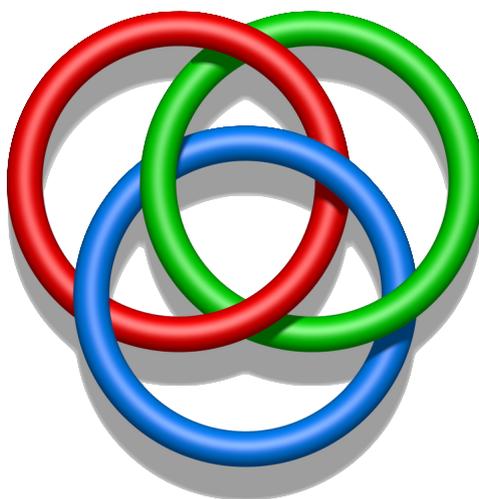


TESIS DE MAESTRÍA

# Foliaciones uniformes en 3-variedades



Por: Joaquín Lema

Orientador: Rafael Potrie



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY



PEDECIBA

Maestría en Matemática  
Facultad de Ciencias  
Universidad de la República  
Uruguay, 2021

## Resumen

En esta tesis presentaremos algunos resultados sobre foliaciones uniformes en tres variedades. Una foliación en una tres variedad compacta es uniforme si cualquier par de hojas de la foliación inducida en el cubrimiento universal se encuentran a distancia de Hausdorff acotada.

Las foliaciones uniformes fueron introducidos originalmente por Thurston, quien estaba estudiando deslizamientos de tres variedades sobre el círculo (“slitherings” en ingles). Uno de los objetivos del texto es presentar un resultado reciente de S. Fenley y R. Potrie, que nos dice que toda foliación uniforme sin componentes de Reeb proviene de un deslizamiento sobre el círculo.

El otro objetivo es mostrar resultados originales sobre foliaciones uniformes con componentes de Reeb. Motivados por una pregunta de S. Fenley y R. Potrie, presentamos una familia de tres variedades con grupo fundamental infinito y equipadas con foliaciones uniformes. Luego, mostraremos algunos resultados sobre el comportamiento de tales foliaciones en una tres variedad fuera de esta familia.

## Abstract

In this thesis, we present some results about uniform foliations on three-manifolds. A foliation on a compact three-manifold is uniform if each pair of leaves of the induced foliation on the universal cover are at finite Hausdorff distance from each other.

This type of foliations was introduced initially by Thurston, who was studying slitherings of three-manifolds over the circle. One of the goals of this thesis is to present a recent result of S. Fenley and R. Potrie, which says that a uniform Reebless foliation must essentially be induced from a slithering over the circle.

The other goal is to present original results concerning uniform foliations with Reeb components. Motivated by a question of S. Fenley and R. Potrie, we present a family of three-manifolds equipped with uniform foliations with Reeb components and infinite fundamental groups. Finally, we present some results concerning the behavior of such a foliation in a manifold outside of this family.

## **Agradecimientos:**

Terminando esta etapa y considerando la marea de cambios que se vienen en un futuro cercano, me resulta terapéutico estampar acá mi profundo aprecio por un montón de gente con la que tuve la suerte de cruzarme en esta hermosa comunidad matemática que hay en Uruguay.

A mi tutor Rafael que desde el inicio de mi carrera y siempre con mucha paciencia, atención y apertura, me influenció en asuntos matemáticos y extra-matemáticos. Ya sea dando intuiciones geniales de casi cualquier tema de la matemática o charlando sobre cuestiones mas personales, siempre es un disfrute compartir algún momento.

A los docentes que me han compartido su gusto por distintos rincones de la matemática (y alguna que otra risa). Me gustaría destacar a Fernando, Ezequiel, Alejandro, Juan, el Samba, Martín, el Leva, Richard e Iván. También a Matilde, Pablo y Sébastien que aparte de enseñarme matemática accedieron a discutir este trabajo conmigo.

A los compañeros con los que compartimos estreses, alegrías, pasillos y otras yerbas: Joaco, Vero, Ernesto, Santi, León, Nacho, Alejandro, Javier, Facu, Lea, Vitto, Clari, Pau, Meli, Jose, Alejo, Favio, Luispe, Elena, Taba, Jimmy, Radi y Mauro.

A Claudia y Lydia por su calidez y por hacernos la vida mas sencilla.

La decisión de explicitar los nombres es complicada porque siempre queda alguno afuera, pero mi agradecimiento va también a todos aquellos con los que me crucé a lo largo de estos años.

Por ultimo pero no menos importante, un agradecimiento al lector por estar leyendo este texto y también una disculpa de antemano, por si el mismo le resulta terriblemente mal escrito.

# Índice general

<b>I Preliminares</b>	<b>1</b>
<b>1 Generalidades sobre foliaciones</b>	<b>2</b>
1.1 Definiciones y ejemplos básicos: . . . . .	2
1.2 Holonomía de las hojas: . . . . .	6
<b>2 Topología de las 3-variedades</b>	<b>11</b>
2.1 Descomposiciones de Heegard: . . . . .	11
2.2 Cirugías de Dehn: . . . . .	14
2.3 Superficies Incompresibles: . . . . .	16
2.4 3-variedades Haken: . . . . .	20
<b>3 Foliaciones en 3-variedades:</b>	<b>21</b>
3.1 La estructura transversa: . . . . .	21
3.2 Ejemplos y construcciones: . . . . .	24
3.3 Foliaciones esenciales vs. componentes de Reeb: Teorema de Novikov . . . . .	28
3.4 El espacio de hojas: . . . . .	31
<b>II Foliaciones uniformes sin componentes de Reeb</b>	<b>35</b>
<b>4 Definiciones y ejemplos clásicos:</b>	<b>36</b>
4.1 Definición y ejemplos básicos: . . . . .	36
4.2 $\mathbb{R}$ -cubierta y uniforme desliza en $S^1$ : . . . . .	39
<b>5 Uniforme y sin componentes de Reeb implica <math>\mathbb{R}</math>-cubierta:</b>	<b>41</b>
5.1 La proyección de hojas separadas de $\tilde{\mathcal{F}}$ . . . . .	42
5.2 Proyectando la región acotada por las hojas separadas: . . . . .	43
5.3 Foliaciones uniformes en $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ . . . . .	43
5.4 Conclusión: prueba del Teorema 5.1 . . . . .	46

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	4
<b>III Foliaciones uniformes con componentes de Reeb</b>	<b>47</b>
<b>6 Generalidades:</b>	<b>48</b>
<b>7 Foliaciones uniformes con componentes de Reeb:</b>	<b>50</b>
7.1 La estrategia: . . . . .	50
7.2 Las construcciones: . . . . .	51
7.3 La familia de 3-variedades del Teorema 7.1 . . . . .	53
7.4 El caso con borde: ejemplo en el toro solido . . . . .	54
7.4.1 El toro y los anillos borromeos: . . . . .	54
7.4.2 La construcción: . . . . .	56
<b>8 El resto de las variedades:</b>	<b>58</b>
8.1 Resultado y estrategia: . . . . .	58
8.2 Superficies en posición general: . . . . .	58
8.3 Foliaciones Singulares en Superficies . . . . .	60
8.4 Prueba del Teorema 8.1 . . . . .	61
8.5 Preguntas a explorar: . . . . .	63
<b>Apéndice: Laminaciones en fibrados:</b>	<b>65</b>

# Introducción

*“Mire vuestra merced -respondió Sancho- que aquellos que allí se parecen no son gigantes, sino molinos de viento, y lo que en ellos parecen brazos son las aspas, que, volteadas del viento, hacen andar la piedra del molino”.*

El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha, Miguel de Cervantes.

Consideremos una 3-variedad cerrada  $M$ , por esto nos referimos a que es compacta, orientable y sin borde. Para nosotros una *foliación en  $M$*  será una partición de  $M$  por superficies que llamaremos las *hojas de la foliación*.

Es intuitivo pensar que una foliación nos reduce el problema de entender la topología de una 3-variedad (o incluso su geometría) a entender la topología de las hojas y como estas se apilan para formar  $M$ .

Quizás el ejemplo más fructífero de esto es cuando  $M$  es un fibrado del círculo por superficies, es decir, si  $M = (\Sigma \times [0, 1]) / (x, 0) \sim (f(x), 1)$  donde  $\Sigma$  es una superficie cerrada y  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  es un homeomorfismo. En este caso tenemos el *flujo suspensión*  $\phi_s([x, t]) = \phi_s([x, t + s])$  que es transverso a las hojas del fibrado. El teorema de geometrización de Thurston para fibrados [Thu98, Teorema 0.1] nos dice que la topología y geometría de  $M$  queda determinada por las propiedades dinámicas del flujo  $\phi$ .

En el artículo [Thu97b], Thurston encuentra una familia interesante de foliaciones donde puede repetir el esquema del teorema de geometrización para fibrados. Mas específicamente, él prueba que estas foliaciones admiten un flujo transverso a sus hojas presentando las mismas dinámicas que el caso de fibrados por superficies.

Para esto, las foliaciones deben cumplir con el siguiente par de propiedades:

**Definición 0.1.** Diremos que una foliación en  $M$  es:

- Uniforme si cualquier par de hojas de la foliación inducida en  $\tilde{M}$  están a distancia de Hausdorff acotada.
- $\mathbb{R}$ -cubierta si el espacio de hojas en  $\tilde{M}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}$ .

El primer ejemplo de foliaciones uniformes y  $\mathbb{R}$ -cubiertas que presenta Thurston, son los *deslizamientos sobre  $S^1$*  (“slithering” en inglés). Diremos que una 3-variedad  $M$  desliza sobre  $S^1$  si existe una fibración (posiblemente con hojas disconexas)  $\pi : \tilde{M} \rightarrow S^1$  tal que la acción de  $\pi_1(M)$  en  $\tilde{M}$  manda fibras en fibras. Los fibrados del círculo por superficies, y los fibrados de superficies por círculos son ejemplos de deslizamientos.

Como la acción del grupo fundamental preserva las fibras de  $\pi$ , las mismas se proyectan a una foliación en  $M$ . Se puede probar que estas foliaciones son siempre uniformes y  $\mathbb{R}$ -cubiertas. De hecho resulta que a menos de cierta relación de equivalencia, todas las foliaciones uniformes y  $\mathbb{R}$ -cubiertas provienen de un deslizamiento de  $M$  sobre  $S^1$ . Todo esto lo estudiaremos en el capítulo 4.

Los ejemplos mencionados anteriormente viven naturalmente en el mundo de las foliaciones sin componentes de Reeb. En este contexto, S. Fenley y R. Potrie prueban en [FP20] que la condición

de uniformidad automáticamente implica que la foliación es  $\mathbb{R}$ -cubierta. Por lo tanto las únicas 3-variedades que admiten foliaciones uniformes sin componentes de Reeb son aquellas que deslizan sobre  $S^1$ . Probaremos este resultado en el capítulo 5.

Luego nos vamos a mover al mundo de foliaciones con componentes de Reeb. En [FP20], los autores hacen una observación sobre el comportamiento de una foliación uniforme con componentes de Reeb (Lema 6.1) que los motiva a hacer la siguiente pregunta:

**Pregunta 0.1.** *Sea  $M$  una 3-variedad compacta con grupo fundamental infinito. ¿Puede existir una foliación uniforme con componentes de Reeb?*

En esta tesis responderemos afirmativamente esta pregunta. En el capítulo 7 mostraremos una familia de tres variedades con grupo fundamental infinito que admiten foliaciones uniformes con componentes de Reeb. Sin embargo, una variedad  $M$  en esta familia es “pequeña” en el sentido que no admite ninguna inmersión  $i : \Sigma \rightarrow M$ , con  $\Sigma$  una superficie cerrada de genero  $g \geq 1$ , tal que el morfismo inducido  $i_* : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(M)$  es inyectivo. De hecho la familia queda caracterizada por esta propiedad (véase 7.1).

En el capítulo 8, trataremos de decir algo para las variedades fuera de la familia donde tenemos contraejemplos. El resultado mas importante en esta dirección es el Teorema 8.1. Este nos dice que toda inmersión con las propiedades que comentamos arriba necesariamente debe cortar al conjunto de las componentes de Reeb. Estas inmersiones son útiles porque nos reduce el problema a estudiar foliaciones uniformes singulares en superficies, donde podemos usar la teoría clásica de Poincaré-Bendixon.

El Lema 6.1 y el Teorema 8.1 nos presentan una imagen extraña para una foliación con componentes de Reeb fuera de la familia de los contraejemplos. Por eso cerramos esta Tesis preguntando lo siguiente: si agregamos la hipótesis de estar bajo las condiciones del Teorema 8.1, ¿puede existir una foliación uniforme con componentes de Reeb?

Sería muy interesante que la respuesta a esta pregunta fuese negativa, porque siempre podemos conseguir una foliación con Reeb en una tres variedad cerrada  $M$  mediante la construcción de Thurston que parece no leer la topología de la variedad (véase [CC00, Sección 8.5]). Esto hace difícil un estudio general de las foliaciones con componentes de Reeb, ya que parecería que podríamos tener cualquier cosa. La pregunta 0.1 nos presenta una oportunidad para entender estas foliaciones en un contexto “controlado”, que es sin duda el primer paso para poder decir algo sobre el caso general.

## Organización del Texto:

Este texto está separado en tres partes:

### 1. Preliminares:

- *Generalidades sobre foliaciones:* Definición de foliación, ejemplos básicos y construcción del transporte de holonomía.
- *Topología de las 3-variedades:* Resultados clásicos de 3-variedades: existencia de descomposiciones de Heegard y cirugías de Dehn. Noción de descomposición prima y definición de superficies incompresibles.
- *Foliaciones en 3-variedades:* Resultados básicos de foliaciones en tres variedades (teoremas de Reeb, Goodman y Novikov). Definición de espacio de hojas y teorema de Palmeira.

### 2. Foliationes uniformes sin componentes de Reeb

- *Definiciones y ejemplos clásicos:* Introducción a los deslizamientos y ejemplos. Deslizamientos son uniformes y  $\mathbb{R}$ -cubiertas y la construcción recíproca.

- *Uniforme y sin componentes de Reeb implica  $\mathbb{R}$ -cubierta*: Prueba de [FP20, Teorema 1.1].

### 3. Foliaciones uniformes con componentes de Reeb

- *Generalidades*: Lemas generales sobre foliaciones uniformes con componentes de Reeb.
- *Ejemplos de foliaciones uniformes con componentes de Reeb*: Construcción de los ejemplos que responden la Pregunta 0.1.
- *El resto de las variedades*: Resultado sobre el comportamiento de una foliación uniforme con Reeb en variedades donde no podemos construir ejemplos.

Si el lector no es familiar con la teoría de foliaciones y tres variedades, espero que encuentre en la primera parte del texto una introducción amigable. Si el lector está familiarizado con esta teoría, puede comenzar en la sección dos o tres (según lo que le interese). Ambas son independientes entre ellas. Ante cualquier conflicto con la notación, hay que dirigirse a la parte uno o al apéndice.

**Parte I**

**Preliminares**

# Capítulo 1

## Generalidades sobre foliaciones

El objetivo de este capítulo es definir qué es una foliación y construir el transporte de holonomía. Todos los detalles omitidos pueden ser completados chequeando referencias clásicas como [CC00], [CN85] o [HH83].

### 1.1 Definiciones y ejemplos básicos:

Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimension  $n$ , una foliación  $\mathcal{F}$  de dimension  $k$  (y codimension  $n - k$ ) es una partición coherente de nuestra variedad por subvariedades de dimension  $k$ . Mas específicamente, por coherente nos referimos a lo siguiente:

**Definición 1.1.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\mathcal{F} = \{L_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{L}}$  una partición de  $M$  por  $k$ -subvariedades.

- Un abierto  $U \subset M$  es un *entorno foliado* si existe un encaje continuo<sup>1</sup>  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  tal que para todo  $y \in \mathbb{R}^{n-k}$  el conjunto  $\phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{y\})$  esta contenido en una de las superficies de la descomposición. Diremos que  $\phi$  es una *carta foliada*.
- La partición  $\mathcal{F}$  es una *foliación en  $M$*  si existe un cubrimiento de entornos foliados.

Diremos que las  $k$ -subvariedades de la partición son las *hojas de la foliación*, que  $k$  es la dimensión de  $\mathcal{F}$  y que  $n - k$  es su codimensión. Como  $\mathcal{F}$  es una partición, por cada punto  $p \in M$  pasa una única hoja que denotaremos  $L_p$ .

Dado  $q \in M$  y  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  una carta foliada alrededor de  $q$  con  $\phi(q) = (x, y)$ . Diremos que  $P_q = \phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{y\})$  es una *placa pasando por  $q$*  (notar que  $P_q \subset L_q$ ) y  $\tau_q = \phi^{-1}(\{x\} \times \mathbb{R}^{n-k})$  es una *transversal local por  $q$*  (vease la figura 1.1).

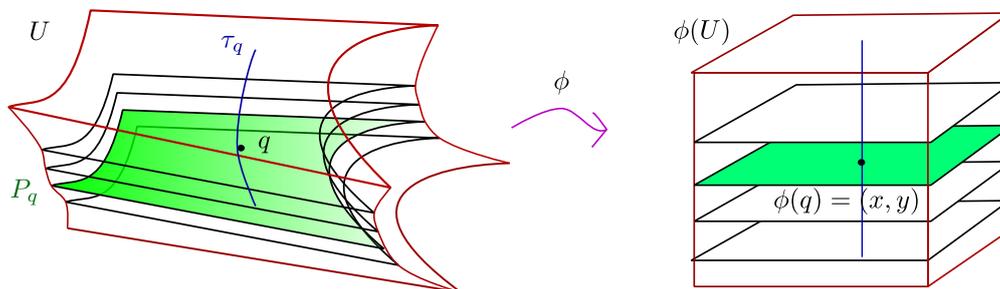


Figura 1.1: Una carta foliada cuando  $n = 3$  y  $k = 2$ .

**Ejemplo 1.1 (Submersiones).** El teorema de la función implícita nos dice que si  $\pi : M^n \rightarrow B^{n-k}$  es una submersión  $C^r$  ( $r \geq 1$ ), entonces existen cartas alrededor de  $x \in M$  y  $\pi(x) \in B$  en donde  $\pi$  es la proyección en la segunda coordenada  $\pi : D^k \times D^{n-k} \rightarrow D^{n-k}$ , donde  $D^d \subset \mathbb{R}^d$  es la bola unidad. Esto nos dice que  $\{\pi^{-1}(b)\}_{b \in B}$  es una foliación en  $M$  de codimension  $n - k$ .

<sup>1</sup>Es decir, un homeomorfismo sobre su imagen.

Un caso particular de lo anterior son los *fibrados*. Si  $F^k \rightarrow M^{n+k} \rightarrow B^n$  es un fibrado sobre una variedad  $B^n$  entonces las fibras definen una foliación en el espacio total  $M$ .

No es difícil chequear que las cartas foliadas forman un *atlas* de  $M$ . Esto es porque si  $\phi_U, \phi_V$  son dos cartas foliadas entonces  $\phi_{VU} := \phi_U \circ \phi_V^{-1}$  definida en un entorno de  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  tiene la forma:

$$\phi_{VU}(x, y) = (f(x, y), g(y)), \tag{1.1}$$

porque si  $p \in U \cap V$  entonces la intersección de las placas que pasan por  $p$  debe ser un abierto de las mismas. Dicho de otra forma  $\phi_{VU}$  preserva la foliación trivial  $\mathbb{R}^k \times \{\cdot\}$ . Si este atlas es de clase  $C^r$  diremos que la foliación es de clase  $C^r$  (posiblemente  $r = 0$  o incluso analítica). A modo de ejemplo, si tenemos una submersión  $C^\infty$  el atlas inducido es de clase  $C^\infty$ .

Recíprocamente, si una parte de un atlas satisfaciendo que los cambios de carta tienen la forma de la ecuación 1.1, entonces estos son inducidos por una foliación  $\mathcal{F}$  de dimensión  $k$ . Para ver esto definamos las placas como siendo  $\phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{y\})$  al igual que antes, notar que dos placas o bien son disjuntas o se intersectan en un abierto. Digamos ahora que dos puntos  $p, q \in M$  son equivalentes si existen  $P_1, \dots, P_l$  placas tal que  $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$  donde  $p \in P_1$  y  $q \in P_l$ . Se puede verificar que esto es una relación de equivalencia cuyas clases son  $k$ -subvariedades y que tenemos por lo tanto una foliación<sup>2</sup> (véase [CC00, Sección 1.2 vol. 1] para una discusión mas detallada). Este punto de vista nos da lo siguiente:

*Ejemplo 1.2* (Foliaciones inducidas en los cubrimientos). Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en  $M$  induciendo cierto atlas de entornos foliados. Consideremos ahora  $p : \widehat{M} \rightarrow M$  un cubrimiento de  $M$ , es sencillo verificar que el atlas se levanta a un atlas por cartas foliadas en  $\widehat{M}$  y por lo tanto, este induce una foliación que denotaremos por  $\widehat{\mathcal{F}}$ . Es sencillo verificar que si  $\widehat{L}$  es una hoja de la foliación en  $\widehat{M}$  entonces  $p|_{\widehat{L}} : \widehat{L} \rightarrow p(\widehat{L})$  es un cubrimiento, donde  $p(\widehat{L}) = L$  es una hoja de la foliación  $\mathcal{F}$ .

Por ejemplo  $\widehat{M}$  puede ser el cubrimiento universal que denotaremos de ahora en mas como  $\widetilde{M}$ . La foliación inducida en el cubrimiento universal nos da información de la foliación  $\mathcal{F}$  "a gran escala" (véase la figura 1.2).

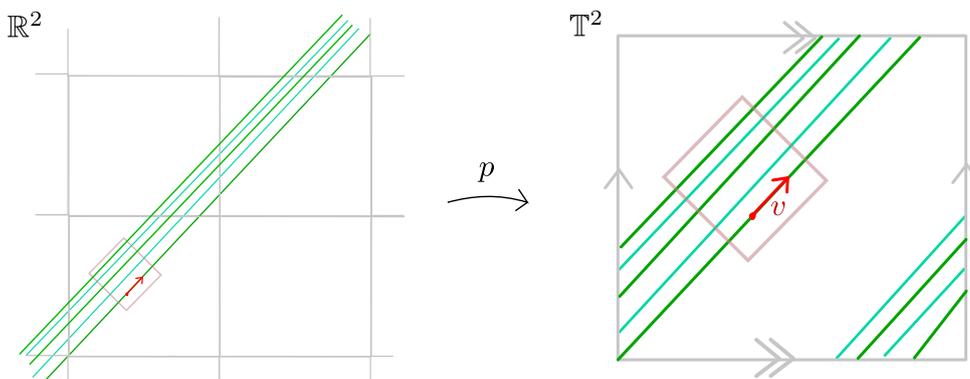


Figura 1.2: Un campo paralelo a un vector  $v$  en el toro  $\mathbb{T}^2$  integra a una foliación. Levantando todo al cubrimiento universal (el plano) obtenemos una foliación como en la imagen.

Notar que en una foliación podríamos tener hojas no orientables (como una botella de Klein). Sin embargo, muchas veces podemos esquivar estos casos tomando un cubrimiento finito. Se puede probar que siempre existe un cubrimiento  $q : \widehat{M} \rightarrow M$  tal que todas las hojas de la foliación inducida en  $\widehat{M}$  son orientadas. De hecho, este cubrimiento finito tiene orden 2.

Si todas las hojas de  $\mathcal{F}$  son orientables diremos que  $\mathcal{F}$  es *orientable* (vease [HH83, Sección 2.2, Parte A] para mas detalles).

<sup>2</sup>De hecho en muchas referencias se define foliación como al atlas maximal inducido por un atlas de cartas foliadas.

Se puede extender la noción de foliación a variedades con borde declarando que las hojas de nuestra foliación sean tangentes o transversales al borde. Mas específicamente partiendo de una descomposición de  $M$  en  $k$ -subvariedades (posiblemente con borde) y dado  $p \in \partial M$ , diremos que una carta  $\phi$  alrededor de  $p$  es foliada si  $\phi$  es un homeomorfismo sobre un entorno borde de  $\mathbb{R}^k \times \overline{\mathbb{H}^{n-k}}$  o  $\overline{\mathbb{H}^k} \times \mathbb{R}^{n-k}$  de forma que  $\phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{\cdot\})$  o  $\phi^{-1}(\overline{\mathbb{H}^k} \times \{\cdot\})$  esté contenida en una de las hojas<sup>3</sup>. En el primer caso la hoja pasando por  $p$  es *tangente* al borde, mientras que en el segundo es *transversal*.

Notar que si  $\mathcal{F}$  es transversal a  $\partial M$ , entonces  $\mathcal{F}$  induce naturalmente una foliación en  $\partial M$  cuyas hojas son las componentes conexas de  $L \cap \partial M$ , con  $L$  una hoja de  $\mathcal{F}$ . Denotaremos esta foliación como  $\mathcal{F}|_{\partial M}$ , observar que la codimensión de esta foliación coincide con la codimensión de  $\mathcal{F}$  (para mas detalles vease [CC00, Capitulo 1]).

*Ejemplo 1.3* (Componentes de Reeb). Definamos el mapa  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $f(x, t) = (|x|^2 - 1)e^t$ , es sencillo chequear que  $f$  es una submersión. A la izquierda de la figura 1.3 se puede visualizar algunas hojas de la foliación inducida cuando  $n = 1$ , el caso general consiste en esta misma imagen rotada alrededor del eje  $t$ .

Estudiamos la restricción de  $f$  al cilindro  $\overline{D}^n \times \mathbb{R}$ , las preimagenes nos inducen una foliación en el cilindro tangente al borde. Una cuenta sencilla muestra que el mapa  $\alpha(x, t) = (x, t + 1) \in \overline{D}^n \times \mathbb{R}$  manda hojas de la foliación en hojas de la foliación. Por lo tanto la foliación descende a una en el cociente  $\overline{D}^n \times \mathbb{R}/\langle \alpha \rangle$ . Este espacio es la variedad  $\overline{D}^n \times S^1$ , a la foliación inducida la llamaremos una *componente de Reeb*. Notar que cuando  $n = 1$  obtenemos una foliación en el anillo (que le llamaremos un anillo de Reeb) y cuando  $n = 2$  obtenemos una foliación en el toro solido (véase la derecha de la figura 1.3).

Observar que una componente de Reeb tiene dos tipos de hojas: el borde compacto homeomorfo a  $S^{n-1} \times S^1$  y las hojas del interior que son planos que acumulan en el borde.

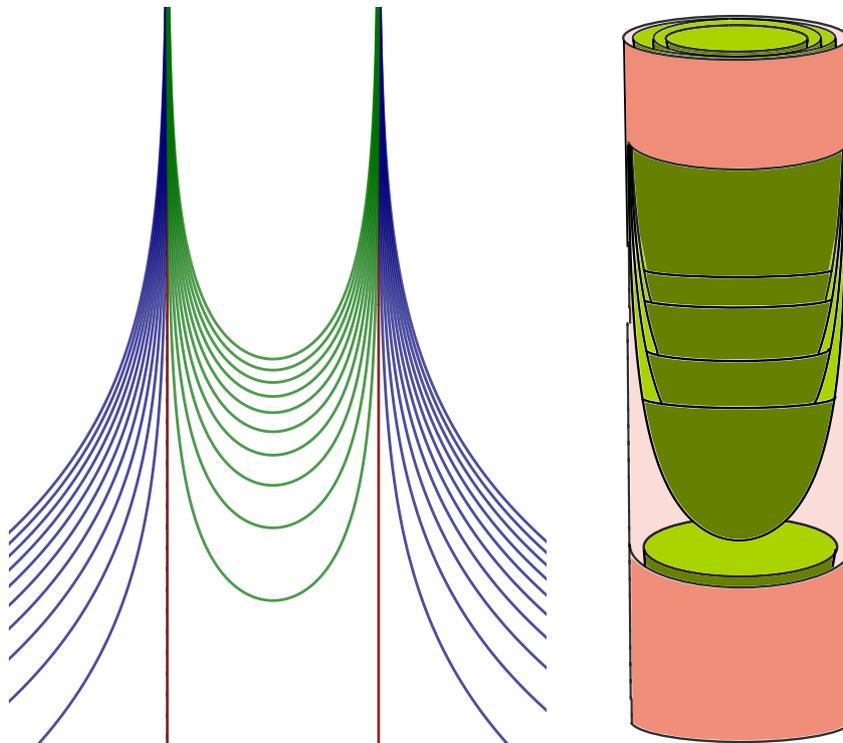


Figura 1.3: A la izquierda algunas preimagenes de la foliación en  $\mathbb{R}^2$  inducida por  $f$ . A la derecha una componente de Reeb en el toro solido (identificando los bordes).

<sup>3</sup> $\mathbb{H}^d := \{(x_1, \dots, x_d) : x_d > 0\}$  es el semiplano superior de dimension  $d$ .

La existencia de las componentes de Reeb nos da cierta flexibilidad para construir foliaciones ya que es sencillo introducir una pieza homeomorfa a  $\overline{D}^n \times S^1$  dentro de una variedad. En muchas instancias, esto nos permite incluso completar foliaciones definidas simplemente en una subvariedad. En el capítulo 3 explotaremos más a fondo esta “flexibilidad”, pero podemos ir calentando con el siguiente ejemplo:

*Ejemplo 1.4* (Foliación de Reeb en la esfera). La esfera  $S^3$  se obtiene pegando dos toros sólidos  $S^1 \times \overline{D}^2$  por el borde vía el mapa  $(x, y) \rightarrow (y, x)$ , donde estamos pensando el toro borde como  $S^1 \times S^1$  (véase ejemplo 2.1). Si equipamos a cada uno de los toros sólidos con una componente de Reeb, esto induce en  $S^3$  una foliación con *hojas suaves* (véase la figura 1.4).

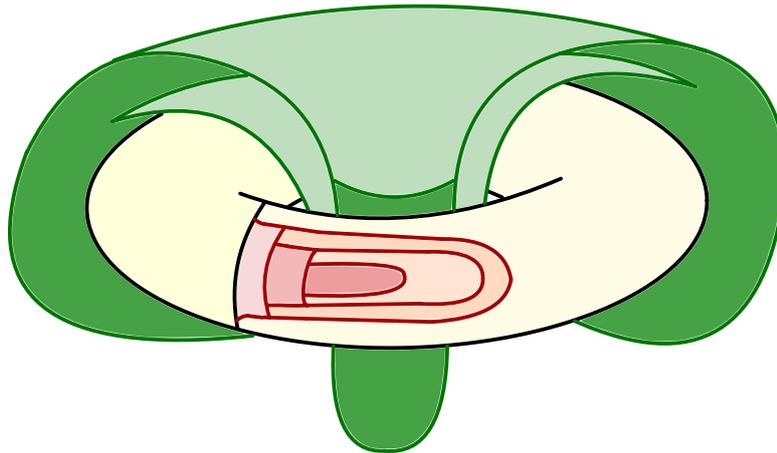


Figura 1.4: La foliación obtenida al pegar dos componentes de Reeb por el borde para obtener la esfera  $S^3$ .

Lo que hicimos en el ejemplo anterior es válido en general: si  $M$  y  $M'$  son dos variedades equipadas con foliaciones de codimensión 1 tal que existen subvariedades (posiblemente desconexas)  $S \subset \partial M$  y  $S' \subset \partial M'$  homeomorfas (o difeomorfas) y tangentes al borde, entonces pegando  $M$  a  $M'$  a lo largo de  $S$  por este homeomorfismo obtenemos una variedad  $N$  equipada con una foliación donde  $S \subset N$  es un conjunto de hojas. Se puede chequear que el atlas asociado a la foliación obtenida es simplemente  $C^0$ , aunque las hojas son tan regulares como lo eran en  $M$  y  $M'$ . En el capítulo 3 presentaremos las condiciones que nos aseguran un atlas más regular en  $N$  (lo haremos en dimensión 3, pero funciona en general).

Supongamos que  $\mathcal{F}$  es una foliación en  $M$  tal que las hojas son subvariedades  $C^k$  inmersas con  $k \geq 1$ , entonces en cada punto  $p \in M$  tenemos bien definido el espacio tangente a la hoja  $L_p$ . Esto es un campo de  $k$ -planos continuo (al menos) a lo largo de la hoja. Si además esta sección de  $k$ -planos es continua en  $M$  tenemos la siguiente definición:

**Definición 1.2.** Diremos que una foliación  $\mathcal{F}$  es de clase  $C^{\infty,0}$  si todas las hojas son subvariedades  $C^\infty$ -inmersas y además el campo de  $k$ -planos tangentes a las hojas es continuo.

La foliación construida en el Ejemplo 1.4 tiene este nivel de regularidad. Observar que el hecho de que el tangente sea continuo a lo largo de una hoja no implica que sea continuo en toda la variedad, ya que no tenemos control de lo que sucede transversalmente.

Cuando la foliación es de codimensión 1 resulta que esta condición es estrictamente más fuerte que ser  $C^0$  y estrictamente más débil que ser  $C^1$  (véase [CC00, Capítulo 1, ejemplo 1.2.25]). Este es el nivel de regularidad de las foliaciones con las que vamos a trabajar.

Uno se puede preguntar el recíproco de lo anterior: si partimos de un campo de  $k$ -planos  $E$  en  $M$  ¿existe  $\mathcal{F}$  una foliación en  $M$  tal que el campo de planos tangente a las hojas es  $E$ ? Diremos que  $E$

es *integrable* si existe una tal foliación. No todo campo de planos es integrable, un ejemplo puede verse en la figura 1.5.

El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que un campo de  $k$ -planos sea integrable:

**Teorema 1.1** (Frobenius). *Sea  $E$  un campo  $C^1$  de  $k$ -planos en  $M$ , este es integrable si y solamente si para cada par de campos de vectores  $X$  e  $Y$  tangentes a  $E$  tenemos que  $[X, Y]$  también es tangente a  $E$ .*

*Observación 1.1.* Notar que si  $k = 1$  tenemos que localmente un campo de rectas en  $M$  está definido por un campo vectorial. Por lo tanto el teorema de Frobenius es consecuencia del teorema de Picard y el teorema del entorno tubular. El siguiente caso instructivo es cuando  $k = 2$  en dimensión 3, una prueba se puede encontrar en [Cal07, Sección 4.1.3].

Cerremos esta sección definiendo la noción de “isomorfismo” entre foliaciones, o en otras palabras cuando vamos a considerar que dos foliaciones son iguales.

**Definición 1.3.** Sean  $M$  y  $M'$  dos variedades equipadas con foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  de clase  $C^r$  (con  $r \geq 0$ ). Diremos que  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  son  $C^r$ -conjugadas si existe  $h : M \rightarrow M'$  un difeomorfismo  $C^r$  que manda hojas de  $\mathcal{F}$  en hojas de  $\mathcal{F}'$ .

### 1.2 Holonomía de las hojas:

Supongamos que tenemos una foliación por hojas de dimensión 1 definida por un campo en  $M$ , entonces sabemos de la teoría de ecuaciones diferenciales que tenemos continuidad respecto a las condiciones iniciales. Esto significa que dado un punto  $p \in M$ , un  $\varepsilon$  y un tiempo  $T > 0$ , existe un entorno de  $p$  tal que todas las órbitas que comienzan en el entorno están  $\varepsilon$ -cerca de la órbita de  $p$  en un tiempo  $[0, T]$ . El objetivo de esta sección es generalizar esta noción de “continuidad respecto a las condiciones iniciales” para foliaciones de dimensión arbitraria.

Consideremos  $p \in M$  y  $q \in L_p$  otro punto de la hoja. Notar que si  $p$  y  $q$  están contenidos en un mismo entorno foliado  $U$ , entonces si  $\tau_p$  y  $\tau_q$  son las transversales locales de  $p$  y  $q$ , las hojas que cortan a  $\tau_p$  son las mismas que las que cortan a  $\tau_q$ . De hecho tenemos  $h_{p,q} : \tau_p \rightarrow \tau_q$  un homeomorfismo tal que si  $r \in \tau_p$  entonces  $h(L_r \cap \tau_p) = L_r \cap \tau_q$ . Tomando una carta foliada  $\phi : U \rightarrow B^k \times B^{n-k}$ , esta función toma la forma  $(x, t) \rightarrow (x', t)$  donde  $\phi(p) = (x, 0)$  y  $\phi(q) = (x', 0)$ . Informalmente, si por “acompañar” nos referimos a estar en una transversal local entonces al menos localmente dos puntos se acompañan por las mismas hojas.

Veamos que podemos extender la construcción del párrafo anterior para cualquier par de puntos de la hoja:

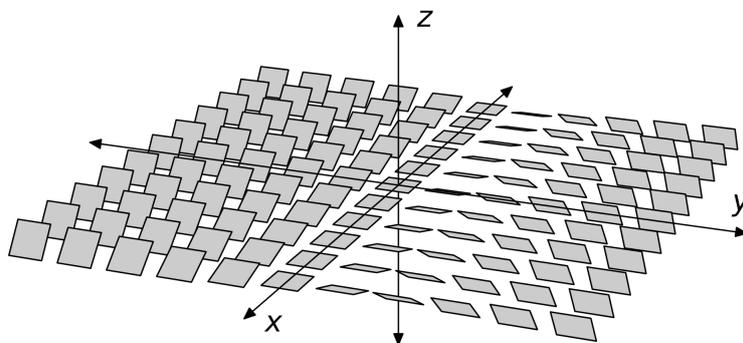


Figura 1.5: Se puede ver que el campo de planos en  $\mathbb{R}^3$  definido como el núcleo de la 1-forma  $\alpha_{(x,y,z)} = dz - ydx$  no es integrable.

**Construcción 1.1.** Sea  $p \in M$ ,  $q \in L_p$  (no necesariamente en un mismo entorno foliado) y consideremos  $c : [0, 1] \rightarrow L_p$  una curva con  $c(0) = p$  y  $c(1) = q$ . Como  $c([0, 1])$  es compacta podemos cubrirla con una cantidad finita de entornos foliados  $U_1, \dots, U_l$ . Sin perdida de generalidad tenemos una partición  $0 = t_1 < \dots < t_l = 1$  tal que  $c(t_i) \in U_i \cap U_{i-1}$ . Sean  $\tau_i, \tau_{i+1}$  las transversales locales a  $c(t_i), c(t_{i+1})$  respectivamente segun el entorno foliado  $U_i$  y  $\tau'_{i+1}, \tau'_{i+2}$  las transversales locales a  $c(t_{i+1}), c(t_{i+2})$  según  $U_{i+1}$ . Por lo dicho en el párrafo anterior tenemos homeomorfismos  $h_i : \tau_i \rightarrow \tau_{i+1}$  y  $h_{i+1} : \tau'_{i+1} \rightarrow \tau'_{i+2}$  que respetan las intersecciones con hojas de la transversal, si pudiéramos identificar  $\tau_i$  con  $\tau'_i$  podríamos conectar los homeomorfismos  $h_i$  y  $h_{i+1}$  para obtener  $h_{i,i+1} : \tau_i \rightarrow \tau'_{i+2}$ . Repitiendo este proceso una cantidad finita de pasos, obtendríamos un homeomorfismo entre las transversales de  $p$  y  $q$ .

Relacionar  $\tau_i$  con  $\tau'_i$  no es difícil, notar que  $\tau_i$  en la carta foliada  $\phi_i : U_i \rightarrow B^k \times B^{n-k}$  tiene la forma  $\{(x, t) : t \in B^{n-k}\}$  para cierto  $x \in B^k$  fijo tal que  $\phi_i(c(t_i)) = (x, 0)$ . Si  $\phi_{i+1} : U_{i+1} \rightarrow B^k \times B^{n-k}$  es la carta foliada correspondiente a  $U_{i+1}$  entonces por la forma del cambio de cartas dado por la ecuación 1.1 tenemos que  $\phi_{i+1}(\tau_{i+1}) = \{(f(x, t), h(t)) : t \in V \subset B^{n-k}\}$  para el mismo  $x$  de antes. Sin embargo, notar que tenemos que achicar el dominio de  $h$  porque el cambio de carta no está definido en todo  $B^k \times B^{n-k}$  (a priori). Dicho esto podemos definir un mapa que en las coordenadas  $\phi_{i+1}$  toma la forma  $(f(x, y), h(y)) \rightarrow (f(x, 0), h(y))$ , esto es un homeomorfismo entre un entorno  $V_i$  de  $\tau_i$  y  $V'_i$  de  $\tau'_i$ . Notar que si  $r \in V_i$  entonces la imagen de  $r$  por este mapa sigue estando en  $L_r$ .

Del párrafo anterior concluimos que tenemos bien definido un mapa  $h_{i,i+1} : h_i^{-1}(V_i) \subset \tau_i \rightarrow h_{i+1}(V'_i) \subset \tau'_{i+2}$  respetando la intersección de las transversales con las hojas, donde  $h_i^{-1}(V_i)$  y  $h_{i+1}(V'_i)$  son entornos de  $c(t_i)$  y  $c(t_{i+2})$  en las transversales  $\tau_i$  y  $\tau'_{i+2}$ . Como comentamos anteriormente, repitiendo este proceso una cantidad finita de pasos obtenemos  $h_{p,q} : D_p \subset \tau_p \rightarrow D_q \subset \tau_q$  un homeomorfismo entre abiertos de transversales locales de  $p$  y  $q$  respecto a ciertas cartas foliadas tal que si  $r \in D_p$  entonces  $h_{p,q}(r) \in L_r$  (véase la figura 1.6). Diremos que  $h_{p,q}$  es el transporte de holonomía a lo largo de  $c$ .

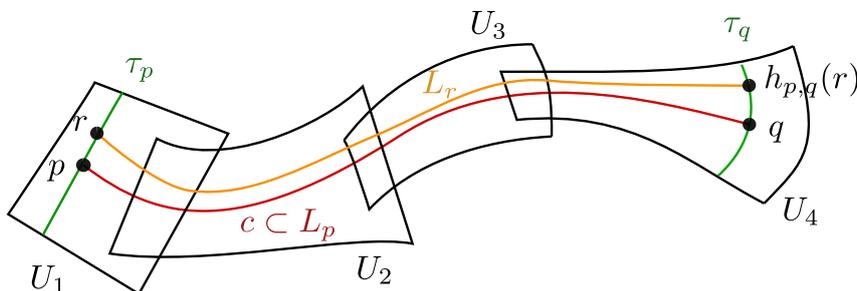


Figura 1.6: Construcción del transporte de holonomía.

La Construcción 1.1 nos dice que en una foliación podemos “levantar caminos” a las hojas cercanas:

**Proposición 1.1** (Entornos foliados largos). Consideremos una foliación  $\mathcal{F}$  en  $M$ ,  $L$  una hoja y  $c : [0, 1] \rightarrow L$  un camino dentro de la misma. Entonces existe  $V_c$  un entorno de  $c([0, 1])$  que es cubierto por  $i : B^k \times B^{n-k} \rightarrow V_c$  tal que  $i(B^k \times \{y\})$  esta contenido en una hoja para cada  $y \in B^{n-k}$ . De hecho, si  $c$  esta encajada entonces  $h$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* Sea  $U_1, \dots, U_l$  como en la construcción 1.1, denotemos a la unión de estos entornos foliados por  $U = \bigcup_{i=1}^l U_i$ , notar que  $\mathcal{F}|_U$  es una foliación. Denotemos por  $V$  a la unión de las hojas de  $\mathcal{F}|_U$  que cortan a  $D_p \subset \tau_p$  el dominio donde esta bien definido  $h_{p,q}$ , es sencillo chequear que este es un conjunto abierto. Tenemos dos casos:

- $c$  esta encajada: en este caso podemos asumir que  $U_i$  solo corta a  $U_{i-1}$  y a  $U_{i+1}$ . Esto nos permite observar que una hoja de  $V$  es una unión finita de placas de  $U_i$  cortándose solo en dos componentes conexas homeomorfas a discos, por lo tanto cada hoja debe ser una bola  $B^k$ .

Como  $V$  tiene estructura producto dada por las holonomías obtenemos  $h : B^k \times B^{n-k} \rightarrow V$  un homeomorfismo.

- $c$  no está encajada: en este caso notar que  $V$  retrae por deformación en  $c([0,1])$ . Consideremos  $\tilde{V}$  su cubrimiento universal que hereda la foliación de  $V$ . La curva  $c$  se levanta a  $\tilde{V}$  como una curva  $\tilde{c}$  encajada y podemos usar el caso anterior, para terminar basta con proyectar este entorno.

□

La Construcción 1.1 también nos dice que transversalmente todos los puntos de una hoja son iguales, más específicamente:

**Proposición 1.2.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en una variedad compacta sin borde  $M$  y  $L$  una hoja. Entonces o bien:*

- Para cada  $p \in L$  y  $\tau_p$  una sección local en  $p$  tenemos que todos los puntos de  $L \cap \tau_p$  son aislados. En este caso  $L$  es una subvariedad encajada<sup>4</sup>.
- Para cada  $p \in L$  y  $\tau_p$  una sección local en  $p$ , entonces todos los puntos de  $L \cap \tau_p$  son de acumulación. En este caso puede pasar que  $\bar{L}$  tenga interior no vacío y  $L \subset \text{int } \bar{L}$  o  $\bar{L}$  tiene interior vacío. Si  $L$  cae en el último caso diremos que es una hoja excepcional.

*Demostración.* El comportamiento de  $L \cap \tau_p$  para un punto  $p$  será el mismo que para otro  $q \in L$  por la existencia del transporte de holonomía, ya que si  $r \in \tau_p \cap L$  entonces  $h(r) \in \tau_q \cap L$ . Por lo tanto, todo punto de  $L \cap \tau_p$  es de acumulación, o bien es aislado.

En el primer caso tenemos que al clausurar  $\tau_p \cap L$  o bien  $p$  es un punto interior (en cuyo caso cualquier punto  $q$  es interior porque  $h_{p,q}$  es un homeomorfismo), o  $\tau_p \cap L$  tiene interior vacío.

En caso de que todo punto sea aislado, tenemos que todo punto de la hoja tiene una carta foliada donde hay una sola placa correspondiente a la hoja. La intersección de estas cartas con la hoja es un elemento de la base usual de la hoja  $L$ , esto implica que la topología relativa coincide con la topología de la hoja. □

Podemos ver un ejemplo donde los puntos de  $L \cap \tau_p$  son aislados cuando  $L$  es una hoja compacta, o cuando  $L$  es un plano en el interior de una componente de Reeb (Ejemplo 1.3). En el siguiente ejemplo se podrá apreciar el resto de los casos:

*Ejemplo 1.5.* Denotemos por  $\text{Homeo}_+(S^1)$  a los homeomorfismos del círculo que preservan orientación. Dado  $f \in \text{Homeo}_+(S^1)$ , la *suspensión de  $f$*  es la superficie  $S_f := S^1 \times [0,1] / \sim$  donde  $(x,0) \sim (f(x),1)$ . Topológicamente esta superficie es un toro, sin embargo la identificación que elegimos nos da una foliación natural en  $S_f$  dada por el campo constante  $(0,1) \in T_p S_f$ .

El conjunto  $S^1 \times \{0\}$  se proyecta a una transversal de esta foliación. Se puede verificar que el transporte de holonomía alrededor de una hoja cualquiera partiendo de  $p \in S^1 \times \{0\}$  queda bien definido en toda la transversal dándonos un mapa  $h : S^1 \times \{0\} \rightarrow S^1 \times \{0\}$ . De hecho, este mapa coincide con  $f$ .

Consideremos  $\rho_\theta \in \text{Homeo}_+(S^1)$  una rotación de ángulo  $\theta$ . Es bien sabido que si  $\theta$  es irracional entonces  $\rho_\theta$  es *minimal*, es decir, toda órbita periódica es densa. El párrafo anterior implica que en la transversal  $S^1 \times \{0\}$ , las intersecciones con una hoja cualquiera  $L$  son densas. Por lo tanto  $\bar{L}$  contiene un abierto (de hecho, es toda la superficie).

Para ver un ejemplo del caso restante, basta con tomar  $f \in \text{Homeo}_+(S^1)$  tal que la clausura de una órbita es un conjunto de Cantor (estos son llamados ejemplos de Denjoy, véase [HH83, Capítulo

<sup>4</sup>Por esto nos referimos a que la topología heredada de  $M$  coincide con la topología de  $M$ .

5, Parte A)). Por el mismo razonamiento que antes tenemos que una hoja  $L$  corta a la transversal  $S^1 \times \{0\}$  en un conjunto de Cantor.

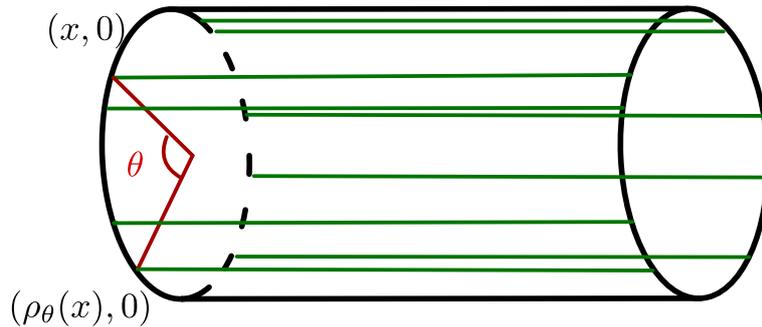


Figura 1.7: Un segmento de hoja de la suspensión de la rotación irracional  $\rho_\theta$ .

En este momento el lector puede estar molesto con dos cosas: primero que la construcción de  $h_{p,q}$  depende del cubrimiento de  $c$  elegido y segundo que depende de la propia curva  $c$ .

La primera objeción no es tan problemática, se puede ver que si  $U_1, \dots, U_l$  y  $V_1, \dots, V_l$  son dos cubrimientos con  $U_1 = V_1$  y  $U_l = V_l$  (para que  $\tau_p$  y  $\tau_q$  sean las mismas transversales), entonces las  $h_{p,q}$  construidas coinciden en la intersección de sus dominios.

La segunda objeción es mas interesante: repitiendo la construcción se puede ver que si  $c'$  es otra curva en  $L$  que coincide con  $c$  en los extremos y tal que  $c'([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$  entonces el transporte de holonomía a lo largo de  $c$  y  $c'$  coinciden en la intersección de sus dominios en  $\tau_p$ . Empujando un poco este argumento, se puede verificar que si dos curvas son homotópicas a extremos fijos en  $L$  entonces sus transportes de holonomía coinciden en la intersección de sus dominios (véase por ejemplo [CC00, Sección 2.2] o [CN85, Capítulo 4] para una exposición mas cercana a la de este texto).

Esto nos permite definir un mapa:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{p,q} : \pi_1(L; p, q) &\rightarrow \mathcal{G}(\tau_p, \tau_q; p, q) \\ [c] &\rightarrow [h_{p,q}], \end{aligned}$$

donde  $\pi_1(L; p, q)$  son las clases de homotopía de caminos de  $L$  a extremos  $p$  y  $q$  fijos y  $\mathcal{G}(\tau_p, \tau_q; p, q)$  es el germen de homeomorfismos entre  $\tau_p$  y  $\tau_q$ . Estas son las clases homeomorfismos entre algún entorno de  $\tau_p$  y  $\tau_q$  conteniendo a  $p$  y  $q$  respectivamente, a menos de coincidir en un entorno mas pequeño.

Es particularmente interesante el caso en el que  $p = q$  donde tenemos un mapa de  $\pi_1(L, p) \rightarrow \mathcal{G}(\tau_p, p)$  que ademas es un morfismo de grupos. Es decir el transporte de holonomía de la composición de curvas es la composición de los transportes de holonomía.

**Definición 1.4.** A la imagen del morfismo  $\pi_1(L, p) \rightarrow \mathcal{G}(\tau_p, p)$  construido anteriormente le vamos a llamar el grupo de gérmenes de holonomía en  $p$  y lo denotaremos como  $\mathcal{H}(L, p)$ .

En particular, si una hoja es simplemente conexa entonces  $\mathcal{H}(L, p)$  es trivial y por lo tanto transversalmente no hay sorpresas. Que una hoja no tenga holonomía en general no nos dice mucho<sup>5</sup>, sin embargo si ademas la hoja es compacta tenemos lo siguiente:

**Teorema 1.2** (Estabilidad de Reeb). *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en una variedad  $M$  y  $L$  una hoja compacta sin holonomía, entonces hay un entorno  $U$  de  $L$  que es una unión de hojas homeomorfas a  $L$ .*

<sup>5</sup>De hecho genéricamente las hojas no tienen holonomía, véase [CC00, Teorema 2.3.12]

Esencialmente la prueba está en la Construcción 1.1. Cubriendo la variedad con finitas cartas foliadas y usando que la holonomía es trivial se puede ver que si una hoja está suficientemente cerca entonces es un cubrimiento de  $L$ , donde el mapa de cubrimiento viene dado en cartas foliadas por la proyección. Un argumento completo puede encontrarse en [CC00, Sección 2.4] (así como también generalizaciones de la prueba).

Este teorema va a mejorar rotundamente en codimensión 1, donde veremos que de hecho todas las hojas de la foliación son compactas y homeomorfas a  $L$ .

## Capítulo 2

# Topología de las 3-variedades

En este capítulo haremos un mínimo resumen de algunos resultados generales sobre la topología de las 3-variedades que necesitaremos a lo largo del texto. El lector puede encontrar una muy buenas exposiciones del tema en notas como [Hat], [Cal] o un enfoque más clásico en [Hem04].

### 2.1 Descomposiciones de Heegard:

Comencemos con un comentario técnico: al igual que en superficies, Moise prueba (véase por ejemplo [Moi13, Teorema 3, Capitulo 35]) que toda 3-variedad *topológica* es *triangulable* y admite una *única estructura diferenciable*<sup>1</sup>. Esto nos permite hacer argumentos *combinatorios* (usando triangulaciones) y *diferenciables* sin salir de la categoría de las variedades topológicas.

Diremos que una 3-variedad con borde  $H_g$  es un *haza de genero g* (“handlebody” en inglés) si es el resultado de pegar  $g$  copias de cilindros  $D^2 \times [-1, 1]$  a  $B$  la bola de dimension 3, donde identificamos  $D^2 \times \{-1, 1\}$  con  $2g$  discos disjuntos en  $S^2 = \partial B$  de forma que el resultado sea una 3-variedad orientable. Esto está bien definido a menos de homeomorfismo y suavizado de esquinas. Intuitivamente es simplemente la superficie de genero  $g$  rellena (vista en  $\mathbb{R}^3$ ). Notar que  $\pi_1(H_g)$  es el grupo libre de  $g$ -generadores que denotaremos por  $F_g$ . Diremos que los  $g$ -discos  $D^2 \times \{0\}$  provenientes de los cilindros son un *sistema de discos* para  $H_g$ , notar que al cortar  $H_g$  por los mismos obtenemos una bola de dimension 3.

En particular un haza de genero 1 es un *toro solido* homeomorfo a  $S^1 \times D^2$ . En este caso diremos que las curvas  $S^1 \times \{\cdot\}$  son las *longitudes* del toro solido y  $\{\cdot\} \times \partial D^2$  son los *meridianos*.

Si  $H_g, H'_g$  son dos hazas de genero  $g$  y  $h : \partial H_g \rightarrow \partial H'_g$  es un homeomorfismo, entonces  $M = H_g \cup_h H'_g$  es una 3-variedad compacta. De hecho todas las 3-variedades cerradas son de esta forma (por cerrada nos referimos a compacta, orientable y sin borde).

**Definición 2.1.** Una *descomposición de Heegard* de genero  $g$  de una 3-variedad  $M$  es un par  $(H_g, h)$ , donde  $H_g$  es el haza de genero  $g$  y  $h : \partial H_g \rightarrow \partial H_g$  un homeomorfismo tal que  $M$  es homeomorfa a  $H_g \cup_h H_g$ .

**Teorema 2.1.** *Toda 3-variedad cerrada  $M$  tiene una descomposición de Heegard.*

*Demostración.* Tomemos  $\tau$  una triangulación de  $M$  y consideremos  $G$  el 1-esqueleto de la misma, es decir el grafo formado por todos los vértices y aristas de la triangulación. Como la tres variedad es orientable, el fibrado tangente restringido al grafo es trivial y por lo tanto podemos tomar un entorno tubular orientado. Afirmamos que este es un haza de cierto genero. Para ver esto consideraremos un subarbol maximal  $A \subset G$ , es estándar el hecho que  $A$  debe contener a todos los vértices de  $G$  y como es un árbol, un entorno tubular del mismo debe ser una bola  $B$ . El conjunto  $G \setminus A$  son simplemente aristas disconexas y por lo tanto un entorno tubular de las mismas es de la forma

<sup>1</sup>Esto no es verdad en dimension 4 donde existen 4-variedades topológicas que no admiten triangulaciones. O incluso 4-variedades con dos estructuras diferenciables no difeomorfas entre ellas.

$D^2 \times [-1, 1]$ . Esto nos muestra que el entorno tubular de  $G$  se obtiene de  $B$  pegándole  $D^2 \times [-1, 1]$ , como este entorno tubular es orientable obtenemos lo deseado.

Definamos ahora  $G^*$  el *grafo dual* de  $G$  definido de la siguiente forma: para cada 3-celda de la triangulación definamos un vértice como cualquier punto en el interior de la misma. Dos vértices se conectan por una arista si existe una 2-celda que une a las 3-celdas correspondientes a cada vértice, se colocan tantas aristas como 2-celdas las unan. Se puede encajar el grafo en  $M$  de forma que las aristas corten una vez sola a cada 2-celda. Nuevamente un entorno tubular de  $G^*$  nos da un haz y no es difícil convencerse que si lo agrandamos lo suficiente, va a compartir borde con el entorno tubular de  $G$  lo que nos da la descomposición de Heegard deseada (véase la figura 2.1).  $\square$

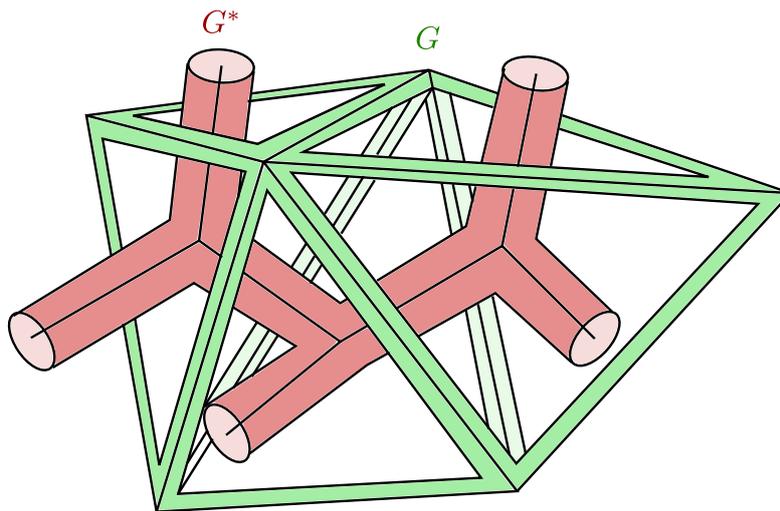


Figura 2.1: Prueba del teorema 2.1.

Partiendo de la Definición 2.1 parecería que las 3-variedades obtenidas dependen del homeomorfismo  $h$ , sin embargo veamos que una descomposición de Heegard queda determinada por una cantidad finita de datos sobre el pegado.

**Proposición 2.1.** *Sea  $D_1, \dots, D_g$  un sistema de discos del haz  $H_g$  y sean  $C_i = \partial D_i$  sus bordes. Entonces si  $h, h' : \partial H_g \rightarrow \partial H_g$  son dos homeomorfismos tal que  $h(C_i)$  es homotópica a  $h'(C_i)$ , las 3-variedades  $H_g \cup_h H_g$  y  $H_g \cup_{h'} H_g$  son homeomorfas.*

*Demostración.* Consideremos las 3-variedades  $M = H_g \cup_h H'_g$  y  $M' = H_g \cup_{h'} H'_g$ , donde pusimos un prima a la segunda haz para distinguirlas. Observa que si cortamos  $\partial H_g$  por las curvas  $h(C_i)$  entonces obtenemos una esfera sin  $2g$ -discos, ya que  $h$  es un homeomorfismo y  $\partial H'_g|_{(C_1 \cup C_g)}$  es una esfera sin  $2g$ -discos. Lo mismo sucede para  $h'(C_i)$ .

Esto implica que existe un homeomorfismo  $f : \partial H_g \subset M \rightarrow \partial H_g \subset M'$  enviando  $h(C_i)$  en  $h'(C_i)$ , ya que al cortar por estas curvas obtenemos la misma superficie. Como  $h(C_i)$  y  $h'(C_i)$  son homotópicas, entonces  $f$  puede tomarse isotópico a la identidad. Esto permite extender  $f$  a  $\bar{f} : H_g \rightarrow H_g$  tal que  $\bar{f}|_{\partial H_g} = f$ , tomando la isotopía entre  $f$  y la identidad en un entorno tubular de  $\partial H_g$  y definiéndolo como la identidad en el resto del haz.

Ahora basta con identificar  $H'_g \subset M$  con  $H'_g \subset M'$  vía la identidad. El mapa definido como  $\bar{f}$  en  $H_g$  y la identidad en  $H'_g$  baja al cociente como un homeomorfismo entre  $M$  y  $M'$ .  $\square$

Por lo tanto una descomposición de Heegard de  $M$  depende solamente (a menos de homeomorfismo) de la clase de homotopía de las curvas  $\alpha_i = h(C_i) \subset \partial H_g$ . Diremos que estas son las *curvas características* de la descomposición y que  $(H_g; \alpha_1, \dots, \alpha_g)$  es un *diagrama de Heegard* de  $M$ .

*Ejemplo 2.1.* 1. Si tomamos un haz de genero 0, es decir una bola  $B$  y la pegamos a otra bola vía un homeomorfismo cualquiera entre los bordes preservando orientación, entonces obtenemos a la esfera  $S^3$ .

2. También podemos obtener a la esfera  $S^3$  pegando dos toros sólidos por el borde  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$  vía el homeomorfismo  $h(x, y) = (y, x)$ , en cambio si los identificamos mediante el mapa identidad obtenemos  $S^1 \times S^2$ , vease la figura 2.2.

3. Denotemos por  $m$  a la clase de homotopía de  $\{0\} \times S^1$  y  $l$  a la de  $S^1 \times \{0\}$ , estas dos generan el grupo fundamental de  $S^1 \times S^1$ . Si  $M$  tiene una descomposición de Heegard de genero 1 entonces esta queda determinada (a menos de homeomorfismo) por  $h_*(m)$ , donde  $h_*$  es el mapa inducido por  $h$  en el grupo fundamental (estamos identificando el meridiano del toro solido con la clase  $m$ ).

El elemento  $h_*(m)$  debe ser primitivo ya que  $h$  es un homeomorfismo, por lo tanto  $h_*(m) = pl + qm$  donde  $p$  y  $q$  son enteros coprimos. En estas condiciones diremos que  $M$  es un *espacio lenticular* y lo denotaremos como  $L(p, q)$ . Se puede ver que si  $p \neq 0$  entonces  $L(p, q)$  es un cociente de  $S^3$  mediante la accion de  $\mathbb{Z}_p$  definida por  $k.(z, w) = (e^{2\pi i k \frac{q}{p}} z, e^{2\pi i k \frac{q}{p}} w)$ , donde vemos a  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$  (véase [Rol03, Sección 9.B]). En particular  $L(2, 1)$  es el espacio proyectivo  $\mathbb{R}P^3$ .

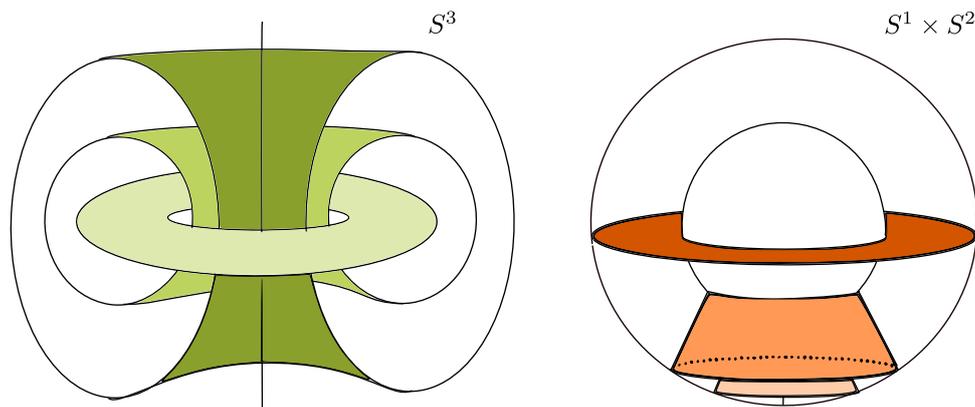


Figura 2.2: Descomposiciones de Heegard de  $S^3$  y  $S^1 \times S^2$ .

Los diagramas de Heegard nos dan una presentación para el grupo fundamental de  $M$ :

**Proposición 2.2.** *Sea  $M = H_g \cup_h H'_g$  una descomposición de Heegard de una 3-variedad cerrada y sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_g \subset \partial H_g$  las curvas características. Si  $\{\beta_1, \dots, \beta_g\}$  son los generadores de  $\pi_1(H_g)$ , entonces:*

$$\pi_1(M) \cong \langle \beta_1, \dots, \beta_g | [\alpha_1], \dots, [\alpha_g] \rangle,$$

donde la homotopía se toma respecto a  $H_g$ . En particular  $M$  admite una presentación con la misma cantidad de generadores que relaciones.

*Demostración.* Notar que  $M$  se obtiene de  $H_g$  pegando por las curvas características  $\alpha_i = h(C_i)$  un disco  $D_i$  proveniente de un sistema de discos para  $H'_g$ , y a este intermediario pegarle la bola proveniente de cortar  $H'_g$  por los discos  $D_i$ . Esto nos da una estructura de CW-complejo en  $M$  cuyo dos esqueleto es  $H_g \cup_h D_i$ . Como el grupo fundamental solo depende del 2-esqueleto:

$$\pi_1(M) = \pi_1(H_g \cup_h (D'_1 \cup \dots \cup_h D'_g)).$$

Esto ya nos da lo deseado porque al pegar por  $h$ , los discos  $D'_i$  trivializan a  $h(C'_i)$  lo que termina la prueba. □

Esto nos dice que no todo grupo puede ser el grupo fundamental de una 3-variedad cerrada. Por ejemplo  $\mathbb{Z}^4$  no admite una presentación con la misma cantidad de generaciones que relaciones. Un “resumen” sobre los grupos fundamentales de 3-variedades puede encontrarse en [AFW13].

Notar que la prueba del teorema 2.1 nos da un algoritmo para calcular diagramas de Heegard. Veamos que nos da el de  $\mathbb{T}^3$ :

*Ejemplo 2.2.* Consideremos el toro  $\mathbb{T}^3$  y pensemoslo como el cuadrado  $[0, 1]^3$  cocientado, con este punto de vista  $\mathbb{T}^3$  hereda la descomposición CW trivial de  $[0, 1]^3$ . Esta consiste en una 0-celda, tres 1-celdas, tres 2-celdas y una 3-celda. Sean  $a, b, c$  las 1-celdas paralelas a los ejes  $x, y, z$  respectivamente con la orientación de la figura 2.3, junto con la 0-celda esto nos determina nuestro grafo  $G$ . De forma similar, denotemos por  $A, B$  y  $C$  las 2-celdas paralelas a los planos  $yz, xz$  y  $xy$  respectivamente, junto con la 3-celda esto nos determina el grafo dual  $G^*$  y podemos repetir la prueba del teorema 2.1 obteniendo una descomposición de Heegard de genero 3 (vease la figura 2.3).

Veamos las clases de homotopía de las curvas características de esta descomposición: sea  $H_g$  el entorno tubular de  $G$ ,  $H'_g$  el de  $G^*$  y  $C'_i \subset H'_g$  como en la figura 2.3, las imágenes de estas por el mapa de pegado van a las curvas características  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  respectivamente. Notar que con las orientaciones elegidas en la figura 2.3 tenemos que  $[\alpha_1] = aca^{-1}c^{-1}$ ,  $[\alpha_2] = bcb^{-1}c^{-1}$  y  $[\alpha_3] = aba^{-1}b^{-1}$ . Observar que esto es coherente con que  $\pi_1(\mathbb{T}^3) = \mathbb{Z}^3$ .

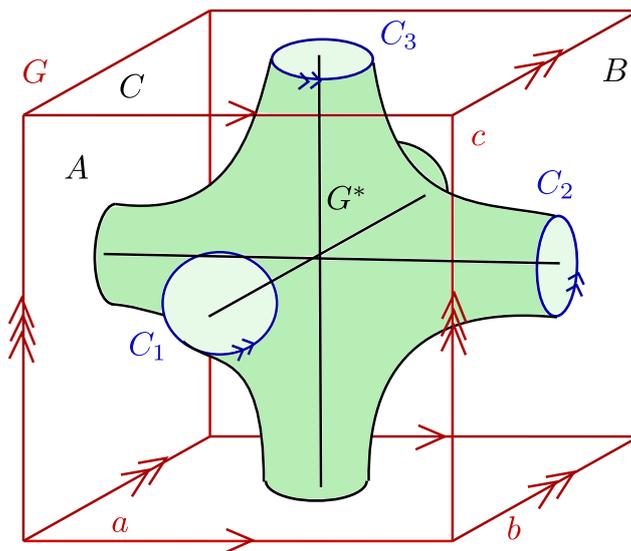


Figura 2.3: Descomposición de Heegard de  $\mathbb{T}^3$ .

## 2.2 Cirugías de Dehn:

Notar que si tenemos una 3-variedad  $M$  y  $N \subset M$  es una subvariedad de codimensión 0, entonces removiendo  $N$  y volviéndolo a pegar a  $M \setminus \text{int}(N)$  cambiando el mapa de pegado obtenemos una 3-variedad  $M'$ , usualmente diferente a la original (pensar en los ejemplos de la sección anterior). En esta sección estudiaremos con mas detalle este procedimiento en el caso que  $N$  sea un *toro solido*, pensaremos en los mismos como entornos tubulares de curvas.

Diremos que un *nudo*  $K$  en una 3-variedad  $M$  es la imagen de un encaje suave de  $S^1$  en  $M$ . Vamos a suponer que nuestros nudos están equipados con un marco de vectores<sup>2</sup>. Dar un marco de vectores a lo largo de  $K$  es lo mismo que dar una identificación entre un entorno tubular de  $K$  y  $S^1 \times D^2$ .

<sup>2</sup>Esto es una base de vectores de  $TM$  a lo largo de  $K$ .

Dada una identificación entre un entorno tubular  $N$  de  $K$  y  $S^1 \times D^2$ , diremos que los meridianos de  $N$  son las curvas  $\{\cdot\} \times S^1$ , y que las longitudes son las curvas  $S^1 \times \{z\}$  con  $z \in S^1$ . Denotemos a las clases de homotopía en  $\partial N$  de los meridianos y los paralelos por  $m$  y  $l$  respectivamente. Estas forman una base de  $\mathbb{Z}^2 \cong H_1(\partial N, \mathbb{Z})$ .

*Convención 2.1.* Muchos de los nudos que nos encontraremos en una 3-variedad  $M$  serán curvas homotópicamente triviales. Un nudo  $K$  en estas condiciones tiene un marco de vectores estándar que identifica a un entorno tubular de  $K$  con  $S^1 \times D^2$  de forma que las longitudes acotan un disco encajado en  $M$  (tal disco existe por el teorema el disco que veremos mas abajo). Cuando no aclaremos el marco de vectores de un nudo, supondremos que es este.

**Definición 2.2.** Sea  $K$  un nudo en una 3-variedad  $M$  con un entorno tubular encajado  $N \cong S^1 \times D^2$  (respecto a cierto marco en  $K$ ). Diremos que una 3-variedad  $M'$  se obtiene de  $M$  haciendo *cirugía de Dehn en  $K$*  (o simplemente haciendo cirugía en  $K$ ) si  $M'$  se obtiene a partir de  $M$  quitando  $N$  y volviéndolo a pegar vía un mapa  $h : \partial N \rightarrow \partial N$ . Si  $h_*(m) = ql + pm$  para ciertos  $(q, p)$  coprimos, diremos que  $r = \frac{p}{q}$  es el *coeficiente de la cirugía* (si  $q = 0$  declaramos  $r = \infty$ ).

Notar que el coeficiente de la cirugía depende del marco preferido en el nudo, pero no depende de la orientación del mismo. Las cirugías de Dehn a lo largo de  $K$  quedan determinadas por su coeficiente  $r$ . Para ver esto el lector puede repetir el argumento de la Proposición 2.1.

*Ejemplo 2.3.* 1. Diremos que un nudo  $K \subset S^3$  es *no anudado o trivial* si es el borde de un disco encajado  $D \subset S^3$ , o análogamente si es isotópico a cualquier círculo mayor de  $S^3$ . Los ejemplos 2.1 muestran que al hacer  $\frac{p}{q}$ -cirugía a lo largo de  $K$  obtenemos  $L(p, q)$ .

2. En general es bastante difícil visualizar a la variedad resultante de hacer cirugía. El siguiente es un caso donde el efecto de la cirugía queda bastante claro: sea  $K$  un nudo trivial en  $S^3$ , entonces el complemento de un entorno tubular  $N$  es un entorno solido. Tomemos coordenadas en  $N^c \cong S^1 \times D^2$ , notar que la longitud del toro solido es homotópico al meridiano de  $N$ , y el meridiano del mismo homotópico a la longitud.

Consideremos el mapa  $f : S^1 \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2$  definido como  $f(z, w) = (z, zw)$ ,  $f$  induce en su borde un mapa que manda la clase de homotopía de una longitud  $l$  en  $m+l$ . Como la longitud de  $l$  se corresponde con el meridiano de  $N$ , entonces hacer 1-cirugía en  $K$  es lo mismo que quitar  $N$ , aplicar  $f$  y luego volver a pegar  $N$  por la identidad.

A la izquierda de la figura 2.4 puede verse en la curva roja los efectos de hacer esta 1-cirugía (otra figura util se puede encontrar en [Rol03, Ejemplo 2, Sección 3A]).

3. Un *enlace*  $L$  en una 3-variedad  $M$  es una unión disjunta de nudos en  $M$  (todos con su marco de vectores preferido). Un problema clásico en topología es generar invariantes para distinguir dos enlaces en  $\mathbb{R}^3$  a menos de isotopías del espacio, o lo que es lo mismo, en  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ . Un invariante de un enlace es su complemento (como 3-variedad en si misma). Por ejemplo, el complemento del nudo trivial toro solido.<sup>3</sup>

Todo enlace puede ser isotopado para que quede dentro del plano  $z = 0$  excepto en ciertas autointersecciones, donde tenemos cruzamientos que podemos asumir son como a la derecha de la figura 2.4.

Si tomamos un toro que rodee uno de los cruzamientos y hacemos una 1-cirugía como en el ejemplo anterior, entonces el efecto producido en el diagrama es cambiar el patrón del cruzamiento, es decir cambiamos el segmento de arriba por el segmento de abajo. Se puede ver que al cambiar finitos cruzamientos, el diagrama que obtenemos corresponde al del enlace trivial. Este es el enlace formado por nudos triviales separados por bolas. Los toros por los que hacemos cirugía se llaman la *descripcion por cirugías* del enlace, véase [Rol03, Sección 6.D] para mas detalles.

<sup>3</sup>De hecho, si el complemento de un nudo es un toro solido, entonces el nudo es trivial.

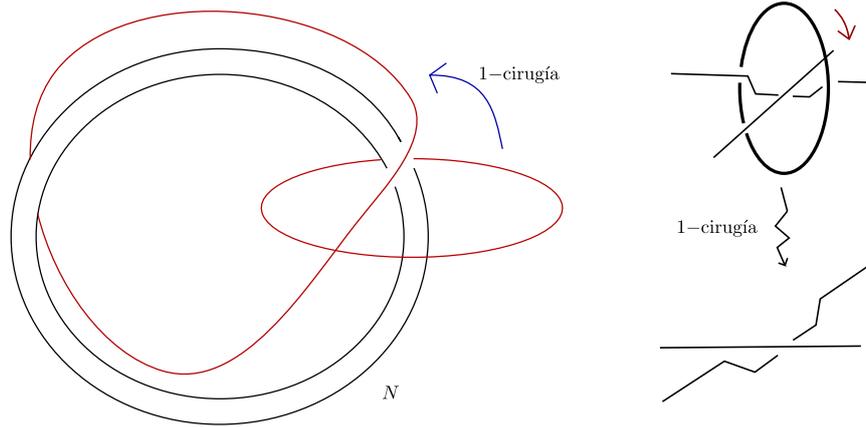


Figura 2.4: Algunos efectos de hacer una 1-cirugía en un nudo no anudado.

El ultimo ejemplo es un caso bebé del siguiente teorema, que nos dice que toda 3-variedad cerrada se obtiene de hacer cirugías en toros de  $S^3$ . Una prueba puede encontrarse en [Rol03, Sección 9.I]

**Teorema 2.2** (Lickorish, Wallace). *Sea  $M$  una 3-variedad cerrada, entonces podemos obtener  $M$  haciendo cirugías de Dehn en  $S^3$  a lo largo de un enlace  $L$  con  $n$ -componentes  $K_1, \dots, K_n$ . De hecho podemos suponer que existe un nudo trivial  $K_0$  tal que si  $N \cong S^1 \times D^2$  es el complemento de un entorno tubular, entonces  $L$  es transversal a los discos  $\{\cdot\} \times D^2$  (a esto se le llama una trenza).*

### 2.3 Superficies Incompresibles:

Una forma de introducir la noción de genero en una superficie compacta  $S$  es como el máximo numero de curvas en la superficie tal que al cortar por ellas obtenemos una superficie conexa. De hecho el interior de la superficie va a ser una esfera pinchada. Esto nos da una noción de complejidad en la topología de  $S$ .

Lo que haremos esta motivado por repetir este esquema en 3-variedades, la idea es comenzar a cortar nuestra 3-variedad por superficies especiales y reconstruir la variedad a partir de los complementos.

Por separar nos referimos a lo siguiente: si  $S$  es una superficie en una 3-variedad  $M$ , vamos a denotar por  $M|S$  a la completación de  $M \setminus S$  para cierta métrica en  $M$ . Si  $S$  tiene 2-lados, es decir que el fibrado normal es trivial, entonces  $M|S$  tiene dos componentes de borde provenientes de  $S$ . De ahora en mas supongamos que todas las superficies de las que hablamos tienen 2-lados y están encajadas diferenciablemente<sup>4</sup>.

El problema es que al contrario de las 1-variedades, ahora tenemos que elegir por cual superficie compacta cortar. Comencemos estudiando cortes con la esfera. Si  $S \subset M$  es una esfera encajada, entonces hay dos posibilidades: o bien  $M|S$  tiene dos componentes conexas o una (un ejemplo del segundo caso puede verse en  $S^1 \times S^2$ ).

En el primer caso, si llamamos  $N_1$  y  $N_2$  a ambas componentes conexas de  $M|S$ , donde rellenamos el borde de  $N_1$  con una bola  $B^3$ , entonces  $M$  es homeomorfa a  $N_1 \# N_2$  donde  $\#$  denota la operación de *suma conexa*. Recordar que la suma conexa de un par de 3-variedades es el resultado de quitar una bola a ambas variedades y pegarlas por el borde de la misma.

*Ejemplo 2.4.* 1. Tomemos  $S$  una esfera de dimension 2 encajada en  $S^3$ . Un teorema de Alexander (véase [Hat, Teorema 1.1]) implica que  $S$  acota una bola en ambos lados, por lo tanto la única forma de escribir  $S^3$  como suma conexa de dos variedades es la forma trivial  $S^3 \cong S^3 \# S^3$  (esto generaliza el teorema de Schoenflies en superficies).

<sup>4</sup>Esto se puede relajar a una categoría lineal a trozos pidiendo que  $S$  admita un entorno tubular.

Es interesante notar que si se quita la hipótesis de estar encajada diferenciablemente (o su análogo en la categoría lineal a trozos) entonces el teorema no es verdad, véase [Rol03, Sección 3.I].

2. Supongamos que  $M$  es una 3-variedad obtenida a partir de  $S^3$  haciendo cirugías de Dehn en un enlace  $L$  (como en el teorema 2.2). Si existe una esfera  $S$  separando  $L$  en dos enlaces  $L_1$  y  $L_2$ , entonces  $M$  es la suma conexa de  $N_1$  y  $N_2$ , donde  $N_i$  es la 3-variedad obtenida al hacer cirugías de Dehn en  $S^3$  a lo largo de  $L_i$ .

*Observación 2.1.* Como la esfera  $S^2$  es simplemente conexa, el teorema de Van-Kampen nos dice que  $\pi_1(N_1 \# N_2) \cong \pi_1(N_1) * \pi_1(N_2)$ .

Notar que tomando una bola cualquiera podemos escribir cualquier 3-variedad  $M$  como  $M \cong M \# S^3$ . Llamaremos a esta descomposición trivial. Las 3-variedades que solo pueden ser descompuestas trivialmente diremos que son *primas*.<sup>5</sup>

Resulta que si arrancamos con una 3-variedad tenemos el siguiente teorema de descomposición prima:

**Teorema 2.3** (Descomposición prima). *Sea  $M$  una 3-variedad compacta, entonces existen  $P_1, \dots, P_k$  3-variedades compactas y primas tal que  $M \cong P_1 \# \dots \# P_k$ . Además la descomposición es única a menos de introducir factores  $S^3$ .*

La prueba es algo parecida a lo mencionado para superficies al definir genero, hay que probar que existe una cota para la cantidad de esferas encajadas tal que alguna componente conexa del complemento es una esfera pinchada. Una prueba puede encontrarse en [Hat, Teorema 1.5].

De lo anterior podríamos pensar que en una 3-variedad prima, toda esfera encierra algo trivial en uno de sus lados, es decir una bola. Diremos que una 3-variedad  $M$  es *irreducible* si toda esfera (de 2-lados y encajada suavemente) acota una bola en uno de sus lados.

Claramente una 3-variedad irreducible es prima, pero hay una excepción para el recíproco:

**Proposición 2.3.** *Las únicas 3-variedades primas que no son irreducibles son  $S^1 \times S^2$  y  $S^1 \widetilde{\times} S^2$ , donde este último es el fibrado de esferas sobre el círculo no orientable.*

*Demostración.* Se puede chequear que si un cubrimiento intermedio de una 3-variedad es irreducible, entonces la misma debe ser irreducible. Por lo tanto basta ver que el cubrimiento doble orientable es  $S^1 \times S^2$ .

Supongamos que  $P$  es prima pero no irreducible, entonces existe  $S$  una esfera que no acota una bola. Esta esfera no puede separar, ya que esto contradice el hecho que  $P$  es prima o que  $S$  no acota una bola. Sea  $S \times [-1, 1]$  un entorno tubular de la esfera, como  $S$  no separa existe  $c : [0, 1] \rightarrow P \setminus (S \times [-1, 1])$  una curva encajada comenzando en  $S \times \{1\}$  y terminando en  $S \times \{-1\}$ . Considerando el conjunto  $N$  compuesto por el entorno tubular de  $S$  junto con un entorno tubular de  $c$ , obtenemos  $N$  una subvariedad que es homeomorfa a  $S^1 \times S^2$  sin una bola, esto muestra que  $P = S^1 \times S^2 \# Q$ , pero como  $P$  es prima obtenemos lo deseado.

Resta ver que  $S^1 \times S^2$  es prima, supongamos que  $S^1 \times S^2 = P \# Q$ , entonces como  $\pi_1(S^1 \times S^2) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_1(P) \# \pi_1(Q)$ , debe pasar que (sin pérdida de generalidad)  $Q$  sea simplemente conexo. Denotemos por  $V$  a  $Q$  sin una bola visto en  $S^1 \times S^2$ . Consideremos  $p : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow S^1 \times S^2$  el cubrimiento universal, entonces como  $V$  es simplemente conexo, una componente conexa  $\widetilde{V}$  de  $p^{-1}(V)$  es homeomorfa a  $V$ . La esfera  $\partial \widetilde{V}$  acota una bola en  $\mathbb{R}^3$  (por el teorema de Alexander), esta bola no puede contener al cero ya que  $\partial \widetilde{V}$  acota a  $\widetilde{V}$ , por lo tanto  $\widetilde{V}$  es una bola y obtenemos lo deseado.  $\square$

*Observación 2.2.* En el argumento nos topamos con  $V$  una 3-variedad cerrada simplemente conexa. La conjetura de Poincaré (probada por Perelman) nos dice que  $V$  tiene que ser homeomorfa a  $S^3$ .

<sup>5</sup>El nombre es auto explicativo si enunciamos la condición como  $M \cong P \# Q$  sii  $P$  o  $Q$  es homeomorfo a  $S^3$ .

En este texto trataremos de evitar el uso de tales bombas cuando no hay necesidad, como hicimos en la proposición anterior.

Toda esta maquinaria completa la imagen sobre que puede pasar al cortar por esferas. Supongamos que ahora queremos empezar a cortar una 3-variedad por toros.

*Ejemplo 2.5.* Tomemos un toro  $S \cong S^1 \times S^1$  en la esfera  $S^3$ . Se puede ver (por ejemplo usando una función de Morse) que existe una curva  $\gamma \subset S$  tal que no separa al toro y acota un disco  $D \subset S^3$  en uno de los lados de  $S$ .

Tomando un entorno tubular del disco  $D^2 \times [-1, 1]$ , donde  $\partial D^2 \times [-1, 1] \subset S$  entonces observar que  $S \setminus (\partial D^2 \times (-1, 1))$  es una esfera sin dos discos (porque el toro tiene genero 1). Por lo tanto si a  $S \setminus (\partial D^2 \times (-1, 1))$  le agregamos los discos  $D^2 \times \{-1, 1\}$  en sus respectivos bordes, obtenemos una esfera  $S'$  (véase la figura 2.5). Toda esfera en  $S^3$  acota bolas en ambos lados por el teorema de Alexander, entonces haciendo el proceso para obtener  $S'$  al revés deducimos que todo toro en  $S^3$  acota un toro solido en uno de sus lados.

Vale la pena remarcar que no es verdad que ambos lados del toro sean toros sólidos, por ejemplo si tomamos  $L$  un nudo no trivial y  $N$  un entorno tubular del mismo entonces el relleno de  $N$  va a ser un toro solido pero el complemento no lo sera (esto solo pasa si el nudo es trivial).

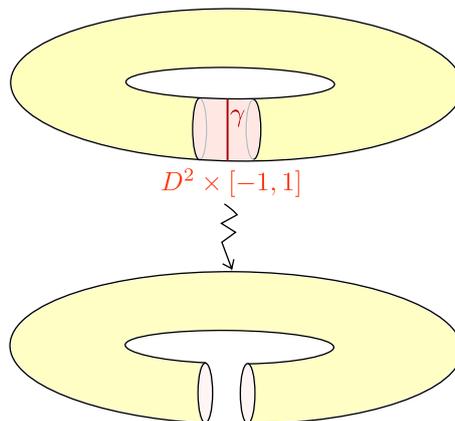


Figura 2.5: Comprimiendo un disco en el toro obtenemos una esfera.

Este ejemplo nos muestra que si queremos encontrar “topología nueva” al cortar por superficies, no podemos admitir que  $S$  se pueda simplificar a superficies mas sencillas. En el ejemplo, el toro ve la misma topología que una esfera.

Si  $S$  es una superficie (con dos lados encajada) en una 3-variedad  $M$  y  $D \subset M$  es un disco encajado con  $D \cap S = \partial D$  una curva no homotópicamente trivial, diremos que  $D$  es un *disco de compresión*. En este caso podemos repetir la operación definida en el ejemplo 2.5 para separar la superficie encajada  $S$  en una superficie encajada “con menos redundancias”. A esta operación la llamaremos *compresión*.

*Observación 2.3.* Observar que la operación de compresión *preserva la clase de homología*. Es decir, si  $S$  es una superficie encajada con 2-lados y  $S'$  es el producto de comprimir  $S$  por un disco de compresión  $D$  entonces  $[S] = [S'] \in H_2(M, \mathbb{Q})$ . Una forma de ver esto es tomar un entorno tubular  $S \times [-1, 1]$  de  $S$ , supongamos que  $S \times \{-1\}$  corta a  $D$  (solo uno de los dos lados puede cortar al disco), entonces comprimiendo  $S \times \{-1\}$  obtenemos un encaje de  $S'$  que es cobordante con  $S$ , véase la figura 2.6.

Por lo anterior las superficies donde vale la pena estudiar su complemento son las siguientes:

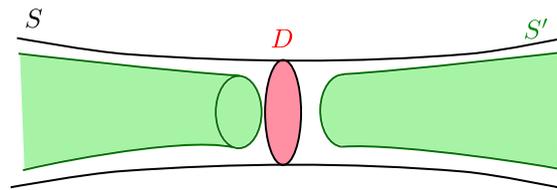


Figura 2.6:  $S$  y su compresión  $S'$  son cobordantes.

**Definición 2.3.** Sea  $S$  una superficie encajada y con 2-lados en una 3-variedad  $M$  sin borde. Diremos que  $S$  es *incompresible* o *esencial* si todo disco  $D \subset M$  con  $D \cap S = \partial D$  satisface que existe  $D' \subset S$  con  $D' \cap D = \partial D$ . Dicho de otra forma, no existen discos de compresión.

*Observación 2.4.* La noción de superficie incompresible se generaliza también a variedades con borde pidiendo que la superficie sea incompresible en el doble de la variedad  $DM$  <sup>6</sup>.

Si  $S$  es una superficie (con 2-lados, encajada) distinta a una esfera o un disco cuya inclusión  $i : S \rightarrow M$  induce en el grupo fundamental un morfismo  $i_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$  *inyectivo*, entonces la superficie es incompresible. Esto es porque si existiese  $D \subset M$  un disco con  $D \cap S = \partial D$ , entonces esta tiene que ser una curva homotópicamente trivial, pero las curvas homotópicamente triviales en superficies acotan discos.

El recíproco también es cierto: si tenemos  $S$  una superficie incompresible entonces la inclusión induce un morfismo  $i_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ . El lector puede pensar que esto es trivial por la prueba que hicimos antes, pero hay un detalle sutil: hay que ver que si una curva de  $S$  es homotópicamente trivial en  $M$ , entonces esta acota un *disco encajado*. Esta afirmación no es cierta, sin embargo se puede ver que si una curva de  $S$  es homotópicamente trivial en  $M$ , entonces existe alguna otra curva no homotópicamente trivial en  $S$  acotando un disco encajado. La prueba de esto no es trivial y referimos al lector a [Hat, Capítulo 3].

Asumiendo lo anterior obtenemos:

**Proposición 2.4.** Sea  $S$  una superficie encajada con 2-lados en una 3-variedad  $M$ . Entonces la inclusión  $i : S \rightarrow M$  induce un morfismo inyectivo a nivel de grupos fundamentales si y solo si  $S$  es incompresible.

Esta equivalencia es importante, notar que si por ejemplo el grupo fundamental de nuestra variedad no contiene a  $\mathbb{Z}^2$  como subgrupo, entonces no podemos tener un toro incompresible.

*Ejemplo 2.6.* 1. No hay superficies incompresibles de genero  $g$  en  $S^3$ , esto sale directamente de la discusión que hicimos anteriormente.

2. Si  $\Sigma$  es una superficie de genero  $\geq 1$ , entonces  $\Sigma \times \{\cdot\}$  es una superficie incompresible en  $\Sigma \times S^1$ .
3. Mas en general, se puede probar que si  $M$  es un fibra sobre una superficie  $\Sigma$  de genero  $g \geq 1$ , entonces toda superficie incompresible es isotópica a una superficie *horizontal* o *vertical*. Una superficie es horizontal si es transversa a las fibras del fibrado, y vertical si es saturada por las mismas (véase el apéndice para mas resultados de este tipo).

La Proposición 2.4 nos motiva a extender la noción de ser esencial a inmersiones.

**Definición 2.4.** Sea  $i : S \rightarrow M$  una immersion, donde  $S$  es una superficie compacta. Diremos que  $i$  es *esencial* si  $i_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$  es inyectivo.

Para terminar, vale la pena mencionar que una descomposición por toros incompresibles es posible. La misma es llamada la *descomposición JSJ* y es un poco mas sutil que la descomposición prima. El lector interesado puede ir a [Hat, Capítulo 2].

<sup>6</sup>Esto es  $M$  pegada a  $M$  por el borde, vía el mapa identidad.

## 2.4 3-variedades Haken:

Estudiemos 3-variedades compactas e irreducibles  $M$ . Como ya comentamos una manera de entenderlas es tomando superficies  $S$  incompresibles en  $M$  y comenzar a cortar por las mismas. Las piezas resultantes tienen topología más sencilla que la de partida, y con suerte al cortar reiteradamente terminemos en variedades sencillas como bolas.

El problema para ejecutar el plan anterior es que existen 3-variedades irreducibles que no admiten tales superficies. Una de estas 3-variedades famosas es el *espacio de Seifert-Weber* [Thu97a, Ejemplo 1.4.5] (aunque la prueba de esto no es trivial).

**Definición 2.5.** Diremos que una 3-variedad compacta, irreducible y orientable  $M$  es *Haken* si contiene una superficie incompresible.

Originalmente Haken probó que una vez que tenemos una superficie incompresible encajada, podemos comenzar a recortar nuestra 3-variedad por superficies hasta obtener uniones disjuntas de bolas. Un enfoque “moderno” a las variedades Haken puede encontrarse en [Cal, Capítulo 1, sección 4].

Como comentamos anteriormente no toda 3-variedad cerrada e irreducible es Haken, sin embargo Agol resuelve en [Ago13] un problema conocido como la “virtual Haken conjecture”:

**Teorema 2.4.** *Sea  $M$  una 3-variedad compacta e irreducible, entonces tiene un cubrimiento finito  $\hat{M}$  que es Haken.*

En particular toda 3-variedad cerrada e irreducible admite una superficie compacta *inmersa*  $i : S \rightarrow M$  de forma que  $i$  induce un morfismo inyectivo en el grupo fundamental. Por lo tanto  $\pi_1(M)$  tiene un subgrupo isomorfo a un grupo de superficies.

## Capítulo 3

### Foliaciones en 3-variedades:

En este capítulo vamos a presentar algunos resultados generales sobre foliaciones en 3-variedades. Cuando mencionemos una “foliación en una 3-variedad” nos referimos a que la misma tiene codimensión uno y es de clase  $C^{\infty,0}$ .

#### 3.1 La estructura transversa:

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en una 3-variedad compacta  $M$  y  $E$  el campo de planos tangente a la misma (el mismo es continuo por hipótesis). En estas condiciones podemos construir un campo de rectas transversal a  $E$  en todo punto. Una forma de hacer esto es tomar una métrica Riemanniana en  $M$  y considerar el espacio perpendicular a  $E$  en cada punto. A menos de una perturbación pequeña podemos asumir que este campo es  $C^\infty$ . Como todo campo de rectas es integrable por el teorema de Picard obtenemos:

**Proposición 3.1.** *Toda foliación  $\mathcal{F}$  en una 3-variedad  $M$  admite una foliación  $C^\infty$  de dimensión uno cuyas hojas son transversales a las hojas de  $\mathcal{F}$ .*

Diremos que dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son *transversales* si las hojas de  $\mathcal{F}$  son transversales a todas las hojas de  $\mathcal{G}$  que intersectan. A una foliación transversal a  $\mathcal{F}$  construida por el procedimiento anterior vamos a denotarla por  $\mathcal{F}^\pitchfork$ .

*Observación 3.1.* 1. Notar que no tenemos una foliación transversal  $\mathcal{F}^\pitchfork$  canónica (primero elegimos una métrica Riemanniana arbitraria y luego perturbamos).

2. Si no asumimos que  $\mathcal{F}$  tenga codimensión uno, no siempre podemos construir una foliación transversal a  $\mathcal{F}$ . Por ejemplo  $S^3$  es un fibrado por círculos sobre  $S^2$ . Si existiera una foliación transversal al fibrado, existiría una foliación en  $S^3$  donde cada hoja admite una curva cerrada transversal. Esto último no puede pasar por el Teorema de Novikov que veremos en la sección 3.3.

3. Lo que hicimos funciona en dimensión arbitraria siempre que nuestra foliación sea de codimensión uno. En particular concluimos que si tenemos una foliación de codimensión uno en  $M$  entonces tenemos un campo de vectores sin singularidades. El teorema de Poincaré-Hopf implica que  $\chi(M) = 0$ .

Notar que la última observación nos da una obstrucción topológica para admitir foliaciones de codimensión uno. En variedades de dimensión impar esta condición es vacía (por dualidad de Poincaré), sin embargo esta condición es útil para variedades de dimensión par. Por ejemplo las únicas superficies que admiten foliaciones son el toro y la botella de Klein.

La foliación  $\mathcal{F}^\pitchfork$  puede no estar orientada, es decir el campo de rectas puede no estar definido por un campo vectorial. En caso de que lo esté, diremos que  $\mathcal{F}$  es *coorientable*. Esta propiedad no depende de las elecciones hechas para construir  $\mathcal{F}^\pitchfork$ . La construcción mencionada en el ejemplo 1.2 nos dice que a menos de tomar un cubrimiento doble siempre podemos asumir que la foliación es coorientada.

Por el resto de la sección asumamos que  $\mathcal{F}$  es orientada y coorientada. Notar que esto induce una orientación en  $M$ .

Como mencionamos anteriormente la elección de  $\mathcal{F}^\flat$  no es canónica, sin embargo veremos que la existencia (y la no existencia) de curvas cerradas transversales a las hojas nos da información sobre la foliación:

**Proposición 3.2.** *Sea  $\mathcal{F}$  en una 3-variedad  $M$  cerrada y  $\tau : S^1 \rightarrow M$  una curva transversal a la foliación pasando por una hoja compacta  $L$ , entonces las clases de homología  $[L] \in H_2(M)$  y  $[\tau] \in H_1(M)$  son ambas no nulas.*

*Demostración.* Supongamos que  $\tau$  está positivamente orientada respecto a la coorientación de  $\mathcal{F}$ , entonces si equipamos a  $M$  con la orientación heredada de  $\mathcal{F}$  obtenemos que todas las intersecciones de  $\tau$  con  $L$  son positivas. Por otro lado, bajo la hipótesis de orientabilidad el producto de intersección  $i : H_2(M) \times H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$  coincide con la suma de las intersecciones (con signo) entre dos representantes de las clases de homología que sean transversos entre si. En particular,  $i([L], [\tau]) \neq 0$  y ninguna de las dos clases puede ser no nula.<sup>1</sup>  $\square$

Uno puede preguntarse qué podemos decir cuando las hojas son no compactas. Resulta que estas siempre admiten una transversal cerrada:

**Construcción 3.1.** *Supongamos que tenemos  $L$  una hoja no compacta de una foliación  $\mathcal{F}$  en una 3-variedad compacta. La proposición 1.2 implica que debe existir un entorno foliado de  $M$  y dos puntos  $p, q$  de  $L$  cortando a una transversal local  $\tau$ . Veamos que podemos usar esta transversal local para conseguir una transversal cerrada.*

Consideremos  $c : [0, 1] \rightarrow L$  una curva encajada con  $c(0) = p$ ,  $c(1) = q$  e  $i : D^2 \times (-1, 1) \rightarrow M$  un entorno foliado largo de  $c$  (cuya existencia probamos en la proposición 1.1). Este era un cubrimiento sobre un entorno de  $c$  de forma que  $i(B^2 \times \{y\})$  está contenido en una hoja de  $L$  para cualquier  $y \in (-1, 1)$ . Tomemos  $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow B^2$  tal que  $c(t) = i(\bar{c}(t), 0)$ .

Sea  $h : [0, 1] \rightarrow (-1, 1)$  un mapa monótono con  $h(0) < 0$  y  $h(1) > 0$  y consideremos una nueva curva  $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow M$  definida por la fórmula  $\bar{c}(t) = i(\bar{c}(t), h(t))$ . Claramente  $\bar{c}$  es transversal a la foliación  $\mathcal{F}$  y sus extremos están contenidos en la transversal  $\tau$ . Concatenando los extremos de  $\bar{c}$  con el segmento de la transversal acotado por los mismos, obtenemos una curva cerrada y transversal a la foliación. Perturbando esta curva obtenemos una transversal cerrada suave (vease 3.1).

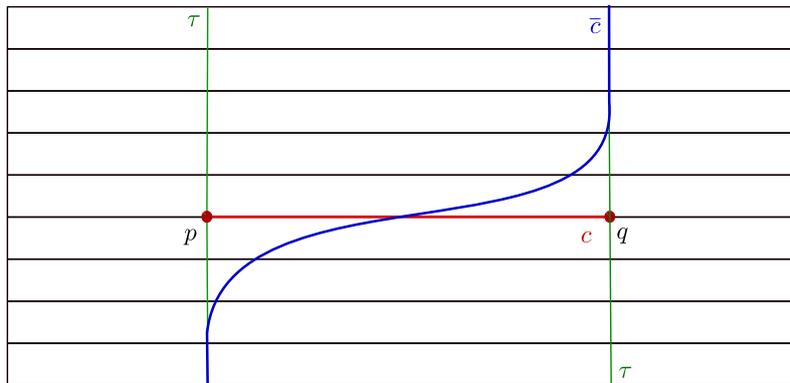


Figura 3.1: Modificación de la transversal  $c$  en el entorno tubular largo  $h$ .

<sup>1</sup>Si el lector no está familiarizado con este tipo de argumentos, en [CC00, Capítulo 6] puede encontrar las referencias para llenar estos detalles.

- Observación 3.2.*
- Una modificación de la Construcción 3.1 usando entornos foliados largos nos muestra también que si una hoja  $L$  admite una transversal en un punto  $p$ , entonces admite una transversal cerrada pasando por cualquier otro  $q \in L$ . Basta con tomar un camino entre  $p$  y  $q$  en la hoja, tomar un entorno tubular largo del mismo y “empujar” la transversal por el entorno tubular hasta llegar a  $q$ .
  - Una construcción de Plante permite ver que bajo ciertas hipótesis topológicas en la hoja no compacta, podemos conseguir una clase de cohomología asociada a la misma al estilo de la proposición 3.2 (para mas detalles véase [CC00, Sección 12.3, vol. 1]).

Esta construcción y la Proposición 3.2 nos ayuda a mejorar considerablemente el Teorema de estabilidad de Reeb 1.2 bajo nuestras hipótesis:

**Teorema 3.1.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación orientada y coorientada en una 3-variedad cerrada  $M$  con una hoja esférica, entonces  $\mathcal{F}$  es la foliación producto en  $S^1 \times S^2$ .*

*Bosquejo.* Vimos en 1,2 que el conjunto  $U$  de hojas compactas homeomorfas a  $S^2$  es un conjunto abierto, basta ver que también es cerrado. Supongamos que una sucesión  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$  converge a un punto  $p$  en  $M$ , sean  $L_n$  las hojas pasando por  $p_n$  y  $L$  la hoja pasando por  $p$ . Tenemos dos casos:

- $L$  es compacta: en este caso como  $U$  es abierto,  $L$  no puede tener holonomía del lado que acote a  $U$ , de lo contrario habría alguna hoja en  $U$  no compacta. Repitiendo el argumento del Teorema 1.2 es sencillo verificar que cualquier hoja de este lado debe ser homeomorfa a  $L$ . Pero las hojas de  $U$  son homeomorfas a  $S^2$  y por lo tanto  $L$  es homeomorfo a  $S^2$  como queríamos.
- $L$  no es compacta: en este caso la Construcción 3.1 nos dice que  $L$  admite una transversal  $\tau$ . Esta transversal debe intersectar a  $L_n$  para todo  $n$  suficientemente grande. Por la Proposición 3.2 tenemos que las clases  $[L_n] \in H_2(M, \mathbb{Q})$  no se anulan. El grupo  $H_2(M, \mathbb{Q})$  es finitamente generado y por lo tanto el subgrupo generado por  $[L_n]$  debe estar generado por finitos de estos elementos, digamos que por  $[L_k]$  con  $k \leq N$ . Dada la construcción de  $\tau$ , podemos asumir sin pérdida de generalidad que no intersecta a  $L_k$  con  $k \leq N$ . Esto es una contradicción ya que para un  $n$  suficientemente grande  $i([L_n], \tau) > 0$ , esto junto con la bilinealidad de  $i : H_2(M) \times H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$  contradice que  $\tau$  no se intersecta con  $[L_k]$  con  $k \leq N$ .

Los detalles pueden encontrarse en [CC00, Teorema 6.1.5, vol. 1]. □

Considerando lo anterior podemos preguntarnos *¿qué hojas no admiten una transversal cerrada?* Para responder esta pregunta introduzcamos la siguiente notación: dada  $L$  una hoja de  $\mathcal{F}$ , diremos que el conjunto:

$$\mathcal{A}(L) := \{p \in M : \exists \tau : [0, 1] \rightarrow M \text{ transversal positivamente orientada a } \mathcal{F}, \tau(0) \in L, \tau(1) = p\},$$

es la *clase de accesibilidad transversa de la hoja  $L$* . Notar que necesitamos la coorientación para tener bien definida la noción de positividad.

*Observación 3.3.*

- Por la Observación 3.2, si un punto  $q \in \mathcal{A}(L)$  entonces  $L_q \subset \mathcal{A}(L)$ .

- $\mathcal{A}(L)$  es abierto porque si  $q \in \mathcal{A}(L)$  entonces podemos concatenar la transversal local que llega a  $q$  con una transversal local de este punto. Por lo tanto todo el entorno foliado esta contenido en  $\mathcal{A}(L)$ .
- Una hoja en  $\partial \mathcal{A}(L)$  no puede admitir una transversal cerrada. Para ver esto, supongamos que una hoja del borde admite una transversal cerrada, la misma debe cortar a  $\mathcal{A}(L)$  en algún punto  $q$ . Concatenando este segmento con una transversal que llega desde  $L$  hasta  $q$ , obtenemos que una hoja del borde está en  $\mathcal{A}(L)$ , lo que es absurdo por el item anterior.

- Por el argumento del punto anterior y la Construcción 3.1, concluimos que las hojas de  $\partial\mathcal{A}(L)$  son compactas y tienen dos lados. Cada una de estas hojas debe contener a  $\mathcal{A}(L)$  en su lado positivo (respecto a la coorientación).

Habiendo hecho estas observaciones probemos:

**Teorema 3.2** (Goodman). *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación orientada y coorientada en una 3-variedad cerrada  $M$ . Entonces si  $L$  es una hoja de  $\mathcal{F}$  que no admite una transversal cerrada, esta debe ser homeomorfa a un toro.*

*Demostración.* Notar que si  $L$  no admite una transversal cerrada, entonces  $L \subset \partial\mathcal{A}(L)$ . Por las observaciones anteriores,  $N := \overline{\mathcal{A}(L)}$  es una 3-variedad con borde, donde la coorientación de  $\mathcal{F}$  en  $N$  apunta para el interior de la subvariedad. Tomando un campo que genera una foliación transversa  $\mathcal{F}^\#$ , obtenemos que  $N$  admite un campo apuntando hacia adentro en las componentes de borde y por ende  $\chi(N) = 0$  (por la versión con borde del Teorema de Poincaré-Hopf).

Denotemos por  $D(N)$  al *doble de  $N$* . Esta es la variedad resultante de pegar a  $N$  consigo misma por las componentes de borde mediante el mapa identidad. Es fácil chequear que la característica de Euler de  $D(N)$  satisface:

$$\chi(D(N)) = 2\chi(N) - \chi(\partial N).$$

Despejando obtenemos  $\chi(\partial N) = 0$ , ya que  $\chi(D(N)) = 0$  por ser una 3-variedad cerrada. La característica de Euler de una variedad disconexa es la suma de las características de Euler de las componentes conexas. Por lo tanto si alguna de las componentes conexas de  $\partial N$  no fuera un toro, entonces tendría que haber una componente esférica, ya que la suma de las características da cero. Por estabilidad de Reeb esto no puede pasar ya que la foliación sería  $S^1 \times S^2$  y admitiría una transversal global. Por lo tanto todas las componentes conexas de  $\partial N$  deben ser toros.  $\square$

### 3.2 Ejemplos y construcciones:

En esta sección desarrollaremos métodos para generar nuevas foliaciones partiendo de bloques foliados conocidos y presentaremos ejemplos nuevos que se suman a los vistos en el capítulo 1. El lector puede encontrar un pool mas amplio de ejemplos en [Cal07, Sección 4.3].

*Ejemplo 3.1* (Turbulización). Supongamos que  $M$  está equipada con  $\mathcal{F}$  una foliación  $C^r$  ( $r \geq 1$  o  $C^{\infty,0}$ ) orientada y transversalmente orientada, y sea  $\tau$  una curva cerrada encajada transversal a  $\mathcal{F}$ . El campo de planos tangente a la foliación se restringe a  $\tau$  como un campo de planos transversos al círculo. Las hipótesis de orientación en  $\mathcal{F}$  implican que un entorno tubular suficientemente pequeño de  $\tau$  es homeomorfo a un toro solido  $S^1 \times D^2$  donde la foliación inducida por  $\mathcal{F}$  es la foliación trivial por discos. Denotemos por  $N(\tau)$  a un tal entorno y fijemos un homeomorfismo  $N(\tau) \cong S^1 \times D^2$  preservando las foliaciones.

Tomemos coordenadas cilíndricas  $(t, r, z)$  en  $S^1 \times D^2$ , es decir donde  $(r, z) \in (0, 1] \times S^1 \subset D^2$  son las coordenadas polares de un punto en el disco. Notar que las hojas por discos son de la forma  $t = \text{constante}$ . Modificaremos esta foliación fuera del borde del toro solido, dándonos así nuevas foliaciones en  $M$  al enviarlas por nuestro homeomorfismo  $N(\tau) \cong S^1 \times D^2$ .

Definamos un campo de planos en  $S^1 \times D^2$  mediante los ceros de la 1-forma:

$$\omega_{(t,z,r)} = \cos \lambda(r)dr + \sin \lambda(r)dt,$$

donde  $\lambda : [0, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  es una función  $C^\infty$ , estrictamente creciente en  $[0, \frac{3}{4}]$  y tal que:

$$\lambda(r) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & r = 0, \\ 0, & r = \frac{2}{3}, \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{3}{4} \leq r \leq 1. \end{cases}$$

También vamos a suponer que  $\lambda^{(k)}(0) = 0$  con  $k \geq 1$ . Esto es para que el campo de planos quede globalmente definido, ya que las coordenadas polares son singulares en  $r = 0$  (véase el gráfico de  $\lambda$  a la derecha de la Figura 3.2). Notar que  $\omega$  es simétrica respecto a las rotaciones en el disco y que de  $0$  a  $\frac{2}{3}$  la foliación pasa de  $-dt$  a  $dr$ .

Haciendo una cuenta, se puede ver que esta 1-forma es *integrable* (para ver esto hay que usar el teorema de integrabilidad de Frobenius 1.1). La foliación inducida se puede ver a la izquierda de la Figura 3.2.

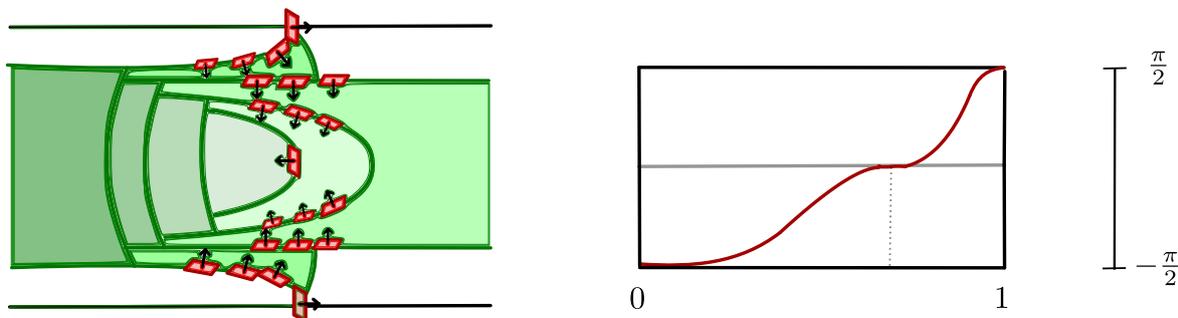


Figura 3.2: A la izquierda: la foliación integral a la forma  $\omega$ . A la derecha: el gráfico de la función  $\lambda$  que controla el vector normal al campo  $\omega$  (radialmente).

Restringiéndonos al toro sólido  $\{(t, r, z) : r \leq \frac{2}{3}\}$ , el mismo queda foliado por una componente de Reeb. Para ver esto, notar que el toro definido por la ecuación  $r = \frac{2}{3}$  es una hoja de la foliación, ya que el campo de planos restringido al mismo es su espacio tangente (definido por la 1-forma  $dr = 0$ ). Por otro lado, todas las hojas en el interior del mismo son planos que limitan en el toro. Fuera de  $r \leq \frac{2}{3}$  tenemos que las hojas transversales al borde del toro sólido espiralean hacia el toro borde de la componente de Reeb (véase la izquierda de la figura 3.2).

Estas modificaciones son  $C^\infty$  dentro de  $S^1 \times D^2$  pero solo  $C^k$  en la variedad  $M$ , ya que depende de la regularidad del fibrado inducido en la transversal. Notar que no usamos que  $M$  es una 3-variedad, solo que  $\mathcal{F}$  tiene codimensión 1.

*Ejemplo 3.2* (Pegando foliaciones por el borde). Como comentamos en el capítulo 1, si tenemos  $M$  y  $M'$  equipadas con dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  tal que existe  $S \subset \partial M$  y  $S' \subset \partial M'$  conjuntos de hojas homeomorfos, entonces podemos pegar  $M$  y  $M'$  a lo largo de  $S$  para obtener una 3-variedad  $N$  foliada. Notar que aunque  $M$  y  $M'$  sean de clase  $C^\infty$ , la foliación obtenida será simplemente de clase  $C^{\infty,0}$ , ya que no nos podemos asegurar un atlas regular alrededor de  $S$ .

Para obtener un tal atlas en  $N$  debemos agregar hipótesis sobre las hojas de  $S \subset \partial M$ . Supongamos que  $\mathcal{F}$  es de clase  $C^r$  (con  $r \geq 1$ ) y sea  $L \subset \partial M$  una hoja. Diremos que la foliación es  $C^r$ -trivial a lo largo de  $L$  si el grupo de gérmenes de holonomía para algún punto  $p \in L$  satisface que si  $[h_\alpha] \in \mathcal{H}(L, p)$  es un representante del transporte de holonomía a lo largo de  $\alpha \in \pi_1(L, p)$ , entonces la expansión de Taylor de  $h_\alpha$  coincide hasta orden  $r$  con la del mapa identidad. Se puede chequear que esto no depende de las elecciones del representante ni del punto  $p$ .

Si las foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  son  $C^r$ -triviales a lo largo de  $S$  y  $S'$ , entonces se puede probar que la foliación en  $N$  está definida por un atlas  $C^r$  (véase [CC00, Proposición 3.4.2, vol. 1]).

A modo de ejemplo, podemos conseguir una componente de Reeb  $C^\infty$ -trivial en el borde. Si ponemos coordenadas  $(t, r, z)$  en  $S^1 \times D^2$  como en el Ejemplo 3.1, consideremos  $\omega_{(t,z,r)} = \cos \lambda(r)dr + \sin \lambda(r)dt$  la 1-forma que nos permitía turbulizar. Si tomamos  $\lambda : [0, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  de forma que  $\lambda^{(k)}(\frac{2}{3}) = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , entonces la componente de Reeb inducida en  $\{(t, z, r) : r \leq \frac{2}{3}\}$  es  $C^\infty$ -trivial en el borde. En particular, la foliación del ejemplo 1.4 puede construirse de manera que sea  $C^\infty$ .

*Ejemplo 3.3* (Espiraleando foliaciones a lo largo de toros). Supongamos que  $N$  es una 3-variedad equipada con una foliación  $\mathcal{F}$ , tal que existe  $T \subset \partial N$  una componente conexa transversa a la foliación y homeomorfa a un toro. Supongamos además que existe un homeomorfismo entre  $T$  y  $S^1 \times S^1$  llevando la foliación en el borde a una foliación transversa al fibrado  $S^1 \times \{\cdot\}$ . En este caso veamos que podemos extender la foliación  $\mathcal{F}$  a una foliación en  $M$ , una 3-variedad obtenida pegando un toro sólido a lo largo de  $T$ , vía el homeomorfismo mencionado anteriormente.

Tomemos  $N(T)$  un entorno tubular del toro sólido, homeomorfo a  $S^1 \times S^1 \times [0, 1]$ , donde la restricción de este homeomorfismo a  $T$  coincide con la identificación a  $S^1 \times S^1$  que teníamos anteriormente. Supongamos que esta componente de borde es  $S^1 \times S^1 \times \{0\}$ . A menos de tomar un entorno más pequeño, supongamos que la foliación inducida en cada toro  $S^1 \times S^1 \times \{\cdot\}$  es transversal a las fibras  $S^1 \times \{\cdot\}$ .

Modifiquemos  $\mathcal{F}$  dentro de  $S^1 \times S^1 \times [0, 1]$  “espiraleando” todas las hojas contra el toro  $S^1 \times S^1 \times \{0\}$ . Una forma de formalizar esto es lo que sigue: sea  $A_t$  el anillo semi-abierto  $S^1 \times \{t\} \times (0, 1]$ , definamos  $\phi : S^1 \times S^1 \times (0, 1] \rightarrow S^1 \times S^1 \times (0, 1]$  como aquel que restringido a  $A_t$  es una composición infinita de twists de Dehn  $f_n$  en  $S^1 \times \{t\} \times (0, \frac{1}{n}]$  (véase la Figura 3.3). Esto está bien definido (y es suave) porque en cada punto de  $A_t$  tenemos que aplicar solamente una cantidad finita de twists de Dehn.

Luego de aplicar  $\phi$ , el conjunto  $N(T) \setminus T$  queda foliado por hojas que “espiralean” a lo largo de  $T$ . Se puede chequear que si declaramos que  $T$  sea una hoja, entonces la foliación obtenida es  $C^\infty$ -trivial a lo largo de  $T$ . Rellenando con una componente de Reeb obtenemos la foliación deseada.

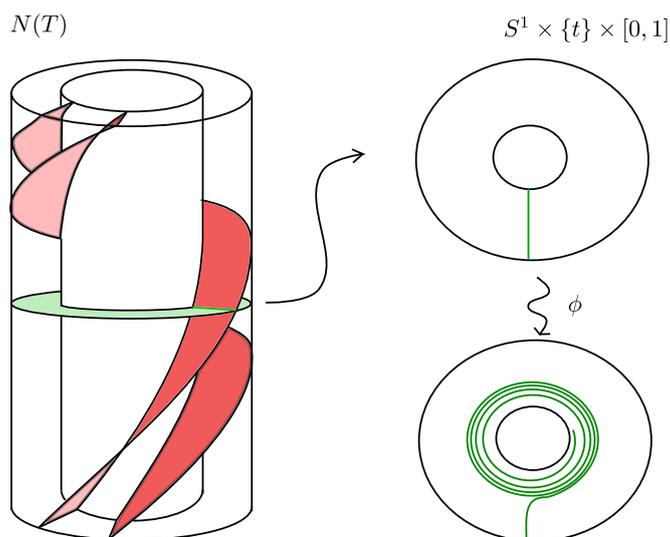


Figura 3.3: Modificando en un entorno tubular de  $T$ , podemos convertir un toro transversal a  $\mathcal{F}$  en un toro tangente.

*Observación 3.4.* Si  $M$  es una 3-variedad equipada con una foliación transversal a una componente compacta del borde  $S$ , entonces  $S$  debe ser un toro o una botella de Klein. Si la foliación inducida en  $S$  no tiene componentes de Reeb, entonces se puede ver que caemos en las hipótesis de la construcción anterior (véase [HH83, Sección 4.3, vol. A]).

Usando el Teorema de Lickorish-Wallace y las construcciones anteriores, podemos probar:

**Teorema 3.3.** *Sea  $M$  una 3-variedad cerrada, entonces  $M$  admite una foliación suave.*

*Demostración.* El teorema de Lickorish-Wallace 2.2 nos dice que toda 3-variedad cerrada puede obtenerse haciendo cirugías de Dehn en un enlace  $L$  en  $S^3$ . De hecho, el enlace era una trenza dentro de un toro sólido no anudado. Esto significa  $L$  está contenido en un toro sólido  $S^1 \times D^2$ , cuyo complemento es un toro sólido y que  $L$  es transversal a  $\{\cdot\} \times D^2$ . Notar que si  $T_1, \dots, T_k$  son entornos

tubulares de las componentes de  $L$ , entonces  $S^3 \setminus (T_1 \cup \dots \cup T_k)$  es homeomorfo a  $M \setminus (T'_1 \cup \dots \cup T'_k)$ , donde  $T'_1, \dots, T'_k$  son toros sólidos en  $M$  provenientes de  $T_i$  luego de hacer cirugía en el enlace.

Afirmamos que el teorema se prueba si construimos una foliación en  $S^3 \setminus (T_1 \cup \dots \cup T_k)$  transversa al borde y sin componentes de Reeb en los mismos. Esto es porque al enviar esta foliación por el homeomorfismo anterior, obtenemos una foliación en  $M \setminus (T'_1 \cup \dots \cup T'_k)$  que podemos espiralearse (por la observación anterior). Por lo tanto, puede ser completada a una foliación en  $M$ .

Una forma de construir una foliación con estas características en  $S^3 \setminus (T_1 \cup \dots \cup T_k)$  es considerar la foliación producto en  $S^1 \times D^2$  y completar esto a una foliación de  $S^3$  espiraleando en el toro complementario. Luego como el enlace  $L$  es transverso a esta foliación producto, un entorno tubular suficientemente pequeño también lo será. Quitando estos entornos tubulares obtenemos lo deseado.  $\square$

Este teorema nos dice que admitir una foliación no es una obstrucción topológica en 3-variedades cerradas (contrario al caso de superficies). De hecho, no nos da ningún tipo de información. En [Thu76] Thurston prueba que si uno arranca con una sección de planos en una 3-variedad con  $\chi(M) = 0$  y sin componentes de borde esféricas, entonces esta es homotópica a una sección de planos tangentes a una foliación.

Vale la pena comentar que la construcción de Thurston tiene cierta naturaleza local y no lee la topología de la variedad. Esto hace difícil en parte la visualización de las foliaciones. La prueba es difícil, el lector puede encontrar un bosquejo convincente en [EB16, Sección 1] y una prueba detallada en [CC00, Sección 8.5, vol. 2].

Hasta ahora todos los ejemplos que hicimos nos dan como resultado foliaciones con componentes de Reeb, así que antes de continuar, culminemos con un par de ejemplos importantes de foliaciones sin componentes de Reeb:

*Ejemplo 3.4* (Fibrados de superficies sobre el círculo). Sea  $\Sigma$  una superficie cerrada y  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  un homeomorfismo. Definamos *la suspensión de  $f$*  como la 3-variedad  $M_f := \Sigma \times [0, 1] / \sim$  donde cocientamos  $(x, 0) \sim (f(x), 1)$ . Esto es igual a lo que hicimos en el Ejemplo 1.5.

Esta 3-variedad fibra sobre el círculo  $\pi : M_f \rightarrow S^1$  con fibra  $\Sigma$ , donde la proyección viene dada por proyectar  $\Sigma \times [0, 1]$  en la segunda coordenada (y cocientando los bordes). Todo fibrado de superficies sobre el círculo tiene esta forma debido a que los fibrados tienen la propiedad de levantamiento de caminos. Es decir, dado un camino  $\gamma$  en  $S^1$  comenzando en  $z \in S^1$  y un punto  $p \in \pi^{-1}(z)$ , existe un único camino  $\tilde{\gamma}$  en  $M_f$  tal que  $\pi(\tilde{\gamma}) = \gamma$  (véase la figura 3.4, para más detalles véase [Hat05, Sección 4.2]).

*Ejemplo 3.5* (Foliaciones transversas a un fibrado por círculos). Sea  $\Sigma$  una superficie compacta, y  $M$  el espacio total de un fibrado por círculos  $S^1 \rightarrow M \xrightarrow{p} \Sigma$  sobre  $\Sigma$ . Una *conexión* es un campo de planos transversales a las fibras de  $M$ , la misma es *plana* (“flat” en inglés) si este campo de planos es integrable.

Si existe una conexión plana en  $M$ , tenemos una foliación  $\mathcal{F}$  en  $M$  transversa a las fibras. Esta transversalidad junto con la estructura de entornos foliados implican que si restringimos la proyección  $p : M \rightarrow \Sigma$  a una hoja  $L$  de  $\mathcal{F}$ , entonces  $p|_L : L \rightarrow \Sigma$  es un *cubrimiento*. Esto nos permite levantar caminos de  $\Sigma$  a  $M$ , manteniendonos en una hoja de  $\mathcal{F}$  (es decir, la holonomía es “global”).

En particular, levantando caminos cerrados partiendo de puntos de una fibra  $p^{-1}(z)$  con  $z \in \Sigma$ , obtenemos un morfismo de  $\pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Homeo}(S^1)$  que llamaremos una *representación*. Este morfismo codifica toda la información de la foliación, de hecho partiendo de una representación podemos recuperar la foliación (véase [CC00, Teorema 2.1.7, vol. 1]).

Estos ejemplos ocurren naturalmente en geometría: supongamos que  $\Sigma$  es una superficie *hiperbólica*, es decir, está equipada con una métrica de curvatura constante  $-1$  y sea  $\phi_t : T^1\Sigma \rightarrow T^1\Sigma$  el flujo

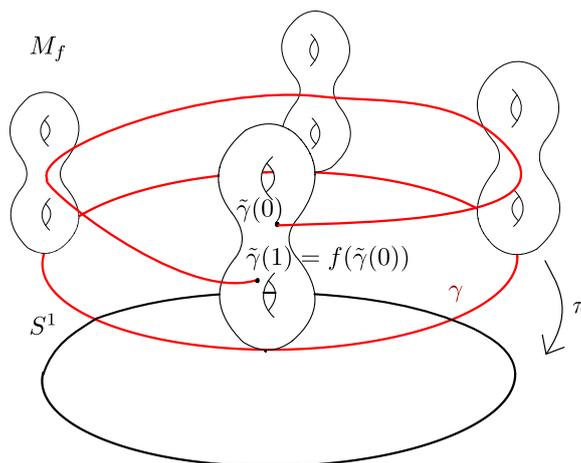


Figura 3.4: Partiendo de un fibrado  $\Sigma \rightarrow M \rightarrow S^1$ , podemos ver a  $f$  como una suspensión levantando un generador  $\gamma$  de  $S^1$  y variando el punto base.

geodésico. Consideremos las variedades estables de un  $v \in T^1\Sigma$  definidas como:

$$\mathcal{W}^s(v) := \{w \in T^1\Sigma : d(\pi(\phi_t w), \pi(\phi_t v)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0\},$$

donde  $\pi : T^1\Sigma \rightarrow \Sigma$  es la proyección canónica y  $d$  es la distancia inducida por la métrica. Resulta que  $\{\mathcal{W}^s(v)\}_{v \in T^1\Sigma}$  es una foliación de dimensión 1 en el tangente y definiendo:

$$\mathcal{W}^{cs}(v) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(\mathcal{W}^s(v)),$$

obtenemos una foliación de codimensión uno en  $T^1\Sigma$  transversa a las fibras (véase la figura 3.5).

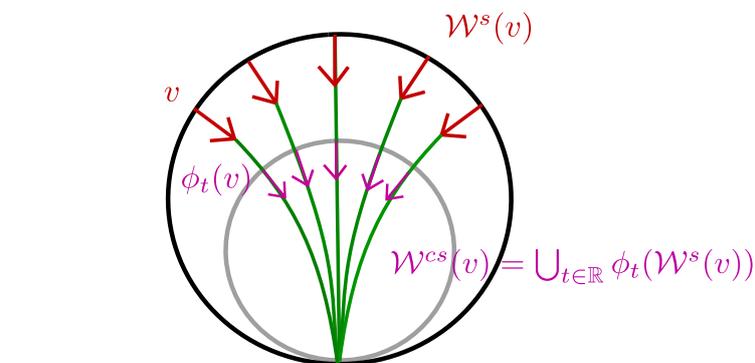


Figura 3.5: Levantado las variedades centro-estables del flujo geodésico a  $\widetilde{T^1\Sigma} = \mathbb{H}^2 \times S^1$ .

### 3.3 Foliaciones esenciales vs. componentes de Reeb: Teorema de Novikov

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en una 3-variedad compacta  $M$ .

**Definición 3.1.** Diremos que una hoja  $L$  de  $\mathcal{F}$  es esencial si la inclusión  $i : L \rightarrow M$  induce un morfismo inyectivo  $i_* : \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M)$ . Una foliación  $\mathcal{F}$  es esencial si todas sus hojas lo son.

*Ejemplo 3.6.* Sea  $M$  el espacio total de un fibrado sobre el círculo por superficies  $\Sigma \rightarrow M \xrightarrow{p} S^1$ . El mismo induce una sucesión exacta larga:

$$1 = \pi_2(S^1) \rightarrow \pi_1(\Sigma) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M) \xrightarrow{p_*} \pi_1(S^1) \rightarrow 1.$$

Esto implica que la inclusión de las fibras es inyectiva en el  $\pi_1(M)$ . En este caso notar que la definición de hoja esencial coincide con la definición de superficie esencial del capítulo anterior.

*Observación 3.5.* Si una foliación es esencial y  $M \neq S^1 \times S^2$ , entonces todas las hojas de la foliación inducida en el cubrimiento universal  $\tilde{M}$  son *planos*. Esto es porque la componente conexa de la preimagen de una hoja  $L$  debe ser un cubrimiento de la hoja (recordar el Ejemplo 1.2), y por ser esencial debe ser homeomorfa al cubrimiento universal de  $L$ . Este cubrimiento no puede ser la esfera por el Teorema de estabilidad de Reeb 3.1, por lo tanto debe ser un plano.

La ventaja de tener foliaciones de este tipo es que la topología de las hojas depende de la topología de  $M$ , mas específicamente,  $\pi_1(L)$  debe ser un subgrupo de  $\pi_1(M)$  para toda hoja  $L$ . A modo de ejemplo, el lector puede comprobar que una foliación esencial en el toro  $\mathbb{T}^3$  solo puede tener hojas homeomorfas a planos, anillos o toros.

La noción de “ser esencial” es bastante poderosa, pero cuenta con la desventaja que dada  $\mathcal{F}$  una foliación, es difícil discernir si esta es o no esencial. En lo que resta de la sección, daremos un criterio simple para verificar que una foliación es esencial.

Si asumimos que tenemos una foliación con una hoja no esencial, nos encontramos naturalmente con el siguiente objeto (véase el bosquejo del Teorema 3.4):

**Definición 3.2.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación coorientada en  $M$ . Supongamos que existe  $\sigma_0 : S^1 \rightarrow L_0$  una curva cerrada en cierta hoja  $L_0$  con clase de homotopía  $[\sigma_0] \in \pi_1(L_0)$  no nula, y una homotopía  $\sigma : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$  tal que:

1.  $\sigma|_{S^1 \times \{0\}} = \sigma_0$ .
2. Para cada  $s \in S^1$ ,  $\sigma(s, \cdot) : [0, 1] \rightarrow M$  es una transversal positiva a la foliación.
3. La imagen de  $\sigma_t := \sigma|_{S^1 \times \{t\}}$  esta contenida en una hoja  $L_t$  y es homotópicamente trivial en la misma.

En estas condiciones, diremos que  $\sigma_0$  es un *ciclo evanescente* en la hoja  $L$  (véase la figura 3.6).

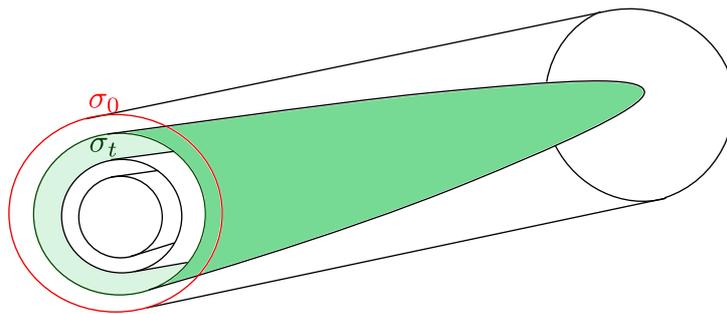


Figura 3.6: En una componente de Reeb  $\sigma_0$  no es homotópicamente trivial en el toro borde, pero  $\sigma_t$  acota un disco en su respectiva hoja si  $t > 0$ .

El siguiente resultado nos dice que no ser esencial es equivalente a admitir un ciclo evanescente:

**Teorema 3.4.** Sea  $\mathcal{F}$  en  $M$  una foliación coorientada, entonces son equivalentes:

1.  $\mathcal{F}$  admite un ciclo evanescente.
2. Existe una hoja  $L$  tal que  $i_* : \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M)$  no es inyectiva.

*Bosquejo.* La implicación  $1 \Rightarrow 2$  es automática. Para ver la vuelta, supongamos que un lazo  $\gamma \subset L$  es homotópicamente trivial en  $M$  pero no en  $L$ . Esto implica la existencia de una inmersión  $f : \overline{D^2} \rightarrow M$  tal que  $f|_{\partial D^2} = \gamma$ .

Por argumentos estándar de transversalidad, podemos perturbar  $C^0$  a  $f$  fuera del borde para que sea transversa a la foliación  $\mathcal{F}$  *excepto* a una cantidad finita de puntos de tangencia donde la foliación es linda. Mas específicamente, por la hipótesis de coorientación las intersecciones de hojas de  $\mathcal{F}$  con  $f(D^2)$  inducen un campo en  $\overline{D^2}$  con singularidades tipo silla, pozo o fuente (definimos correctamente estas nociones en la sección 8.2).

Notar que el campo necesariamente tiene una singularidad de tipo pozo/fuente ya que  $\chi(\overline{D^2}) = 1$  (y Poincaré-Hopf). Cerca de una singularidad de este tipo tenemos curvas cerradas que necesariamente son homotópicamente triviales en sus hojas (ya que son pequeñas, véase la figura 3.7).

Consideremos la componente conexa de la unión de todas las órbitas del flujo que son homotópicamente trivial en su hoja en  $\mathcal{F}$  cuya clausura contiene a un pozo/fuente. Notar que una órbita en el borde de este conjunto debe ser no homotópicamente trivial en su hoja (ya que sino estaría en el conjunto), por otro lado esta órbita debe existir ya que el conjunto no puede ser todo el disco ( $\gamma = \partial D^2$  es no homotópicamente trivial en su hoja).

Una prueba detallada puede encontrarse en [HH83, Teorema 3.4] o [CC00, Proposición 9.2.5, vol. 2] en el caso  $C^2$ . □

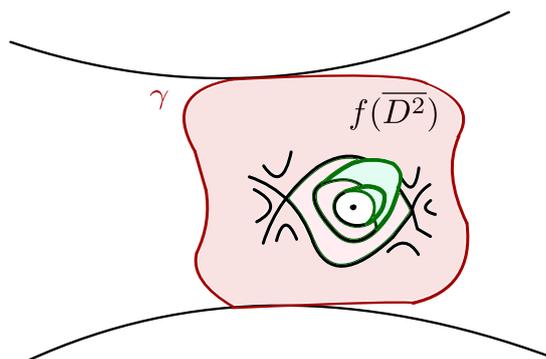


Figura 3.7: Cerca de una fuente/pozo tenemos curvas (en verde) que son homotópicamente triviales en su respectiva hoja.

Si uno observa con atención la prueba del teorema anterior, puede detectar otras situaciones que implican la existencia de hojas no esenciales (o equivalentemente, de ciclos evanescentes):

**Proposición 3.3.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación coorientada en una variedad 3-variedad compacta  $M$ , entonces si pasa alguna de las siguientes condiciones:*

- Existe una transversal de orden finito en  $\pi_1(M)$ .
- No hay hojas esféricas y  $\pi_2(M) \neq \emptyset$ .

Entonces existe un ciclo evanescente  $\sigma_0$ .

Si  $\mathcal{F}$  tiene una componente de Reeb, entonces esta admite un ciclo evanescente como vimos en la figura 3.6. El resultado sorprendente de Novikov, es que todo ciclo evanescente (en dimension 3) proviene de una componente de Reeb (para una prueba, véase [CC00, Teorema 9.4.1, vol. 2]):

**Teorema 3.5 (Novikov).** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación orientada y transversalmente orientada en una 3-variedad compacta  $M$ . Entonces si una hoja admite un ciclo evanescente, esta debe ser la hoja borde de una componente de Reeb.*

*Observación 3.6.* El teorema de Novikov implica que si tenemos una foliación en el toro sólido tal que las hojas del interior son planos y el borde es una hoja, entonces es isomorfa (como foliación) a una componente de Reeb como construimos anteriormente.

En general podemos olvidarnos de la hipótesis de orientabilidad si definimos “componente de Reeb” como cualquier cociente finito de una componente de Reeb usual.

Usando este resultado junto con la Proposición 3.3 y el Teorema 3.4 tenemos el siguiente supercorolario:

**Corolario 3.1.** *Supongamos que  $\mathcal{F}$  es una foliación sin componentes de Reeb en una 3-variedad compacta, entonces:*

- *La foliación es esencial.*
- *Sea  $\tau : S^1 \rightarrow M$  transversal a la foliación, entonces  $[\tau] \in \pi_1(M)$  tiene orden infinito.*
- *$M$  es irreducible o es un cociente finito de  $S^1 \times S^2$  equipado con la foliación producto.*

### 3.4 El espacio de hojas:

Como vimos en el ejemplo 1.2, siempre que tenemos una foliación  $\mathcal{F}$  en  $M$  y consideramos un cubrimiento  $q : \tilde{M} \rightarrow M$ , entonces levantando un atlas foliado podemos conseguir una foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  en  $\tilde{M}$  tal que si  $\tilde{L}$  es una hoja, entonces  $q(\tilde{L}) = L$  es una hoja de  $\mathcal{F}$  y  $q|_{\tilde{L}} : \tilde{L} \rightarrow L$  es un cubrimiento.

En esta sección vamos a concentrarnos en estudiar la foliación inducida  $\tilde{\mathcal{F}}$  en el cubrimiento universal que denotaremos por  $p : \tilde{M} \rightarrow M$ . En la sección pasada vimos que si  $\mathcal{F}$  no tiene componentes de Reeb ni hojas esféricas, entonces la foliación es esencial y por ende las hojas de  $\tilde{\mathcal{F}}$  son planos (véase la observación 3.5). Veremos que de hecho los mismos se encuentran *encajados*. Esto nos dice en parte que la complejidad de la foliación en  $\tilde{M}$  no está en las hojas, sino en la estructura transversa de  $\tilde{\mathcal{F}}$ .

Para tener una imagen en la mente, la primera foliación por planos en la que uno debería pensar es  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ . Otros ejemplos pueden ser algo por el estilo de la figura 3.8 donde en vez de tener planos apilados en forma lineal, obtenemos que estos se pegan en patrones “con forma de árbol”.

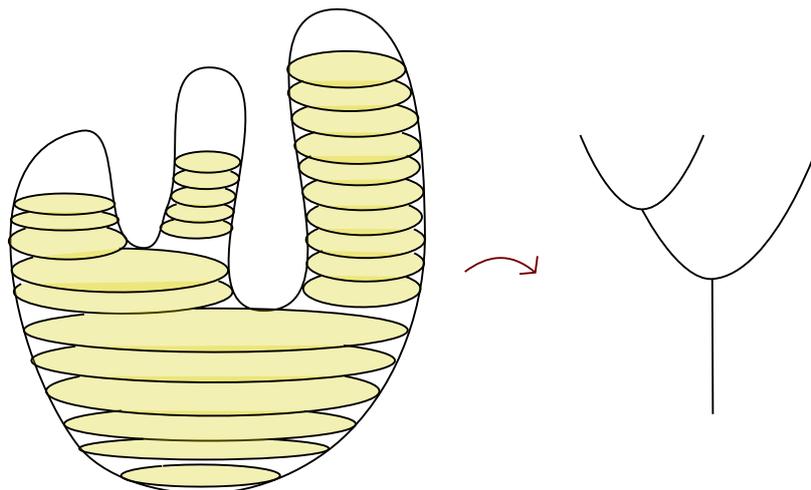


Figura 3.8: Una foliación por planos de  $\mathbb{R}^3$  (viendo a  $\mathbb{R}^3$  como una bola).

Antes que nada, un ejemplo:

*Ejemplo 3.7.* Sea  $\Sigma \neq S^2$  una superficie cerrada,  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  un homeomorfismo y  $M_f$  la suspensión (como el ejemplo 3.4). Notar que  $\tilde{M}_f = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  donde  $\mathbb{R}^2 \times \{\cdot\}$  es una hoja de la foliación, o dicho de

otra manera la foliación en  $\widetilde{M}_f$  es la *trivial por planos*. Si definimos una relación de equivalencia en  $\widetilde{M}_f$  siendo  $x \sim y$  si  $x$  e  $y$  están en la misma hoja, el espacio cociente es simplemente  $\mathbb{R}$ , y estos puntos están en correspondencia con las hojas de  $\widetilde{\mathcal{F}}$ .

En general siempre tenemos un espacio topológico que nos “parametriza” las hojas de  $\widetilde{\mathcal{F}}$ . Por ejemplo, en el ejemplo anterior este espacio es  $\mathbb{R}$ .

**Definición 3.3.** Sea  $M$  una variedad compacta sin borde (no necesariamente de dimension 3) y  $\mathcal{F}$  una foliación (no necesariamente de codimensión uno) definimos el *espacio de hojas de  $\mathcal{F}$*  como el espacio topológico cociente  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} := \widetilde{M}/\sim$ , donde  $x \sim y$  si  $x$  e  $y$  pertenecen a una misma hoja de  $\widetilde{\mathcal{F}}$ .

Como anunciamos anteriormente, el teorema de Novikov nos dice que las hojas en  $\widetilde{\mathcal{F}}$  son sencillas de describir:

**Proposición 3.4.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación sin componentes de Reeb en una 3-variedad compacta sin borde  $M$ , sin hojas esféricas o proyectivas, entonces:*

1. *No existen curvas cerradas transversales a  $\widetilde{\mathcal{F}}$ .*
2. *Toda curva transversal a  $\widetilde{\mathcal{F}}$  se proyecta homeomorfa a un abierto de  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ .*
3. *Las hojas de  $\widetilde{\mathcal{F}}$  son homeomorfas a planos y están propiamente encajadas en  $\widetilde{M}$ .*

*Demostración.* 1. Si existiera una curva cerrada transversal a  $\widetilde{\mathcal{F}}$ , esta se proyectaría a una transversal cerrada de  $\mathcal{F}$  homotópicamente trivial. El Corolario 3.1 nos dice que entonces debe existir una componente de Reeb lo que genera una contradicción.

2. Las proyección de una transversal es claramente un conjunto abierto, por lo tanto para ver que es un homeomorfismo resta ver que una transversal no puede cortar dos veces una hoja. La construcción 3.1 nos da una contradicción por el punto anterior.
3. Que son planos ya lo vimos en la observación 3.5. Si alguno de los mismos no fuera encajado, una transversal local debería cortarlo dos veces y nuevamente la construcción 3.1 nos da una contradicción.

□

**Corolario 3.2.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación sin componentes de Reeb en una 3-variedad compacta sin borde  $M$ . Entonces el espacio de hojas  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  es simplemente conexo y localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Si tenemos hojas esféricas o proyectivas, la foliación es a menos de cubrimiento finito  $S^1 \times S^2$  que satisface trivialmente ambas condiciones. En el resto de los casos usaremos la proposición 3.4. El espacio de hojas es simplemente conexo porque no podemos tener transversales cerradas a  $\widetilde{\mathcal{F}}$ . Por otro lado como todo  $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  admite una transversal local, el segundo punto de la Proposición 3.4 nos da lo deseado. □

Por falta de un mejor nombre, diremos que un espacio topológico localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}$  con base numerable es una 1-variedad no Hausdorff, aunque en verdad nos referimos a espacios que pueden o no ser Hausdorff<sup>2</sup>.

La Proposición 3.4 nos permite usar el siguiente resultado de Palmeira en  $\widetilde{\mathcal{F}}$  (una prueba del mismo puede encontrarse en [CC00, Apéndice D, volumen 2]):

**Teorema 3.6 (Palmeira).** *Sea  $N$  una 3-variedad simplemente conexa con una foliación transversalmente orientada cuyas hojas son planos propiamente encajados. Entonces existe un homeomorfismo  $\phi : N \rightarrow \mathbb{R}^3$  que lleva la foliación en una foliación de la forma  $\mathcal{F}^* \times \mathbb{R}$ , donde  $\mathcal{F}^*$  es una foliación orientada de  $\mathbb{R}^2$ .*

<sup>2</sup>Si agregamos la condición de ser Hausdorff, las únicas opciones que nos quedan son el círculo o la recta.

- Observación 3.7.* 1. Si en vez de  $C^{\infty,0}$  la foliación es  $C^r$ , entonces  $\phi$  puede tomarse  $C^r$ . El resultado vale para cualquier dimension siempre que la foliación por planos sea de codimensión uno.
2. Las 1-variedades no Hausdorff simplemente conexas fueron clasificadas por Haefliger y Reeb en [HR57]. Las mismas están en correspondencia con las foliaciones del plano orientadas a menos de un homeomorfismo respetando las hojas.

El teorema y las observaciones nos dan lo siguiente:

**Corolario 3.3.** *El espacio de hojas de una foliación  $\mathcal{F}$  sin componentes de Reeb u hojas esféricas/proyectivas es homeomorfo al espacio de hojas de una foliación orientada de  $\mathbb{R}^2$  o equivalentemente, a una 1-variedad (posiblemente no Hausdorff) simplemente conexa.*

Notar que si el espacio de hojas es Hausdorff, entonces la única opción que tenemos es que  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  sea homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . Esta condición es tan importante que tiene nombre:

**Definición 3.4.** Una foliación  $\mathcal{F}$  en una variedad  $M$  es  $\mathbb{R}$ -cubierta si el espacio de hojas  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}$ .

Uno de los resultados mas importantes que presentaremos en esta monografía es que si tenemos una foliación sin componentes de Reeb en una 3-variedad  $M$ , entonces si agregamos una hipótesis de “cercanía” entre las hojas (véase la definición de uniformidad en el capítulo siguiente) automáticamente debemos ser  $\mathbb{R}$ -cubiertas.

*Observación 3.8.* Si una 3-variedad  $M$  admite una foliación  $\mathbb{R}$ -cubierta, entonces la acción de  $\pi_1(M)$  en  $\tilde{M}$  baja por el cociente a una acción en el espacio de hojas  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ . Como la foliación en  $\tilde{M}$  es coorientada y  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} \cong \mathbb{R}$  tenemos que existe un morfismo  $\pi_1(M) \rightarrow \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ . En [BRW05] los autores prueban que en estas condiciones  $\pi_1(M)$  es isomorfo a un subgrupo de  $\text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ . Si pasa esto decimos que  $\pi_1(M)$  es *ordenable a izquierda*.

Lo anterior es interesante ya que no todo grupo fundamental de una 3-variedad compacta es ordenable a izquierda, por lo tanto hay obstrucciones topológicas para admitir foliaciones  $\mathbb{R}$ -cubiertas.

Cuando una foliación Reeb no es  $\mathbb{R}$ -cubierta decimos que *tiene bifurcaciones*. Para entender las bifurcaciones conviene entender lo siguiente:

**Definición 3.5.** Sea  $\mathcal{F}$  sin componentes de Reeb,  $L$  y  $F$  dos hojas de  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Diremos que la *región acotada entre  $L$  y  $F$*  es la intersección de la componente conexa de  $L^c$  que contiene a  $F$ , con la intersección de la componente conexa de  $F^c$  que contiene a  $L$ .

Notar que lo anterior esta bien definido porque los planos separan a  $\mathbb{R}^3$  en dos componentes conexas. A modo de ejemplo, si la foliación es  $\mathbb{R}$ -cubierta entonces la región entre dos hojas se proyecta a un intervalo en el espacio de hojas. Sin embargo si hay bifurcaciones, la región entre dos hojas puede proyectarse en algo no compacto en  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ .

*Ejemplo 3.8.* Tomemos el toro  $\mathbb{T}^2$  con una foliación con un anillo de Reeb pasando por un meridiano y consideremos a  $\mathbb{T}^3 = \mathbb{T}^2 \times S^1$  con la foliación producto, es claro que esta no tiene componentes de Reeb. Los bordes del anillo de Reeb por el círculo forman hojas compactas  $L$  y  $F$ . La región que acotan  $L$  y  $F$  esta formada por una copia de  $\mathbb{R}$ -planos encajados (ver la figura 3.9).

Vale la pena remarcar que estas herramientas caen en desuso en el caso que la foliación tenga componentes de Reeb. Notar que los levantados de una Reeb se proyectan al espacio de hojas como  $S^1$  o bien  $\mathbb{R}$ , correspondiendo a los planos del interior, todos ellos conectados a la hoja borde. Esto claramente no es localmente euclideo. Tampoco podemos decir nada del resto de las hojas ya que no tenemos control de la topología de las mismas en  $\tilde{M}$ .

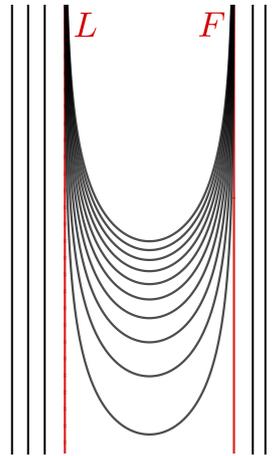


Figura 3.9: La región acotada por  $L$  y  $F$  está formada por  $\mathbb{R}$  planos encajados.

## **Parte II**

# **Foliaciones uniformes sin componentes de Reeb**

## Capítulo 4

### Definiciones y ejemplos clásicos:

En esta sección vamos a introducir la clase de foliaciones que nos mantendrá ocupados por el resto del texto. Nuestras foliaciones serán de clase  $C^{\infty,0}$  y denotaremos por  $p: \tilde{M} \rightarrow M$  al cubrimiento universal de una variedad  $M$ . Vamos a suponer que  $M$  esta equipada con una métrica Riemanniana, lo cual induce una distancia en  $\tilde{M}$ .

#### 4.1 Definición y ejemplos básicos:

Recordar que si  $(X, d)$  es un espacio métrico entonces la distancia de Hausdorff entre dos subconjuntos  $A, B \subset X$ , que denotaremos por  $d_H(A, B)$  es el ínfimo de los  $\varepsilon > 0$  tal que  $B \subset N_\varepsilon(A)$  y  $A \subset N_\varepsilon(B)$ . Si no existe un  $\varepsilon$  en estas condiciones diremos que la distancia de Hausdorff es infinita (véase la figura 4.1).

**Definición 4.1.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en una  $n$ -variedad  $M$  (posiblemente con borde). Diremos que  $\mathcal{F}$  es *uniforme* si cualquier par de hojas  $L, F$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  en el cubrimiento universal  $\tilde{M}$  están a distancia de Hausdorff acotada.

*Observación 4.1.* Esta definición no es unánime en la literatura, véase por ejemplo [Thu97b, Definición 2.1] donde Thurston introduce esta notación. Nosotros nos basamos en la definición que manejan Fenley y Potrie [FP20, Definición 2.2].

La noción de uniformidad cobra importancia si  $\pi_1(M)$  es infinito, de otro modo  $\tilde{M}$  es compacto y todas las hojas están a distancia de Hausdorff acotada.

En este texto nos restringiremos a variedades de dimensión 3. En este caso tenemos dos subfamilias de ejemplos distintos: las foliaciones uniformes sin componentes de Reeb y con componentes de

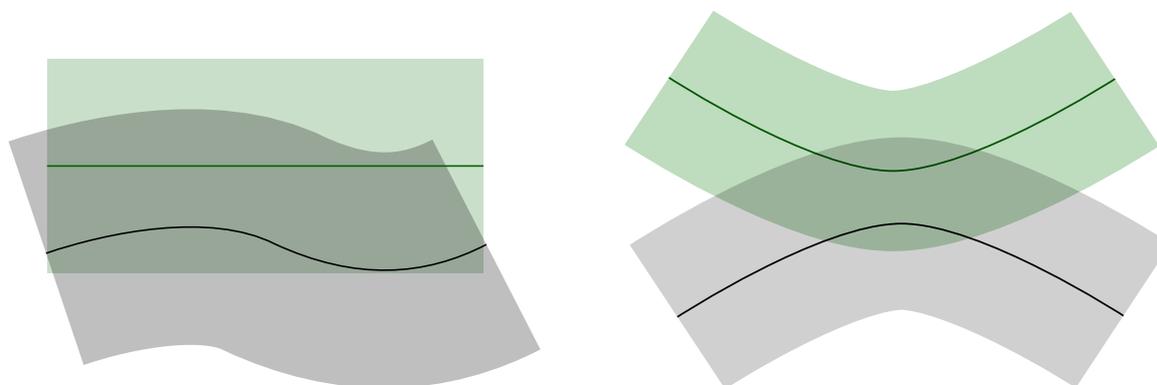


Figura 4.1: En  $\mathbb{R}^2$  con la métrica euclidiana dos curvas que son “asintóticamente paralelas” (como en la izquierda) tienen distancia de Hausdorff acotada entre ellas. Dos curvas que tienden a direcciones distintas están a distancia de Hausdorff infinita.

Reeb. En los próximos dos capítulos vamos a restringirnos en el caso sin componentes de Reeb, posponiendo el caso Reeb para el final.

Demos un primer ejemplo de foliación uniforme sin componentes de Reeb:

*Ejemplo 4.1* (Fibrados sobre el círculo). Consideremos  $\Sigma \rightarrow M \xrightarrow{\pi} S^1$  un fibrado sobre el círculo cuya fibra es una superficie cerrada  $\Sigma \neq S^2$ . Levantando la proyección  $\pi : M \rightarrow S^1$  al cubrimiento universal obtenemos una fibración  $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow S^1$  cuyas fibras son uniones disjuntas de planos que recubren a las fibras de  $M$ . Estos planos son las hojas de la foliación inducida por el fibrado en  $\tilde{M}$ .

Fijemos  $\gamma$  un lazo representando a un generador de  $\pi_1(S^1)$ . Levantando el mismo a  $\tilde{M}$  de forma que comience en  $p \in \tilde{M}$  obtenemos un camino  $\tilde{\gamma}_p : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  (acá usamos la propiedad de levantamiento de homotopías que discutimos en el ejemplo 3.4). Notar que el mapa:

$$\begin{aligned} \phi : \tilde{M} &\rightarrow \tilde{M} \\ \phi(p) &= \tilde{\gamma}_p(1). \end{aligned}$$

es tal que  $\phi(\tilde{\pi}^{-1}(z)) = \tilde{\pi}^{-1}(z)$ . De hecho, si  $\bar{\pi} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$  es el levantado de  $\tilde{\pi}$ , entonces  $\bar{\pi}(\phi(L)) = \bar{\pi}(L) + 1$ .

Afirmamos que existe una constante  $C > 0$  tal que para toda hoja  $L$  en  $\tilde{M}$ ,  $d_H(L, \phi(L)) < C$ . Para ver esto, basta con observar que las longitudes  $\ell(\tilde{\gamma}_p)$  están acotadas para  $p \in L$ . Notar que estas longitudes varían continuamente con  $p$  y satisfacen  $\ell(\tilde{\gamma}_{\alpha p}) = \ell(\tilde{\gamma}_p)$  para  $\alpha \in \pi_1(M)$ , por lo tanto la compacidad de  $M$  implica que existe  $C > 0$  tal que  $\ell(\tilde{\gamma}_p) < C$  para todo  $p \in L$ , lo que prueba la afirmación.

Si  $F$  es una hoja tal que  $\bar{\pi}(L) < \bar{\pi}(F) < \bar{\pi}(L) + 1$ , notar que los caminos  $\tilde{\gamma}_p$  con  $p \in L$  pasan por la hoja  $F$ . Esto implica que  $d_H(L, F) < C$ . Si  $F$  es una hoja cualquiera, podemos trasladarla por  $\phi$  para que caiga en las hipótesis y así obtenemos que todo par de hojas está a distancia de Hausdorff acotada (véase la figura 4.2)

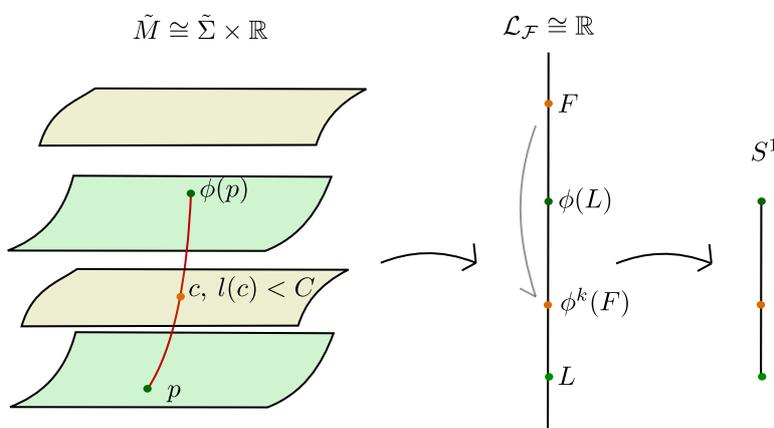


Figura 4.2: En la figura,  $c$  es una curva de  $\tilde{M}$  que levanta a un generador del círculo, que vemos como un intervalo identificando los bordes.

Prestando atención al ejemplo anterior, podemos observar que el argumento utilizado para probar la uniformidad no depende fuertemente de la estructura de fibrado de  $M$ , una vez que observamos que  $\tilde{M}$  fibra sobre el círculo. De hecho veamos que funciona en el siguiente contexto:

**Definición 4.2.** Sea  $M$  una 3-variedad, diremos que esta *desliza sobre*  $S^1$  si el cubrimiento universal  $\tilde{M}$  fibra sobre el círculo (con fibras disconexas) de forma que  $\pi_1(M) \curvearrowright \tilde{M}$  respeta las fibras. Esto significa que si  $\pi : \tilde{M} \rightarrow S^1$  es la proyección entonces para todo  $z \in S^1$  y  $\gamma \in \pi_1(M)$  tenemos que  $\gamma(\pi^{-1}(z)) = \pi^{-1}(\rho(\gamma)(z))$ , donde  $\rho(\gamma) : S^1 \rightarrow S^1$  es un homeomorfismo.

*Observación 4.2.* Usaremos “deslizar” como una traducción libre de “slither”, que quizás no sea una elección feliz. Como veremos mas adelante, cuando decimos deslizar nos referimos a que  $\widetilde{M}$  avanza controladamente sobre  $S^1$  (que es coherente con una definición de diccionario de la palabra “slither”)

Si  $M$  desliza sobre  $S^1$ , entonces las componentes conexas de las fibras en el cubrimiento universal inducen una foliación  $\widetilde{\mathcal{F}}$  en  $\widetilde{M}$ . Por otro lado como  $\pi_1(M)$  manda hojas en hojas (ya que respeta las fibras) obtenemos que  $\widetilde{\mathcal{F}}$  desciende a una foliación  $\mathcal{F}$  en  $M$ . Diremos que una foliación obtenida por este procedimiento *proviene de un deslizamiento*.

*Ejemplo 4.2* (Foliaciones transversas a fibrados por círculos). Sea  $S^1 \rightarrow M \xrightarrow{\pi} \Sigma$  un fibrado por círculos sobre una superficie compacta  $\Sigma$  equipada con  $\mathcal{F}$  una foliación transversal a las fibras. Como comentamos en el Ejemplo 3.5 estas foliaciones quedan determinadas (a menos de homeomorfismo) por la holonomía de una fibra. Esta viene dada por una representación  $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Homeo}(S^1)$ .

Afirmamos que  $\widetilde{\Sigma} \times S^1$  es un cubrimiento de  $M$  tal que  $\widetilde{\Sigma} \times \{\cdot\}$  son las hojas de la foliación levantada. Esto es porque  $\pi_1(\Sigma) \curvearrowright \widetilde{\Sigma} \times S^1$  como  $\alpha(p, z) = (\alpha(p), \rho(\alpha)z)$ . Esta acción es propiamente discontinua (ya que lo es en la primera coordenada) y los conjuntos  $\widetilde{\Sigma}$  se proyectan a hojas de una foliación cuya holonomía viene dada por la representación  $\rho$ .

Lo anterior muestra que  $\mathcal{F}$  proviene de un deslizamiento ya que basta levantar la proyección natural  $\widetilde{\Sigma} \times S^1 \rightarrow S^1$  para obtener lo deseado.

De hecho Thurston introduce los deslizamientos en el preprint [Thu97b] como variedades interesantes por tener una naturaleza intermedia entre los fibrados por círculos y los fibrados por superficies (entre otras cosas).

Supongamos que  $M$  desliza sobre el círculo y sea  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow S^1$  el fibrado, notar que este se puede levantar a  $\widetilde{\pi} : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R} = \widetilde{S^1}$  que coincide con la proyección de  $\widetilde{M}$  en el espacio de hojas de  $\widetilde{\mathcal{F}}$ . Como  $\pi_1(M)$  preserva las fibras de  $\pi$  tenemos un homomorfismo:

$$\rho : \pi_1(M) \rightarrow \text{Homeo}^+(S^1).$$

Para todo  $\gamma \in \pi_1(M)$ ,  $\rho(\gamma) : S^1 \rightarrow S^1$  se levanta a  $\widetilde{\rho(\gamma)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (fijando un punto base). Por lo tanto también tenemos un homomorfismo:

$$\widetilde{\rho} : \pi_1(M) \rightarrow \widetilde{\text{Homeo}^+(S^1)},$$

donde  $\widetilde{\text{Homeo}^+(S^1)}$  es el subgrupo de  $\text{Homeo}^+(\mathbb{R})$  cuyos elementos son levantados de homeomorfismos del círculo. El centro de este subgrupo es cíclico y generado por el mapa  $t \rightarrow t + 1$  (viendo a  $S^1$  como  $\mathbb{R}/\langle t + 1 \rangle$ ), a este lo denotaremos como  $Z$ . Como  $Z$  conmuta con  $\rho$ , este induce un mapa en el espacio de hojas  $Z : \mathcal{L}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ . Diremos que este es *el mapa estructural del deslizamiento*.

Ya nos encontramos con  $Z$  en los fibrados por superficies, donde  $\phi$  juega el rol de nuestro mapa  $Z$ . Introducida esta notación, estamos en condiciones de probar que efectivamente  $\widetilde{M}$  avanza controladamente sobre  $S^1$ :

**Teorema 4.1.** *Si  $M$  desliza sobre el círculo, entonces la foliación inducida por el deslizamiento es  $\mathbb{R}$ -cubierta y uniforme.*

*Demostración.* Ya mencionamos que es  $\mathbb{R}$ -cubierta, así que basta con ver la uniformidad. Esencialmente vamos a repetir la prueba del ejemplo 4.1 con el mapa estructural del deslizamiento sustituyendo a  $\phi$ .

Sea  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow S^1$  la fibración, tomemos  $L$  una hoja de  $\widetilde{\mathcal{F}}$  y un punto  $p \in L$ . Consideremos un camino representando a un generador de  $\pi_1(S^1)$  y levantémoslo a una curva  $c_p : [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}$  comenzando en  $p \in L$ . Este camino termina en la hoja  $Z(L)$ , donde  $Z : \mathcal{L}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  es el mapa

estructural del deslizamiento. Las longitudes de las curvas  $c_p$  varían continuamente con el punto  $p$ , y la construcción de las mismas es equivariante respecto a la acción de  $\pi_1(M)$ , por lo tanto existe  $C > 0$  tal que  $d_H(L, Z(L)) < C$ .

Por otro lado  $L$  y  $Z(L)$  acotan un compacto de hojas en  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  y por lo tanto si  $F$  esta en la región entre  $L$  y  $Z(L)$ ,  $d_H(L, F) < C$ . Por ultimo notar que si tenemos dos hojas  $L$  y  $F$ , a menos de cambiar  $F$  por  $Z^k(F)$  (que no nos molesta porque  $Z^k(F)$  y  $F$  están a distancia de Hausdorff acotada) podemos asumir que  $F$  esta en la region entre  $L$  y  $Z(L)$  lo que termina la prueba.  $\square$

## 4.2 $\mathbb{R}$ -cubierta y uniforme desliza en $S^1$ :

En esta sección probaremos un “reciproco” al Teorema 4.1. Las comillas quedaran claras mas adelante. Partamos de  $\mathcal{F}$  una foliación en  $M$  que es  $\mathbb{R}$ -cubierta y uniforme. A menos de tomar un cubrimiento finito supongamos que es orientada y coorientada. Esto nos da una orientación favorita en el espacio de hojas  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ .

Como  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  es una recta, debe existir un intervalo compacto  $I$  tal que los trasladados de su interior por  $\pi_1(M)$  cubren todo el espacio de hojas. Denotemos por  $I_+$ ,  $I_-$  al mayor y menor elemento del borde de  $I$  respectivamente.

*Observación 4.3.* Supongamos que  $d_H(I_+, I_-) < A$ , entonces si  $L$  es una hoja tal que  $L > I_-$  y  $d_H(L, I_-) > A$  necesariamente  $L > I_+$ . De otro modo  $\forall p \in I_-$  habría una curva de largo  $< A$  uniendo a  $p$  con un punto de  $L$  (ya que la hay uniendo a  $I_-$  con un punto de  $I_+$ ).

Esta observación es crucial ya que nos da cierta noción de “distancia” en el espacio de hojas.

**Construcción 4.1.** Sean  $I_+$  e  $I_-$  como arriba, definamos para una hoja  $L$ :

$$p(L) := \sup\{\alpha(I_+) : \alpha \in \pi_1(M), L \in \alpha(I)\},$$

donde  $I$  es el intervalo  $(I_-, I_+)$ . Esto define una función  $p : \mathcal{L}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ . Hagamos algunas observaciones sobre la misma:

- $p(L) > L$ , de hecho como los trasladados de  $I$  cubren a  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  tenemos que  $p^n(L) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
- El mapa es  $\pi_1(M)$ -invariante, es decir  $p(\alpha(L)) = \alpha(p(L))$  para todo  $\alpha \in \pi_1(M)$ .
- $p(L)$  está bien definida, es decir no puede dar infinito. Para ver esto tomar  $F$  una hoja tal que  $d_H(L, F) > A$ , donde  $d_H(I_+, I_-) < A$ . El argumento de la observación 4.3 nos dice que si  $L \in [\alpha(I_-), \alpha(I_+)]$ , entonces  $F$  no puede estar en ese intervalo. Por lo tanto  $p(L) \leq F$ .

La propiedad crucial de  $p$  es que es una función monótona (no necesariamente estricta). Supongamos que  $L < F$ , si  $L \in \alpha(I)$  para cierto  $\alpha \in \pi_1(M)$ , entonces la hoja  $F$  debe estar en  $\alpha(I)$  o  $\alpha(I_+) \leq F$ . Esto prueba la monotonía.

Notar que si además existiese  $\alpha \in \pi_1(M)$  tal que  $L < \alpha(I_-) < F$  tenemos que  $p(L) < \alpha(I_+)$  y la función es estrictamente monótona. Esto sucede si  $\pi_1(M)$  actúa en  $\mathbb{R}$  de forma minimal, es decir, si la órbita de todo punto es densa (de hecho, también es una condición necesaria). A nivel de la foliación  $\mathcal{F}$ , esta condición implica la existencia de una hoja cuya clausura es  $M$ .

Veamos que a menos de modificar la foliación  $\mathcal{F}$  siempre podemos asumir que estamos en este caso: como  $p$  es monótona las preimágenes de un punto pueden ser un punto o un intervalo compacto, y en este segundo caso solo puede haber una cantidad numerable de puntos de la recta cuya preimagen sea de esta forma. Supongamos que  $J \subset \mathbb{R}$  es un intervalo compacto tal que  $p(J)$  es un punto, visto desde  $\tilde{M}$  este conjunto es un cerrado homeomorfo a  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  foliado por la foliación trivial. A estos “paquetes de hojas” los podemos colapsar a un único plano  $\mathbb{R}^2$ , simplemente colapsando los intervalos de  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  a un punto.

Este procedimiento nos da una nueva foliación en  $\tilde{M}$  en donde  $p$  desciende al espacio de hojas de la misma de forma que la preimagen del punto  $p(J)$  es un único punto. Haciendo esto para todos los numerables intervalos problemáticos obtenemos una nueva foliación  $\tilde{\mathcal{F}}'$  en  $\tilde{M}$  en la cual  $p$  induce una función estrictamente monótona en su espacio de hojas. Esta foliación desciende a una foliación  $\mathcal{F}'$  en  $M$  por la acción de  $\pi_1(M)$  porque  $p$  es invariante por esta acción. Diremos que  $\mathcal{F}'$  se obtiene de  $\mathcal{F}$  implotando hojas.

La construcción anterior nos da lo siguiente:

**Teorema 4.2** (Thurston). *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en  $M$  uniforme y  $\mathbb{R}$ -cubierta, entonces a menos de implotar numerables hojas  $\mathcal{F}$  proviene de un deslizamiento.*

*Demostración.* Consideremos  $p$  como en la Construcción 4.1. Ya vimos que a menos de implotar numerables hojas podemos asumir que  $p$  es un mapa estrictamente monótono, aunque puede no ser continuo. Si fuera continuo, entonces  $p$  es conjugado a una traslación y  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}/\langle p \rangle \cong S^1$ . Componiendo la proyección al espacio de hojas con este cociente nos da que  $\tilde{M}$  fibra sobre el círculo.

Por otro lado si  $p$  no es continuo, la monotonía de  $p$  nos dice que debe tener a lo sumo numerables puntos de discontinuidad. Cada uno de estos puntos de continuidad nos producen intervalos abiertos separando componentes conexas de la imagen. Tomando estos intervalos abiertos e implotándolos como en la Construcción 4.1, obtenemos una nueva foliación  $\tilde{\mathcal{F}}'$  en  $\tilde{M}$  en donde  $p$  baja a un homeomorfismo. Nuevamente esta foliación desciende a  $M$  por la invarianza de  $p$  respecto a la acción de  $\pi_1(M)$ . El argumento del párrafo anterior concluye el teorema.  $\square$

## Capítulo 5

### Uniforme y sin componentes de Reeb implica $\mathbb{R}$ -cubierta:

Sea  $M$  una 3-variedad Riemanniana cerrada, denotemos por  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  al cubrimiento universal. En esta sección probaremos el siguiente resultado ([FP20, Teorema 1.1]):

**Teorema 5.1** (Fenley, Potrie). *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación uniforme en una 3-variedad cerrada  $M$  sin componentes de Reeb, entonces  $\mathcal{F}$  es  $\mathbb{R}$ -cubierta.*

De ahora en mas vamos a olvidarnos del caso en que la foliación tenga hojas esféricas y proyectivas, ya que la única foliación sin componentes de Reeb en estas condiciones es  $S^1 \times S^2$  con la foliación trivial a menos de cubrimiento finito (recordar 3.1). Observar que esta también es uniforme y  $\mathbb{R}$ -cubierta.

Usando el Teorema 4.2 obtenemos:

**Corolario 5.1.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación uniforme y sin componentes de Reeb, entonces a menos de implotar numerables hojas,  $\mathcal{F}$  proviene de un deslizamiento de  $M$  sobre  $S^1$ .*

Antes que nada hagamos un bosquejo de la prueba del Teorema 5.1. Ya observamos en la sección 3.4 que para verificar que  $\mathcal{F}$  es  $\mathbb{R}$ -cubierta basta ver que el espacio de hojas es Hausdorff. Suponiendo por absurdo que no lo es, existen dos hojas  $L$  y  $F$  en  $\tilde{\mathcal{F}}$  que no están separadas, esto implica que para cualquier par de transversales  $\tau_L, \tau_F$  a  $L$  y  $F$  respectivamente, existe  $G$  una hoja tal que  $G \cap \tau_L, G \cap \tau_F \neq \emptyset$ . La condición de uniformidad nos va a permitir concluir las siguientes tres cosas:

1. Las hojas  $L$  y  $F$  se proyectan a hojas compactas en  $M$ , digamos  $A$  y  $B$  respectivamente.
2. Sea  $\Gamma \subset \pi_1(M)$  el subgrupo que fija  $L$  y  $F$  al mismo tiempo. Denotemos por  $N_\Gamma$  al cociente de la región que acotan  $L$  y  $F$  (recordar la definición 3.5) por  $\Gamma$ , esta es una 3-variedad con dos componentes de borde (los cocientes de  $L$  y  $F$ ), ambos cubrimientos de  $A$  y  $B$  que además son homotópicos por construcción. La condición de uniformidad implica que estos bordes de  $N_\Gamma$  son de hecho cubrimientos *finitos* de  $A$  y  $B$ , en particular los bordes son compactos. Hechos generales de topología en 3-variedades implican que  $N_\Gamma$  es un fibrado por intervalos sobre una superficie compacta.
3. Las hojas  $A$  y  $B$  no admiten transversales cerradas pasando por ellas. El teorema de Goodman (teorema 3.2) implica que  $A$  y  $B$  deben ser toros o botellas de Klein. En particular  $N_\Gamma$  es  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  (a menos de cubrimiento finito).

El ultimo paso nos motiva a estudiar las foliaciones uniformes en  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  tal que los bordes no están separados en el cubrimiento universal  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ . Resulta que *no existen tales foliaciones*. Trabajando un poco mas, esto nos dará la contradicción deseada.

Las pruebas de los bloques enunciados anteriormente usan de forma crucial la proposición 3.4. Esta implica que *en las condiciones del teorema, las hojas de la foliación en  $\tilde{M}$  son planos encajados y cualquier transversal intersecta a lo sumo una hoja de  $\tilde{\mathcal{F}}$* . En particular tenemos la siguiente observación:

*Observación 5.1.* Sean  $L$  y  $F$  son dos hojas no separadas de  $\tilde{\mathcal{F}}$ , entonces ninguna transversal a  $L$  puede intersectar a  $F$ . Para ver esto supongamos por absurdo que existe  $\tau$  una transversal con extremos en  $p \in L$  y  $q \in F$ . Esta se proyecta homeomorfa al espacio de hojas por la proposición 3.4. Sea  $r$  en el interior de  $\tau$  perteneciendo a una hoja  $G$ , entonces notar que ninguna hoja  $H$  pasando por un punto del segmento de  $\tau$  determinado por  $p$  y  $r$  puede cortar a  $F$  en una transversal local, si lo hiciera trasladando por holonomía tendríamos que  $H$  corta nuevamente a  $\tau$ , que es una contradicción. En particular dos hojas no separadas no pueden compartir una carta foliada.

En lo que resta del capítulo dedicaremos una sección a cada uno de los tres bloques que bosquejamos anteriormente. Es interesante observar que algunos de estos bloques valen en un contexto un poco más general al del teorema.

## 5.1 La proyección de hojas separadas de $\tilde{\mathcal{F}}$

**Proposición 5.1.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación sin componentes de Reeb en una 3-variedad cerrada  $M$ . Supongamos que existen dos hojas  $L$  y  $F$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  no separadas y tales que  $d_H(L, F) < \infty$ . Entonces  $L$  y  $F$  se proyectan a hojas compactas en  $M$ .*

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  las respectivas proyecciones de las hojas  $L$  y  $F$  en  $M$ . Supongamos por absurdo que  $A$  o  $B$  no es compacta, sin pérdida de generalidad digamos que  $A$  no lo es. Por lo tanto existen  $p_i$  y  $p$  en  $A$  tal que  $p_i \rightarrow p$ , donde los  $p_i$  están en placas disjuntas (recordar la Proposición 1.2).

Sean  $x_i \in L$  levantados de  $p_i$  a  $\tilde{M}$  y consideremos  $\gamma_i \in \pi_1(M)$  tal que  $\gamma_i x_i$  tiene una subsucesión convergente<sup>1</sup> a  $x_0$  que esta en cierta hoja  $L_0$ . Observar que  $\gamma_i x_i$  se encuentran todos en hojas distintas de  $\tilde{\mathcal{F}}$  ya que a partir de cierto momento están en placas distintas de un entorno foliado de  $\tilde{\mathcal{F}}$  y una hoja no puede cortar dos veces una transversal en  $\tilde{M}$ .

Si  $d_H(L, F) = R$ , entonces para cada  $x_i \in L$  existe  $y_i \in F$  tal que  $d(x_i, y_i) < R + 1$ . A partir de cierto momento tenemos que  $\gamma_i y_i \in B(x_0, R + 1)$  y por lo tanto podemos tomar una subsucesión convergente a  $y_0 \in F_0$  para cierta hoja. Afirmamos que  $F_0 \neq L_0$ , ya que si coincidieran,  $\gamma_i L$  y  $\gamma_i F$  cortarían una misma transversal para un  $i$  suficientemente grande. Esto contradice la Observación 5.1 ya que  $\gamma_i L$  y  $\gamma_i F$  no se pueden separar.

Consideremos  $\tau_{x_0}$  y  $\tau_{y_0}$  dos transversales a  $L_0$  y  $F_0$  respectivamente pasando por  $x_0$  e  $y_0$ , entonces a partir de cierto  $i$  estas curvas también son transversales para  $\gamma_i L$  y  $\gamma_i F$ . Como  $\gamma_i L$  y  $\gamma_i F$  no se separan, deben existir hojas cortando a  $\tau_{x_0}$  y a  $\tau_{y_0}$  al mismo tiempo, como las transversales son genéricas esto nos dice que  $L_0$  y  $F_0$  no se pueden separar.

Sean  $\gamma_i L$  y  $\gamma_i F$  cortando  $\tau_{x_0}$  y a  $\tau_{y_0}$  respectivamente, tenemos dos posibilidades:

1.  $\gamma_i L$  o  $\gamma_i F$  no esta en la región entre  $L_0$  y  $F_0$ :

En este caso supongamos sin pérdida de generalidad que  $\gamma_i L$  no esta en la región entre  $L_0$  y  $F_0$ . Entonces como  $\gamma_i L$  y  $L_0$  comparten la transversal  $\tau_{x_0}$ ,  $L_0$  separa  $\gamma_i L$  de  $\gamma_i F$  que es una contradicción.

2.  $\gamma_i L$  y  $\gamma_i F$  están ambas en la región entre  $L_0$  y  $F_0$ :

Notar que entonces si  $i$  es suficientemente grande  $\gamma_i L$  debe cortar a  $\tau_{x_0}$  y a  $\tau_{y_0}$  ya que  $L_0$  y  $F_0$  no están separadas y  $\gamma_i L \rightarrow L_0$  (y por lo tanto también converge a  $F_0$ ). Por otro lado vale lo mismo para  $\gamma_i F$ , pero entonces si elegimos las transversales para que pertenezcan a un entorno foliado, la Observación 5.1 nos da nuevamente una contradicción.

Esto termina con la prueba de la proposición. □

<sup>1</sup>Cometiendo abuso de notación, no vamos a cambiar los índices para referirnos a subsucesiones.

## 5.2 Proyectando la región acotada por las hojas separadas:

Dada  $E$  una hoja de  $\widetilde{\mathcal{F}}$ , vamos a denotar por  $\Gamma_E \subset \pi_1(M)$  al estabilizador de la hoja respecto a la acción  $\pi_1(M) \curvearrowright \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ . El teorema de Novikov implica que  $\Gamma_E$  es el grupo fundamental de  $\pi(E)$ .

Denotemos a la región acotada por  $L$  y  $F$  como  $\widetilde{N}$ . Notar que  $N_{\Gamma} := \widetilde{N}/\Gamma_L$  es una 3-variedad cuyo grupo fundamental es isomorfo al de una superficie compacta y con cubrimiento universal contractible, resultados estándar de topología en 3-variedades nos hacen sospechar que esta 3-variedad debe ser un fibrado por intervalos sobre la superficie  $\pi(L) = A$  que es una componente de borde. Este es el resultado al que queremos llegar.

Lo primero que podemos observar es que todas las componentes de borde de  $N_{\Gamma}$  son compactas:

**Lema 5.1.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación sin componentes de Reeb en una 3-variedad cerrada  $M$ . Supongamos que  $L$  y  $F$  son dos hojas de  $\widetilde{\mathcal{F}}$  proyectándose en hojas compactas y tal que  $d_H(L, F) < \infty$ . Entonces  $\Gamma := \Gamma_L \cap \Gamma_F$  tiene índice finito en  $\Gamma_L$  y en  $\Gamma_F$ .*

*Demostración.* Notar que como las transformaciones de cubrimiento actúan por isometrías en  $\widetilde{M}$ ,  $d_H(\gamma F, L) = d_H(F, L) = R$  para cualquier  $\gamma \in \Gamma_L$ . Por otro lado como  $F$  se proyecta a una hoja compacta, la órbita  $\Gamma_L F$  es un subconjunto cerrado de  $\widetilde{M}$ .

Sea  $x \in L$  y consideremos  $\overline{B(x, R+1)}$ , esta bola debe intersectar a cada  $\gamma F$  con  $\gamma \in \Gamma_L$  por el párrafo anterior. Cubriéndola con una cantidad finita de entornos foliados, obtenemos que a lo sumo puede haber finitos  $\gamma F$  distintos, ya que si hubiera infinitos estos acumularían en algún punto de la bola y por lo tanto una carta tendría infinitas placas disjuntas proyectándose en una hoja compacta, lo cual no puede suceder.

Por otro lado observar que hay tantas coclases de  $\Gamma$  en  $\Gamma_L$  como trasladados de  $F$  en la bola  $\overline{B(x, R+1)}$ , por lo tanto  $\Gamma$  tiene índice finito en  $\Gamma_L$ . Haciendo un argumento simétrico para la hoja  $F$  concluimos lo deseado.  $\square$

Concluimos que  $N := \widetilde{N}/\Gamma$  es una 3-variedad con grupo fundamental  $\Gamma$  y con dos componentes de borde cuyo grupo fundamental es  $\Gamma$ . Las técnicas usadas para probar [Hem04, Teorema 10.2] permiten probar:

**Teorema 5.2.** *Sea  $M$  una 3-variedad con dos componentes de borde  $A$  y  $B$  homotópicas y tales que  $\pi_1(A) \cong \pi_1(B) \cong \pi_1(M)$ , entonces  $M$  es homeomorfa a un fibrado por intervalos sobre  $A$  (o sobre  $B$ ).*

Combinando los dos resultados anteriores obtenemos:

**Proposición 5.2.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación sin componentes de Reeb en una 3-variedad cerrada  $M$ . Supongamos que  $L$  y  $F$  son dos hojas que se proyectan en hojas compactas y tal que  $d_H(L, F) < \infty$ . Si llamamos  $\widetilde{N}$  a la región entre  $L$  y  $F$ , entonces  $\widetilde{N}$  se proyecta a un fibrado compacto por intervalos sobre  $L/\Gamma_L$  en  $\widetilde{M}/\Gamma_L$ .*

## 5.3 Foliaciones uniformes en $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$

La siguiente proposición nos acota todavía mas la topología del fibrado por intervalos obtenido en la sección anterior:

**Proposición 5.3.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación sin componentes de Reeb en una 3-variedad cerrada  $M$ . Supongamos que  $L$  y  $F$  son dos hojas de  $\widetilde{\mathcal{F}}$  no separadas y tal que  $d_H(L, F) < \infty$ . Entonces si  $\widetilde{N}$  es la región acotada por  $L$  y  $F$ ,  $N_{\Gamma} := \widetilde{N}/\Gamma_L$  es a menos de cubrimiento finito  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ . En particular  $\pi(L)$  y  $\pi(F)$  son toros o botellas de Klein.*

*Demostración.* Supongamos (a menos de tomar cubrimientos finitos) que  $\mathcal{F}$  es orientada y transversalmente orientada. Ya sabemos por la Proposición 5.2 que a menos de un cubrimiento finito  $\widetilde{N}/\Gamma_L$  es  $\Sigma \times [0, 1]$  para cierta superficie orientable  $\Sigma$  que necesariamente debe ser un cubrimiento finito

de  $\pi(L)$  y  $\pi(N)$ . En particular si vemos que  $\pi(L)$  y  $\pi(N)$  son toros obtenemos lo deseado, ya que la única superficie compacta que cubre al toro es otro toro.

Para ver esto vamos a usar el Teorema de Goodman 3.2 que implica que si una hoja no admite una transversal cerrada entonces necesariamente es un toro. Supongamos por absurdo que existe una transversal cerrada en  $\pi(L)$ , a menos de cambiar la coorientación esta se levanta a una transversal  $\tau$  a la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  que comienza en  $L$  y apunta para dentro de  $N$ . Esta transversal  $\tau$  necesariamente debe estar contenida en  $N$  ya que  $L$  y  $F$  no pueden compartir transversales por la Observación 5.1.

Sea  $\gamma = [\pi(\tau)] \in \pi_1(M)$  (que no puede ser la clase nula por Novikov), lo anterior implica que  $\gamma L$  esta contenida en  $\tilde{N}$ . Esta hoja debe proyectarse en  $N_\Gamma$  como una hoja compacta. Esto es porque  $N_\Gamma$  es compacto, por ende si  $\gamma(L)/\Gamma_L$  no fuera compacta existiría un entorno foliado en  $N_\gamma$  con infinitas placas correspondientes a esta hoja, lo que contradice el hecho que  $\pi(L)$  es compacta. En particular  $\gamma(L)/\Gamma_L$  siendo una superficie compacta e incompresible (por Novikov) en un fibrado por intervalos, debe ser isotópica a ambos bordes, y por lo tanto  $\gamma(L)$  separa  $L$  de  $F$ .  $\square$

Esto nos motiva a estudiar las foliaciones uniformes en  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  tangentes al borde, donde las hojas del borde no están separadas en el cubrimiento universal. La siguiente proposición nos deja a pasitos de la prueba del teorema 5.1:

**Proposición 5.4.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  tangente al borde y tal que las hojas  $L := \mathbb{T}^2 \times \{0\}$  y  $F := \mathbb{T}^2 \times \{1\}$  no están separadas. Entonces la foliación no puede ser uniforme.*

*Demostración.* Denotemos a las hojas borde  $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$  y  $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$  como  $A$  y  $B$  respectivamente. Lo primero que podemos observar es que por Novikov, las hojas de  $\mathcal{F}$  pueden ser planos, cilindros o toros, ya que estas son las únicas superficies cuyo grupo fundamental es un subgrupo de  $\mathbb{Z}^2 = \pi_1(\mathbb{T}^2 \times [0, 1])$ . De estas posibilidades también podemos descartar los toros ya que estos deben ser isotópicos a los bordes de  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  y por lo tanto se levantan a hojas de  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  separando a  $L$  de  $F$ , contradiciendo la hipótesis. Entonces las hojas interiores son planos o cilindros.

Esto impone condiciones en la holonomía de la foliación como veremos a continuación:

**Afirmación:** Existe  $\alpha \in \pi_1(A)$  con holonomía contractiva.

*Demostración.* Tomemos  $\alpha \in \pi_1(A)$  un elemento cualquiera, si  $\alpha$  o  $\alpha^{-1}$  tiene holonomía contractiva terminamos. Si este no es el caso entonces dado  $p \in A$  existen  $p_n$  pasando por una transversal de  $p$  y convergiendo al mismo, tal que si vemos  $\alpha$  como homeomorfismo de esta transversal, todos los  $p_n$  quedan fijos por  $\alpha$ .

Tomemos  $\beta$  otro elemento de  $\pi_1(A)$  tal que  $\langle \alpha, \beta \rangle = \pi_1(A)$ . Si  $\beta$  o  $\beta^{-1}$  es contractiva, nuevamente tenemos lo deseado así que supongamos que no. Sea  $p_n$  suficientemente grande para que  $\beta$  este

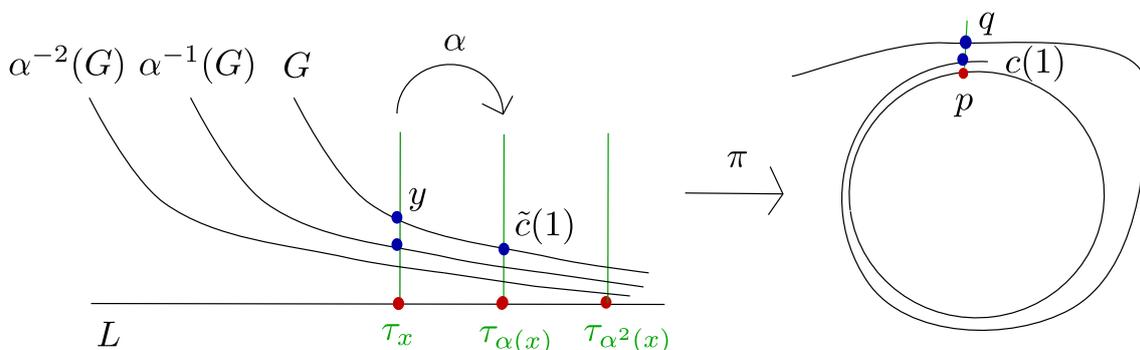


Figura 5.1: Acción de  $\alpha \in \pi_1(M)$  con holonomía contractiva en cierta hoja vista desde el cubrimiento universal.

bien definida en la transversal y  $\beta(p_n)$  este mas cercano a  $p$  que  $p_n$ . Como  $\beta$  no es contractivo,  $\beta^n p_n$  converge a un punto  $q \neq p$  que queda fijo por la acción de  $\beta$ , pero notar que *también debe quedar fijo por la acción de  $\alpha$*  porque  $\alpha$  y  $\beta$  conmutan. Sea  $C$  la hoja pasando por  $q$ , entonces como  $\alpha$  y  $\beta$  generando el grupo fundamental de  $A$  la fijan,  $C$  debe ser un toro contradiciendo lo dicho anteriormente.  $\square$

Un elemento con holonomía contractiva también se puede ver en la acción de  $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  como veremos a continuación. Consideremos  $\alpha \in \mathbb{Z}^2$  como en la afirmación, sea  $q$  en una transversal al punto  $p \in A$  donde  $\alpha$  esta bien definida. Llamemosle  $C$  a la hoja que contiene a  $q$ , dentro de esta consideremos una curva  $c$  uniendo  $q$  con  $\alpha(q)$  obtenida levantando localmente una curva en  $A$  representando a  $\alpha$  ( $c$  se puede obtener levantando la curva representando a  $A$  en un entorno foliado largo como en la Proposición 1.1).

Levantando todo a  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  consideremos  $x$  un levantado de  $p$  e  $y$  un levantado de  $q$  dentro de una transversal  $\tau_x$  pasando por  $x$ , denotemos por  $G$  la hoja pasando por  $y$ . Entonces la curva uniendo  $q$  con  $\alpha(q)$  en  $C$  se levanta a una curva  $\tilde{c}$  en  $G$  tal que  $\tilde{c}(0) = y$  y  $\tilde{c}(1) \in \tau_{\alpha(x)}$ , donde  $d(y, x) > d(\tilde{c}(1), \alpha(x))$  porque la holonomía es contractiva. En particular  $\alpha^{-1}(G)$  corta a  $\tau_x$  en un punto mas cercano a  $x$  que  $y$  ( $y$  en ningún otro punto ya que las hojas cortan a la transversal una vez sola). De todo esto concluimos que  $\alpha^{-n}(G)$  converge a la hoja  $L$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . De hecho la discusión nos da un si y solo si, si una transformación de cubrimiento satisface que para alguna hoja  $G$ ,  $\alpha^{-n}(G) \rightarrow L$  cuando  $n \rightarrow \infty$  entonces  $\alpha$  visto como homeomorfismo de una transversal debe ser contractiva (vease la Figura 5.1).

La discusión anterior nos dice que existe  $G$  una hoja cortando a una transversal  $\tau_x$  con  $x \in L$  como antes tal que  $\alpha^{-n}(G) \rightarrow L$ , pero por hipótesis  $L$  y  $F$  no están separadas y por ende  $\alpha^{-n}(G) \rightarrow F$ . El si y solo si observado anteriormente implica que  $\alpha$  también tiene holonomía contractiva en  $B$ .

Pongamos coordenadas en  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  tal que  $\alpha$  tenga la forma  $\alpha(x, t) = (x + (1, 0), t)$ . Vamos a probar algo mucho mas fuerte que lo que dice la proposición: *ninguna hoja en el interior de  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  puede estar a distancia de Hausdorff acotada de los bordes.*

Supongamos por absurdo que una hoja, digamos  $G$  satisface  $d_H(L, G) < K$ . En particular para todo  $p_n = ((-n, 0), 0) \in L$  existe  $q_n \in G$  con  $d(p_n, q_n) < K$ . Hagamos ahora otra afirmación:

**Afirmación:** Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $K' > 0$  tal que cualquier punto  $y \in G$  existe  $z \in G$  tal que  $d_G(y, z) < K'$  y  $z$  esta en un  $\varepsilon$ -entorno de  $L$  o  $F$  ( $d_G$  es la distancia por caminos inducida en la hoja).

*Demostración.* Hagamos una prueba por absurdo: si existiera  $\varepsilon > 0$  y un punto  $y \in G$  tal que para todo  $R > 0$  la bola métrica  $B_G(y; R)$  no corta a un  $\varepsilon$ -entorno de los bordes, entonces la proyección de esta hoja a  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  tiene clausura fuera de un  $\varepsilon$ -entorno de  $\partial(\mathbb{T}^2 \times [0, 1])$ . La clausura de esta hoja es una laminación esencial  $X$  (vease III) en el fibrado por intervalos  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ , porque  $\mathcal{F}$  no tiene componentes de Reeb.

Doblando la variedad  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  por su borde obtenemos el toro  $\mathbb{T}^3$  y podemos ver a  $X$  como una laminación esencial en el mismo. El teorema de Brittenham (teorema .4) nos dice que a menos de una isotopía las hojas de  $X$  son verticales u horizontales. Estas no pueden ser verticales, porque sino  $X$  cortaría transversalmente a un toro borde de  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ . Supongamos entonces que son horizontales, en este caso podemos suponer que luego de la isotopía estamos en  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ . En este caso fijemos una fibra  $\{\cdot\} \times [0, 1]$  y tomemos el máximo de las intersecciones de la fibra con  $X$ , respecto al orden usual en  $[0, 1]$ . Notar que este máximo no puede ser 1 ya que las hojas borde no están en  $X$ , y que la hoja debe ser compacta ya que sino habría una hoja mas arriba en el intervalo. Esto es una contradicción porque entonces esta hoja debe ser un toro en el interior de  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  contradiciendo que las hojas borde estan separadas en el cubrimiento universal.  $\square$

Sea  $\varepsilon$  suficientemente pequeño para que  $\alpha$  sea una contracción en un  $\varepsilon$ -entorno de  $A$  y  $B$ . Por la afirmación anterior, debe existir  $q'_n$  en  $G$  a distancia acotada de  $q_n$  y en un  $\varepsilon$ -entorno de los bordes.

Por lo tanto  $q'_n$  tiene la forma  $((-n, 0) + v_n, t_n)$ , donde  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$  es una sucesión acotada y  $|t_n| < \varepsilon$  o  $|1 - t_n| < \varepsilon$ . A menos de tomar subsucesión, podemos asumir que todos los  $v_n$  están en un entorno de cierto  $v_0 \in \mathbb{R}^2$ .

Ahora si aplicamos la holonomía de  $\alpha^n$  al punto  $q_n$  llegamos a un punto de la forma  $(v_n, t'_n)$  donde  $t'_n$  esta mas cerca de 0 o 1 que  $t'_m$  con  $m < n$ . Como  $v_n$  están arbitrariamente cerca de un  $v_0$ , si tomamos un entorno foliado alrededor de  $(v_0, 0)$  o  $(v_0, 1)$  concluimos que los puntos  $(v_n, t'_n)$  se encuentran todos en placas disjuntas, pero todos estos pertenecen a  $G$ , contradiciendo que cada hoja en  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  corta un entorno foliado a lo sumo una vez.  $\square$

#### 5.4 Conclusión: prueba del Teorema 5.1

Ahora si estamos en condiciones de terminar con la prueba del Teorema 5.1:

*Prueba del Teorema 5.1.* Supongamos por absurdo que existen  $L$  y  $F$  en  $\widetilde{\mathcal{F}}$  no separadas en  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ . Por la Proposición 5.3 la región acotada por  $L$  y  $F$ , llamemosle  $\widetilde{N}$  se proyectan en algún cubrimiento intermedio a  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  con una foliación tangente al borde. La proposición 5.4 nos dice que con la métrica inducida, esta foliación no puede ser uniforme por lo tanto existe una hoja  $G$  en el interior que no esta a distancia de Hausdorff finita de los bordes.

Para concluir el teorema, veremos que  $G$  tampoco esta a distancia de Hausdorff finita de los bordes en  $\widetilde{M}$ , lo que contradice la uniformidad de la foliación. Supongamos que si lo esta, entonces para todo  $n$  suficientemente grande existen,  $p_n \in L$  y  $q'_n \in G$  tal que con la distancia por caminos de  $\widetilde{N}$  están a distancia mayor que  $n$ , pero con distancia menor que un  $K > 0$  uniforme en  $\widetilde{M}$ . En  $\widetilde{N}$ , claramente existe  $q_n$  en  $L$  tal que esta a distancia acotada de  $q'_n$ , basta con tomar la preimagen de  $\{x\} \times [0, 1] \subset \mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  y conectarlos. A menos de mover  $q_n$  una distancia acotada (dependiendo únicamente del diámetro de un dominio fundamental), podemos suponer que  $q_n = \gamma_n p_n$  donde  $\gamma_n \in \Gamma_L$ .

Eligiendo generadores de  $\pi_1(M)$  de forma que incluyan los 2 generadores del toro, podemos suponer que todos los  $p_n$  y  $q_n$  son los vértices del grafo de Cayley, y como están todos a distancia acotada solo puede haber finitos  $p_n$  y  $q_n$  (aquí usamos el Lema de Milnor-Svarc, véase [FM11, Teorema 8.2]) En particular  $p_n$  y  $q_n$  están cerca en  $L$  lo que contradice el hecho que  $p_n$  y  $q'_n$  están arbitrariamente lejos en  $\widetilde{N}$ .  $\square$

## **Parte III**

# **Foliaciones uniformes con componentes de Reeb**

## Capítulo 6

### Generalidades:

En este capítulo presentaremos los resultados que nos motivan a estudiar foliaciones uniformes con componentes de Reeb. Como siempre equipamos a  $M$  con una métrica Riemanniana que induce una distancia en el cubrimiento universal  $p : \tilde{M} \rightarrow M$ .

Los primeros en cuestionarse acerca del caso Reeb fueron Fenley y Potrie en [FP20, Pregunta 1] que formularon la siguiente pregunta:

**Pregunta 6.1.** *Sea  $M$  una 3-variedad compacta con grupo fundamental infinito, ¿puede existir una foliación uniforme con componentes de Reeb?*

Los autores hacen esta pregunta motivados por el siguiente resultado:

**Lema 6.1.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación uniforme con componentes de Reeb en una 3-variedad  $M$  con grupo fundamental infinito. Entonces todas las hojas de la foliación inducida en el cubrimiento universal  $\tilde{M}$  tienen clausura compacta. En particular si  $L$  es una hoja compacta, la inclusión  $i : L \rightarrow M$  induce un morfismo con imagen finita en  $\pi_1(M)$ .*

*Demostración.* Por la condición de uniformidad en  $\tilde{M}$ , basta ver que una hoja tiene clausura compacta, ya que si un conjunto está a distancia de Hausdorff acotada de un compacto debe ser compacto. Veamos que las componentes de Reeb se levantan a componentes de Reeb compactas. Supongamos que  $M$  está equipada con una métrica Riemanniana y que  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  es el cubrimiento universal. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\mathcal{F}$  es orientable y coorientable.

Sea  $R$  una componente de Reeb y  $L$  su toro borde, supongamos por absurdo que el morfismo inducido por  $i : L \rightarrow M$  en el grupo fundamental no es nulo. Esto implica que la clase de homotopía  $\gamma$  de una longitud de  $L$  no es homotópicamente trivial (el meridiano siempre es trivial porque acota un disco). Sea  $\tilde{R}$  una componente conexa de  $p^{-1}(R)$ . Afirmamos que si  $L$  se abre en  $\tilde{M}$  entonces los planos contenidos en el interior de  $\tilde{R}$  no pueden estar a distancia de Hausdorff acotada de  $\partial\tilde{R}$ , contradiciendo la uniformidad de la foliación.

Una forma de ver esto es observar que si vemos a  $\gamma \in \pi_1(M)$  actuando en  $\partial\tilde{R}$  y  $p \in \partial\tilde{R}$ , entonces  $d(\gamma^n(p), p) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , esto es una consecuencia de Milnor-Svarc ya que el mapa  $\alpha \rightarrow \alpha p$  donde  $\alpha \in \pi_1(M)$  es una cuasi isometría.

Por otro lado notar que si identificamos a  $R$  con  $S^1 \times D^2$ , los planos en el interior de  $R$  son tangentes a un disco  $\{\cdot\} \times D^2 \subset R$ , que en  $\tilde{M}$  se levanta a un disco separando  $\tilde{R}$  en dos componentes, una sin un levantado del plano elegido y otra con el plano, esto junto con lo anterior concluyen lo deseado.  $\square$

Este lema nos hace pensar que si nos paramos en  $\tilde{M}$  vemos regiones compactas foliadas que se van pegando para construir todo el cubrimiento universal, lo cual parece un poco extraño. Sin embargo, nos motiva a pensar en condiciones que obliguen a que todas las hojas de  $\tilde{M}$  tengan clausura compacta.

El siguiente lema ofrece tal condición:

**Lema 6.2.** *Sea  $M$  una variedad compacta (posiblemente con borde) equipada con una foliación  $\mathcal{F}$ . Supongamos que  $\mathcal{F}$  posee hojas compactas  $A_1, \dots, A_n$  tal que si  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  es el cubrimiento universal, entonces las componentes conexas de complemento de  $\bigcup_{i=1}^n p^{-1}(A_i)$  son compactas. En estas condiciones  $\mathcal{F}$  es una foliación uniforme.*

*Demostración.* Si tomamos una hoja cualquiera que no sea un levantado de  $A_i$ , esta queda contenida en cierta componente conexa del complemento de  $\bigcup_{i=1}^n p^{-1}(A_i)$  ya que el borde de tal región esta compuesto por hojas. Como estas regiones son compactas, la hoja tiene clausura compacta.  $\square$

Este lema es sencillo pero fructífero, en el capítulo siguiente lo usaremos para construir ejemplos de foliaciones uniformes con componentes de Reeb en 3-variedades con grupo fundamental infinito, dando así una respuesta positiva a la Pregunta 6.1.

Sin embargo, esta imagen no es general. Las hojas compactas mencionadas en el Lema 6.2 “acotan topología” en algún sentido. Por ejemplo si  $M = \mathbb{T}^3$  y una hoja compacta tiene levantados compactos en el cubrimiento universal  $\mathbb{R}^3$ , entonces haciendo argumentos con discos de compresión (como en 2.5) podemos simplificar el levantado hasta tener una esfera, que acota una bola por el Lema de Alexander.

Este argumento nos muestra que el Lema 6.2 no sirve para construir contraejemplos en  $\mathbb{T}^3$ , ya que el complemento de finitas esferas con volumen acotado y sus trasladados en  $\mathbb{R}^3$  debe tener una componente no acotada.

De hecho, esta idea nos lleva a lo siguiente:

**Lema 6.3.** *Sea  $M$  una 3-variedad cerrada e irreducible con grupo fundamental infinito, equipada con una foliación uniforme  $\mathcal{F}$  con componentes de Reeb orientada y transversalmente orientada. Entonces si  $L$  es una hoja compacta de  $\mathcal{F}$ , esta debe ser un toro acotando un toro solido en uno de sus lados.*

*Demostración.* Por el teorema de estabilidad de Reeb,  $L$  no puede ser una hoja esférica ni proyectiva. El Lema 6.1 nos dice que en estas condiciones la inclusión induce el morfismo nulo  $i_* : \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M)$ , ya que las 3-variedades irreducibles con grupo fundamental infinito no tienen torsión (véase [AFW13, Sección 3.2]).

El teorema del disco mencionado en la sección 2.3 nos dice que existen discos  $D_1, \dots, D_k$  donde podemos comprimir  $L$  hasta obtener una esfera. La operación de compresión preserva la clase de homología  $[L] \in H_2(M; \mathbb{Q})$  (observación 2.3), como luego de hacer compresión en los discos obtenemos esferas y  $M$  es irreducible, concluimos  $[L] = 0$ .

El párrafo anterior implica que la hoja  $L$  no puede admitir una transversal cerrada, si la admitiera el numero de intersección de la transversal con  $L$  seria no nulo, contradiciendo que  $[L] = 0$ . El teorema de Goodman implica que entonces  $L$  debe ser un toro. Por ultimo al comprimir este toro por un disco de compresión obtenemos una esfera que acota una bola, revirtiendo la operación de compresión obtenemos que  $L$  debe acotar un toro solido.  $\square$

Esta imagen es distinta a la del Lema 6.2 donde las hojas compactas nos sirven de “trabas” para controlar el avance de la foliación en  $\tilde{M}$ . Por lo tanto el caso irreducible parece tener una naturaleza distinta a las variedades donde vamos a construir nuestros contraejemplos. En el ultimo capítulo presentaremos un resultado que habla sobre el comportamiento de las foliaciones uniformes con componentes de Reeb en estos casos.

## Capítulo 7

### Foliaciones uniformes con componentes de Reeb:

En este capítulo daremos una respuesta afirmativa a la Pregunta 6.1, construyendo foliaciones uniformes con componentes de Reeb en sumas conexas de  $S^1 \times S^2$  y variedades con grupo fundamental finito. Sin embargo, veremos que estas variedades donde construimos los contraejemplos son “pequeñas” en el sentido que son las únicas tal que no admiten superficies inmersas esenciales<sup>1</sup> de género  $g \geq 1$ . En la sección siguiente, estudiaremos la Pregunta 6.1 en el resto de las variedades.

#### 7.1 La estrategia:

Construiremos los ejemplos usando dos ingredientes. El primero, es el Lema 6.2 que vimos en el capítulo anterior. El segundo ingrediente es un método para construir foliaciones en sumas conexas  $M \# N$  partiendo de foliaciones en  $M$  y  $N$ . El mismo contará con la ventaja que si las dos foliaciones de partida son uniformes, entonces la foliación obtenida también lo será.

La idea proviene de la siguiente observación:

*Observación 7.1.* Sean  $M_1, M_2$  un par de 3-variedades. Consideremos  $K_i$  nudo trivial en  $M_i^2$  ( $i = 1, 2$ ) y  $B_i$  una 3-bola que contiene a  $K_i$  (esta bola puede tomarse como siendo un entorno tubular del disco encajado que acota  $K_i$ ). Removiendo el interior de un entorno tubular de  $K_i$  contenido en  $B_i$ , obtenemos una 3-variedad con borde  $N_i$ . Identifiquemos a la componente de borde que proviene de  $K_i$  con  $S^1 \times S^1$  de forma que  $S^1 \times \{\cdot\}$  es un meridiano del (ahora removido) entorno tubular y  $\{\cdot\} \times S^1$  acota un disco.

Afirmamos que si comenzamos con  $N_1 \cup N_2$  e identificamos los bordes provenientes de remover  $K_i$  vía el mapa  $f : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$  definido como  $f(x, y) = (y, x)$ , entonces obtenemos una 3-variedad  $M$  homeomorfa a  $M_1 \# M_2$ . Para ver esto, notar que si comenzamos con las bolas  $B_i$ , removemos un entorno tubular de  $K_i$  y pegamos estos espacios mediante el mapa  $f$ , obtenemos  $S^3$  con un par de bolas removidas (recordar la descomposición de Heegard de  $S^3$ , ejemplo 2.1). Esto prueba lo deseado, ya que  $M \cong M_1 \# S^3 \# M_2$ .

**Lema 7.1.** Sean  $M_1, M_2$  un par de 3-variedades compactas equipadas con foliaciones  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ . Supongamos además que existe  $K_i$  un nudo en  $M_i$ , transverso a  $\mathcal{F}_i$  y contenido en una 3-bola  $B_i$ . Entonces existe una foliación  $\mathcal{F}$  en  $M_1 \# M_2$  satisfaciendo que:

- $\mathcal{F}$  coincide con  $\mathcal{F}_i$  en  $M_i \setminus B_i$  (visto dentro de  $M_1 \# M_2$ ).
- $\mathcal{F}$  admite un nudo trivial transverso.

Además, si  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  son uniformes, entonces  $\mathcal{F}$  es uniforme.

*Demostración.* Comencemos turbulizando la foliación  $\mathcal{F}_i$  alrededor de la transversal  $K_i$  (ejemplo 3.1). Este proceso puede realizarse sin modificar la foliación fuera de la bola  $B_i$ . Removiendo la

---

<sup>1</sup>Recordar la Definición 2.4.

<sup>2</sup>Esto significaba que era el borde de un disco encajado en  $M_i$ , recordar la sección 2.2

componente de Reeb generada por el proceso de turbulización, obtenemos una 3-variedad  $N_i$  equipada con una foliación tangencial a la componente de borde  $S_i \subset \partial N_i$  proveniente del borde de la componente. Identificando las componentes  $S_1$  y  $S_2$  mediante un mapa  $f$  como en la Observación 7.1 obtenemos una foliación  $\mathcal{F}$  que satisface el primer ítem del lema.

Observemos además que al identificar  $S_i$  obtenemos una hoja toro  $S$  en  $\mathcal{F}$  que esta contenida en una 3-subvariedad  $R$  homeomorfa a  $S^3$  sin dos bolas. Notar que dentro de  $R$  y cerca de  $S$  hay toros transversos a la foliación e isotópicos a  $S$  cuyas longitudes son nudos triviales producidos por la turbulización. Esto nos da el segundo ítem.

Resta ver que la construcción preserva la uniformidad. Observar que como  $\mathcal{F}_i$  admite transversales homotópicamente triviales, el teorema de Novikov nos dice que la foliación tiene componentes de Reeb. Por lo tanto,  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  caen en las hipótesis del Lema 6.1 en particular toda hoja de la foliación inducida en el cubrimiento universal  $\tilde{\mathcal{F}}_i$  tiene clausura compacta.

Sea  $N_i$  como arriba y consideremos el cubrimiento intermedio  $q_i : \hat{N}_i \rightarrow N_i$  definido como  $\tilde{M}_i$  con los toros sólidos acotados por levantados de  $S_i$  removidos, claramente  $\hat{N}_i \subset \tilde{M}_i$ . Viendo a  $N_i$  como subvariedad de  $M_1 \# M_2$  y denotando por  $p : \tilde{M} \rightarrow M_1 \# M_2$  al cubrimiento universal de la suma conexa, afirmamos que una componente conexa de  $p^{-1}(N_i)$  es homeomorfa a  $\hat{N}_i$ .

Para ver esto, notar que  $N_i$  es una suma conexa de  $M_i$  con  $S^3$  sin un entorno tubular del nudo trivial (la esfera donde sumamos es  $\partial B_i$ ). Van-Kampen nos dice que  $\pi_1(N_i) \cong \pi_1(M_i) * \langle m_i \rangle$ , donde  $m_i$  es el meridiano de  $S_i$ . Estudiando el morfismo inducido por la inclusión  $i : N_i \rightarrow M_1 \# M_2$  en el grupo fundamental, notamos que restringido a la inclusión de  $\pi_1(M_i)$  el mapa es inyectivo, pero restringido a  $\langle m_i \rangle$  el mapa es nulo, porque  $S_i$  se proyecta a  $S$  que es un toro dentro de  $R$  (homeomorfo a  $S^3$  sin dos bolas). Esto muestra que el núcleo del morfismo  $i_*$  coincide con el subgrupo asociado al cubrimiento intermedio  $\hat{N}_i$ , lo que prueba la afirmación.

Concluamos la prueba del lema: notar que toda hoja distinta a  $S$  está totalmente contenida en  $N_1$  o en  $N_2$ . En cualquier caso, el levantado de esta hoja no puede escaparse de una componente conexa de  $p^{-1}(N_i)$ , porque de otra forma deberían intersectar a un levantado de  $S$ . La foliación restringida a una componente conexa de  $p^{-1}(N_i)$  coincide con la foliación en  $\hat{N}_i \subset \tilde{M}_i$  donde toda hoja tiene clausura compacta. Por lo tanto el levantado de toda hoja tiene clausura compacta.  $\square$

En particular, notar que el segundo ítem del Lema 7.1 nos dice que  $\mathcal{F}$  cae nuevamente en las hipótesis del lema, por lo tanto podemos hacer sumas conexas sucesivas.

*Observación 7.2.* La construcción del Lema 7.1 preserva la regularidad de las foliaciones, ya que la turbulización es un proceso diferenciable, y puede hacerse  $C^\infty$ -trivial alrededor del borde de la componente de Reeb creada (ejemplo 3.2).

## 7.2 Las construcciones:

Comencemos esta sección con un ejemplo de foliación uniforme con componentes de Reeb en  $S^1 \times S^2$ . Antes que nada, veamos una caracterización de  $S^1 \times S^2$  que nos simplificara la construcción de la foliación.

**Lema 7.2.** *Sea  $T$  un toro sólido encajado en  $\mathbb{R}^3$  y  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una contracción enviando  $T$  en el interior de una bola  $B \subset \text{int } T$ . En estas condiciones, la 3-variedad que se obtiene al identificar los bordes de  $(T \setminus \text{int}(f(T))) / \sim$  vía  $f$  es  $S^1 \times S^2$ .*

*Demostración.* Primero notemos que  $\{f^n(T)\}_{n>0}$  es una sucesión de compactos encajados con diámetro tendiendo a cero, por lo tanto se intersectan en un punto  $p \in \mathbb{R}^3$ . En  $\mathbb{R}^3 \setminus \{p\}$ , el mapa  $f$  actúa propia y discontinuamente, una forma de ver esto es observar que un dominio fundamental de la acción es  $T \setminus \text{int}(f(T))$ . Esto también prueba que el cociente es compacto y tiene grupo fundamental  $\mathbb{Z}$ . Para ver que es homeomorfa a  $S^1 \times S^2$ , notar que si  $S = \partial B^3$ , entonces  $S$  y  $f(S)$  acotan un dominio fundamental cuyo interior es homeomorfo a  $S^2 \times (0, 1)$ .  $\square$

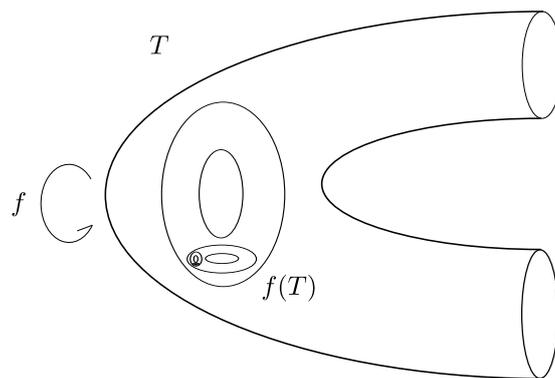


Figura 7.1: Un vistazo al cubrimiento universal de  $S^1 \times S^2$ .

En la figura 7.1 se pueden encontrar algunos dominios fundamentales respecto a la acción de  $f$  en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Podemos ser mucho más concretos con la elección de la contracción: sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación  $f(x) = \frac{x}{8}$  y  $T$  el entorno tubular de radio 1 de la circunferencia centrada en  $(2, 0, 0)$  de radio 2. Entonces  $f(T)$  está contenido en la bola  $B$  centrada en 0 y radio 1, de hecho  $f(T)$  es el entorno tubular de radio  $\frac{1}{8}$  de la circunferencia centrada en  $(\frac{1}{4}, 0, 0)$  y radio  $\frac{1}{4}$ . Notar que en este caso  $f(T)$  no está anudada en la bola  $B$ , de ahora en más vamos a suponer que  $f$  satisface esta condición.

Con esta identificación a mano, notar que para conseguir una foliación uniforme en  $S^1 \times S^2$  basta con foliar  $T \setminus \text{int}(f(T))$  de forma que los bordes sean hojas de la foliación. Esto es porque podemos trasladar esta foliación a todo  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  vía  $f$ , obteniendo una foliación equivariante respecto a la acción de  $f$  y satisfaciendo las condiciones del Lema 6.2. Veamos un ejemplo explícito de foliación en  $T \setminus \text{int}(f(T))$ :

**Construcción 7.1.** Fijemos un difeomorfismo entre  $T$  y  $S^1 \times D^2$ , donde  $D^2 \subset \mathbb{R}^2$  es el disco unitario. Sea  $A \subset D^2$  el anillo cerrado cuyos puntos distan del origen entre  $\frac{1}{2}$  y 1, vamos a equiparlo con una componente de Reeb (ejemplo 1.3) que podemos asumir es  $C^\infty$ -trivial en el borde. Consideremos ahora  $S^1 \times A \subset T$  foliado por el producto de las hojas del anillo por los factores  $S^1$ . En  $S^1 \times (D^2 \setminus A)$  insertemos una componente de Reeb, esta foliación junto con la de  $S^1 \times A$  se pueden pegar de forma  $C^\infty$  ya que ambas son  $C^\infty$ -trivial en el borde.

Notar que en la componente de Reeb de  $A$  tenemos  $\tau$  una transversal generando  $\pi_1(A)$ , que nos da una transversal  $\{\cdot\} \times \tau \subset T$  a la foliación construida en el párrafo anterior. Como  $f(T)$  es un toro sólido trivial en una bola de  $T$ , este es isotópico a un entorno tubular de la transversal  $\{\cdot\} \times \tau$ . Turbulizando alrededor de esta transversal y quitándole la componente de Reeb generada obtenemos una foliación  $\mathcal{F}$  en  $T \setminus \text{int}(f(T))$  como queríamos (véase la figura 7.2). Notar que esta es  $C^\infty$  y  $C^\infty$ -trivial alrededor de los bordes.

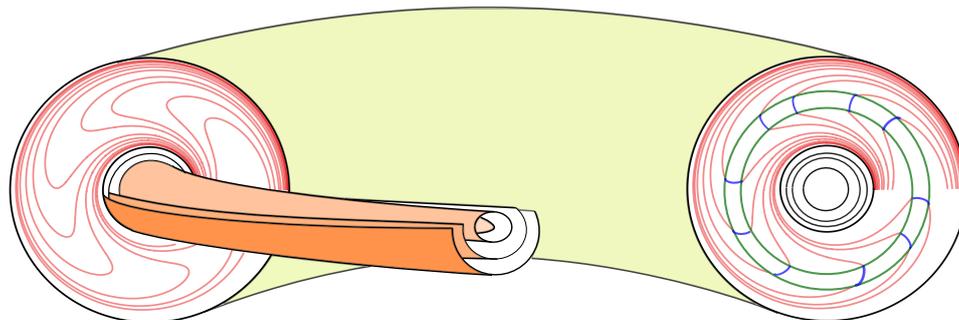


Figura 7.2: La foliación antes de turbulizar.

Concluimos:

**Corolario 7.1.** *Existe una foliación uniforme  $C^\infty$  con componentes de Reeb en  $S^1 \times S^2$ . Además, la misma admite un nudo trivial transverso a la foliación.*

*Demostración.* La construcción 7.1 y el Lema 7.2 nos dan la foliación deseada. Resta ver que admite un nudo trivial transverso, pero para esto simplemente tomar cualquier transversal a un anillo de Reeb  $\{\cdot\} \times A$ , estas acotan un disco en el toro  $T \setminus (\text{int}(f(T)))$  y por lo tanto en  $S^1 \times S^2$ .  $\square$

El Lema 7.1 y el Corolario 7.1 ya nos dan ejemplos de foliaciones uniformes con componentes de Reeb en  $\#_{i=1}^m S^1 \times S^2$  para cualquier  $m \in \mathbb{N}$ . Pero tenemos mas 3-variedades donde construir contraejemplos a nuestro alcance.

Notar que toda foliación en una 3-variedad compacta con grupo fundamental finito es uniforme, porque el cubrimiento universal también es compacto. Tomemos  $M$  una 3-variedad cerrada con grupo fundamental finito y equipémosla con la foliación construida en 3.3. El lector puede verificar que la misma posee nudos triviales transversales a la foliación.

El párrafo anterior, junto con el Lema 7.1 y el Corolario 7.1 nos permiten concluir:

**Teorema 7.1.** *Para todo  $m \in \mathbb{N}$  y cualquier elección  $M_1, \dots, M_l$  de 3-variedades cerradas con grupo fundamental finito, existe una foliación uniforme con componentes de Reeb (suave) en  $M = (\#_{i=1}^m S^1 \times S^2) \# (\#_{i=1}^l M_i)$ .*

### 7.3 La familia de 3-variedades del Teorema 7.1

El lector puede pensar (con razón) que la construcción que nos lleva a la prueba del Teorema 7.1 no es exhaustiva, en el sentido que no hay una razón a priori por la cual el teorema cubra la totalidad de ejemplos de variedades admitiendo foliaciones uniformes con componentes de Reeb.

Sin embargo, veremos que la familia de 3-variedades que caen en las hipótesis del Teorema 7.1 está caracterizada por una propiedad topológica, la misma refiere de alguna manera al “tamaño” de las mismas (son pequeñas). Esta condición cobra importancia en vistas del teorema principal del capítulo siguiente:

**Proposición 7.1.** *Una 3-variedad cerrada  $M$  admite una inmersión esencial  $i : \Sigma \rightarrow M$ , donde  $\Sigma$  es una superficie cerrada de genero  $g \geq 1$  sii algún factor de la descomposición prima de  $M$  es irreducible con grupo fundamental infinito.*

*Demostración.* Sea  $M = P_1 \# \dots \# P_k$  la descomposición prima de  $M$ . Si alguna componente  $P_i$  es irreducible con grupo fundamental infinito, entonces el teorema de Agol 2.4 nos dice que  $P_i$  tiene un cubrimiento finito Haken. Por lo tanto  $P_i$  admite una superficie (de genero  $\geq 1$ ) inmersa y esencial, para ver esto, simplemente proyectar la superficie encajada en el cubrimiento finito.

Para terminar con la equivalencia, basta ver que pasa cuando  $P_i$  es una componente irreducible con grupo fundamental finito o prima y no irreducible, es decir  $S^1 \times S^2$  (recordar la Proposición 2.3). Veamos que estas variedades no admiten inmersiones de superficies cerradas induciendo un morfismo inyectivo en el grupo fundamental. Para esto basta probar:

**Afirmación:** Si  $M$  no tiene componentes primos irreducible con grupo fundamental infinito, entonces  $\pi_1(M)$  no admite un subgrupo  $\Gamma$  isomorfo al grupo fundamental de una superficie cerrada.

*Prueba:* En las condiciones de la afirmación  $\pi_1(M) = F_k * G$ , donde  $F_k$  es el grupo libre de  $k$ -generadores y  $G$  es un producto libre de grupos finitos. El teorema del subgrupo de Kurosh implica entonces que  $\Gamma$  es isomorfo a un producto libre de grupos, cada uno de ellos isomorfo a  $\pi_1(S^1 \times S^2) \cong \mathbb{Z}$  o a un grupo finito (véase [Ser80, Sección 5.5]).

Este producto no puede tener mas de un factor, ya que los grupos fundamentales de superficies son libremente indescomponibles, es decir no pueden escribirse como productos libres de dos subgrupos. Esto es porque los grafos de Cayley de grupos de superficies tienen un solo final (ya que el cubrimiento universal de una superficie es el disco), por otro lado el teorema de finales de Stallings dice que si un grupo se descompone como producto libre, entonces tiene mas de un final (véase [Sta72]).

El párrafo anterior implica que  $\Gamma$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  o a un grupo finito, lo cual es absurdo.  $\square$

#### 7.4 El caso con borde: ejemplo en el toro solido

En esta sección vamos a usar el Lema 6.2 para construir una foliación uniforme con componentes de Reeb en el toro solido, mas específicamente:

**Teorema 7.2.** *Existe una foliación (suave) en el toro solido  $S^1 \times D^2$  uniforme con componentes de Reeb, restringiéndose a la foliación por meridianos  $\{\cdot\} \times S^1$  en el borde.*

A un toro solido equipado con esta foliación le llamaremos una *región trampa*. Quizás estas regiones pueden usarse como bloques para construir foliaciones uniformes en variedades no abarcadas por la construcción de la sección anterior, pero a la fecha esto no es claro.

*Observación 7.3.* La hipotesis en el borde es natural, ya que ciertamente el toro borde no puede ser una hoja de la foliación porque se levantaría a una hoja no compacta. Por otro lado si la foliación en el borde viene determinada por una suspensión (estos son todos los casos sin anillos de Reeb) la única posibilidad es la foliación por meridianos, sino habrían hojas no compactas.

La idea para construir la región trampa sera construir una foliación en el toro solido con componentes de Reeb *prefijadas*. Mas específicamente nos gustaría que las componentes de Reeb estén en entornos tubulares de curvas homotopicamente triviales en el toro solido, y por lo tanto se levantan a regiones compactas. Para hacer esto hay que entender el complemento de las curvas y foliarlo de forma que podamos insertar las componentes de Reeb (y la foliación quede uniforme).

##### 7.4.1 El toro y los anillos borromeos:

Los *anillos borromeos* son un enlace en  $S^3$  donde cada componente es un nudo trivial y tal que dos a dos estos nudos triviales están desenlazados pero el enlace entero no lo esta. Mas específicamente, si  $L_1$  y  $L_2$  son dos de las componentes de los anillos borromeos,  $\pi_1(S^3 \setminus (L_1 \cup L_2))$  es un grupo libre en dos generadores  $\langle a, b \rangle$  representados por los meridianos de un entorno tubular de  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente. Con estas elecciones  $L_3$  es una curva representando la clase del conmutador  $[a, b]$ , notar que al agregar nuevamente  $L_1$  o  $L_2$  a  $S^3$  entonces  $L_3$  se vuelve nulo.

Sea  $T_1$  un entorno tubular de  $L_1$ , si parametrizamos su complemento en  $S^3$  como otro toro solido, podemos ver a  $L_2$  y a  $L_3$  como en la figura 7.3. Lo que haremos es encontrar una caracterización para el complemento de los borromeos y así foliar el toro con componentes de Reeb en un entorno tubular de  $L_2$  y  $L_3$  respectivamente. Mas específicamente, vamos a probar:

**Teorema 7.3.** *Sea  $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \subset S^3$  los anillos borromeos, entonces haciendo cirugías de Dehn con coeficiente 0 en cada componente de  $L$  obtenemos a  $\mathbb{T}^3$ . De hecho si denotamos por  $T_i$  a entornos tubulares de  $L_i$  donde hacemos la cirugía, entonces estos se pegan en  $\mathbb{T}^3$  a  $T_x, T_y, T_z$  que son entornos tubulares de curvas  $c_x, c_y, c_z$  obtenidas proyectando trasladados disjuntos a los ejes  $x, y, z$  en  $\mathbb{R}^3$ , donde vemos a  $\mathbb{T}^3$  como un cociente de  $\mathbb{R}^3$  (véase la figura 7.4).*

Antes de ver la prueba, vale la pena hacer la siguiente observación:

*Observación 7.4.* Veamos al complemento de los borromeos en el toro solido como en la figura 7.3. El teorema 7.3 nos da un homeomorfismo  $h: \mathbb{T}^3 \setminus (T_x \cup T_y \cup T_z) \rightarrow S^3 \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_3)$  enviando los bordes de  $T_x, T_y, T_z$  en los bordes de  $T_1, T_2, T_3$  respectivamente, de tal forma que:

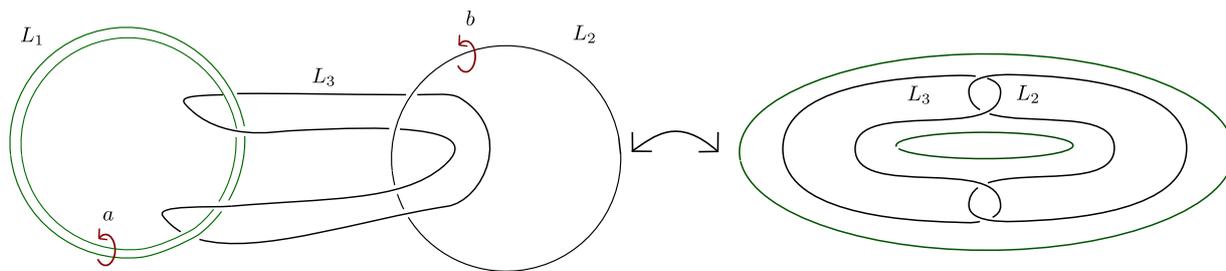


Figura 7.3: Distintos puntos del complemento de los borromeos.

- Meridianos de  $\partial T_x$  y  $\partial T_y$  van a paralelos de los toros sólidos dentro del toro solido grande.
- Meridianos de  $\partial T_z$  van en meridianos del toro solido grande, porque la inversión del toro cambia meridianos con paralelos.

*Demostración.* Hagamos cirugía de Dehn con coeficiente 0 en la curva  $c_z \subset \mathbb{T}^3$ , esto nos da una 3-variedad  $N$ . Sea  $T_z$  el entorno tubular de  $c_z$  donde hacemos cirugía.

**Afirmación:**  $N$  es homeomorfa a  $(S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2)$ .

*Demostración.* Notar que  $\mathbb{T}^3 \setminus T_z$  es el producto  $(\mathbb{T}^2 \setminus D^2) \times S^1$  para cierto disco  $D^2 \subset \mathbb{T}^2$ . Por otro lado fijando una identificación entre  $T_z$  y  $S^1 \times D^2$  (preservando orientación) tenemos que  $N = (\mathbb{T}^2 \setminus D^2) \times S^1 \cup_h S^1 \times D^2$  donde  $h$  identifica al borde de  $(\mathbb{T}^2 \setminus D^2) \times \{z\}$  con el paralelo  $S^1 \times \{\cdot\}$ , véase la figura 1.6.

Tomemos  $a_x$  y  $a_y$  dos segmentos en  $\mathbb{T}^2 \setminus D$  con extremos en  $\partial D$  cortando el eje  $x$  y el eje  $y$  respectivamente como en la figura 1.6. Notar que  $a_x \times S^1$  es un anillo cuyos bordes son meridianos de  $T_z$ , agregándole el disco que tapa los respectivos meridianos obtenemos  $S_x$  una esfera que no separa a  $N$ . De forma análoga obtenemos  $S_y$  para el arco  $a_y$ .

Por otro lado las curvas  $c_x$  y  $c_y$  que se pueden ver dentro de cierto  $\mathbb{T}^2 \setminus D^2 \times \{z\}$  (para distintos  $z \in S^1$ ) intersectan una sola vez a las esferas  $S_x$  y  $S_y$  respectivamente. Tomando  $N_x$  un entorno tubular de  $S_x \cup c_x$  y  $N_y$  de  $S_y \cup c_y$ , es sencillo ver que  $N_x$  y  $N_y$  son  $S^1 \times S^2$  sin una bola, por lo tanto tenemos que  $N = S^1 \times S^2 \# S^1 \times S^2 \# K$  para  $K$  el complemento de  $N_x \cup N_y$ , pero es sencillo ver que este es simplemente conexo y tiene dos esferas de borde, por lo tanto debe ser  $S^3$  sin dos bolas y tenemos lo deseado.  $\square$

De la prueba anterior observar que  $c_x$  y  $c_y$  son generadores de cada uno de los  $S^1 \times S^2$  de la descomposición prima, por lo tanto haciendo 0-cirugía alrededor de ellos obtenemos  $S^3$  y de

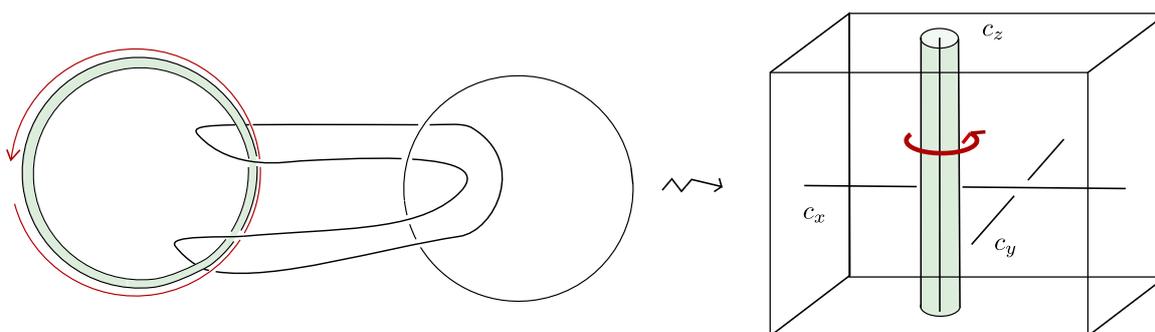


Figura 7.4: Bosquejo del Teorema 7.3.

hecho su complemento es homeomorfo al complemento del enlace trivial de dos componentes. En particular existe un homeomorfismo  $h : (S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2) \setminus (T_x \cup T_y) \rightarrow S^3 \setminus (T_1 \cup T_2)$  con  $T_1, T_2$  entornos tubulares del enlace trivial con dos componentes.

Solo nos falta entender a donde va la curva  $c_z$ . Para esto notar que  $c_z$  es homotopica a un paralelo del borde de  $T_z$  que esta identificada con  $\partial D$  en cierta fibra  $\mathbb{T}^2 \setminus D^2$ . Pero  $\partial D \times \{z\}$  representa a la clase  $[c_x][c_y][c_x]^{-1}[c_y]^{-1}$ . Entonces  $h(c_z) \subset S^3 \setminus T_1 \cup T_2$  es una curva que representa  $aba^{-1}b^{-1}$  donde  $a$  y  $b$  generadores de  $\pi_1(S^3 \setminus (T_1 \cup T_2))$  representados por meridianos de  $T_1$  y  $T_2$ , porque  $h$  intercambia paralelos y meridianos.

Del párrafo anterior tenemos que  $T_1, T_2$  y  $T_3 := h(T_z)$  son entornos tubulares de los borromeanos. Haciendo 0-cirugía en estos toros revertimos todo el proceso que discutimos anteriormente y tenemos lo deseado.  $\square$

*Observación 7.5.* Aquellos familiarizados con las descomposiciones en libro abierto pueden hacer una prueba mas corta: la 3-variedad  $N$  admite una *descomposición de libro abierto* cuya pagina es un toro pinchado y la monodromía es trivial. Hay una única 3-variedad con estas propiedades que es la suma conexa de  $S^1 \times S^2$ . Una introducción a las descomposiciones de libro abierto puede verse en [Etn].

**7.4.2 La construcción:**

Por lo visto anteriormente, para construir una foliación en el toro solido cuyas componentes de Reeb están en prefijadas como en la figura 7.3 basta con construir una en  $\mathbb{T}^3 \setminus (T_x \cup T_y \cup T_z)$  transversal al borde, la traducción sobre como es esta foliación en el toro y en el toro solido viene dada por la observación 7.4.

Consideremos la foliación de la figura 7.4.2, la misma es la foliación trivial con hojas  $\{\cdot\} \times \mathbb{T}^2$  salvo en dos regiones delimitadas por las hojas amarillas. Estas regiones están equipadas con la foliación producto de una foliación en el anillo tangente a los bordes por  $S^1$ , donde todas las hojas del interior del anillo limitan en los bordes. Claramente esta foliación puede tomarse suave y  $C^\infty$ -trivial en el borde. Las curvas  $c_x, c_y$  y  $c_z$  son transversales a la misma, por lo tanto si  $T_x, T_y$  y  $T_z$  son sus entornos tubulares, la foliación restringida a cada  $T_x, T_y, T_z$  es la trivial por meridianos. Mandando por el homeomorfismo  $h : \mathbb{T}^3 \setminus (T_x \cup T_y \cup T_z) \rightarrow S^1 \times D^2 \setminus (T_2 \cup T_3)$  obtenemos una foliación tal que en el borde del toro solido grande es la foliación inducida por los meridianos y que en  $\partial T_2, \partial T_3$  es la foliación por paralelos (recordar la observación 7.4). Espiraleando alrededor de  $T_2$  y  $T_3$  conseguimos una foliación en el toro solido.

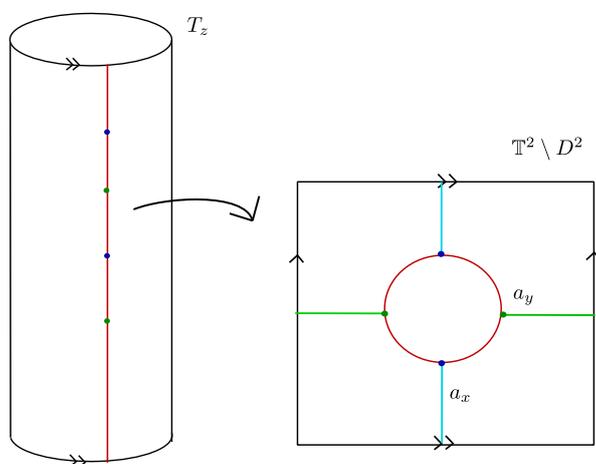


Figura 7.5: Prueba de la afirmación.

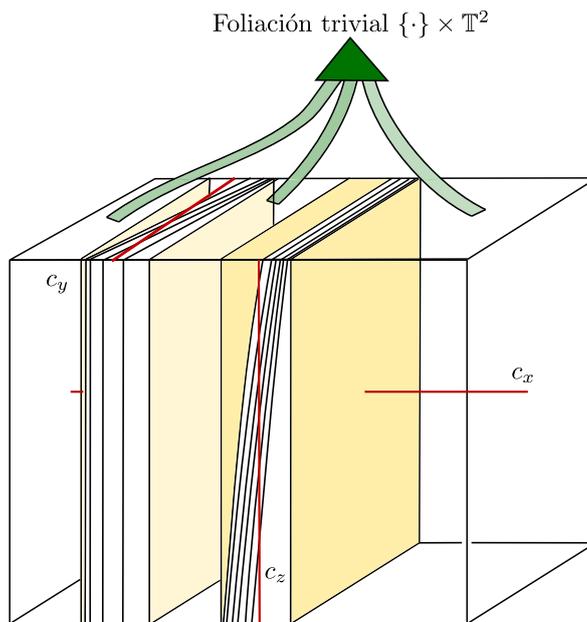


Figura 7.6: Una foliación transversal a  $c_x, c_y$  y  $c_z$ .

Afirmamos que la misma es uniforme, lo que concluye la construcción de las regiones trampa. Para ver esto tomemos  $L$  una hoja de la foliación que proviene de una hoja compacta  $\{\cdot\} \times \mathbb{T}^2$  en  $\mathbb{T}^3$ . La misma corta solamente al entorno tubular  $T_x$  en un meridiano, por lo tanto se manda en una hoja compacta de la foliación en el toro sólido con borde en un meridiano del mismo (ver la imagen 7.4.2). Lo importante es que esta hoja *no separa al toro sólido* ya que no separa  $\mathbb{T}^3 \setminus (T_x \cup T_y \cup T_z)$ . Por esta última propiedad, la región contenida entre dos levantados de  $L$  al cubrimiento universal  $\mathbb{R} \times D$  es compacta, y por lo tanto la uniformidad de la foliación queda garantizada por el teorema 6.2.

Una forma de ver lo anterior es considerar la 3-variedad  $M|L$  obtenida al cortar por  $L$ . Como  $L$  no separa  $M|L$  es conexa y tiene dos componentes de borde  $L^+$  y  $L^-$ . Consideremos  $\tilde{M} := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (M|L) \times \{n\} / \sim$ , donde identificamos  $(L_+, n)$  y  $(L_-, n+1)$  vía la identidad  $\forall n \in \mathbb{Z}$ . Este espacio es simplemente conexo y tiene una proyección natural a  $S^1 \times D^2$  que lo vuelve un espacio de cubrimiento, por lo tanto tiene que ser  $\mathbb{R} \times D^2$ . Con esta perspectiva del cubrimiento universal es sencillo verificar que entre dos levantados de  $L$  (que se corresponden a las clases de  $L_+ \times \{n\}$  y  $L_+ \times \{n+1\}$ ) hay una región compacta (de hecho acotan un dominio fundamental).

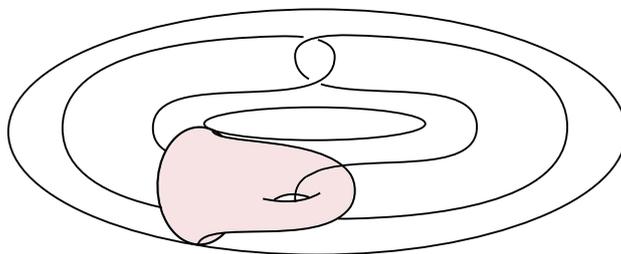


Figura 7.7: La hoja compacta cuyos levantados en el cubrimiento universal separan regiones compactas.

## Capítulo 8

### El resto de las variedades:

En el capítulo anterior presentamos ejemplos de foliaciones uniformes con componentes de Reeb en 3-variedades con grupo fundamental infinito. Sin embargo vimos que estas variedades eran “pequeñas”, en el sentido que no admiten superficies cerradas de género  $g \geq 1$  inmersas esencialmente. En este capítulo daremos resultados parciales acerca del comportamiento de una foliación con componentes de Reeb en el resto de las variedades.

#### 8.1 Resultado y estrategia:

Este capítulo está dedicado a probar el siguiente teorema que habla sobre el comportamiento de una foliación uniforme con componentes de Reeb:

**Teorema 8.1.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación uniforme con componentes de Reeb en una 3-variedad compacta  $M$  admitiendo una inmersión esencial  $i : \Sigma \rightarrow M$ , donde  $\Sigma$  es una superficie cerrada de género  $g \geq 1$ . Entonces  $i(\Sigma)$  intersecta al conjunto de las componentes de Reeb.*

Este enunciado puede parecer extraño, pero surge de la siguiente idea: si tenemos una superficie  $\Sigma$  inmersa de forma esencial en  $M$ , entonces esta se levanta a un plano inmerso en  $\tilde{M}$ . Una técnica estándar que presentaremos en la sección siguiente nos permite arreglar a la inmersión de forma que  $\Sigma$  sea transversa a la foliación salvo en finitos puntos. Esto nos induce lo que se llama *una foliación singular*, es decir una foliación fuera de finitos puntos. Las hojas de la foliación singular son las intersecciones de las hojas de  $\mathcal{F}$  con  $\Sigma$ .

Si levantamos esta foliación singular al cubrimiento universal, sus hojas son las intersecciones del plano con la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  en  $\tilde{M}$ . Estas intersecciones no pueden ser cualquier cosa ya que el Lema 6.1 nos asegura que las hojas de esta foliación singular *deben tener clausura compacta*. Este tipo de foliaciones son en general bien entendidas gracias al teorema de Poincaré-Bendixon (véase Teorema 8.3).

Lamentablemente este método no ataca la Pregunta 6.1 en su generalidad máxima. Sin embargo, si asumimos que  $\Sigma$  esquiva las componentes de Reeb, veremos que la foliación inducida en el cubrimiento universal no puede existir, generando un absurdo.

#### 8.2 Superficies en posición general:

Como comentamos anteriormente, queremos comenzar con una inmersión y arreglarla de forma que sea lo más transversal posible a la foliación mediante una perturbación pequeña. Mas específicamente vamos a pedir lo siguiente:

**Definición 8.1.** Sea  $\Sigma$  una superficie cerrada e  $i : \Sigma \rightarrow M$  una inmersión en una 3-variedad  $M$  equipada con una foliación  $\mathcal{F}$ . Diremos que la inmersión  $i$  (o  $\Sigma$ ) está en *posición general respecto a  $\mathcal{F}$*  si:

1. Fuera de finitos puntos  $\{p_1, \dots, p_l\} \subset \Sigma$ , la inmersión  $i$  es transversa a las hojas de la foliación.

2. Los puntos  $i(p_1), \dots, i(p_l)$  pertenecen a hojas distintas.
3. Existe una carta foliada  $\phi_k : V_k \rightarrow B^2 \times (0, 1)$  alrededor de cada  $i(p_k)$  de forma que si  $\pi : B^2 \times (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  es la proyección en la segunda coordenada, entonces existe  $U_k$  entorno de  $p_k$  tal que  $(\pi \circ \phi) \circ i|_{U_k}$  es topológicamente equivalente a  $f_c$  o  $f_s$ , donde  $f_c(x, y) = x^2 + y^2$  y  $f_s(x, y) = x^2 - y^2$ . Esto significa que existe un homeomorfismo  $h : U_k \rightarrow B^2$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 U_k & \xrightarrow{(\pi \circ \phi) \circ i} & \mathbb{R} \\
 \downarrow h & \nearrow f_\sigma & \\
 B^2 & & 
 \end{array}$$

donde  $\sigma = c, s$ .

Geoméricamente esto significa que a menos de homeomorfismo, la superficie se ve como en la Figura 8.1 alrededor de las tangencias.

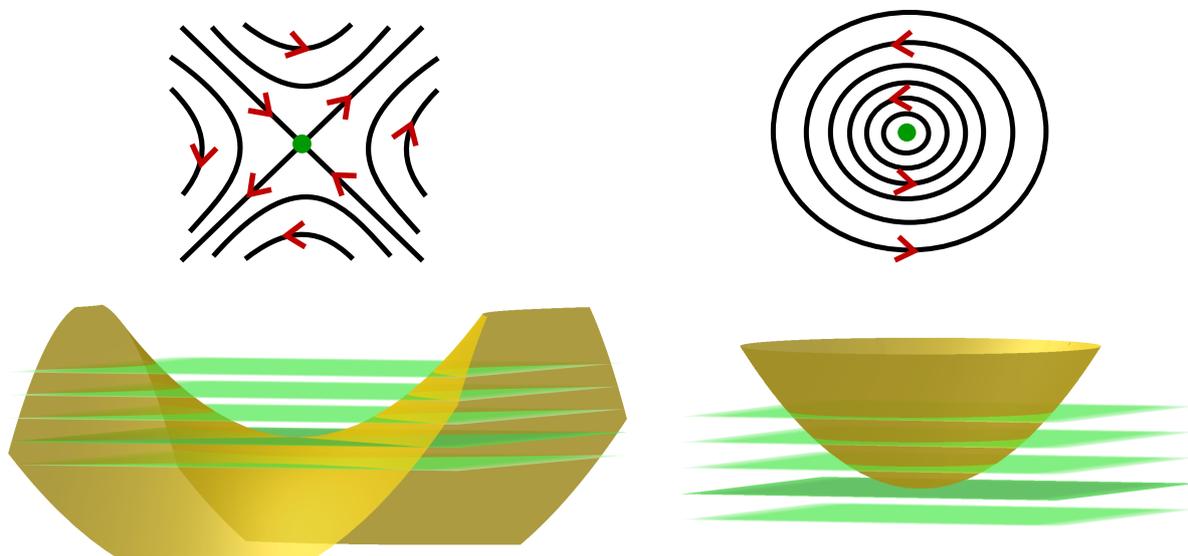


Figura 8.1: Abajo: Las tangencias de una superficie en posición general (en amarillo) respecto a una foliación (hojas en verde). Arriba: la foliación singular alrededor de una tangencia silla (izquierda) y centro (derecha).

La primera condición nos dice que  $\mathcal{F}$  induce en  $\Sigma$  lo que se llama una *foliación singular*. Esto es una foliación fuera de  $\{p_1, \dots, p_l\}$  cuyas hojas son la intersección de hojas de  $\mathcal{F}$  con  $i(\Sigma)$ . A  $\{p_1, \dots, p_l\}$  les llamaremos *singularidades*. Si además  $\mathcal{F}$  es orientada y coorientada, entonces hay una orientación canónica en la foliación singular inducida en  $\Sigma$ . Por orientación nos referimos a que fuera de las singularidades la foliación es orientada.

La última condición nos dice que alrededor de cada singularidad tenemos un entorno modelo dado por  $f_c$  o  $f_s$  donde la foliación es homeomorfa a uno de los modelos de la Figura 8.1. Si un entorno de una singularidad se modela en  $f_c$  o en  $f_s$  diremos que la singularidad es de tipo *centro* o *silla* respectivamente. Diremos que una foliación singular es de tipo *Morse* si toda singularidad tiene un entorno modelo como los descritos anteriormente.

La segunda condición es esencialmente técnica y se introduce para simplificar algunas pruebas. Esta implica que no existen hojas de la foliación singular inducida en  $\Sigma$  que limiten en dos singularidades sillas distintas.

Como adelantamos anteriormente, estar en posición general respecto a la foliación es una configuración genérica:

**Teorema 8.2.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación orientada y coorientada de clase  $C^{\infty,0+}$  en una 3-variedad compacta  $M$ . Entonces una inmersión  $i : \Sigma \rightarrow M$  de una superficie cerrada está  $C^0$ -cercana a una inmersión en posición general.*

Clásicamente este resultado es atribuido a Haefliger quien hizo el argumento para foliaciones  $C^2$ . Un bosquejo de la prueba sería el siguiente: cubramos  $M$  con una cantidad finitas de entornos foliados, y en cada entorno foliado  $U$  aproximar a los mapas  $(\pi \circ \phi) \circ i : i^{-1}(U) \rightarrow (0, 1)$  por funciones de Morse “chichoneando” para que esto quede globalmente definido. Con estas elecciones, las tangencias son aisladas y se portan como en la Figura 8.1. Los detalles de esta prueba pueden encontrarse en [CC00, Teorema 7.1.10, vol. 1]. Solodov generaliza este teorema para foliaciones  $C^0$  arreglando la superficie  $S$  en una triangulación de  $M$  (véase [Sol84]). La prueba es un poco técnica y referimos al lector a la monografía de S. Martinchich [Mar, Lema 4.3.1] para una buena exposición de este resultado.

### 8.3 Foliaciones Singulares en Superficies

En esta sección vamos a establecer algunas notaciones sobre foliaciones singulares en superficies que usaremos en la prueba del Teorema 8.1. Siempre vamos a suponer que  $\mathcal{G}$  es una foliación singular orientada tipo Morse en una superficie  $\Sigma$ .

Supongamos que  $p \in \Sigma$  es un punto no singular de  $\mathcal{G}$  y denotemos por  $L_p$  a la hoja que pasa por  $p$ . Esta hoja puede ser homeomorfa a un círculo o a una recta. En el segundo caso,  $L \setminus \{p\}$  está compuesto por dos componentes: una compuesta por los puntos mayores que  $p$  (según la orientación de  $\mathcal{G}$ ) y otra por los menores a  $p$ . Denotaremos a estas componentes como  $L_p^+$  y  $L_p^-$  respectivamente.

**Definición 8.2.** Sea  $L$  una hoja no compacta de  $\mathcal{G}$ :

- Diremos que  $\omega(L) = \bigcap_{p \in L} \overline{L_p^+}$  es el  $\omega$ -límite de la hoja  $L$ . Análogamente definimos el  $\alpha$ -límite como  $\alpha(L) = \bigcap_{p \in L} \overline{L_p^-}$ .
- Diremos que  $L$  es una *separatriz* si su  $\alpha$  y/u  $\omega$ -límite es una singularidad.

Si  $L$  tiene clausura compacta, entonces los  $\alpha$  y  $\omega$ -límites son compactos no nulos formados por uniones de hojas y singularidades.

Sea  $C$  un compacto formado por una unión de separatrices y singularidades tal que el  $\alpha$  y  $\omega$ -límite de toda separatriz es una singularidad. Podemos ver a estos conjuntos como un grafo dirigido cuyos vértices son las singularidades y las aristas dirigidas son las separatrices con la orientación. Si existe un camino cerrado en este grafo tal que recorre todas las aristas una vez sola (respetando orientación) diremos que  $C$  es un *grafo cerrado*. Estos conjuntos presentan comportamientos similares a las órbitas cerradas.

Uno desearía que los límites de toda hoja sean hojas cerradas o grafos cerrados, sin embargo podemos limitar también en hojas excepcionales. Sin embargo este tipo de comportamiento no puede suceder en el plano:

**Teorema 8.3** (Poincaré-Bendixon). *Sea  $\mathcal{G}$  una foliación singular orientada tipo Morse en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $L$  una hoja con clausura compacta, entonces los  $\alpha$  y  $\omega$ -límites pueden ser una singularidad tipo silla, una hoja cerrada o un grafo cerrado.*

Puede encontrarse una prueba en [PDM12].

### 8.4 Prueba del Teorema 8.1

Probemos el Teorema 8.1 por absurdo. Supongamos que existe  $i : \Sigma \rightarrow M$  una inmersión esencial tal que su imagen no corta al conjunto de componentes de Reeb de  $\mathcal{F}$ . Esta propiedad es invariante por pasar a cubrimiento finito, así que supongamos que  $\mathcal{F}$  es orientada y coorientada. Gracias al Teorema 8.2 también podemos asumir que  $i$  está en posición general respecto a  $\mathcal{F}$ , ya que como  $i$  estaba a distancia positiva de las Reeb, perturbando suficientemente poco esto no cambia. Denotemos a la foliación singular inducida en  $\Sigma$  por  $\mathcal{G}$ .

Denotemos por  $q : \mathbb{R}^2 \cong \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  al cubrimiento universal de  $\Sigma$  y por  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  al de  $M$ . Levantando la inmersión obtenemos un mapa  $\tilde{i} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{M}$ . Como la inmersión es esencial,  $\tilde{i}$  es equivariante respecto a las acciones de  $\pi_1(\Sigma)$  en  $\mathbb{R}^2$  y  $\tilde{M}$ . Por esto nos referimos a que para todo  $\gamma \in \pi_1(\Sigma)$  tenemos  $\tilde{i} \circ \gamma = i_*(\gamma) \circ \tilde{i}$ . El plano inmerso  $\tilde{i}(\mathbb{R}^2)$  también está en posición general respecto a  $\tilde{\mathcal{F}}$ . De hecho la foliación inducida en  $\mathbb{R}^2$  es la misma que el levantado de  $\mathcal{G}$  a  $\mathbb{R}^2$ , vamos a denotar esta foliación por  $\tilde{\mathcal{G}}$ .

**Importante:** Toda hoja de  $\tilde{\mathcal{G}}$  tiene clausura compacta, porque toda hoja de  $\tilde{\mathcal{F}}$  tiene clausura compacta.

Esta propiedad nos dice que podemos usar Poincaré-Bendixon en todas las hojas de  $\tilde{\mathcal{G}}$ . Por otro lado, veremos en la observación siguiente que también nos describe todas las posibilidades para los gráficos cerrados. Por lo tanto tenemos un buen entendimiento de los límites de las hojas de  $\tilde{\mathcal{G}}$ .

*Observación 8.1.* Sea  $S$  una separatriz de  $\tilde{\mathcal{G}}$  tal que el  $\alpha$  y  $\omega$ -límite es una singularidad. Afirmamos que entonces  $\alpha(S) = \omega(S)$ . Veamos esto: sean  $\{x\}$  e  $\{y\}$  el  $\alpha$  y  $\omega$ -límite respectivamente. Proyectando a  $\Sigma$  observamos que  $q(x) = q(y)$ , ya que por el segundo punto de la definición de inmersión en posición general, una separatriz no puede unir dos singularidades distintas. Por lo tanto  $y = \gamma x$  para cierto  $\gamma \in \pi_1(\Sigma)$ . Si  $\gamma$  no fuera la identidad, entonces  $C := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n(S \cup \{x\})$  sería una recta propiamente encajada en  $\mathbb{R}^2$ . Su imagen  $\tilde{i}(C)$  es no compacta en  $\tilde{M}$  por la  $\pi_1(\Sigma)$  equivarianza, por otro lado esta debe estar contenida en una hoja lo que contradice el Lema 6.1.

Notar que si  $S$  es una separatriz de  $\tilde{\mathcal{G}}$ , la Observación 8.1 nos dice que el  $\alpha$  y  $\omega$ -límite coinciden y por lo tanto  $S \cup \omega(S)$  es una curva simple y cerrada. Usando el teorema de Jordan, concluimos que acota un disco en  $\mathbb{R}^2$ .

Diremos que una *hoja cerrada generalizada* será una hoja cerrada o un grafo cerrado que es maximal respecto a la inclusión (es decir, no está propiamente contenido en otro grafo cerrado). El párrafo anterior nos dice que solo hay dos posibilidades para las hojas cerradas generalizadas con singularidades en  $\tilde{\mathcal{G}}$  que ilustramos en la Figura 8.2. Por la Observación 8.1, solo puede haber una singularidad en tal grafo. Por otro lado ambas separatrices acotan discos que o bien son disjuntos, o bien uno está encajado dentro de otro.

*Observación 8.2.* Si tenemos  $C$  una hoja cerrada generalizada con singularidades, entonces en cada componente conexa del complemento tenemos bien definida la noción de holonomía. Mas precisamente, tomemos  $\tau$  una transversal local de un punto no singular  $x \in C$  semi-abierta y contenida en la componente conexa deseada. Definamos un mapa  $f : \tau \rightarrow \tau$  que a cada  $y \in \tau$  lo manda al próximo punto de intersección de la hoja de  $y$  con  $\tau$  (respecto a la orientación de  $\tilde{\mathcal{G}}$ ).

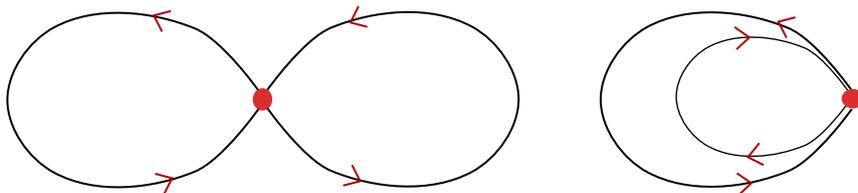


Figura 8.2: Las dos configuraciones posibles para una hoja cerrada generalizada con singularidades.

Usando que tenemos entornos modelos de las singularidades y repitiendo el argumento usado para construir el transporte de holonomía (véase 1.1) verificamos que esto está bien definido a menos de restringirnos a una transversal más pequeña. Si un punto es fijo para la holonomía, entonces la hoja que pasa por ese punto es compacta.

Si alguna hoja cerrada generalizada tuviera holonomía (en cualquiera de sus lados), entonces podríamos encontrar ciclos evanescentes pasando por  $i(\Sigma)$ , contradiciendo que este conjunto no interseca las componentes de Reeb. Esta idea nos da lo siguiente:

**Lema 8.1.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación uniforme con componentes de Reeb, orientada y coorientada en una 3-variedad compacta  $M$ . Si  $i : \Sigma \rightarrow M$  es una inmersión esencial de una superficie cerrada  $\Sigma$  de género  $g \geq 1$  en posición general respecto a  $\mathcal{F}$  tal que su imagen no corta las componentes de Reeb, entonces las hojas de la foliación inducida  $\mathcal{G}$  en  $\Sigma$  son compactas o separatrices cuyo  $\alpha$  y  $\omega$ -límite coincide.*

*Demostración.* Basta probar que todas las hojas de  $\tilde{\mathcal{G}}$  son hojas cerradas generalizadas. Si esto no fuera así, el Teorema de Poincaré-Bendixon nos dice que existiría una hoja cerrada generalizada con holonomía en alguno de sus lados. Sea  $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$  el disco que acota la hoja en el lado que tiene holonomía, entonces el mismo debe proyectarse homeomorfo vía  $q|_{\tilde{D}} : \tilde{D} \rightarrow \Sigma$ , ya que su borde se proyecta homeomorfo.

Sea  $D = q(\tilde{D})$ , entonces  $i|_D : D \rightarrow M$  es una inmersión de un disco tal que  $i(\partial D) = \sigma$  está contenida en una hoja  $L$  de  $\mathcal{F}$ . Afirmamos que  $\sigma$  no es homotópicamente trivial en  $L$ , ya que si lo fuera, el transporte de holonomía alrededor de  $\sigma$  sería trivial lo que contradice que  $\partial \tilde{D}$  tiene holonomía.

Un argumento como los hechos en la sección 3.3 implica la existencia de un ciclo evanescente en  $D$  (ver [CC00, Lema 9.2.2 y 9.2.4, vol. 2]).

Por lo tanto, el teorema de Novikov (Proposición 3.4) implica la existencia de una componente de Reeb pasando por  $i(D)$ , contradiciendo que  $i(\Sigma)$  no interseca al conjunto de componentes de Reeb de  $\mathcal{F}$ .  $\square$

Por otro lado, no es difícil ver que bajo estas condiciones debe existir una hoja cerrada generalizada de  $\mathcal{G}$  con levantado no compacto a  $\mathbb{R}^2$ :

**Proposición 8.1.** *Sea  $\Sigma$  una superficie Riemanniana cerrada de género  $g \geq 1$  equipada con una foliación singular orientada  $\mathcal{G}$  tipo Morse. Supongamos también que las hojas son compactas, o separatrices con el mismo  $\alpha$  y  $\omega$ -límite. Entonces alguna hoja de la foliación singular  $\tilde{\mathcal{G}}$  inducida en  $\mathbb{R}^2 \cong \tilde{\Sigma}$  debe ser no acotada.*

*Demostración.* Supongamos por contradicción que toda hoja de  $\tilde{\mathcal{G}}$  está acotada, en estas condiciones toda hoja debe pertenecer a una hoja cerrada generalizada. Denotemos como  $\mathcal{C}$  al conjunto de todas las hojas cerradas generalizadas de  $\tilde{\mathcal{G}}$  y definamos la función  $A : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  que a cada  $C \in \mathcal{C}$  le asigna el área de la componente conexa acotada de  $C^c$ . Estas componentes acotadas están compuestas por uno o dos discos (posiblemente encajados) que se proyectan homeomorfos a  $\Sigma$ . En particular, estos discos no pueden tener área mayor al área de  $\Sigma$ . Esto muestra que la función  $A$  está acotada superiormente.

Afirmamos que podemos alcanzar  $\sup_{C \in \mathcal{C}} A(C)$ . Sean  $x_n \in \mathbb{R}^2$  tal que  $x_n$  pertenece a  $C_n \in \mathcal{C}$  con  $A(C_n) \rightarrow \sup_{C \in \mathcal{C}} A(C)$  una sucesión creciente. Como  $\Sigma$  es compacto y  $\pi_1(\Sigma)$  actúa en  $\mathbb{R}^2$  por isometrías, a menos de trasladar por elementos de  $\pi_1(\Sigma)$  podemos asumir  $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}^2$ .

Sea  $C$  la hoja cerrada generalizada pasando por  $x$ ; afirmamos que  $A(C)$  alcanza el supremo. Esto es porque si  $n < m$  entonces  $A(C_n) < A(C_m)$  y por lo tanto  $C_n$  está contenido en la componente acotada del complemento de  $C_m$ . Esto implica que para  $n$  suficientemente grande,  $C_n$  está contenido en la componente acotada del complemento de  $C$ .

Para concluir el teorema, notar que la holonomía de  $C$  en la componente no acotada debe ser trivial (de otra forma, habría hojas no compactas que no son separatrices), por lo tanto existe una hoja cerrada acotando a  $C$ , contradiciendo la maximalidad de  $A(C)$ .  $\square$

Esta proposición termina con la prueba del Teorema 8.1, ya que por el Lema 8.1, la foliación inducida en la superficie  $\Sigma$  satisface las condiciones de esta ultima proposición, pero esto contradice el Lema 6.1

*Observación 8.3.* Si permitimos que  $\Sigma$  corte las componentes de Reeb, entonces los grafos cerrados siguen siendo los mismos (hojas cerradas y separatrices con sus singularidades), pero las separatrices puede partir de una singularidad y acumular en un grafo u órbita periódica. Podemos hacer foliaciones singulares en superficies, cuyas singularidades son centros y sillas y tal que el levantado de toda hoja tenga clausura compacta. A modo de ejemplo, si turbulizamos alrededor de los pozos de la figura 8.4 obtenemos una de estas foliaciones en el toro. Esto parece indicar que para responder la pregunta ?? necesitamos un argumento extra al de superficies.

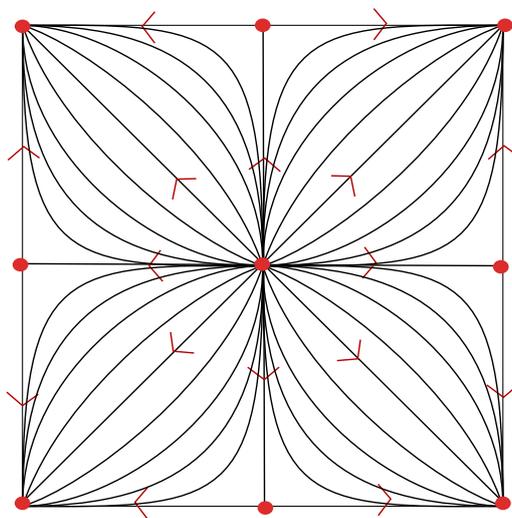


Figura 8.3: Luego de turbulizar en los pozos, obtenemos una foliación uniforme con centros y sillas en el toro.

### 8.5 Preguntas a explorar:

Gracias al Teorema 8.1, toda superficie inmersa esencialmente en nuestra 3-variedad corta a las componentes de Reeb. Para tener una imagen en la cabeza si estamos en  $\mathbb{T}^3$  las componentes de Reeb deben enlazarse como en la figura 8.4.

**Pregunta 8.1.** ¿Puede la figura 8.4 extenderse a una foliacion uniforme?

Discutamos solamente el caso del toro  $\mathbb{T}^3$ . Aquí todavía hay esperanzas de usar un argumento como antes ya que es un fibrado por superficies  $\mathbb{T}^2 \times \{\cdot\}$ . Si pudiéramos poner todo el fibrado en alguna clase de “posición general” respecto a la foliación, entonces podríamos estudiar como evolucionan las foliaciones singulares inducidas en cada fibra. A la fecha no queda claro que esto conduzca a algo.

Otro encare algo distinto al anterior proviene de observar con atención los ejemplos construidos en el capitulo anterior. Estos satisfacían una propiedad mas fuerte que ser uniforme:

**Definición 8.3.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación uniforme en una variedad Riemanniana compacta  $M$ . Diremos que  $\mathcal{F}$  es *uniformemente uniforme* si toda hoja de  $\tilde{M}$  tiene diámetro uniformemente acotado.

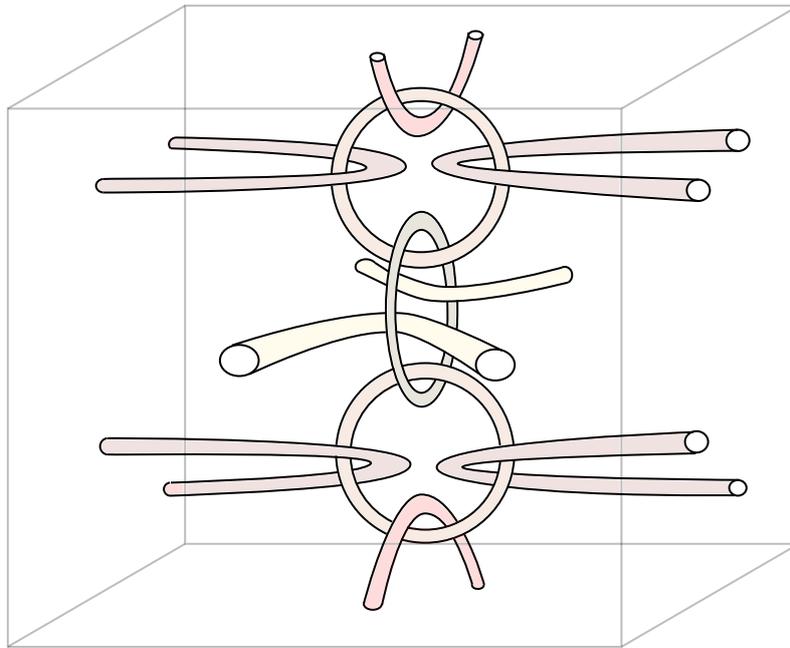


Figura 8.4: El enemigo de la película.

Todas las foliaciones uniformes construidas usando el Lema 6.2 satisfacen esta propiedad.

**Pregunta 8.2.** *¿Toda foliación uniforme con componentes de Reeb en una 3-variedad compacta  $M$  es uniformemente uniforme?*

En este caso la caricatura que obtenemos es similar a lo que comentamos antes. Parecería que existe  $U \subset \tilde{M}$  un “dominio fundamental” foliado y compacto. Si existiese tal dominio, ¿es el borde del mismo una hoja compacta? ya que la proyección de estas hojas deben “separar”  $M$  en algún sentido, pero por otro lado tiene clausura compacta en  $\tilde{M}$ .

**Pregunta 8.3.** *Si  $\mathcal{F}$  es una foliación uniformemente uniforme en una 3-variedad compacta  $M$ , ¿existe un cubrimiento finito  $q: \hat{M} \rightarrow M$  y una hoja compacta  $L$  en  $\hat{M}$  tal que  $[L] \in H_2(M, \mathbb{Q})$  no sea nula?*

La pregunta anterior implicaría una respuesta negativa a la Pregunta ?? por el Lema 6.3.

Personalmente encontraría interesante que esto fuese así. Las foliaciones con Reeb parecen perder información acerca de la variedad en la que viven por el teorema de Novikov. Encontrar una propiedad topológica (ser irreducible) que implique la no existencia de una foliación con componentes de Reeb (mas cierta propiedad) puede ser un pequeño paso para entender que tanta información topológica puede perder la foliación respecto a la variedad donde vive.

## Apéndice: Laminaciones en fibrados:

En este apéndice presentaremos una introducción bastante minimal a algunos resultados sobre laminaciones que necesitaremos en este texto. Una buena introducción al tema puede encontrarse en [Cal07, Capítulo 6].

Una laminación es una generalización del concepto de foliación en espacios no tan bonitos como las variedades. Mas precisamente:

**Definición .4.** Una *laminación por superficies* (o para nosotros, simplemente una laminación) es un espacio topológico  $X$  equipado con un atlas de homeomorfismos  $\{\phi_i : U_i \subset X \rightarrow \mathbb{R}^2 \times Y\}_{i \in \Lambda}$ , donde  $Y$  es un espacio topológico localmente compacto y tal que en las intersecciones  $\phi_{ij} := \phi_j \circ \phi_i^{-1}$  tiene la forma:

$$\phi_{ij}(x, t) = (f(x, t), g(t)) \in \mathbb{R}^2 \times Y.$$

En particular las *placas* (los conjuntos que se mandan por el atlas a  $\mathbb{R}^2 \times \{\cdot\}$ ) se apilan al igual que en las foliaciones para formar superficies llamadas las *hojas de la laminación*.

El lector puede chequear que sigue teniendo sentido hablar de holonomía. De hecho, estos son los espacios mas generales donde tiene sentido esta noción. También tiene sentido hablar de regularidad de la laminación, dependiendo de la regularidad del atlas inducido en las hojas. Asumamos de ahora en mas que las hojas heredan una estructura  $C^\infty$ .

El único ejemplo de laminación que nos interesará es el siguiente:

*Ejemplo .1.* Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en una 3-variedad  $M$ , entonces un subconjunto cerrado  $X \subset M$  compuesto de una unión de hojas es una laminación. En particular, si tomamos la clausura de una hoja excepcional (recordar 1.2), el  $Y$  de la definición .4 es un conjunto de Cantor.

Supongamos de ahora en mas nuestras laminaciones se encuentran dentro de una 3-variedad  $M$  equipada con una métrica Riemanniana. Al igual que en el caso de foliaciones esenciales (sección 3.3), hay un tipo de laminaciones que de alguna forma “lee” la topología de  $M$ :

**Definición .5.** Una laminación  $X \subset M$  es *esencial* si:

- No contiene hojas esféricas o tóricas acotando un toro solido.
- Si  $C$  es la completación de una componente conexa de  $X^c$  respecto a la métrica en  $M$  entonces  $C$  es irreducible,  $\partial C$  es incompresible y con *finales incompresibles*. Esto significa que no puede existir un disco sin un arco en su borde encajado en  $C$  de forma que sea isotópico a un encaje en una hoja.

Lo interesante de esta definición es que nos permite probar un análogo al Teorema de Novikov. Mas específicamente Gabai y Oertel [Cal07, Teorema 6.15] prueban que si  $X$  es una laminación esencial dentro de una 3-variedad  $M$  que no es finitamente cubierta por  $S^1 \times S^2$ , entonces  $M$  es irreducible y las hojas son  $\pi_1$ -inyectivas. Por lo tanto esto es verdaderamente una generalización del concepto de foliación esencial.

Supongamos ahora que  $M$  es el espacio total de un fibrado por círculos sobre una superficie compacta  $\Sigma$ . Es clásico en la teoría de 3-variedades (véase por ejemplo [Hat, Proposición 1.11])

que si  $S$  es una superficie incompresible en  $M$ , entonces  $S$  es isotópica a una superficie *horizontal* o *vertical*.

Por horizontal nos referimos a que es transversa a todas las fibras (y por lo tanto, es un cubrimiento de la base) y por vertical a que está saturada por las fibras. En la tesis de doctorado de Thurston se generaliza este resultado para foliaciones esenciales, y Brittenham (en [Bri93]) para laminaciones. Las pruebas aumentan un poco su dificultad pero el espíritu es el mismo que en el caso de un superficie esencial en  $M$  (véase por ejemplo [Cal07, Teorema 4.56]):

**Teorema .4** (Brittenham-Thurston). *Sea  $M$  el espacio total de un fibrado por círculos sobre una superficie compacta  $\Sigma$  y  $X \subset M$  una laminación esencial. Entonces existe una isotopía de  $M$  que manda todas las hojas de la laminación o bien a superficies verticales u horizontales.*

## Bibliografía

- [AFW13] M. Aschenbrenner, S. Friedl, and H. Wilton. 3-manifold groups, 2013.
- [Ago13] I. Agol. The virtual haken conjecture, with an appendix of D. Groves and J. Manning. *Doc. Math*, 18:1045–1087, 2013.
- [Bri93] M. Brittenham. Essential laminations in seifert-fibered spaces. *Topology*, 32(1):61–85, 1993.
- [BRW05] S. Boyer, D. Rolfsen, and B. Wiest. Orderable 3-manifold groups. *Annales de l’Institut Fourier*, 55:243–288, 2005.
- [Cal] D. Calegari. Libro no terminado sobre 3-variedades. *Notas disponibles en la pagina del autor*.
- [Cal07] Danny Calegari. *Foliations and the geometry of 3-manifolds*. Oxford University Press, 2007.
- [CC00] A. Candel and L. Conlon. *Foliations vol. I, II*, volume 1,2. American Mathematical Soc., 2000.
- [CN85] C Camacho and A. Neto. Geometric theory of foliations birkhäuser boston. *Inc., Boston*, 1985.
- [EB16] H. Eynard-Bontemps. On the connectedness of the space of codimension one foliations on a closed 3-manifold. *Inventiones mathematicae*, 204(2):605–670, 2016.
- [Etn] J. B. Etnyre. Lectures on open book decompositions and contact. <https://arxiv.org/pdf/math/0409402.pdf>.
- [FM11] B. Farb and D. Margalit. *A primer on mapping class groups*. Princeton university press, 2011.
- [FP20] Sergio Fenley and Rafael Potrie. Minimality of the action on the universal circle of uniform foliations, 2020.
- [Hat] A. Hatcher. Notes on basic 3-manifold topology. *Notas disponibles en la pagina del autor*.
- [Hat05] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Libro disponible en la web del autor., 2005.
- [Hem04] J. Hempel. *3-Manifolds*, volume 349. American Mathematical Soc., 2004.
- [HH83] G. Hector and U. Hirsch. *Introduction to the geometry of foliations, Part A, B*. Springer Vieweg, 1983.
- [HR57] A. Haefliger and G. Reeb. Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan. *Enseign. Math.*, 3:107–126, 1957.
- [Mar] S. Martinchich. Flujos de anosov y grupo fundamental en 3-variedades. *Monografía de grado*.

- [Moi13] E. Moise. *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, volume 47. Springer Science & Business Media, 2013.
- [PDM12] J Jr Palis and Welington De Melo. *Geometric theory of dynamical systems: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Rol03] D. Rolfsen. *Knots and links*, volume 346. American Mathematical Soc., 2003.
- [Ser80] J. P Serre. *Trees*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1980.
- [Sol84] V. V. Solodov. Components of topological foliations. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 47(2):329, 1984.
- [Sta72] J. Stallings. *Group theory and three-dimensional manifolds*. Yale University Press, 1972.
- [Thu76] W. P. Thurston. Existence of codimension-one foliations. *Annals of Mathematics*, 104(2):249–268, 1976.
- [Thu97a] W. P Thurston. *Three-dimensional geometry and topology*, volume 1. Princeton university press, 1997.
- [Thu97b] W. P Thurston. Three-manifolds, foliations and circles, i. *arXiv preprint math/9712268*, 1997.
- [Thu98] W. P Thurston. Hyperbolic structures on 3-manifolds, ii: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle. *arXiv preprint math/9801045*, 1998.