos:

$$\begin{aligned} b_{\pi(\omega)}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o}) &= b_{\pi(\omega)}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdot \mathbf{o}) + b_{\pi(\omega)}(\omega_1 \cdot \mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o}) \\ &= b_{\pi(\omega)}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdot \mathbf{o}) + b_{\pi \circ \sigma(\omega)}(\mathbf{o}, \omega_2 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o}) \\ &= b_{\pi(\omega)}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdot \mathbf{o}) + b_{\pi \circ \sigma(\omega)}(\mathbf{o}, \omega_2 \cdot \mathbf{o}) + b_{\pi \circ \sigma(\omega)}(\omega_2 \cdot \mathbf{o}, \omega_2 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o}) \\ &\vdots \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} b_{\pi \circ \sigma^i(\omega)}(\mathbf{o}, \omega_i \cdot \mathbf{o}) \\ &= S_n \psi(\omega). \end{aligned}$$

□

**Corolario 3.10.** *Existe  $m \in \mathbb{N}$  y  $\alpha > 0$  tal que para todo  $\omega \in \Sigma$  y todo  $k \in \mathbb{N}$*

$$\exp(-S_{km}\psi(\omega)) < \exp(-k\alpha).$$

DEMOSTRACIÓN: Por la Proposición 3.4 existe  $R$  tal que para todo  $n$  suficientemente grande y todo  $\omega$  tenemos  $\pi(\omega) \in \mathcal{O}_R(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n(\mathbf{o}))$  y por lo tanto

$$b_{\pi(\omega)}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n(\mathbf{o})) \geq d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n(\mathbf{o})) - 2R. \quad (3.2.1)$$

Basta tomar  $m$  suficientemente grande de forma que

$$d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_m(\mathbf{o})) - 2R > 0$$

y definir  $\alpha$  como el mínimo valor de  $S_m\psi$ .

□

Se puede probar ([Par64]) que la máxima entropía que puede alcanzar una medida shift invariante en el subshift  $\Sigma$  es  $\log(2d - 1)$ , por el momento solo nos importa que es finita y positiva. Consideremos entonces para cada  $\delta > 0$  el potencial

$$\psi_\delta := -\delta\psi.$$

Se puede probar que la presión asociada a  $\psi_\delta$  por (3.1.2), que denotaremos por  $P_\delta$ , varía continuamente con  $\delta$  y es estrictamente decreciente. Para  $\delta = 0$ , tenemos  $P_0 = \log(2d - 1)$  y para  $\delta$  suficientemente grande debe ser  $P_\delta < 0$  ya que la integral en (3.1.2) se hace arbitrariamente chica.

**Definición 3.11.** El *potencial geométrico* es la función

$$\psi_\delta : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} : \psi_\delta(\omega) = -\delta b_{\pi(\omega)}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdot \mathbf{o}),$$

donde  $\delta$  es el único real positivo que verifica

$$P_\delta = 0. \quad (3.2.2)$$

Denotamos por  $\nu_\delta$  a la medida de equilibrio del potencial geométrico (Teorema 3.6) y tenemos

$$\nu_\delta[\omega_1 \cdots \omega_n] = \exp(-\delta b_{\pi(\omega)}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o})),$$

uniformemente en  $n \in \mathbb{N}$  y  $\omega \in \Sigma$ .

Por la Proposición 2.11 obtenemos:

$$\nu_\delta[\omega_1 \cdots \omega_n] \asymp \exp(-\delta d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o})). \quad (3.2.3)$$

Necesitaremos definir

$$\theta = \min \{d_{\mathbf{o}}(R^+(\gamma), R^+(\hat{\gamma}_n)) : \gamma \neq \hat{\gamma} \in F\} > 0. \quad (3.2.4)$$

**Lema 3.12.** *Sea  $m$  una probabilidad en  $\Sigma$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $\omega \in \Sigma$ , sea*

$$r_n(\omega) = \exp(-d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o})) \cdot \frac{\theta}{2}.$$

Entonces para todo  $\omega \in \Sigma$ :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \pi_* m(B^{d_{\mathbf{o}}}(\pi(\omega), r))}{\log r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log m[\omega_1 \cdots \omega_n]}{\log r_n(\omega)}. \quad (3.2.5)$$

DEMOSTRACIÓN: Comencemos cambiando el parámetro continuo  $r$  en el término de la izquierda en (3.2.5) por el discreto  $r_n$ . Para ello, por el Lema 1.13 basta chequear que para todo  $\omega \in \Sigma$

$$\frac{\log r_{n+1}(\omega)}{\log r_n(\omega)} \rightarrow 1.$$

Por un lado

$$\lim_n \frac{\log r_{n+1}(\omega)}{\log r_n(\omega)} = \lim_n \frac{d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_{n+1} \cdot \mathbf{o})}{d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o})},$$

y por otro con la desigualdad triangular obtenemos

$$\frac{d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_{n+1} \cdot \mathbf{o})}{d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o})} \in \left[ 1 - \frac{d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_{n+1} \cdot \mathbf{o})}{d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o})}, 1 + \frac{d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_{n+1} \cdot \mathbf{o})}{d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o})} \right];$$

y concluimos

$$\lim_n \frac{\log r_{n+1}(\omega)}{\log r_n(\omega)} = 1.$$

Hasta ahora tenemos que el término de la izquierda en (3.2.5) coincide con

$$\lim_n \frac{\log \pi_* m(B^{d_{\mathbf{o}}}(\pi(\omega), r_n(\omega)))}{\log r_n(\omega)}. \quad (3.2.6)$$

El punto clave para el resto de la demostración es el siguiente:

**Afirmación.** *Existe  $k \in \mathbb{N}$  independiente de  $\omega$  y de  $n$  tal que*

$$m[\omega_1 \cdots \omega_{n+k}] \leq \pi_* m(B^{d_{\mathbf{o}}}(\pi(\omega), r_n(\omega))) \leq m[\omega_1 \cdots \omega_n].$$

Una vez que probemos esta afirmación, la demostración se remata de la misma forma que en el caso de las similaridades (1.3.3). Probemos entonces la afirmación:

Recordar que por definición

$$\pi[\omega_1 \cdots \omega_n] = \omega_1 \cdots \omega_{n-1}(R^+(\omega_n)).$$

Tomemos  $\omega, \hat{\omega} \in \Sigma$  tales que  $\omega_1 = \hat{\omega}_1, \dots, \omega_n = \hat{\omega}_n$  y  $\omega_{n+1} \neq \hat{\omega}_{n+1}$ , entonces

$$\pi(\omega) = \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \eta \text{ y } \pi(\hat{\omega}) = \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \zeta,$$

para ciertos  $\eta \in R^+(\omega_{n+1}) \cap \Lambda$  y  $\zeta \in R^+(\hat{\omega}_{n+1}) \cap \Lambda$ . Por la Proposición 2.18 sabemos

$$\frac{d_{\mathbf{o}}(\pi(\omega), \pi(\hat{\omega}))}{d_{\mathbf{o}}(\eta, \zeta)} = \exp\left(\frac{b_{\pi(\omega)}(\mathbf{o}, (\omega_1 \cdots \omega_n)^{-1} \cdot \mathbf{o}) + b_{\pi(\hat{\omega})}(\mathbf{o}, (\omega_1 \cdots \omega_n)^{-1} \cdot \mathbf{o})}{2}\right).$$

Para controlar la distancia de separación entre  $\pi(\omega)$  y  $\pi(\hat{\omega})$  un lado, para  $\rho \in \{\pi(\omega), \pi(\hat{\omega})\}$  tenemos

$$-b_{\rho}(\mathbf{o}, (\omega_1 \cdots \omega_n)^{-1} \cdot \mathbf{o}) = b_{\rho}((\omega_1 \cdots \omega_n)^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o}) \leq d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o}),$$

y por el otro

$$d_{\mathbf{o}}(\eta, \zeta) \geq d_{\mathbf{o}}(R^+(\omega_n), R^+(\hat{\omega}_n)).$$

El término de la derecha está acotado por debajo uniformemente por  $\theta$  (3.2.4). Entonces

$$d_{\mathbf{o}}(\pi(\omega), \pi(\hat{\omega})) \geq \exp(-d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o})) \cdot \theta \geq r_n(\omega).$$

En conclusión:

$$B^{d_{\mathbf{o}}}(\pi(\omega), r_n(\omega)) \cap \Lambda \subset \pi[\omega_1 \cdots \omega_{n+1}] \subset \pi[\omega_1 \cdots \omega_n]. \quad (3.2.7)$$

Para la otra desigualdad en la afirmación, busquemos  $k \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $\omega \in \Sigma$  y todo natural  $n$

$$\text{diam}_{\mathbf{o}} \pi[\omega_1 \cdots \omega_{n+k}] \leq r_n(\omega),$$

de donde concluiremos que

$$\pi[\omega_1 \cdots \omega_{n+k}] \subset B^{d_{\mathbf{o}}}(\pi(\omega), r_n(\omega)). \quad (3.2.8)$$

De la Proposición 3.4, tomamos  $R$  tal que para todo  $n$  suficientemente grande y todo  $\omega \in \Sigma$

$$\pi[\omega_1 \cdots \omega_n] \subset \mathcal{O}_R(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n).$$

con eso y usando la Proposición 2.11 calculamos para cualquier  $s \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
\text{diam}_{\mathbf{o}}\pi[\omega_1 \cdots \omega_{n+s}] &\leq C \cdot \exp(-d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_{n+s}(\mathbf{o}))) \\
&\leq \exp(-b_{\pi(\omega)}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_{n+s}(\mathbf{o}))) \\
&= \exp(-b_{\pi(\omega)}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n(\mathbf{o}))) \cdot \\
&\quad \cdot \exp(-b_{\pi(\omega)}(\omega_1 \cdots \omega_n(\mathbf{o}), \omega_1 \cdots \omega_{n+s}(\mathbf{o}))) \\
&= \exp(-b_{\pi(\omega)}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n(\mathbf{o}))) \exp(-S_s \psi(\sigma^n(\omega))) \\
&\leq \exp(-d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n(\mathbf{o}))) \exp(2R) \exp(-S_s \psi(\sigma^n(\omega))).
\end{aligned}$$

Con el Corolario 3.10 conseguimos  $s$  suficientemente grande de forma que

$$\exp(-S_s \psi(\cdot)) < \frac{\theta \exp(-2R)}{2}$$

y obtenemos lo que queríamos:

$$\text{diam}_{\mathbf{o}}\pi[\omega_1 \cdots \omega_{n+s}] \leq r_n(\omega).$$

□

**Proposición 3.13.** *Sea  $m$  una probabilidad shift invariante y ergódica soportada en  $\Sigma$ . Entonces  $\pi_* m$  es una probabilidad en  $\Lambda$  de dimensión exacta*

$$\dim_{\mathbb{H}}(\pi_* m) = \frac{h_m(\sigma)}{\int_{\Sigma} \psi dm}, \quad (3.2.9)$$

siendo  $h_m(\sigma)$  la entropía medible de el shift respecto a  $m$ . Además,  $\dim_{\mathbb{H}}(\pi_* m) \leq \delta$  y la igualdad se da si y solo si  $m = \nu_{\delta}$  la medida de equilibrio del potencial geométrico.

DEMOSTRACIÓN: Análogamente a lo hecho para dos similaridades en  $\mathbb{R}$  (Proposición 1.18) la dimensión de la medida en cuestión estará dada por el límite casi seguro

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \pi_* m[\omega_1 \cdots \omega_n]}{\log r_n(\omega)}, \quad (3.2.10)$$

para una sucesión de radios convenientes, como en el Lema 1.17. Esta sucesión de radios será la del Lema 3.12. Veamos primero que (3.2.10) vale constante igual al término de la derecha en (3.2.9) en un conjunto de  $m$ -medida total: Por un lado un resultado clásico, el Teorema de Shannon-McMillan-Breiman <sup>4</sup> dice que para  $m$ -ctp  $\omega \in \Sigma$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\log m[\omega_1 \cdots \omega_n]}{n} = h_m(\sigma).$$

---

<sup>4</sup>Ver por ej. [Hoc14, AC88]

Por el otro, si  $\pi(\omega) \in \mathcal{O}_R(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o})$  para todo  $n$ , por Proposición 2.11 y el Teorema ergódico de Birkhoff, para  $m$ -ctp  $\omega \in \Sigma$  también tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n \cdot \mathbf{o})}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n \psi(\omega)}{n} = \int_{\Sigma} \psi \, dm.$$

Por lo tanto

$$\dim_{\mathbb{H}}(\pi_* m) = \frac{h_m(\sigma)}{\int_{\Sigma} \psi \, dm}.$$

Por el Teorema 3.7, tenemos que

$$0 \geq h_m(\sigma) - \delta \int_{\Sigma} \psi \, dm,$$

y la igualdad se alcanza sólo en la medida de equilibrio  $\nu_{\delta}$  asociada al potencial geométrico. En conclusión, para cualquier otra medida shift invariante y ergódica  $m$  se tiene

$$\dim_{\mathbb{H}}(\pi_* m) < \dim_{\mathbb{H}}(\pi_* \nu_{\delta}) = \delta.$$

□

**Corolario 3.14.** *El conjunto límite del grupo de Schottky  $G$  tiene dimensión de Hausdorff  $\delta$  dado por (3.2.2) y  $\pi_* \nu_{\delta}$  es la medida de Hausdorff en  $\Lambda$ .*

DEMOSTRACIÓN: De la proposición anterior conseguimos la cota más difícil: como  $\pi_* \nu_{\delta}$  es una probabilidad soportada en  $\Lambda$  con dimensión de Hausdorff  $\delta$ , por el Lema 1.12

$$\dim_{\mathbb{H}}(\Lambda) \geq \delta.$$

Para la cota superior, consideramos para cada  $n$  el cubrimiento de  $\Lambda$ , formado por los cilindros de largo  $n$ . Los cilindros son mutuamente disjuntos y a partir de (3.2.3) y la Proposición 3.4 obtenemos

$$\begin{aligned} \sum \text{diam}_{\mathbf{o}} \pi(\omega_1 \cdots \omega_n)^{\delta} &\leq C \cdot \sum \exp(-\delta d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, \omega_1 \cdots \omega_n(\omega))) \\ &\leq C' \sum \nu_{\delta}[\omega_1 \cdots \omega_n] \\ &\leq C' \nu_{\delta}(\Lambda). \end{aligned}$$

Como la cota es uniforme en  $n$ , concluimos que

$$\dim_{\mathbb{H}}(\Lambda) \leq \delta.$$

□

# Capítulo 4

## Pérdida de dimensión para caminatas a vecinos más cercanos

En esta sección estudiaremos caminatas al azar a vecinos más cercanos en grupos de Schottky. Como vimos, éstos grupos son libres en algún generador. El objetivo principal es presentar la *medida estacionaria* asociada a una caminata al azar en un grupo libre y llevarla al contexto del formalismo termodinámico, donde podremos compararla contra la medida de equilibrio del potencial geométrico. Este objeto de estudio depende únicamente de la estructura de grupo y no de las traslaciones en  $\mathbb{H}$  asociadas. Por esta razón nos focalizamos en grupos libres en general.

Sea  $G$  el grupo libre generado por  $a_1, \dots, a_d$  y sus inversos  $a_{d+1}, \dots, a_{2d}$  con  $a_i^{-1} = a_{d+i}$ . Como el grupo no tiene relaciones no triviales, cada elemento de  $G$  se corresponde con una única palabra finita reducida (sin inversos consecutivos) cuyas letras pertenecen al generador libre. Si escribimos  $g = a_{i_1} \cdots a_{i_n}$  en su forma reducida, denotaremos  $|g| := n$ . El producto entre dos palabras reducidas es la reducción de la concatenación de ambas, es decir a  $g = g_1 \cdots g_n$  y  $\hat{g} = \hat{g}_1 \cdots \hat{g}_m$  se le asigna la palabra reducida

$$g \cdot \hat{g} = g_1 \cdots g_{n-j} \cdot \hat{g}_{j+1} \cdot \hat{g}_{j+2} \cdots \hat{g}_m, \quad (4.0.1)$$

donde  $j$  es tal que  $g_n = \hat{g}_1^{-1}$ ,  $g_{n-1} = \hat{g}_2^{-1}, \dots, g_{n-j+1} = \hat{g}_j^{-1}$  y  $g_{n-j} \neq \hat{g}_{j+1}^{-1}$ .

La cantidad de palabras reducidas de largo  $n$  es

$$2d \cdot (2d - 1)^{n-1},$$

si  $n \geq 1$  y la palabra vacía es la única de largo 0. El *borde del grupo libre* es el conjunto  $\Sigma$  el conjunto de palabras infinitas reducidas. Como ya hicimos antes, consideramos en

$\Sigma$  la métrica de palabras

$$d_{\Sigma}(\omega, \hat{\omega}) = \exp(-\text{máx}\{n : \omega_i = \hat{\omega}_i \ \forall i \leq n\}).$$

La topología generada por esta métrica tiene como base de entornos alrededor de un elemento  $\omega \in \Sigma$  a los cilindros

$$[\omega_1 \cdots \omega_n] = \{\hat{\omega} \in \Sigma : \hat{\omega}_j = \omega_j, \ \forall j \leq n\}.$$

La acción por multiplicación a izquierda de  $G$  en sí mismo dada por (4.0.1) se extiende naturalmente a una acción de  $G$  en  $\Sigma$ . La Observación 3.3 dice que el mapa  $\pi$  es equivariante para la acción de  $G$ .

Existe una medida de probabilidad natural, en  $\Sigma$  que a cilindros de igual largo les asigna igual probabilidad y que denotaremos por  $m$ . Para todo  $\omega \in \Sigma$  tenemos

$$m[\omega_1 \cdots \omega_n] = \frac{1}{2d \cdot (2d - 1)^{n-1}} \quad (4.0.2)$$

**Proposición 4.1** ([Led01, Proposition 1.9]). *Con la métrica  $d_{\Sigma}$ , la dimensión de Hausdorff de  $\Sigma$  cumple*

$$\dim_{\text{H}}(\Sigma) = \dim_{\text{H}}(m) = \log(2d - 1).$$

Sea  $\mu$  una probabilidad en  $G$ . Una caminata en  $G$  con ley  $\mu$  es una sucesión de productos sucesivos de elementos de  $G$  sorteados de forma independiente con probabilidad  $\mu$ . Más formalmente sean  $\Omega = G^{\mathbb{Z}}$ ,  $\mu^{\mathbb{Z}}$  la medida producto en  $\Omega$  y  $\sigma$  el shift en  $\Omega$ :

$$\sigma : \Omega \rightarrow \Omega : (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}} \rightarrow (\omega_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Consideremos las sucesiones de funciones

$$X_n : \Omega \rightarrow G : X_n(\omega) = \omega_n, \ n \geq 1; \text{ y}$$

$$Z_n : \Omega \rightarrow G : Z_n(\omega) = \begin{cases} e, & \text{si } n = 0, \\ X_1(\omega) \cdots X_n(\omega) = \omega_1 \cdots \omega_n, & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Cada  $\omega \in \Omega$  tiene asociada una *trayectoria*:  $\omega \mapsto Z(\omega) = (Z_n(\omega))_{n \geq 0} \in G^{\mathbb{N}}$ . Sobre el conjunto de trayectorias definimos la probabilidad  $\mathbb{P} := Z_*\mu^{\mathbb{Z}}$  como la imagen de  $\mu^{\mathbb{Z}}$  por el mapa  $Z$ . Describiremos mejor esta probabilidad en la Proposición 4.4. Por “caminata al azar” nos referimos al par  $(Z, \mu)$ .

Una acción de  $G$  por transformaciones continuas en un espacio  $X$  induce una acción de  $G$  en las probabilidades de  $X$ , donde para una función continua  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  tenemos

$$g * \nu(\varphi) = \int_X \varphi(x) d(g * \nu)(x) = \int_X \varphi(g \cdot x) d\nu(x).$$

En términos de un conjunto  $A \subset X$ , tenemos

$$g * \nu(A) = \nu(g^{-1}A).$$

**Proposición 4.2.** *No existen probabilidades en  $\Sigma$  invariantes por la acción de  $G$ , es decir, no existe  $\nu$  tal que  $g * \nu = \nu$  para todo  $g \in G$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sean  $\nu$  una probabilidad de Borel,  $[\omega_1]$  un cilindro de largo uno tal que  $\nu[\omega_1] > 0$  y  $n > 0$  tal que  $(2d-1)^n \nu[\omega_1] > 1$ . Observar que hay  $(2d-1)^n$  palabras de largo  $n$  en  $\Sigma$  cuya última letra es diferente de  $\omega_1^{-1}$ . Entonces:  $g_1 \cdots g_n \cdot [\omega_1] = [g_1 \cdots g_n \cdot \omega_1]$  si  $g_n \neq \omega_1^{-1}$  y  $g_i \neq g_{i+1}^{-1}$  para  $i = 1, \dots, n-1$  y como todos estos conjuntos son disjuntos dos a dos no pueden tener todos la misma probabilidad. Por lo tanto  $\nu$  no es  $G$ -invariante.

□

**Definición 4.3.** A partir de una probabilidad  $\mu$  en  $G$  y una probabilidad  $\nu$  en  $\Sigma$ , definimos una probabilidad en  $\Sigma$  como la *convolución* de  $\mu$  y  $\nu$ :

$$\mu * \nu = \sum_{g \in G} \mu(g) g * \nu. \quad (4.0.3)$$

**Proposición 4.4** (Distribuciones marginales de  $\mathbb{P}$ ). *Para todo  $n \geq 1$  se tiene que la distribución de probabilidad de la variable aleatoria  $Z_n$  es la convolución de orden  $n$ :*

$$\mu^n := \underbrace{\mu * \cdots * \mu}_n.$$

DEMOSTRACIÓN: La prueba será por inducción en  $n$ . Si  $n = 1$ ,  $\mathbb{P}(Z_1 = g) = \mathbb{P}(X_1 =$

$g) = \mu(g)$  para todo  $g \in G$ . Para el paso inductivo tomamos  $g \in G$  y calculamos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_n = g) &= \sum_{i=1}^{2d} \mathbb{P}(Z_n = g, X_1 = a_i) \\
&= \sum_{i=1}^{2d} \mathbb{P}(X_1 \cdots X_n = g, X_1 = a_i) \\
&= \sum_{i=1}^{2d} \mathbb{P}(X_2 \cdots X_n = a_i^{-1} \cdot g, X_1 = a_i) \\
&= \sum_{i=1}^{2d} \mathbb{P}(X_2 \cdots X_n = a_i^{-1} \cdot g) \mathbb{P}(X_1 = a_i) \\
&= \sum_{i=1}^{2d} \mu^{n-1}(a_i^{-1} \cdot g) \mu(a_i) \\
&= \mu * \mu^{n-1}(g).
\end{aligned}$$

En la cuarta igualdad usamos la independencia de  $X_1$  con respecto a (cualquier función de)  $X_2, \dots, X_n$  y en la quinta igualdad que la distribución de  $X_2 \cdots X_n$  es la misma que la de  $X_1 \cdots X_{n-1}$ . □

Como vimos, no existen medidas invariantes por todo el grupo. Sin embargo, si fijamos alguna forma de promediar en el grupo sí existen medidas “invariantes en promedio” para una acción en un espacio compacto. Observar que la siguiente definición generaliza la noción de medida invariante por la acción de un grupo.

**Definición 4.5.** Una medida de probabilidad en  $X$  se dice  $\mu$ -estacionaria si

$$\nu = \mu * \nu. \tag{4.0.4}$$

**Proposición 4.6.** *Supongamos que  $G$  actúa en un espacio métrico compacto  $X$  por transformaciones continuas. Si  $\mu$  es una probabilidad en  $G$  entonces existe una probabilidad  $\nu$  en  $X$  tal que  $\mu * \nu = \nu$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si  $X$  es compacto, el conjunto de probabilidades en  $X$  también lo es (con la topología débil-\*). Tomemos  $x \in X$  un punto cualquiera y consideremos

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu^j * \delta_x.$$

A menos de subsucesión suponemos  $\nu_n \rightarrow \nu$  para alguna probabilidad  $\nu$ . Entonces

$$\begin{aligned} \lim_n \mu * \nu_n - \nu_n &= \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\mu^{j+1} * \delta_x - \mu^j * \delta_x) \\ &= \lim_n \frac{\mu^n * \delta_x - \delta_x}{n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

En nuestro caso, resulta que hay una única medida estacionaria y resulta ser la distribución de probabilidad de la trayectoria límite de la caminata al azar. Esta situación no es exclusiva del contexto de este trabajo: ver por ejemplo [Fur02, Theorem 1.34] y las referencias ahí citadas.

**Teorema 4.7** ([Led01, Theorem 1.12]). *Para casi todo  $\omega \in \Omega$ , existe el límite*

$$\lim_n Z_n(\omega),$$

*y es un elemento de  $\Sigma$ . Sea  $Z_\infty : \Omega \rightarrow \Sigma$  el mapa (definido en un conjunto de probabilidad total)*

$$Z_\infty(\omega) = \lim_n Z_n(\omega).$$

*Entonces la distribución de probabilidad de  $Z_\infty$  es la imagen de  $\mu^{\mathbb{Z}}$  por  $Z_\infty$ , no tiene átomos y es la única medida  $\mu$ -estacionaria en  $\Sigma$ .*

DEMOSTRACIÓN: Esbozo de la demostración:

- (I) Por compacidad existe una medida estacionaria  $\nu_0$ . Ninguna medida estacionaria puede tener átomos, de lo contrario el conjunto finito de puntos con masas puntuales máximas se preserva.
- (II) Para cada  $f \in C(\Sigma, \mathbb{R})$ ,  $Z_n \nu_0(f) : F^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$  es una martingala y por lo tanto existe una medida como límite débil de  $Z_n(\omega) \nu_0$  para casi todo  $\omega$ . La denotamos por  $\nu_\omega$ .
- (III) Si el largo de  $Z_n(\omega)$  no tiende a infinito entonces existe  $g \in G$  tal que  $Z_n(\omega) = g$  para infinitos valores de  $n$ . Por lo tanto  $\nu_\omega = g \nu_0$ . Esto solo puede pasar si a partir de cierto momento  $n_0$ ,  $Z_n(\omega) = g$ ; o equivalentemente  $\omega_n = \omega_{n+1} \forall n \geq n_0$ . Las sucesiones eventualmente constantes tienen probabilidad nula, por lo que  $|Z_n| \rightarrow +\infty$  con probabilidad uno.

(IV) A partir de lo anterior, se puede chequear que  $\nu_\omega$  está soportada en un único punto  $Z_\infty(\omega) \in \Sigma$ .

(v) Del diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\omega_1, \omega_2, \dots) & \xrightarrow{\sigma} & (\omega_2, \omega_3, \dots) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\omega_1, \omega_1\omega_2, \omega_1\omega_2\omega_3, \dots) & \xrightarrow{X_1} & (\omega_2, \omega_2\omega_3, \dots) \end{array}$$

se deduce la relación, para  $\omega \in \Omega$ :

$$Z_\infty(\omega) = X_1(\omega) \cdot Z_\infty \circ \sigma(\omega) = \omega_1 \cdot Z_\infty(\sigma(\omega)).$$

$Z_\infty \circ \sigma$  es independiente de  $X_1$  y tiene la misma distribución que  $Z_\infty$  de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_\infty \in A) &= \sum_x \mathbb{P}(X_1 = x, Z_\infty \in A) \\ &= \sum_x \mathbb{P}(X_1 = x, \lim_n X_1 \cdots X_n \in A) \\ &= \sum_x \mathbb{P}(X_1 = x, \lim_n X_2 \cdots X_n \in x^{-1}A) \\ &= \sum_x \mathbb{P}(X_1 = x) \mathbb{P}(Z_\infty \circ \sigma \in x^{-1}A) \\ &= \sum_x \mu(x) \mathbb{P}(Z_\infty \circ \sigma \in x^{-1}A) \\ &= \sum_x \mu(x) \mathbb{P}(Z_\infty \in x^{-1}A). \end{aligned}$$

Es decir, la distribución de  $Z_\infty$  es  $\mu$ -estacionaria.

□

Cuando la probabilidad  $\mu$  le da peso solamente a los elementos del generador  $F = \{a_1, \dots, a_{2d}\}$  decimos que la caminata es *a vecinos más cercanos*. Implícitamente estamos considerando el grafo de Cayley del grupo libre con respecto a este generador, que resulta un árbol regular cuyos vértices son los elementos del grupo y hay una arista (que asumimos no dirigida) entre dos vértices  $g$  y  $h$  si  $g^{-1} \cdot h \in F$ . Si la medida  $\mu$  está soportada en el generador  $F$  el término  $Z_{n+1}$  de la caminata es un vecino de  $Z_n$ . Si  $\mu$  está soportada en otro generador (finito) del grupo pero queremos preservar el árbol

como espacio subyacente la caminata puede saltar varias aristas a la vez. Sobre caminatas al azar de rango finito en árboles hay resultados conocidos ([PW87, Lal93] por mencionar algunos) pero no parecen ser suficientes para nuestro problema de estudio. La otra opción natural sería cambiar el grafo de Cayley al asociado al nuevo generador, perdiendo en general la estructura de árbol. Cualquiera de estas opciones complejiza notoriamente el problema y son posibles vías de generalización de todo lo hecho en este trabajo.

La gran ventaja de las caminatas a vecinos más cercanos en árboles es la siguiente es que tenemos una fórmula explícita para la medida estacionaria, como veremos a continuación. Para cada  $g \in G$  consideramos el *tiempo de parada*  $\tau_g = \min_{n \in \mathbb{N}} \{Z_n = g\}$ ; y denotaremos por  $q(g)$  a la probabilidad de que la caminata en algún momento pasa por  $g$ :

$$q(g) = \mathbb{P}(\tau_g < +\infty) = \begin{cases} 1, & \text{si } g = e, \\ \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\tau_g = n), & \text{si no.} \end{cases}$$

**Proposición 4.8.** *Sea  $\mu$  soportada en  $\{a_1, \dots, a_{2d}\}$  y  $\nu$  su medida estacionaria en  $\Sigma$ . Entonces la medida  $\nu$  tiene la siguiente forma explícita en términos de los  $q(\cdot)$  para cada cilindro  $[\omega_1 \cdots \omega_n]$ :*

$$\nu[\omega_1 \cdots \omega_n] = q(\omega_1) \cdots q(\omega_{n-1}) \cdot \frac{q(\omega_n)}{1 - q(\omega_n)q(\omega_n^{-1})}.$$

Para probar este resultado precisaremos un lema técnico antes.

**Lema 4.9.** *Sean  $g = a_{i_1} \cdots a_{i_n}$  y  $h = a_{i_{n+1}} \cdots a_{i_{n+m}}$  dos elementos cualesquiera de  $G$  en su forma reducida, de manera que  $a_{i_{n+1}} \neq a_{i_n}^{-1}$ . Entonces*

$$q(g \cdot h) = q(g)q(h).$$

*En particular  $q(g) = \prod_{j=1}^n q(a_{i_j})$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** La clave es que para que  $Z_k$  tome el valor  $g \cdot h$ , necesariamente debe existir  $l \in 1, \dots, k-1$  tal que  $X_1 \cdots X_l = g$  y  $X_{l+1} \cdots X_k = h$ ,<sup>1</sup> y por lo tanto  $\tau_g < \tau_{g \cdot h}$ . Comenzamos observando que para cada  $l < k$  tenemos

$$\{\tau_g = l\} \cap \{\tau_{gh} = k\} =$$

---

<sup>1</sup>Esto depende fuertemente de que la caminata es a vecinos más cercanos y presenta una gran complejidad para estudiar el caso general.

$$\{\tau_g = l\} \cap \left( \bigcap_{j=1}^{k-l-1} \{X_{l+1} \cdots X_{l+j} \neq h\} \right) \cap \{X_{l+1} \cdots X_k = g \cdot h\}.$$

Por otro lado, usando que  $\{\tau_g = l\}$  depende solo de  $X_1 \cdots X_j$ , con  $j = 1, \dots, l$ ; que  $X_1 \cdots, X_l$  y  $X_{l+1} \cdots X_k$  son independientes y que  $X_{l+1} \cdots X_k$  tiene la misma distribución que  $X_1 \cdots X_{k-l}$  (es decir  $\mu^{k-l}$ ), obtenemos

$$\mathbb{P}(\tau_g = l, \tau_{gh} = k) = \mathbb{P}(\tau_g = l) \cdot \mathbb{P}(\tau_h = k - l).$$

Podemos calcular entonces

$$\begin{aligned} q(g \cdot h) &= \sum_{k \geq 2} \mathbb{P}(\tau_{g \cdot h} = k) \\ &= \sum_{k \geq 2} \sum_{l=1}^{k-1} \mathbb{P}(\tau_{g \cdot h} = k, \tau_g = l) \\ &= \sum_{k \geq 2} \sum_{l=1}^{k-1} \mathbb{P}(\tau_h = k - l) \cdot \mathbb{P}(\tau_g = l) \\ &= \left( \sum_{m \geq 1} \mathbb{P}(\tau_g = m) \right) \left( \sum_{m \geq 1} \mathbb{P}(\tau_h = m) \right) \\ &= q(g) \cdot q(h). \end{aligned}$$

□

DEMOSTRACIÓN:(Proposición 4.8) Comencemos calculando los  $q(a_i)$  en términos de  $\mu$ . Para eso nos será útil distinguir según el primer paso de la caminata. Razonando como

en la proposición anterior calculamos:

$$\begin{aligned}
q(a_i) &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\tau_{a_i} = k) \\
&= \sum_{k \geq 1} \sum_{j=1, \dots, 2d} \mathbb{P}(\tau_{a_i} = k, X_1 = a_j) \\
&= \mu(a_i) + \sum_{k \geq 2} \sum_{j \neq i} \mathbb{P} \left( \bigcap_{j=2}^{k-1} X_2 \cdots X_j \neq a_j^{-1} a_i, X_2 \cdots X_k = a_j^{-1} a_i, X_1 = a_j \right) \\
&= \mu(a_i) + \sum_{k \geq 2} \sum_{j \neq i} \mathbb{P}(\tau_{a_j^{-1} a_i}) \mathbb{P}(X_1 = a_j) \\
&= \mu(a_i) + \sum_{k \geq 2} \sum_{j \neq i} \mathbb{P}(\tau_{a_j^{-1} a_i}) \mu(a_j) \\
&= \mu(a_i) + \sum_{j \neq i} \mu(a_j) \sum_{k \geq 2} \mathbb{P}(\tau_{a_j^{-1} a_i}) \\
&= \mu(a_i) + \sum_{j \neq i} \mu(a_j) q(a_j^{-1} a_i) \\
&= \mu(a_i) + \sum_{j \neq i} \mu(a_j) q(a_j^{-1}) q(a_i).
\end{aligned}$$

Por lo tanto para cada  $i = 1, \dots, 2d$  se debe satisfacer la relación

$$q(a_i) = \mu(a_i) + q(a_i) \cdot \sum_{j \neq i} \mu(a_j) \cdot q(a_j^{-1}). \quad (4.0.5)$$

Fijada  $\mu$ , existe una única solución  $(q(a_1), \dots, q(a_{2d})) \in (0, 1)^{2d}$  de (4.0.5), ver [Led01, Lema 2.2].

Queremos calcular la probabilidad de que la caminata se escape por un cierto cilindro  $[a_{i_1} \cdots a_{i_n}]$ , es decir eventualmente  $Z_n(\omega) \in [a_{i_1} \cdots a_{i_n}]$  para todo  $n$  mayor a un cierto  $n_0(\omega)$ . Denotemos por  $\nu$  a dicha medida.

Comencemos con los cilindros de largo uno. La probabilidad de que la palabra reducida límite empiece con  $a_i$  podemos escribirla como la probabilidad de que la caminata entre y salga cierta cantidad de veces del cilindro  $[a_i]$ , luego entre y no salga más. Por

la **propiedad de Markov fuerte** estos eventos son independientes y podemos calcular:

$$\begin{aligned}
\nu[a_i] &= \mathbb{P}(\lim_n Z_n \in [a_i]) \\
&= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\text{entrar y salir de } [a_i] \text{ } n \text{ veces, entrar y no salir de } [a_i]) \\
&= \left[ \sum_n (q(a_i)q(a_i^{-1}))^n \right] q(a_i)(1 - q(a_i^{-1})) \\
&= \frac{q(a_i)(1 - q(a_i^{-1}))}{1 - q(a_i)q(a_i^{-1})}.
\end{aligned}$$

La probabilidad de que la caminata se escape por un cilindro arbitrario  $[a_{i_1} \cdots a_{i_n}]$  se puede descomponer como la probabilidad de entrar en  $[a_{i_1} \cdots a_{i_{n-1}}]$  y luego escaparse por el cilindro  $[a_{i_n}]$ . Para cada cilindro  $[a_{i_1} \cdots a_{i_n}]$  definimos

$$\nu[a_{i_1} \cdots a_{i_n}] = q(a_{i_1} \cdots a_{i_{n-1}}) \cdot \nu[a_{i_n}] = q(a_{i_1}) \cdots q(a_{i_{n-1}}) \cdot \frac{q(a_{i_n})(1 - q(a_{i_n}^{-1}))}{1 - q(a_{i_n})q(a_{i_n}^{-1})}, \quad (4.0.6)$$

que resulta una premedida y se extiende de forma única a una probabilidad en los borelianos de  $\Sigma$  ([SS05, Theorem 1.5]). Podemos ver que es estacionaria chequeando la definición (4.0.4):

$$\begin{aligned}
\mu * \nu[a_{i_1} \cdots a_{i_n}] &= \sum_{j=1}^{2d} \mu(a_j) \cdot a_j * \nu[a_{i_1} \cdots a_{i_n}] \\
&= \mu(a_{i_1}) \cdot \nu[a_{i_2} \cdots a_{i_n}] + \sum_{j \neq i_1} \mu(a_j) \cdot \nu[a_j^{-1} \cdot a_{i_1} \cdots a_{i_n}] \\
&= \left( \mu(a_{i_1}) + \sum_{j \neq i_1} \mu(a_j) \cdot q(a_j^{-1}) \cdot q(a_{i_1}) \right) \cdot \nu[a_{i_2} \cdots a_{i_n}] \\
&\stackrel{(4.0.5)}{=} q(a_{i_1}) \cdot \nu[a_{i_2} \cdots a_{i_n}] \\
&= \nu[a_{i_1} \cdots a_{i_n}].
\end{aligned}$$

Por el Teorema 4.7 la medida  $\nu$  es la distribución de probabilidad de  $Z_\infty = \lim_n Z_n$ .  $\square$

La medida estacionaria de una caminata a vecinos más cercanos pertenece a una familia particularmente importante:

**Definición 4.10.** Una medida de probabilidad  $\nu$  en  $\{a_1, \dots, a_n\}^{\mathbb{N}}$  se dice *de Markov* si existen:  $p = (p(a_1), \dots, p(a_{2d})) \in [0, 1]^{2d}$  y  $p(a_i, a_j) \in [0, 1]$ , con  $i, j = 1, \dots, 2d$  tales que

- $\sum_{i=1}^{2d} p(a_i) = 1$ ,
- $\sum_{j=1}^{2d} p(a_i, a_j) = 1$  y
- para todo cilindro  $[a_{i_1} \cdots a_{i_n}]$  vale

$$\nu[a_{i_1} \cdots a_{i_n}] = p(a_{i_1}) \cdot p(a_{i_1}, a_{i_2}) \cdots p(a_{i_{n-1}}, a_{i_n}). \quad (4.0.7)$$

El vector  $p$  se dice vector de *probabilidades iniciales* y llamaremos *probabilidades de transición* a los números  $p(a_i, a_j)$ .

**Corolario 4.11.** *La medida estacionaria asociada a una caminata al azar a vecinos más cercanos es una medida de Markov soportada en  $\Sigma$ .*

DEMOSTRACIÓN: Como probabilidades iniciales tomamos

$$p(a_i) = \nu[a_i].$$

Luego, buscamos  $p(a_i, a_j)$  tal que

$$\nu[a_i \cdot a_j] = \nu[a_i] \cdot p(a_i, a_j).$$

Por el lema anterior tenemos que  $\nu[a_i \cdot a_j] = q(a_i) \cdot \nu[a_j]$ , lo que sugiere definir

$$p(a_i, a_j) := \frac{q(a_i) \cdot \nu[a_j]}{\nu[a_i]}$$

y por (4.0.6) resulta

$$\nu[a_{i_1} \cdots a_{i_n}] = p(a_{i_1}) \cdot p(a_{i_1}, a_{i_2}) \cdots p(a_{i_{n-1}}, a_{i_n}).$$

□

**Observación 4.12.** Por fin podemos llevar la medida estacionaria al contexto del capítulo anterior. Para ello basta observar que la medida de Markov de (4.0.7) en cualquier cilindro es comparable con la exponencial de las sumas de Birkoff del potencial

$$\varphi(\omega_1 \omega_2 \cdots) = \log(p(\omega_1, \omega_2)). \quad (4.0.8)$$

Siendo un potencial localmente constante,  $\varphi$  es Hölder y por lo tanto entra en el contexto del Teorema de Bowen 3.6. Nuestra medida estacionaria  $\nu$  en principio no es invariante, sin embargo veremos en la sección siguiente que es absolutamente continua con respecto a la medida de equilibrio de  $\varphi$ , que también resulta ser de Markov.

## 4.1. Potenciales localmente constantes y medidas de Markov

**Proposición 4.13.** *Sea  $\nu$  una medida de Markov en  $\Sigma$  con probabilidades iniciales  $p = (p_1, \dots, p_{2d})$  y transiciones  $p(\cdot, \cdot)$ . Consideremos la matriz de transiciones  $P \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}$  cuya coordenada  $(i, j)$  es*

$$P(i, j) = p(a_j, a_i).$$

*Entonces  $\nu$  es shift invariante si y solo si  $p$  es un vector propio a derecha de  $P$  asociado al valor propio 1.*

DEMOSTRACIÓN: Calculamos directamente

$$\begin{aligned} \sigma * \nu[a_{i_1} \cdots a_{i_n}] &= \sum_b \nu[b \cdot a_{i_1} \cdots a_{i_n}] \\ &= \sum_b p(b) \cdot p(b, a_{i_1}) \cdots p(a_{i_{n-1}}, a_{i_n}) \\ &= \left( \sum_b p(b) \cdot p(b, a_{i_1}) \right) p(a_{i_1}, a_{i_2}) \cdots p(a_{i_{n-1}}, a_{i_n}). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\sigma * \nu[a_{i_1} \cdots a_{i_n}] = \nu[a_{i_1} \cdots a_{i_n}]$  si y solamente si

$$\sum_b p(b) \cdot p(b, a_{i_1}) = p(a_{i_1}).$$

Como lo anterior vale para todo cilindro, esta ecuación se reescribe vectorialmente como

$$P \cdot p = p.$$

□

Enunciamos a continuación un teorema clásico que usaremos repetidamente. Para ello mencionamos que una matriz con entradas reales no negativas se dice *primitiva* si alguna de sus potencias tiene sus entradas estrictamente positivas.

**Teorema 4.14** (Perrón Frobenius). *Sea  $M$  una matriz real primitiva no negativa. Entonces: Su valor propio más grande es un real positivo y por lo tanto coincide con su radio espectral  $\rho(M)$ . Además:*

- $\rho(M)$  es simple (i.e multiplicidad geométrica 1) y por lo tanto cualquier otro valor propio tiene módulo estrictamente menor a  $\rho(M)$ ;

- $\rho(M)$  tiene vectores propios (a derecha y a izquierda) con entradas estrictamente positivas;
- cualquier vector propio (a derecha o a izquierda) asociado a un valor propio distinto de  $\rho(M)$  tiene entradas no positivas.

**Proposición 4.15.** *Si  $P$  es una matriz estocástica (por columnas) tal que para algún  $n \in \mathbb{N}$   $P^n$  es estrictamente positiva, entonces hay una única medida de Markov invariante y ergódica con transiciones  $P$ .*

DEMOSTRACIÓN: Por Perrón Forbenius una tal matriz  $P$  tiene un único autovector positivo<sup>2</sup>,  $p$ , asociado al valor propio 1. Denotemos por  $\nu$  a la medida que en los cilindros vale

$$\nu[\omega_1 \cdots \omega_k] = p(\omega_1) \cdot p(\omega_1, \omega_2) \cdots p(\omega_{k-1}, \omega_k).$$

Ya sabemos que  $\nu$  es invariante por el shift  $\sigma$ , probemos ahora que es ergódica. Es decir que todo boreleano  $B \in \Sigma$  tal que  $\sigma^{-1}(B) = B$  verifica  $\nu(B) \in \{0, 1\}$ . Fijemos un tal  $B$  y consideremos para cada letra de nuestro alfabeto  $x \in F = \{a_1, \dots, a_{2n}\}$  la familia de medidas de Markov con mismas transiciones y condición inicial  $\delta_x$ :

$$\nu_x[\omega_1 \cdots \omega_k] = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega_1 \neq x, \\ p(x, \omega_2) \cdots p(\omega_{k-1}, \omega_k) & \text{si } \omega_1 = x. \end{cases}$$

Sea  $f_B(x) = \nu_x(B)$ . La primera parte de la prueba consiste en probar que  $f_B$  es armónica y por lo tanto constante:

**Afirmación.** *Para todo  $x \in F$  se tiene*

$$f_B(x) = \sum_{y \in F} p(x, y) \cdot f_B(y).$$

*Como  $F$  es un grafo finito, toda función armónica en  $F$  es constante.*

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned} f_B(x) &= \nu_x(B) \\ &= \nu_x(\sigma^{-1}(B)) \\ &= \nu_x(\{\omega \in \Sigma : \sigma(\omega) \in B\}) \\ &= \sum_y p(x, y) \nu_y(B) \\ &= \sum_y p(x, y) f_B(y). \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>i.e. con todas sus entradas estrictamente positivas

En el razonamiento anterior, para la cuarta igualdad usamos la “propiedad de Markov débil”. Comentaremos solamente que el conjunto  $B$  se dice un “evento de cola”, por no depender de finitas coordenadas. En este trabajo no hemos formalizado este aspecto; referimos por ejemplo a [Var01, Theorem 4.8]. Para ver que  $f_B$  es constante, observamos que para cualquier  $x \in F$  tenemos

$$\min_{y \sim x} f_B(y) \leq \sum_{y \sim x} p(x, y) f(y) = f_B(x) \leq \max_{y \sim x} f_B(y).$$

Por lo tanto si  $x$  es un máximo de  $f_B$ , sus vecinos también. Esto se propaga por toda la componente conexa (saliente) del grafo, que en nuestro caso es todo el grafo y esto prueba la afirmación.

Dado  $B \subset \Sigma$  invariante,  $f_B$  como antes y  $\epsilon > 0$ , sea  $C_\epsilon$  una unión finita de cilindros en  $\Sigma$  tal que la diferencia simétrica entre ambos cumple  $\nu_x(C_\epsilon \Delta B) < \epsilon$ ,  $\forall x \in F$ . En particular  $|\nu_x(C_\epsilon) - \nu_x(B)| < \epsilon$ . Sea  $p = f_B(x) = \nu_x(B)$ . Por la afirmación anterior  $p$  es independiente de  $x \in F$  y por lo tanto  $\nu(B) = p$ . Si denotamos por  $[\omega_n = y]$  al cilindro de sucesiones que en su  $n$ -ésima coordenada valen  $y$ , sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $C_\epsilon \cap \left( \bigcup_{y \in F} [\omega_N = y] \right) \neq \emptyset$  y  $C_\epsilon \cap \left( \bigcup_{y \in F} [\omega_{N+k} = y] \right) = \emptyset$ ,  $\forall k \geq 1$ . Observar primero que para cualquier  $x \in F$ , por la invarianza de  $B$  tenemos

$$\begin{aligned} \nu_x(B \cap \sigma^{-N} B) &= \nu_x(B \cap C_\epsilon \cap \sigma^{-N} B) + \nu_x((B \setminus C_\epsilon) \cap \sigma^{-N} B) \\ &= \nu_x(C_\epsilon \cap \sigma^{-N} B) + \nu_x((B \setminus C_\epsilon) \cap \sigma^{-N} B). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $|\nu_x(C_\epsilon \cap \sigma^{-N} B) - \nu_x(B \cap \sigma^{-N} B)| = |\nu_x(C_\epsilon \cap \sigma^{-N} B) - \nu_x(B)| < \epsilon$ .

Por otro lado, usando **la propiedad de Markov** tenemos:

$$\begin{aligned} \nu_x(C_\epsilon \cap \sigma^{-N}(B)) &= \sum_{y \in F} \nu_x(C_\epsilon \cap [\omega_N = y]) \nu_y(\sigma^{-N}(B)) \\ &= p \sum_{y \in F} \nu_x(C_\epsilon \cap [\omega_N = y]) \\ &= p \cdot \nu_x(C_\epsilon). \end{aligned}$$

Juntando las estimativas anteriores tenemos:

$$\begin{aligned} |p^2 - p| &\leq |p^2 - p \cdot \nu_x(C_\epsilon)| + |p \cdot \nu_x(C_\epsilon) - p| \\ &\leq p\epsilon + \epsilon. \end{aligned}$$

Como  $\epsilon$  es arbitrario concluimos que  $p^2 = p$ .

□

Por lo tanto, la medida estacionaria de la caminata,  $\nu$ , que determinamos en la Proposición 4.8 resulta ser de Markov con ciertas distribuciones iniciales y matriz de transiciones  $P$ . Si consideramos la probabilidad de Markov con mismas transiciones  $P$  y probabilidades iniciales dadas por las coordenadas del 1–autovector a derecha de  $P$  cuyas coordenadas (todas positivas) suman uno, la medida de cualquier cilindro resulta comparable con la exponencial de las sumas de Birkhoff del potencial (4.0.8). Por la unicidad en el Teorema 3.6 el potencial  $\varphi$  tiene presión cero y esta es su medida de equilibrio. La denotaremos por  $\nu_\varphi$ . Observar que el cociente de las medidas  $\nu$  y  $\nu_\varphi$  de cualquier cilindro está acotado uniformemente por constantes positivas. Esto nos dice, no solo que estas dos medidas son mutuamente absolutamente continuas sino que tienen la misma dimensión. Para ver esto último, la Proposición 3.13 dice que  $\nu_\varphi$  es de dimensión exacta y es directo chequear que los límites (3.12) aplicados a las dos medidas coinciden. Resumimos esto en el siguiente resultado:

**Lema 4.16.** *Supongamos que  $F = \{a_1, \dots, a_d, a_1^{-1}, \dots, a_d^{-1}\}$  es un generador libre de un grupo  $G$  y  $\mu$  una probabilidad soportada en  $F$  que le da peso positivo a todos sus elementos. Como antes denotamos por  $\Sigma$  al conjunto de palabras reducidas con letras en  $F$ . Entonces:*

- (I) *La única medida  $\mu$ –estacionaria en  $\Sigma$ , es de Markov para ciertos pesos iniciales y una matriz de transiciones  $P$ .*
- (II) *Además  $P$  induce un potencial localmente constante con presión cero cuya medida de equilibrio y la medida estacionaria son mutuamente absolutamente continuas y tienen igual dimensión de Hausdorff.*

Llegado este punto, nuestro problema principal se reduce a comparar la medida  $\nu_\varphi$  con la medida  $\nu_\psi$  asociada al potencial geométrico del capítulo anterior. Para eso hay que probar que los potenciales  $\varphi$  y  $\psi$  no son cohomólogos refutando alguna de las condiciones del Teorema 3.8.

En el Apéndice 5.1 vemos que a *cualquier* potencial localmente constante le corresponde una medida de equilibrio que es Markov.

## 4.2. Pérdida de dimensión para caminatas a vecinos más cercanos

Podemos probar por fin la pérdida de dimensión para caminatas al azar a vecinos más cercanos en grupos de Schottky. A partir del Lema 4.16 alcanza con probar que el potencial geométrico del capítulo anterior (ver 3.11) no es cohomólogo a un potencial localmente constante.

**Teorema 4.17.** *El potencial geométrico no es cohomólogo a un potencial 2-localmente constante. En particular la medida de equilibrio de dicho potencial no es de Markov.*

DEMOSTRACIÓN: Denotamos por  $\nu_\delta$  a la medida de equilibrio en  $\Sigma$  asociada al potencial geométrico  $\psi_\delta$ . La prueba del teorema será por absurdo. Supongamos entonces que existen: un vector de probabilidades  $p$ , y probabilidades de transición  $p(\cdot, \cdot)$  tales que para todo natural  $n$  y todo  $\omega \in \Sigma$

$$\nu_\delta[\omega_1 \cdots \omega_n] = p(\omega_1)p(\omega_1, \omega_2) \cdots p(\omega_{n-1}, \omega_n).$$

La clave de la prueba es la siguiente: dado  $g = \omega_1 \cdots \omega_n$  un elemento del grupo escrito de manera reducida y tal que  $\omega_1 \neq \omega_n^{-1}$ , tenemos por un lado que para cualquier  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \nu_\delta[g^k] &= p(\omega_1) \cdot (p(\omega_1, \omega_2) \cdots p(\omega_n, \omega_1))^{k-1} p(\omega_1, \omega_2) \cdots p(\omega_{n-1}, \omega_n) \\ &= \frac{p(\omega_1)}{p(\omega_n, \omega_1)} (p(\omega_1, \omega_2) \cdots p(\omega_n, \omega_1))^k; \end{aligned}$$

y por el otro, por el Lema 3.2

$$\nu_\delta[g^k] \asymp \exp(-\delta \cdot d_{\mathbb{H}}(\mathbf{o}, g^n(\mathbf{o}))),$$

con constantes multiplicativas independientes de  $k$ . Tomando límites en  $k$  de raíces  $k$ -ésimas, por la Proposición 2.5 obtenemos

$$p(\omega_1, \omega_2) \cdots p(\omega_n, \omega_1) = \exp(-\delta \cdot l(g)). \quad (4.2.1)$$

Para dos elementos hiperbólicos que comienzan con la misma letra,  $h_1 = \omega_1 \cdots \omega_n$  y  $h_2 = \omega_1 \cdot \hat{\omega}_2 \cdots \hat{\omega}_n$ , aplicamos (4.2.1) a  $g = h_1$ ,  $g = h_2$  y  $g = h_1 \cdot h_2$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \exp(-\delta \cdot l(h_1 \cdot h_2)) &= p(\omega_1, \omega_2) \cdots p(\omega_{n-1}, \omega_n)p(\omega_n, \omega_1)p(\omega_1, \hat{\omega}_2) \cdots p(\hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_n)p(\hat{\omega}_n, \omega_1) \\ &= \exp(-\delta \cdot l(h_1)) \exp(-\delta \cdot l(h_2)). \end{aligned}$$

La relación anterior entre los largos de traslación contradice la Proposición 2.43 lo que concluye la prueba.

□



# Capítulo 5

## Apéndice

### 5.1. Apéndice al Capítulo 2.

**Proposición 2.11.** *Si  $\zeta \in \mathcal{O}_R(x, y)$  entonces*

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) - 2R \leq b_{\zeta}(x, y) \leq d_{\mathbb{H}}(x, y).$$

DEMOSTRACIÓN:(2.11)

La segunda desigualdad se prueba directamente de la definición de las funciones de Buseman. Para la primera desigualdad tomamos  $x, y$  y  $\zeta$  como en la hipótesis,  $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}$  una parametrización del rayo geodésico  $[x, \zeta)$  y  $s : \sigma(s) \in B(y, R) \cap [x, \zeta)$ . Entonces para todo  $t > s$ :

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(y, \sigma(t)) &\leq R + d_{\mathbb{H}}(\sigma(t), \sigma(s)) \\ &= R + d_{\mathbb{H}}(\sigma(t), x) - d_{\mathbb{H}}(x, \sigma(s)) \\ &\leq R + d_{\mathbb{H}}(\sigma(t), x) - d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, \sigma(s)) \\ &\leq 2R + d_{\mathbb{H}}(\sigma(t), x) - d_{\mathbb{H}}(x, y). \end{aligned}$$

Por definición,

$$b_{\zeta}(x, y) = \lim_t d_{\mathbb{H}}(x, \sigma(t)) - d_{\mathbb{H}}(y, \sigma(t)) \geq d_{\mathbb{H}}(x, y) - 2R.$$

□

**Proposición 2.14.** *La métrica visual en el origen en  $0 \in \mathbb{D}$  es bi-Lipschitz equivalente a la métrica euclídea en el círculo  $\partial\mathbb{D}$ . Más precisamente, existe una constante  $C > 1$*

tal que, dados dos puntos del borde  $\eta$  y  $\zeta$ , si  $\alpha \in (0, \pi]$  es el ángulo que forman los rayos geodésicos  $[0, \eta)$  y  $[0, \zeta)$  con vértice en 0, entonces:

$$C^{-1}\alpha \leq d_0(\eta, \zeta) \leq C\alpha.$$

DEMOSTRACIÓN:(2.14)

Si  $0 \in (\eta, \zeta)$  entonces  $\alpha = \pi$  y  $d_0(\eta, \zeta) = 1$ . A partir de ahora suponemos  $\alpha < \pi$ . A menos de rotar todo alrededor del origen suponemos  $\eta = \exp(i\theta)$  y  $\zeta = \exp(-i\theta)$  para algún  $\theta \in (0, \pi/2)$ . De esta manera  $\alpha = 2\theta$ . Buscaremos el punto  $y$  de la geodésica  $(\eta, \zeta)$  que realiza la distancia  $d_{\mathbb{H}}(0, (\eta, \zeta))$ . Por construcción, este punto pertenece al eje real. Una vez determinado  $y$ , aplicaremos el Lema 2.1.6.1 para acotar  $d_0(\eta, \zeta)$ .

El centro del círculo euclídeo en  $\mathbb{C}$  que corta ortogonalmente a  $\partial\mathbb{D}$  en  $\eta$  y  $\zeta$  lo obtenemos como la raíz de

$$t \mapsto \operatorname{Im}(\eta + t \cdot \eta^\perp),$$

donde  $\eta^\perp = \exp(i \cdot (\theta - \pi/2)) = (\sin(\theta), -\cos(\theta))$ . Este valor resulta  $t = \tan(\theta)$ . El círculo buscado tiene radio  $\tan(\theta)$  y está centrado en

$$\operatorname{Re}(\eta + \tan(\theta) \cdot \eta^\perp) = \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

Despejamos  $y$  de la relación

$$y + \tan(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)},$$

obteniendo

$$y = \frac{1 - \sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Por (2.1.2) obtenemos

$$d_{\mathbb{H}}(0, y) = d_{\mathbb{H}}(0, (\eta, \zeta)) = \log \frac{\cos(\theta) + 1 - \sin(\theta)}{\cos(\theta) - 1 + \sin(\theta)} = -\log \tan(\theta/2). \quad (5.1.1)$$

Ver figura 5.1. Por (2.1.6) obtenemos una constante  $C > 1$  tal que

$$C^{-1} \cdot d_0(\eta, \zeta) \leq \exp(-d_{\mathbb{H}}(0, (\eta, \zeta))) \leq \tan(\theta/2) \leq C \cdot \theta,$$

ya que  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  y la derivada de  $\tan$  está uniformemente acotada en  $[0, \pi/4]$ .

Para la otra desigualdad despejamos de (5.1.1):

$$\theta = 2 \cdot \arctan(\exp(-d_{\mathbb{H}}(0, y))).$$

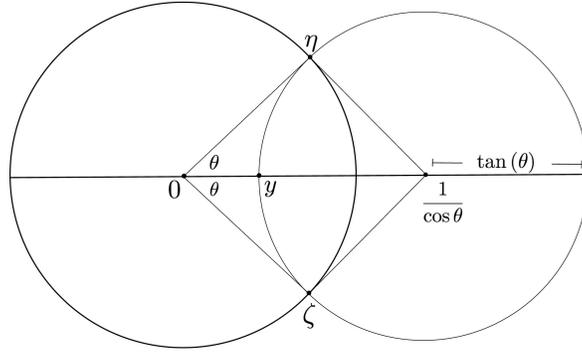


Figura 5.1

La derivada de  $\arctan$  es estrictamente positiva y menor a 1 en cualquier número real, por lo que

$$\theta \leq \hat{C} \cdot d_0(\eta, \zeta).$$

□

**Proposición 2.16.** *Fijados  $x, y \in \mathbb{H}$ , la asociación*

$$\zeta \in \partial\mathbb{H} \mapsto b_\zeta(x, y)$$

*es Lipschitz para la distancia visual  $d_0$ , es decir existe una constante  $C$  tal que para todos  $\eta, \zeta \in \partial\mathbb{H}$ :*

$$|b_\eta(x, y) - b_\zeta(x, y)| \leq C \cdot d_0(\eta, \zeta).$$

DEMOSTRACIÓN:(2.16)

La acción de las rotaciones que fijan 0 es transitiva en el borde del plano hiperbólico. Tomamos un punto  $\zeta \in \partial\mathbb{H}$  y  $R_\theta$  una rotación de ángulo  $\theta$  que fija  $0 \in \mathbb{H}$ . Por el lema 2.14 alcanza con probar que existe  $C > 0$  tal que para

$$|b_\zeta(x, y) - b_{R_\theta(\zeta)}(x, y)| \leq C\theta.$$

Calculamos primero:

$$\begin{aligned} b_{R_\theta(\zeta)}(x, y) &= b_\zeta(R_{-\theta}(x), R_{-\theta}(y)) \\ &= b_\zeta(R_{-\theta}(x), x) + b_\zeta(x, y) + b_\zeta(y, R_{-\theta}(y)). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|b_{R_\theta(\zeta)}(x, y) - b_\zeta(x, y)| \leq d_{\mathbb{H}}(x, R_{-\theta}(x)) + d_{\mathbb{H}}(y, R_{-\theta}(y)).$$

Por (2.1.5) tenemos

$$d_{\mathbb{H}}(x, R_{-\theta}(x)) = d_{\mathbb{H}}(0, x) \cdot \theta$$

y

$$d_{\mathbb{H}}(y, R_{-\theta}(y)) = d_{\mathbb{H}}(0, y) \cdot \theta.$$

Por lo tanto  $C = d_{\mathbb{H}}(0, x) + d_{\mathbb{H}}(0, y)$  es una constante de Lipschitz como queríamos.  $\square$

**Proposición 2.17.** *Dados  $x, y \in \mathbb{H}$  y  $R > 0$ , sean  $\eta, \zeta \in \partial\mathbb{H}$  los extremos de la sombra  $\mathcal{O}_R(x, y)$ , entonces existe  $C > 1$  tal que*

$$C^{-1} \cdot \exp(-d_{\mathbb{H}}(x, y)) \leq d_x(\eta, \zeta) \leq C \cdot \exp(-d_{\mathbb{H}}(x, y)). \quad (2.1.7)$$

DEMOSTRACIÓN:(2.17). Sea  $t$  la distancia entre los puntos de tangencia de  $[x, \eta] \cap B(y, R)$  y  $[x, \zeta] \cap B(y, R)$ . Denotamos por  $\theta$  al ángulo que forman  $\eta$  y  $\zeta$  con vértice en  $x$ , por (2.1.5) tenemos

$$\sinh(d_{\mathbb{H}}(x, y) - R) \cdot \theta \leq t \leq 2R \leq \sinh(d_{\mathbb{H}}(x, y)) \cdot \hat{\theta},$$

para algún  $\hat{\theta} \leq \theta$ .

Por lo tanto conseguimos las estimativas como en (2.1.7). Por la Observación 2.15 conseguimos estimativas análogas para  $d_x(\eta, \zeta)$ .  $\square$

**Proposición 2.19.** *Un subgrupo  $G$  de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  no tiene puntos de acumulación en  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  si y solo si la identidad es un elemento aislado en  $G$ .*

DEMOSTRACIÓN:(2.19).

Si  $G$  no acumula en  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  entonces no acumula en  $\mathrm{Id}$ . Esto prueba el directo.

Supongamos ahora que existe un entorno  $U \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  de  $\mathrm{Id}$  tal que  $G \cap U = \{\mathrm{Id}\}$ . Sea  $h = \lim_k g_k$  para alguna sucesión  $\{g_k\}_k \subset G$ , con  $h \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ . Entonces

$$\lim_k g_k^{-1} g_{k+1} = h^{-1} \cdot h = \mathrm{Id} \in G.$$

Si  $g_k^{-1} g_{k+1} \in U$  entonces debe ser  $g_k = g_{k+1} = h = \mathrm{Id}$ . Esto muestra que  $G$  no tiene puntos de acumulación en  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ .  $\square$

## 5.2. Apéndice al Capítulo 4

Mínimas generalizaciones a medidas  $k$ -Markov para potenciales  $(k+1)$ -localmente constantes.

### 5.2.1. Potenciales localmente constante y medidas Markov.

A cualquier potencial localmente constante le corresponde una medida de equilibrio que es Markov:

**Lema 5.1.** Si  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  es una función 2-localmente constante, es decir  $f(\omega) = f(\omega_1, \omega_2)$ , entonces su presión topológica es  $\log(\rho)$ , donde  $\rho$  es el radio espectral de la matriz  $Q_f \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}$

$$Q_f(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_j = a_i^{-1}, \\ \exp(f(a_j, a_i)), & \text{si no;} \end{cases}$$

y su medida de equilibrio  $\nu_f$  es de Markov.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos  $f$  y  $Q_f$  como en el enunciado. Vía Perrón-Frobenius sea  $r$  el único autovector a izquierda positivo de  $Q_f$ , esto es

$$r^t \cdot Q_f = \rho \cdot r^t,$$

con  $\rho > 0$  el radio espectral de  $Q_f$ . La estocastización de  $Q_f$  es la matriz

$$\hat{Q}_f = \frac{1}{\rho} \cdot D \cdot Q_f \cdot D^{-1},$$

donde  $D$  es la matriz diagonal  $r$

$$D = \begin{pmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{pmatrix}.$$

Observar que la matriz  $\hat{Q}_f$  es estocástica por columnas<sup>1</sup>:

$$1_{2d}^t \cdot \hat{Q}_f = \frac{1}{\rho} \cdot r^t \cdot Q_f \cdot D^{-1} = r^t \cdot D^{-1} = 1_{2d}^t.$$

---

<sup>1</sup> $1_{2d}$  es el vector columna de unos de dimensión  $2d$

La coordenada  $(i, j)$  de  $\hat{Q}_f$  está dada por

$$\hat{Q}_f(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_j = a_i^{-1}, \\ \frac{1}{\rho} r_i r_j^{-1} \exp(f(a_j, a_i)), & \text{si no.} \end{cases}$$

Observar que  $\hat{Q}_f$  es  $\frac{1}{\rho} \cdot Q_g$  para

$$g(a_{i_1} a_{i_2} \cdots) = f(a_{i_1}, a_{i_2}) + \log(r_{i_2}) - \log(r_{i_1}).$$

Se deduce del Teorema 3.8 que  $f$  y  $g$  tienen la misma medida de equilibrio y la misma presión. Ahora estamos en una situación conocida para determinar la medida de equilibrio y la presión de  $g$  a partir de la matriz estocástica  $\hat{Q}_f$ : como hicimos en la Observación 4.12, consideramos

$$\varphi_f(a_{i_1} a_{i_2} \cdots) = \log \hat{Q}_f(i_2, i_1).$$

Por un lado, ya vimos que este potencial tiene presión cero y su medida de equilibrio es de Markov (con las transiciones dadas por  $\hat{Q}_f$ ); y por otro

$$S_n \varphi_f(\omega) = S_n g(\omega) - n \log \rho.$$

Por la unicidad del Teorema 3.6 concluimos que la presión de  $g$  es  $\log \rho$  y la medida de equilibrio es la misma que la de  $\varphi_f$ , que sabemos es de Markov. □

**Lema 5.2.** *Supongamos ahora que el potencial depende de las primeras  $k + 1$  coordenadas. Entonces su medida de equilibrio es  $k$ -Markov.*

DEMOSTRACIÓN: Sea aplica el mismo argumento a la  $k$ -block presentation ([BP11]). □

# Bibliografía

- [AB08] A. Avila and J. Bochi. Lyapunov exponents. <http://www.personal.psu.edu/jzd5895/docs/trieste.pdf>, 30 June - 18 July, 2008. (Citado en página 7.)
- [AC88] Paul H. Algoet and Thomas M. Cover. A sandwich proof of the Shannon-McMillan-Breiman theorem. *Ann. Probab.*, 16(2):899–909, 1988. (Citado en página 71.)
- [And05] James W. Anderson. *Hyperbolic geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, second edition, 2005. (Citado on páginas 35 y 40.)
- [Bea95] Alan F. Beardon. *The geometry of discrete groups*, volume 91 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. Corrected reprint of the 1983 original. (Citado on páginas 35 y 57.)
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. (Citado on páginas 42 y 52.)
- [BHM11] Sébastien Blachère, Peter Haïssinsky, and Pierre Mathieu. Harmonic measures versus quasiconformal measures for hyperbolic groups. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 44(4):683–721, 2011. (Citado en página 9.)
- [BKS91] T. Bedford, M.S. Keane, and C. Series. *Ergodic Theory, Symbolic Dynamics, and Hyperbolic Spaces*. Oxford University Press, 1991. (Citado en página 52.)
- [Bou95] Marc Bourdon. Structure conforme au bord et flot géodésique d’un  $\text{CAT}(-1)$ -espace. *Enseign. Math. (2)*, 41(1-2):63–102, 1995. (Citado en página 45.)

- [Bou12] Jean Bourgain. Finitely supported measures on  $SL_2(\mathbb{R})$  which are absolutely continuous at infinity. In *Geometric aspects of functional analysis*, volume 2050 of *Lecture Notes in Math.*, pages 133–141. Springer, Heidelberg, 2012. (Citado en página 7.)
- [Bow79] Rufus Bowen. Hausdorff dimension of quasicircles. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 50:11–25, 1979. (Citado en página 61.)
- [Bow08] Rufus Bowen. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2008. (Citado on páginas 61, 62 y 66.)
- [BP03] Michael Batty and Panagiotis Papasoglu. Notes on hyperbolic and automatic groups. [https://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/280-2009/hyplectures\\_papasoglu.pdf](https://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/280-2009/hyplectures_papasoglu.pdf), 2003. (Citado en página 52.)
- [BP11] Mike Boyle and Karl Petersen. Hidden Markov processes in the context of symbolic dynamics. In *Entropy of hidden Markov processes and connections to dynamical systems*, volume 385 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 5–71. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011. (Citado on páginas 61 y 96.)
- [BPS12] B. Bárány, M. Pollicott, and K. Simon. Stationary measures for projective transformations: the Blackwell and Furstenberg measures. *J. Stat. Phys.*, 148(3):393–421, 2012. (Citado en página 7.)
- [BQ18] Yves Benoist and Jean-François Quint. On the regularity of stationary measures. *Israel J. Math.*, 226(1):1–14, 2018. (Citado en página 7.)
- [BS79] Rufus Bowen and Caroline Series. Markov maps associated with Fuchsian groups. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 50:153–170, 1979. (Citado en página 10.)
- [CLP21] Matías Carrasco, Pablo Lessa, and Elliot Paquette. On the speed of distance-stationary sequences. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 18(1):829–854, 2021. (Citado en página 9.)
- [Dal10] F. Dal’Bo. *Geodesic and Horocyclic Trajectories*. Universitext. Springer London, 2010. (Citado on páginas 30, 35, 41, 48, 49, 54, 55, 56 y 58.)

- [FF21] Ethan Fricker and Alex Furman. Quasi-fuchsian vs negative curvature metrics on surface groups, 2021. (Citado en página 56.)
- [Fur63] Harry Furstenberg. Noncommuting random products. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:377–428, 1963. (Citado en página 8.)
- [Fur02] Alex Furman. Random walks on groups and random transformations. In *Handbook of dynamical systems, Vol. 1A*, pages 931–1014. North-Holland, Amsterdam, 2002. (Citado en página 77.)
- [Fur11] Alex Furman. What is ... a stationary measure? *Notices Amer. Math. Soc.*, 58(9):1276–1277, 2011. (Citado en página 8.)
- [Gar19] Ernesto Garcia. Caminatas de ángulos rectos y grupos fuchsianos. [http://www.cmat.edu.uy/biblioteca/monografias-y-tesis/monografias/monografia\\_ernesto\\_garcia.pdf/view](http://www.cmat.edu.uy/biblioteca/monografias-y-tesis/monografias/monografia_ernesto_garcia.pdf/view), 2019. (Citado en páginas 35 y 48.)
- [GdlH90] É. Ghys and P. de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988. (Citado en páginas 45 y 52.)
- [GLJ93] Y. Guivarc'h and Y. Le Jan. Asymptotic winding of the geodesic flow on modular surfaces and continued fractions. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 26(1):23–50, 1993. (Citado en página 7.)
- [Hoc14] Michael Hochman. Lectures on dynamical systems and entropy. <http://math.huji.ac.il/~mhochman/courses/dynamics2014/notes.5.pdf>, 2014. (Citado en página 71.)
- [Hub06] John Hamal Hubbard. *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1*. Matrix Editions, Ithaca, NY, 2006. Teichmüller theory, With contributions by Adrien Douady, William Dunbar, Roland Roeder, Sylvain Bonnot, David Brown, Allen Hatcher, Chris Hruska and Sudeb Mitra, With forewords by William Thurston and Clifford Earle. (Citado en página 30.)

- [Hut81] John Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30:713–747, 1981. (Citado en página 21.)
- [Kai14] S. Kailasa. Topics in geometric group theory. <https://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Kailasa.pdf>, 2014. (Citado en página 52.)
- [Kat92] Svetlana Katok. *Fuchsian groups*. Chicago : University of Chicago Press, 1992. (Citado on páginas 34, 35, 40 y 49.)
- [KLP11] Vadim A. Kaimanovich and Vincent Le Prince. Matrix random products with singular harmonic measure. *Geom. Dedicata*, 150:257–279, 2011. (Citado en página 7.)
- [Kos21] Petr Kosenko. Fundamental inequality for hyperbolic Coxeter and Fuchsian groups equipped with geometric distances. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 6:4709–4728, 2021. (Citado en página 8.)
- [KT20] Petr Kosenko and Giulio Tiozzo. The fundamental inequality for cocompact fuchsian groups, 2020. (Citado en página 8.)
- [Lal93] Steven P. Lalley. Finite range random walk on free groups and homogeneous trees. *Ann. Probab.*, 21(4):2087–2130, 1993. (Citado en página 79.)
- [Led01] François Ledrappier. Some asymptotic properties of random walks on free groups. In *Topics in probability and Lie groups: boundary theory*, volume 28 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 117–152. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001. (Citado on páginas 10, 74, 77 y 81.)
- [Man67] Benoit Mandelbrot. How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 156(3775):636–638, 1967. (Citado en página 13.)
- [Mat95] Pertti Mattila. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995. (Citado en página 18.)
- [Mor46] P. A. P. Moran. Additive functions of intervals and hausdorff measure. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 42(1):15–23, 1946. (Citado en página 21.)

- [MT10] John M. Mackay and Jeremy T. Tyson. *Conformal Dimension: Theory and Application*. University Lecture Series. American Mathematical Society, United States, 2010. (Citado on páginas 14 y 15.)
- [Nv16] Bogdan Nica and Ján Špakula. Strong hyperbolicity. *Groups Geom. Dyn.*, 10(3):951–964, 2016. (Citado en página 45.)
- [Par64] William Parry. Intrinsic markov chains. *Transactions of the American Mathematical Society*, 112(1):55–66, 1964. (Citado on páginas 62 y 68.)
- [Par77] William Parry. A finitary classification of topological Markov chains and sofic systems. *Bull. London Math. Soc.*, 9(1):86–92, 1977. (Citado en página 62.)
- [Pat76] S. J. Patterson. The limit set of a Fuchsian group. *Acta Math.*, 136(3-4):241–273, 1976. (Citado en página 9.)
- [PW87] Massimo A. Picardello and Wolfgang Woess. Martin boundaries of random walks: ends of trees and groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 302(1):185–205, 1987. (Citado en página 79.)
- [Qui] J.-F. Quint. An overview of patterson-sullivan theory. <http://www.math.u-bordeaux.fr/~jquint/publications/courszurich.pdf>. (Citado en página 42.)
- [Ser81] Caroline Series. The infinite word problem and limit sets in Fuchsian groups. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1(3):337–360 (1982), 1981. (Citado en página 10.)
- [Ser83] Caroline Series. Martin boundaries of random walks on Fuchsian groups. *Israel J. Math.*, 44(3):221–242, 1983. (Citado en página 10.)
- [Ser86] Caroline Series. Geometrical Markov coding of geodesics on surfaces of constant negative curvature. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 6(4):601–625, 1986. (Citado en página 10.)
- [SS05] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*. Princeton lectures in analysis. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2005. (Citado on páginas 14, 22, 26 y 82.)
- [SS10] E.M. Stein and R. Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton lectures in analysis. Princeton University Press, 2010. (Citado on páginas 29 y 31.)

- 
- [Sul79] Dennis Sullivan. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 50:171–202, 1979. (Citado en página 9.)
- [Tan19] Ryokichi Tanaka. Dimension of harmonic measures in hyperbolic spaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 39(2):474–499, 2019. (Citado en página 59.)
- [Var01] S. R. S. Varadhan. *Probability theory*, volume 7 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. (Citado en página 86.)