

Geometría a Gran Escala de Grupos de Heintze

TESIS DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA
PROGRAMA DE DESARROLLO DE LAS CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

Emiliano Sequeira Manzano
Orientador: Matías Carrasco Piaggio

8 de febrero de 2017

Resumen

Un teorema de Heintze del 74 ([Hei74]) muestra que toda variedad Riemanniana homogénea, conexa y de curvatura negativa es isométrica a un grupo de Lie soluble G dotado de una métrica invariante por traslaciones a izquierda. El grupo G resulta ser un producto semidirecto $N \rtimes_{\phi} \mathbb{R}$, donde N es un grupo de Lie nilpotente y ϕ queda determinado por una derivación α en el álgebra de Lie de N , cuyos valores propios tienen parte real positiva. Estos son los llamados *grupos de Heintze* y los notamos $N \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$.

Como la elección de la métrica invariante a izquierda no cambia la clase de cuasi-isometría de un grupo de Lie, la geometría a gran escala de estos sólo depende de su estructura como grupos de Lie. De aquí el afán por encontrar invariantes de cuasi-isometría algebraicos.

La conjetura más importante en este sentido es la siguiente: *Dos grupos de Heintze puramente reales son cuasi-isométricos si y sólo si son isomorfos*. Se dice que el grupo $N \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ es puramente real si α tiene todos sus valores propios reales. Esta conjetura ha sido probada sólo en algunos casos particulares. Existen, sin embargo, algunos resultados un poco más débiles que pueden obtenerse en general, entre ellos la invarianza de ciertas estructuras algebraicas. Se prueba, luego de pasar por la demostración del teorema de Heintze y algunos preliminares, que el polinomio característico de la derivación α (a menos de multiplicarla por un real positivo) es invariante por cuasi-isometrías. Además veremos que si el grupo nilpotente N es un grupo de Heisenberg, entonces la forma de Jordan de la derivación (nuevamente a menos de homotecias) es invariante por cuasi-isometrías.

Agradecimientos

A Matías por su paciencia y disponibilidad, por sus consejos, y por compartir su forma de ver la matemática conmigo.

Al Leva, quien, como mi orientador inicial de la maestría, estuvo siempre disponible para lo que necesitara.

A Pablo, Matilde y el Gordo, por leer este trabajo, por sus correcciones, sugerencias y consejos para mejorarlo.

A Sylvia, por alimentar desde chiquito mi amor por la matemática.

A mis compañeros del CMAT y el IMERL, por las charlas en los pasillos, por las tardes en *El Faro*, el intercambio de ideas y los chistes, en fin, por hacer de la comunidad matemática mi hogar.

A todos mis compañeros de la vida, por aguantarme, por cuidarme, por su apoyo incondicional.

Índice general

1. Introducción	3
2. Preliminares	8
2.1. Espacios cuasi-métricos	8
2.2. Hiperbolicidad en el sentido de Gromov	11
2.3. Espacios CAT(-1)	17
2.4. Grupos y álgebras de Lie	22
3. Grupos de Heintze	27
3.1. Generalidades	27
3.2. Caracterización de variedades homogéneas de curvatura negativa	30
3.3. Borde de un grupo de Heintze	39
3.4. Grupos de tipo Carnot	45
4. Fibrados Invariantes y Regularidad de Cuasi-isometrías en el Borde	50
4.1. Un teorema de rigidez	50
4.2. Cohomología de Orlicz	55
4.3. Distancia de Hausdorff entre coclases	64
4.4. Conjuntos de dimensión mínima	69
5. Algunos Invariantes Algebraicos	74
5.1. Invarianza del polinomio característico	74
5.2. El caso Heinsenberg	76

Capítulo 1

Introducción

El área en la que se enmarca este trabajo puede denominarse *Geometría a gran escala*. Antes de introducir los aspectos técnicos relativos a esta rama, y más específicamente a este trabajo, tratemos de hacernos una idea intuitiva sobre qué trata.

Imaginemos dos objetos: una hoja de papel y un pedazo de tela rectangular. Si los miramos a través de una lupa podremos distinguir en la tela las fibras que forman el tejido y los huecos que quedan entre ellas, mientras que en la hoja no alcanzaremos a visualizar ningún orificio. Sin embargo, si miramos ambos objetos a una distancia considerable, estas diferencias pasarán desapercibidas. Podríamos entonces sentenciar que ambos tienen la misma forma.

Aquí contemplamos dos perspectivas diferentes al observar los mismos objetos. La primera es local y podríamos adjudicarla a la geometría clásica o a la topología, es decir, la hoja de papel y el pedazo de tela no son isométricos, ni siquiera son homeomorfos; la segunda es la perspectiva de la geometría a gran escala, la cual no ve más que las propiedades macroscópicas. Para esta no hay distinción entre ambos objetos.

Para empezar vamos a establecer qué es lo que vamos a distinguir, es decir, cuándo dos cosas serán equivalentes a nuestros ojos. Los objetos que vamos a estudiar serán cierta clase de espacios métricos. Pero las isometrías son muy rígidas para nuestros propósitos, como lo muestra nuestro ejemplo. El concepto de equivalencia que utilizaremos será el de *cuasi-isometría*.

Definición 1.0.1. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Decimos que un mapa $f : X \rightarrow Y$ es un *encaje* (λ, ϵ) -*cuasi-isométrico*, con $\epsilon \geq 0$ y $\lambda \geq 1$, si para todo par de puntos $x_1, x_2 \in X$ se cumple

$$\lambda^{-1}d_X(x_1, x_2) - \epsilon \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + \epsilon.$$

Si además existe una constante $C \geq 0$ tal que para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ con $d_Y(f(x), y) < C$, decimos que f es una (λ, ϵ) -*cuasi-isometría*. En este caso diremos que X e Y son *cuasi-isométricos*.

La mayor parte de las veces nos olvidaremos de las constantes y diremos simplemente *encaje cuasi-isométrico* y *cuasi-isometría*.

Es fácil probar que si $f : X \rightarrow Y$ es una cuasi-isometría entonces existe otra cuasi-isometría $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f$ y $f \circ g$ están a distancia acotada de la identidad. Es decir, toda cuasi-isometría tiene una *cuasi-inversa*.

Ilustremos esta definición con algunos ejemplos.

Ejemplos 1.0.2. 1. Si (X, d_X) e (Y, d_Y) son espacios métricos acotados o de diámetro finito, entonces toda función es una $(1, \text{diam}(Y))$ -cuasi-isometría. Además ningún espacio métrico acotado es cuasi-isométrico a otro no acotado. Es decir que tener diámetro finito es un invariante de cuasi-isometría.

Los espacios acotados no son interesantes desde el punto de vista de la geometría a gran escala ya que son equivalentes a un punto.

2. La inclusión $\iota : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una $(1, 0)$ -cuasi-isometría. En este caso podemos tomar $C = 1/2$. Una cuasi-inversa de ι es la función $\zeta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, $\zeta(x_1, \dots, x_n) = (\lfloor x_1 \rfloor, \dots, \lfloor x_n \rfloor)$. Este último es un ejemplo de cuasi-isometría que no es continua.
3. Sea G un grupo finitamente generado y S un generador finito y simétrico ($S^{-1} = S$). La métrica de las palabras con respecto a S es definida de la siguiente forma: si $g \neq e$ entonces

$$d_S(g, e) = \min\{n \in \mathbb{N} : g = s_1 \dots s_n, \text{ con } s_1, \dots, s_n \in S\},$$

y $d_S(e, e) = 0$. Luego $d_S(g, h) = d(h^{-1}g, e)$. Notar que esta es una métrica invariante por traslaciones del grupo. Dados dos generadores finitos S y S' se tiene que (G, d_S) y $(G, d_{S'})$ son cuasi-isométricos.

4. Teorema de Švarc – Milnor ([BH99, Parte I, Proposición 8.19]): Sea (X, d) un espacio métrico geodésico y propio. Consideremos la acción por isometrías de un grupo G sobre X que cumple:
 - a) Es propiamente discontinua.
 - b) Es cocompacta (o sea que X/G es compacto).

Luego G es finitamente generado y si S es un generador finito, entonces el mapa $f_x : (G, d_S) \rightarrow (X, d)$ definido por $f_x(g) = g.x$ es una cuasi-isometría para todo $x \in X$.

Un problema general consiste en decidir cuándo dos espacios métricos son o no cuasi-isométricos. Como en otras áreas de la matemática, el estudio de las propiedades invariantes (en este caso invariantes por cuasi-isometrías) es una herramienta esencial para este objetivo. En este trabajo nos vamos a restringir a una clase especial de espacios métricos: los grupos de Heintze. Para definirlos primero enunciemos la definición de grupo nilpotente.

Definición 1.0.3. La serie menor descendente de un grupo N es

$$N_0 = N \triangleleft N_1 \triangleleft N_2 \triangleleft N_3 \triangleleft \dots$$

donde $N_{j+1} = [N, N_j]$. Decimos que N es nilpotente si existe j tal que $N_j = 0$.

Ahora tomamos N un grupo de Lie nilpotente, conexo y simplemente conexo, y un morfismo de grupos $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(N)$. Existe una derivación α en \mathfrak{n} tal que $d_e \tau(t) = e^{t\alpha}$. Por otro lado α determina un único morfismo $\tau_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(N)$. Luego podemos escribir el producto semidirecto de N con \mathbb{R} determinado por $\tau = \tau_\alpha$ como $G_\alpha = N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ (ver Sección 2.4). Si α tiene valores propios con parte real positiva decimos que G_α es un grupo de Heintze.

Los grupos de Heintze son grupos de Lie y por lo tanto pueden ser equipados con métricas Riemannianas invariantes por traslaciones. Una observación importante es que dos métricas Riemannianas invariantes a izquierda son siempre *cuasi-isométricamente equivalentes*, es decir que si g y g' son dichas métricas entonces $id : (G_\alpha, g) \rightarrow (G_\alpha, g')$ es una cuasi-isometría (más aún, es bi-Lipschitz). Esto nos permite desembarazarnos de la métrica y decir simplemente que dos grupos de Heintze son cuasi-isométricos si lo son al equiparlos con métricas Riemannianas invariantes a izquierda.

Además se puede probar que un grupo de Heintze es cuasi-isométrico a uno determinado por una derivación con todos los valores propios reales. Diremos en este caso que el grupo es *puramente real* (referimos a [Cor12] para la prueba de la última observación). Esto nos permite reducir el problema de la clasificación a menos de cuasi-isometrías a los grupos de Heintze puramente reales.

La importancia de los grupos de Heintze queda evidenciada en el siguiente teorema probado en [Hei74], que será demostrado en el Capítulo 3.

Teorema 1.0.4. *Toda variedad Riemanniana homogénea, conexa y con curvatura negativa es isométrica a un grupo de Heintze con una métrica invariante a izquierda. Por otro lado todo grupo de Heintze admite una métrica Riemanniana con curvatura negativa.*

Recordemos que una variedad Riemanniana es homogénea si su grupo de isometrías actúa de forma transitiva. Un claro ejemplo de estas variedades es el de un grupo de Lie equipado con una métrica invariante a izquierda, ya que de esta forma las traslaciones a izquierda quedan incluidas en su grupo de isometrías.

Una clase interesante de espacios métricos que contiene a las variedades de curvatura negativa (y por lo tanto a los grupos de Heintze) es la de los espacios *Gromov-hiperbólicos*, o espacios *hiperbólicos en el sentido de Gromov*. Veamos la siguiente definición.

Definición 1.0.5. Sea (X, d) un espacio métrico geodésico. Un *triángulo geodésico* en X es un conjunto $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ donde x, y y z son puntos de X y $[x, y]$, $[y, z]$ y $[z, x]$ son segmentos geodésicos que unen dichos puntos a los cuales llamamos *lados*

de Δ . Decimos que Δ es δ -flaco para ($\delta \geq 0$) si un δ -entorno de cualquier par de lados contiene al tercero. El espacio métrico X es δ -hiperbólico en el sentido de Gromov (o simplemente δ -hiperbólico) si todo triángulo geodésico es δ -flaco. Diremos que X es simplemente hiperbólico si es δ -hiperbólico para algún $\delta \geq 0$.

La principal motivación para esta definición es la de captar las propiedades esenciales de la geometría a gran escala de las variedades de curvatura negativa en contextos más generales. En particular, la hiperbolicidad es una propiedad invariante por cuasi-isometrías entre espacios métricos geodésicos. Esto nos dice en nuestro caso que los grupos de Heintze son hiperbólicos independientemente de la elección de la métrica Riemanniana, siempre que esta sea invariante a izquierda.

En general, para un espacio hiperbólico (X, d) , se define el *borde al infinito* como

$$\partial X = \{r : [0, +\infty) : r \text{ es un rayo geodésico}\} / \sim$$

donde $r_1 \sim r_2$ si y sólo si existe una constante $K > 0$ tal que $d(r_1(t), r_2(t)) < k$ para todo t . En este caso decimos que r_1 y r_2 son asintóticos.

Una cuasi-isometría entre espacios hiperbólicos puede extenderse al borde. Lo interesante de esto es que dichos mapas inducidos en los bordes por las cuasi-isometrías tienen cierta regularidad cuando consideramos en ellos determinadas estructuras naturales. Esto será clave para entender la geometría a gran escala de los grupos de Heintze.

Volvamos a nuestra pregunta: ¿Cuándo dos grupos de Heintze son cuasi-isométricos? Sobre este asunto existe la siguiente conjetura:

Dos grupos de Heintze puramente reales son cuasi-isométricos si y sólo si son isomorfos.

El recíproco es fácilmente verificable, pero el directo continúa abierto. Pansu ([Pan89b]) probó que la conjetura es cierta cuando ambos grupos son de tipo Carnot, y en [Pia16] se prueba que un grupo de tipo Carnot no puede ser cuasi-isométrico a otro que no lo sea. En la clase de los grupos abelianos, está probado por Xie ([Xie14]) que la forma de Jordan de la derivación (a menos de multiplicar por un escalar) es un invariante de cuasi-isometría, lo que alcanza en este caso para probar que los grupos son isomorfos. También sucede esto cuando consideramos grupos de Heisenberg y derivaciones diagonalizables ([Xie15]).

Esto abre la puerta para la siguiente pregunta: si dos grupos de Heintze $G_\alpha = N_1 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ y $G_\beta = N_2 \rtimes_\beta \mathbb{R}$ son cuasi-isométricos, ¿entonces existe $s > 0$ tal que α y $s\beta$ tienen la misma forma de Jordan? Es en esta dirección en la que intentaremos avanzar. En el Capítulo 5 serán probados dos resultados, el primero de los cuales puede resumirse en el siguiente teorema.

Teorema 1.0.6 (Primer Resultado). *Sean $N_1 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ y $N_2 \rtimes_{\beta} \mathbb{R}$ dos grupos de Heintze puramente reales cuasi-isométricos. Existe $s > 0$ tal que α y $s\beta$ tienen el mismo polinomio característico.*

Como consecuencia del teorema anterior tenemos que la respuesta a nuestra pregunta es afirmativa cuando cuando las derivaciones α y β son diagonalizables. Nuestro segundo resultado refiere a un caso particular al que ya hemos hecho referencia.

El grupo de Heisenberg de dimensión $2n + 1$, al que llamamos K_n , consiste en las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & I_n & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. La estructura de estos grupos hace que las derivaciones en sus álgebras de Lie tengan cierta rigidez, lo que permitirá obtener los siguiente:

Teorema 1.0.7 (Segundo Resultado). *Si dos grupos puramente reales de la forma $K_n \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ y $K_n \rtimes_{\beta} \mathbb{R}$ son cuasi isométricos, entonces existe $s > 0$ tal que α y $s\beta$ tienen la misma forma de Jordan.*

Capítulo 2

Preliminares

Este capítulo tiene como propósito el de sentar las bases para los capítulos siguientes. Para no demorar demasiado la lectura de los temas centrales pasaremos por alto algunas pruebas. El lector que lo desee puede buscar los detalles en las referencias indicadas en cada sección.

2.1. Espacios cuasi-métricos

Definición 2.1.1. Una cuasi-métrica en un conjunto X es una función $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

- (1) $\rho(x, y) \geq 0$ para todo par de puntos $x, y \in X$ y $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- (2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ para $x, y \in X$.
- (3) Desigualdad *cuasi-triangular*: existe $M \geq 1$ tal que dados $x, y, z \in X$, se cumple $\rho(x, z) \leq M(\rho(x, y) + \rho(y, z))$.

Llamamos a M constante de la cuasi-métrica y decimos que (X, ρ) es un espacio cuasi-métrico de constante M .

Es fácil verificar que la condición (3) es equivalente a la siguiente:

- (3') Existe $K \geq 1$ tal que dados $x, y, z \in X$ se cumple $\rho(x, z) \leq K \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$.

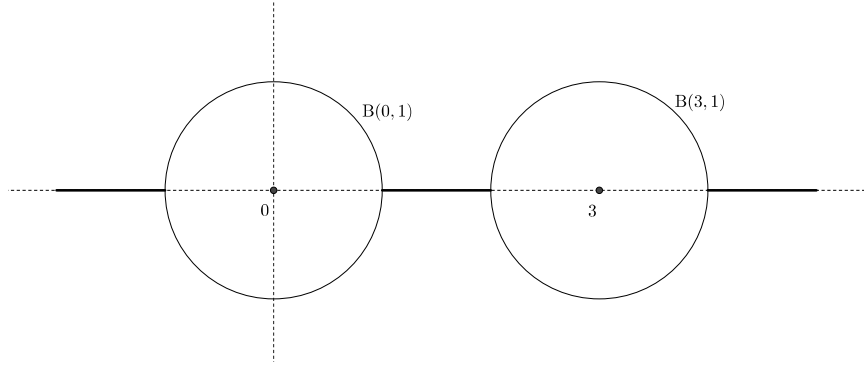
Esto nos será útil más adelante.

Una propiedad importante de las métricas que se pierde al debilitar la desigualdad triangular es la de inducir una topología. En general la familia de bolas de una cuasi-métrica no siempre es base para una topología. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.2. Pongamos en \mathbb{C} una cuasi-métrica ρ definida por

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x - y| & \text{si } x, y \in \mathbb{R}, \\ |x - y| & \text{si no.} \end{cases}$$

Es fácil ver que (\mathbb{C}, ρ) es un espacio cuasi-métrico de constante 2. Las bolas centradas en el eje real para esta cuasi-métrica son como se muestra en la figura. Por ejemplo la bola de centro cero y radio 1 es el conjunto $B(0, 1) = \mathbb{D} \cup (-2, 2)$, donde $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.



Observar que no hay ninguna bola contenida en $B(0, 1) \cap B(3, 1) = (1, 2)$, es decir que la familia de bolas no es base para ninguna topología.

Como no siempre existe la topología asociada a una cuasi-métrica, no contamos automáticamente con una noción de continuidad en el sentido clásico. Necesitamos entonces una definición más amplia.

Definición 2.1.3. Una función entre espacios cuasi-métricos $f : (X, \rho_1) \rightarrow (Y, \rho_2)$ es continua en x si para toda sucesión x_n convergente a x se tiene que $f(x_n) \rightarrow f(x)$. La función f es continua si lo es en todo punto y es un homeomorfismo si es continua, invertible y con inversa continua.

Al igual que para los espacios métricos, podemos definir en nuestro caso, las medidas y la dimensión de Hausdorff. Vayamos a las definiciones.

Definición 2.1.4. Sea (X, ρ) un espacio cuasi-métrico. Para $\epsilon > 0$ definamos $\mathcal{C}_\epsilon = \mathcal{C}_\epsilon(X, \rho)$ el conjunto de cubrimientos numerables de X cuyos elementos tienen diámetro menor a ϵ . Para $Q \geq 0$ definimos

$$\mathcal{H}_\epsilon^Q(X, \rho) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{diam}(A_n)^Q : \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_\epsilon \right\}.$$

La medida de Hausdorff Q -dimensional de X se define como $\mathcal{H}^Q(X, \rho) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\epsilon^Q(X, \rho)$. La dimensión de Hausdorff de X la definimos como

$$\text{Hdim}(X, \rho) = \inf\{Q : \mathcal{H}^Q(X, \rho) = 0\}.$$

Las siguientes propiedades son fácilmente verificables.

Proposición 2.1.5. Sean (X, ρ_1) e (Y, ρ_2) dos espacios cuasi-métricos.

1. Si $f : X \rightarrow Y$ es de Lipschitz, entonces $\text{Hdim}(f(X), \rho_2) \leq \text{Hdim}(X, \rho_1)$. Por lo tanto si f es un homeomorfismo bi-Lipschitz se tiene que $\text{Hdim}(X, \rho_1) = \text{Hdim}(Y, \rho_2)$.
2. Si $\alpha > 0$ entonces $\text{Hdim}(X, \rho_1) = \alpha \text{Hdim}(X, \rho_1^\alpha)$
3. Si $f : X \rightarrow Y$ es α -Hölder, entonces $\text{Hdim}(f(X), \rho_2) \leq \alpha^{-1} \text{Hdim}(X, \rho_1)$.

El trabajo con cuasi-métricas puede presentar algunas dificultades extra, sin embargo, muchas veces puede evitarse gracias a la siguiente proposición:

Proposición 2.1.6. Si ρ es una cuasi-métrica, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que ρ^ϵ es bi-Lipschitz equivalente a una métrica.

Demostración. Es claro que las primeras dos propiedades de la definición de cuasi-métrica se siguen cumpliendo para ρ^ϵ para todo ϵ . Además es fácil observar que podemos tomar ϵ para que ρ^ϵ cumple (3') para $K \leq \sqrt{2}$. Definimos

$$d(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^n \rho^\epsilon(a_i, a_{i+1}) : x = a_0, a_1, \dots, a_{n+1} = y \in X \right\}.$$

Claramente d es no negativa, simétrica, satisface la desigualdad triangular y $d \leq \rho$. Vamos a probar por inducción que para $a_0, \dots, a_{n+1} \in X$ se cumple

$$\frac{1}{2} \rho^\epsilon(a_0, a_{n+1}) \leq \rho^\epsilon(a_0, a_1) + \dots + \rho^\epsilon(a_n, a_{n+1}).$$

De esto se deduce la tesis. Para $n = 0$ resulta obvio. Supongamos entonces que es cierto para $m < n$. Sea $S = \rho^\epsilon(a_0, a_1) + \dots + \rho^\epsilon(a_n, a_{n+1})$, existe k tal que $\rho^\epsilon(a_0, a_1) + \dots + \rho^\epsilon(a_{k+1}, a_k)$ y $\rho^\epsilon(a_m, a_{m+1}) + \dots + \rho^\epsilon(a_n, a_{n+1})$ son menores a $\frac{1}{2}S$. Luego por hipótesis de inducción $\rho^\epsilon(a_0, a_m), \rho^\epsilon(a_{m+1}, a_{n+1}) \leq S$ y usando la propiedad (3') dos veces nos queda

$$\rho^\epsilon(a_0, a_{n+1}) \leq 2 \max\{\rho^\epsilon(a_0, a_m), \rho^\epsilon(a_m, a_{m+1}), \rho^\epsilon(a_{m+1}, a_{n+1})\} \leq 2S.$$

□

Observar que si $f : (X, \rho_1) \rightarrow (Y, \rho_2)$ es una función continua entre espacios cuasi-métricos y $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ son tales que $\rho_1^{\epsilon_1}$ y $\rho_2^{\epsilon_2}$ son métricas, entonces $f : (X, \rho_1^{\epsilon_1}) \rightarrow (Y, \rho_2^{\epsilon_2})$ es continua en el sentido clásico. Lo mismo sucede, claro está, con los homeomorfismos. Esto justifica de alguna forma la Definición 2.1.3.

2.2. Hiperbolicidad en el sentido de Gromov

Como dijimos en la Introducción, los espacios Gromov-hiperbólicos o hiperbólicos en el sentido de Gromov, forman una clase de espacios métricos muy interesantes desde el punto de vista de la geometría a gran escala. En esta sección desarrollaremos, sin demasiados detalles, la teoría básica de estos espacios. Para una lectura más completa se recomienda consultar [GdlH90].

2.2.1. Generalidades

Definición 2.2.1. Consideremos (X, d) un espacio métrico.

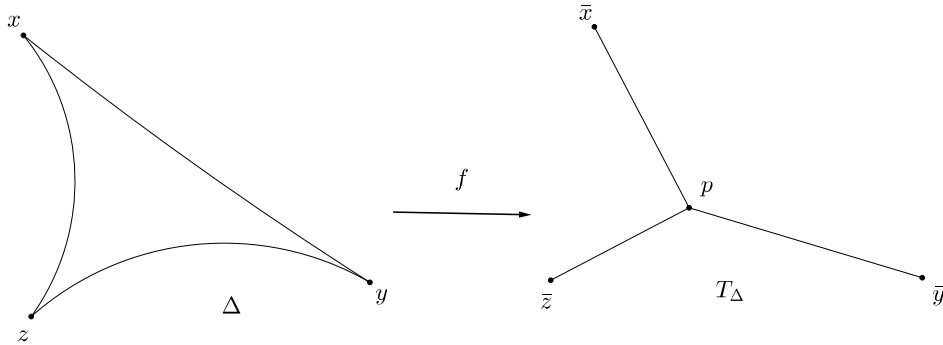
- Un *segmento geodésico* en X es un encaje isométrico de un intervalo $[a, b]$ en X .
- Un *rayo geodésico* es un encaje isométrico de $[0, +\infty)$ en X .
- Una *geodésica* es un encaje isométrico de \mathbb{R} en X .

Diremos que (X, d) es un espacio *geodésico* si para todo par de puntos $x, y \in X$ existe un segmento geodésico que los une. Si x e y son dos puntos de un espacio geodésico, notaremos $[x, y]$ a un segmento geodésico que los una. Es claro que, en principio, puede haber más de un segmento geodésico con extremos en dichos puntos, sin embargo, en los espacios en los que trabajaremos, la elección de dicho segmento será irrelevante.

Supongamos ahora que (X, d) es geodésico. Entonces, dados tres puntos $x, y, z \in X$, podemos considerar un triángulo de vértices x, y y z , cuyos lados sean segmentos geodésicos. A un triángulo de esta forma lo llamaremos *triángulo geodésico*. En este contexto tiene sentido la Definición 1.0.5 hecha en la introducción.

Notar que en un espacio δ -hiperbólico, dos segmentos geodésicos con los mismos extremos no pueden alejarse a más de δ uno del otro. Es decir, un δ -entorno de uno siempre contiene al otro, por lo tanto, si bien puede haber más de un segmento geodésico uniendo dos puntos, estos no son distinguibles en la geometría a gran escala del espacio métrico.

A continuación veremos otra propiedad sobre triángulos que nos dará una definición alternativa de hiperbolicidad. Para esto hay que hacer antes algunas observaciones. Consideremos un triángulo geodésico $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ en un espacio métrico cualquiera. Entonces existe un tripode T_Δ de vértices \bar{x}, \bar{y} y \bar{z} y centro p , único a menos de isometrías, y una única función $f : \Delta \rightarrow T_\Delta$ que lleva los puntos x, y y z en \bar{x}, \bar{y} y \bar{z} respectivamente y es una isometría al restringirla a cada uno de los lados.



Definición 2.2.2. Sea $\delta \geq 0$. Consideremos un triángulo geodésico $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$, T_Δ el trípode correspondiente y $f : \Delta \rightarrow T_\Delta$ la función de antes. Decimos que Δ es δ -fino si para todo $w \in T_\Delta$ se cumple que el diámetro de $f^{-1}(w)$ es menor o igual a δ .

Como dijimos, lo anterior nos da una definición alternativa de hiperbolicidad, más precisamente tenemos el siguiente teorema, cuya prueba puede leerse en [GdlH90, Capítulo 2, Sección 3].

Teorema 2.2.3. Sea (X, d) un espacio métrico geodésico. Entonces son equivalentes:

1. (X, d) es hiperbólico.
2. Existe δ tal que todo triángulo geodésico en X es δ -fino.

Ejemplos 2.2.4. 1. Si (X, d) es un espacio geodésico de diámetro $D < +\infty$, entonces tenemos que todo triángulo es D -flaco, es decir que X es D -hiperbólico. En particular los espacios compactos son hiperbólicos.

2. Un árbol es un grafo sin ciclos. Observar que un triángulo geodésico en un árbol es siempre 0-flaco (también es 0-fino). Por lo tanto los árboles son 0-hiperbólicos.
3. El plano hiperbólico \mathbb{H} es 2-hiperbólico. Para probar esto primero hagamos dos observaciones:
 - a) El área de un disco de radio r en \mathbb{H} es $2\pi(\cosh(r) - 1)$.
 - b) Como la curvatura de \mathbb{H} es constante -1 , se obtiene por el Teorema de Gauss-Bonnet que un triángulo geodésico tiene área menor a π .

Luego, si $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ es un triángulo geodésico en \mathbb{H} y $q \in [x, y]$ está a distancia mayor a 2 de cualquiera de los otros dos lados, existe un disco de radio 1 dentro del triángulo. Pero dicho disco tiene área $2\pi(\cosh(1) - 1) > \pi$, lo que es absurdo.

Como ya mencionamos, los espacios hiperbólicos son importantes desde el punto de vista de la geometría a gran escala, por lo tanto nos interesará estudiar lo que sucede con las cuasi-isometrías entre ellos.

Lo primero a observar es que la condición de ser geodésico no es invariante por cuasi-isometrías: por ejemplo \mathbb{R} , que es geodésico, es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} , que obviamente no lo es. Sin embargo, la hiperbolicidad sí es una propiedad preservada por cuasi-isometrías entre espacios geodésicos. La demostración requiere de algunos resultados técnicos que no demostraremos y que utilizan los conceptos que se definen a continuación.

Definiciones 2.2.5. Consideramos un espacio métrico geodésico (X, d) .

1. Un (λ, ϵ) -cuasi-segmento geodésico es un encaje (λ, ϵ) -cuasi-isométrico de un intervalo $[a, b]$ en X .
2. Un (λ, ϵ) -cuasi-rayo geodésico es un encaje (λ, ϵ) -cuasi-isométrico de $[0, +\infty)$ en X .
3. Una (λ, ϵ) -cuasi-geodésica es un encaje (λ, ϵ) -cuasi-isométrico de \mathbb{R} en X .

Las definiciones anteriores pueden hacerse con enteros en lugar de reales, es decir, considerar encajes cuasi-isométricos de intervalos de enteros en X . Esto es equivalente a menos de cuasi-isometrías. Observemos que la imagen de un segmento geodésico por una cuasi-isometría no es ni siquiera una curva continua, sin embargo sí es un cuasi-segmento geodésico. Más aún, las cuasi-isometrías preservan los cuasi-segmentos geodésicos, los cuasi-rayos geodésicos y las cuasi-geodésicas. Existen teoremas de aproximación de los anteriores por segmentos geodésicos, rayos y geodésicas respectivamente. Uno de estos resultados es el centro de la prueba de la invarianza de la hiperbolicidad por cuasi-isometrías.

Teorema 2.2.6 (Lema de Morse I). *Consideremos tres números reales $\delta \geq 0$, $\lambda \geq 1$ y $\epsilon \geq 0$. Luego existe una constante $H = H(\delta, \lambda, \epsilon)$ con la propiedad siguiente:*

Dado X un espacio geodésico δ -hiperbólico, $I = [a, b]$ y $f : I \rightarrow X$ un (λ, ϵ) -cuasi-segmento geodésico, sea J un intervalo de longitud $d(f(a), f(b))$ y $g : J \rightarrow X$ un segmento geodésico que une $f(a)$ con $f(b)$. Entonces $\text{dist}_{\mathcal{H}}(f(I), g(J)) < H$.

La distancia de Hausdorff ($\text{dist}_{\mathcal{H}}$) entre dos conjuntos A y B en un espacio métrico (o cuasi-métrico) (X, d) se define como

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) = \max\{\sup\{d(x, B) : x \in A\}, \sup\{d(x, A) : x \in B\}\}.$$

Con esto estamos listos para probar la invarianza de la hiperbolicidad.

Teorema 2.2.7. *Sea $F : X \rightarrow Y$ una cuasi-isometría entre espacios métricos geodésicos donde Y es hiperbólico. Entonces X es también hiperbólico.*

Demostración. Supongamos que Y es δ -hiperbólico y que $F : X \rightarrow Y$ es una (λ, ϵ) -cuasi-isometría. Tomemos la constante $H = H(\delta, \lambda, \epsilon)$ del teorema anterior. Consideremos un triángulo geodésico $\Delta \subset X$, con lados parametrizados por $f_j : I_j \rightarrow X$, con $j = 1, 2, 3$. Para cada uno de los (λ, ϵ) -cuasi-segmentos geodésicos $F \circ f_j$, tenemos segmentos $g_j : J_j \rightarrow Y$ con los mismos extremos y con imagen a distancia de Hausdorff menor o igual a H de los anteriores. Luego, por la hiperbolicidad de Y , se tiene que para todo $y \in \text{Im}(g_1)$, se cumple $d(y, \text{Im}(g_2) \cup \text{Im}(g_3)) \leq \delta$. Por lo tanto

$$d(y, \text{Im}(F \circ f_2) \cup \text{Im}(F \circ f_3)) \leq \delta + 2H$$

para todo $y \in \text{Im}(F \circ f_1)$. Luego, como F es una cuasi-isometría, resulta que para todo $x \in \text{Im}(f_1)$ se tiene

$$d(x, I_2 \cup I_3) \leq \lambda(\delta + 2H + \epsilon).$$

Esto implica que X es $\lambda(\delta + 2H + \epsilon)$ -hiperbólico. \square

Por último vamos a enunciar un teorema de aproximación de cuasi-rayos geodésicos y cuasi-geodésicas que será importante más adelante. La prueba del mismo puede encontrarse en [GdlH90, Capítulo 5, Sección 5].

Teorema 2.2.8 (Lema de Morse II). *Sea (X, d) un espacio geodésico δ -hiperbólico y propio. Entonces para todo $\lambda \geq 1$ y $\epsilon \geq 0$ existe una constante $H = H(\delta, \lambda, \epsilon)$ tal que:*

1. *Si $r : [0, +\infty) \rightarrow X$ es un (λ, ϵ) -cuasi-rayo geodésico, entonces existe un rayo geodésico $r' : [0, +\infty) \rightarrow X$ tal que $\text{dist}_{\mathcal{H}}(\text{Im}(r), \text{Im}(r')) \leq H$.*
2. *Si $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ es un (λ, ϵ) -cuasi-geodésica, entonces existe una geodésica $\gamma' : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\text{dist}_{\mathcal{H}}(\text{Im}(\gamma), \text{Im}(\gamma')) \leq H$.*

2.2.2. Borde de un espacio hiperbólico

De aquí en adelante (X, d) será siempre un espacio métrico geodésico δ -hiperbólico y propio. Consideremos el conjunto \mathcal{R}_X de todos los rayos geodésicos en X .

Proposición 2.2.9. *Sean $r_1, r_2 \in \mathcal{R}_X$. Son equivalentes:*

1. $\text{dist}_{\mathcal{H}}(\text{Im}(r_1), \text{Im}(r_2)) < +\infty$.
2. $\sup\{d(r_1(t), r_2(t)) : t \geq 0\} < +\infty$.
3. *Existe $u \in \mathbb{R}$ y $t_0 \geq 0$ tal que para todo $t \geq t_0$ $d(r_1(t), r_2(t - u)) \leq K$. Donde la constante K no depende de los rayos r_1 y r_2 (sólo de δ).*

La prueba puede leerse en [GdlH90, Capítulo 7, Sección 1]. Diremos que dos rayos $r_1, r_2 \in \mathcal{R}_X$ son *asintóticos*, y lo notaremos por $r_1 \sim r_2$, si cumplen con las condiciones

de la proposición anterior. Definimos entonces el *borde* al infinito de X como el conjunto $\partial X = \mathcal{R}_X / \sim$.

Consideremos un rayo geodésico r de origen x , cuya clase en la relación anterior es $\xi \in \partial X$. Diremos que ξ es el extremo de r y notamos al rayo por $[x, \xi)$. Es claro que hay cierta ambigüedad en esta notación, sin embargo, al igual que sucede con los segmentos geodésicos, esto no traerá problemas.

Observemos ahora que una geodésica γ define dos rayos geodésicos, que a su vez tienen dos extremos γ^- y γ^+ . Notaremos a dicha geodésica por (γ^-, γ^+) . Recíprocamente, si ξ y η son dos puntos de ∂X , existe una geodésica γ tal que $\gamma^+ = \xi$ y $\gamma^- = \eta$, esto se conoce como propiedad de visibilidad ([GdlH90, Capítulo 7, Sección 1]).

Vamos a definir una topología y una familia de cuasi-métricas en el borde de un espacio hiperbólico, pero para esto debemos trabajar primero con algunas nuevas definiciones.

Definición 2.2.10. Sea (X, d) un espacio métrico y x, y y z tres puntos en X . Definimos el *producto de Gromov* entre y y z con centro x como

$$(y|z)_x = \frac{1}{2}(d(x, y) + d(x, z) - d(y, z)).$$

Observar que si Δ es un triángulo geodésico de vértices x, y y z , los valores de $(y|z)_x$, $(x, z)_y$ y $(x, y)_z$ corresponden a las longitudes de las aristas de T_Δ . El producto de Gromov nos da una generalización de hiperbolicidad en el caso no geodésico ([GdlH90, Capítulo 2, Sección 3]).

Teorema 2.2.11. *Un espacio métrico geodésico (X, d) es hiperbólico si y sólo si existe δ tal que*

$$(x|z)_w \geq \min\{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta$$

para todo $w, x, y, z \in X$.

Ahora fijemos un punto $w \in X$. Diremos que una sucesión $\{x_i\}$ en X *tiende a infinito* si $\lim_{i, j \rightarrow +\infty} (x_i | x_j)_w = \infty$. Donde el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ está dirigido por $(n_1, n_2) \leq (m_1, m_2)$ si y sólo si $n_1 \leq m_1$ y $n_2 \leq m_2$. Observemos que esta condición no depende del punto base w ya que si w' es otro punto de X , entonces para todo par de puntos x e y en X se tiene

$$\begin{aligned} |(x|y)_w - (x|y)_{w'}| &= \frac{1}{2}|d(w, x) + d(w, y) - d(w', x) - d(w', y)| \\ &\leq \frac{1}{2}(|d(w, x) - d(w', x)| + |d(w, y) - d(w', y)|) \leq d(w, w'). \end{aligned}$$

Llamemos \mathcal{S}_X al conjunto de sucesiones que tienden a infinito. Luego ponemos en \mathcal{S}_X la siguiente relación de equivalencia: $\{x_n\} \sim \{y_m\}$ si y sólo si $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} (x_n | y_m)_w = +\infty$. Definimos ahora $\partial' X$ como el cociente de \mathcal{S}_X por la relación descrita. Diremos que la

sucesión $\{x_n\}$ converge a un punto $a \in \partial'X$ si a es la clase de equivalencia de $\{x_n\}$, en este caso notaremos $x_n \rightarrow a$. Se puede probar que ∂X se identifica con $\partial'X$ por medio de la función que a un rayo $r \in \mathcal{R}_X$ le asigna la sucesión $\{r(n)\}$ (ver [GdlH90, Capítulo 7, Sección 1]). De aquí en adelante utilizaremos indistintamente las dos definiciones del borde.

Si ξ, η son dos puntos del borde y $\{x_n\}$ y $\{y_m\}$ dos sucesiones tales que $x_n \rightarrow \xi$ e $y_m \rightarrow \eta$, entonces existe $\liminf_{n,m \rightarrow +\infty} (x_n|y_m)_w$. Si ahora $\{x'_n\}$ y $\{y'_m\}$ son otras sucesiones que convergen a ξ y η respectivamente, entonces por el Teorema 2.2.11 se tiene que

$$(x_n|y_m)_w \geq \min\{(x_n|x'_n)_w, (x'_n|y'_m)_w, (y'_m|y_m)_w\} - 2\delta.$$

Para n y m suficientemente grandes el mínimo se alcanza en el término central, ya que los otros dos tienden a infinito. Luego

$$(x_n|y_m)_w \geq (x'_n|y'_m)_w - 2\delta \tag{2.1}$$

para n y m suficientemente grande. Como $(x_n|y_m)_w$ no tiende a infinito, existe una subsucesión $(x_{n_k}|y_{m_k})_w \rightarrow L$. Luego

$$(x_n|y_m) \geq \min\{(x_n|x_{n_k})_w, (x_{n_k}|y_{m_k})_w, (y_m|y_{m_k})_w\} - 2\delta.$$

Nuevamente el mínimo se alcanza en el término central para valores grandes de m, n y k , luego $(x_n|y_m)_w \geq (x_{n_k}|y_{m_k})_w - 2\delta$ si m, n y k son suficientemente grandes. Esto implica que existe $\liminf_{i,j \rightarrow +\infty} (x_n|y_m)_w$. Por (2.1) tenemos además

$$\liminf_{n,m \rightarrow +\infty} (x_n|y_m)_w \geq \liminf_{n,m \rightarrow +\infty} (x'_n|y'_m)_w - 2\delta.$$

Esto prueba que al variar las sucesiones dichos límites inferiores toman valores en un conjunto acotado, luego podemos hacer la siguiente definición.

Definición 2.2.12. Sean ξ y η dos puntos del borde ∂X y $w \in X$. Definimos entonces el producto de Gromov entre ξ y η con centro en w por

$$(\xi|\eta)_w = \sup\{\liminf_{n,m \rightarrow +\infty} (x_n|y_m)_w : x_n \rightarrow \xi, y_m \rightarrow \eta\}.$$

Ahora para todo real $r > 0$ definimos los conjuntos

$$V_r = \{(\xi, \eta)_w \in \partial X \times \partial X : (\xi|\eta)_w \geq r\}$$

La familia $\{V_r\}_{r>0}$ define una estructura uniforme en ∂X y luego una topología. En [GdlH90, Capítulo 7, Sección 2] se prueba que ∂X es compacto con esta topología. Por ejemplo si M es una variedad Riemanniana n con curvatura seccional acotada por arriba por una constante negativa entonces el borde ∂M es homeomorfo a la esfera S^{n-1} .

Mediante el producto de Gromov se puede definir una familia de cuasi-métricas (y luego de métricas por la Proposición 2.1.6) compatibles con la topología de ∂X . Tomemos x un punto en X , luego para $\xi, \eta \in \partial X$ definimos $\rho_x(\xi, \eta) = e^{-(\xi|\eta)_x}$. Tenemos entonces que existe $\varepsilon > 0$ para el cual ρ_x^ε es bi-lipschitz equivalente con una métrica. Denominamos *distancias visuales elípticas* o *métricas visuales elípticas* en ∂X a cualquiera de estas métricas.

Por último supongamos que tenemos una cuasi-isometría $F : X \rightarrow Y$ entre dos espacios hiperbólicos propios. Podemos extender F al borde de la siguiente forma: si ξ es un punto de ∂X y $\{x_i\}$ una sucesión en X tal que $x_i \rightarrow \xi$, entonces definimos $\partial F(\xi)$ como la clase de la sucesión $\{F(x_i)\}$ en ∂Y . Hay que probar que dicha definición tiene sentido. Esto sale directamente del siguiente Lema ([GdlH90, Capítulo 5, Sección 2])

Lema 2.2.13. *Sea $F : X \rightarrow Y$ una (λ, ϵ) -cuasi-isometría entre espacios δ -hiperbólicos. Luego existe una constante A tal que*

$$\frac{1}{\lambda}(x|y)_w - A \leq (F(x)|F(y))_{F(w)} \leq \lambda(x|y)_w + A$$

para $w, x, y, z \in X$.

Otra forma de definir $\partial F : \partial X \rightarrow \partial Y$ es simplemente tomar, para ξ en ∂X , un rayo geodésico r en X con extremo en ξ . Luego $F \circ r$ es un rayo cuasi-geodésico y por el Teorema 2.2.8 existe un rayo geodésico r' en Y cuya distancia a $F \circ r$ está acotada. Podemos entonces definir $\partial F(\xi)$ como el extremo de r' .

2.3. Espacios CAT(-1)

Los espacios CAT son una generalización de las variedades de curvatura negativa. A pesar de ser espacios Gromov-hiperbólicos, la condición de ser CAT es una propiedad que depende de la estructura local del espacio, es decir, que no se preserva por cuasi-isometrías. El objetivo de esta sección es dar una idea de la geometría de estos espacios y la estructura de su borde. Damos como referencia para esta sección [Bou95], [GdlH90] y [HP97].

Consideremos κ un real no positivo. Llamaremos \mathcal{H}_κ a la superficie conexa y simplemente conexa de curvatura constante κ (esta es única, ver [DC92, Capítulo 8, Sección 4]). Por ejemplo $\mathcal{H}_0 = \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{H}_{-1} = \mathbb{H}^2$.

2.3.1. Condición CAT

Consideremos un espacio métrico geodésico y propio (X, d) . Dados tres puntos $x, y, z \in X$ consideramos segmentos geodésicos $[x, y]$, $[y, z]$ y $[x, z]$, y el triángulo $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [x, z]$. Un *triángulo de comparación* de Δ en \mathcal{H}_κ es un triángulo $\bar{\Delta} =$

$[\bar{x}, \bar{y}] \cap [\bar{y}, \bar{z}] \cap [\bar{x}, \bar{z}] \subset \mathcal{H}_\kappa$, con $d(x, y) = d(\bar{x}, \bar{y})$, $d(y, z) = d(\bar{y}, \bar{z})$ y $d(x, z) = d(\bar{x}, \bar{z})$. Notar que el triángulo de comparación no es exactamente único pero sí lo es a menos de isometrías de \mathcal{H}_κ . Tenemos entonces definida una única función $f : \Delta \rightarrow \bar{\Delta}$ que lleva x, y y z en \bar{x}, \bar{y} y \bar{z} respectivamente y es una isometría al restringirla a cada uno de los lados. Para $w \in X$ notaremos por \bar{w} a $f(w) \in \mathcal{H}_\kappa$.

Definición 2.3.1. Sea $\kappa \leq 0$. Decimos que un triángulo geodésico Δ en X cumple la condición $\text{CAT}(\kappa)$ si para todo par de puntos $w, w' \in \Delta$ se cumple $d(w, w') \leq d(\bar{w}, \bar{w}')$. Donde \bar{w} y \bar{w}' son los puntos correspondientes a w y w' en un triángulo de comparación de Δ en \mathcal{H}_κ . El espacio X se dice $\text{CAT}(\kappa)$ si todo triángulo geodésico cumple la condición $\text{CAT}(\kappa)$.

Los triángulos en un espacio $\text{CAT}(\kappa)$ son más finos que su respectivo triángulo de comparación en $\mathcal{H}(\kappa)$, luego, al ser este último un espacio hiperbólico en el caso $\kappa < 0$, tenemos que los $\text{CAT}(\kappa)$, con $\kappa < 0$, son también espacios hiperbólicos.

Es obvio a partir de la definición que las variedades simplemente conexas de curvatura constante negativa son espacios CAT , lo interesante es que en realidad hay una clase mucho más grande de variedades Riemannianas que cumplen esta condición. Esto se ve en el siguiente teorema, cuya prueba puede encontrarse en [GdlH90, Capítulo 3, Sección 2].

Teorema 2.3.2. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana simplemente conexa, completa y con curvatura seccional menor o igual a κ . Entonces M es $\text{CAT}(\kappa)$.*

Observar que es suficiente verificar la condición CAT en triángulos pequeños. Es decir que se trata de una propiedad que depende exclusivamente de la geometría local del espacio.

2.3.2. Funciones de Busemann y producto de Gromov

Consideremos (X, d) un espacio $\text{CAT}(-1)$. Tomemos un punto $x \in X$ y un rayo geodésico r . Es fácil ver que la función $t \mapsto d(x, r(t)) - t$ es monótona decreciente en sentido amplio, pues utilizando la desigualdad triangular tenemos

$$d(x, r(t)) - t - (d(x, r(s)) - s) \leq d(r(t), r(s)) - t + s = t - s - t + s = 0$$

para $s < t$. Además es una función acotada ya que si nuevamente $s < t$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} |d(x, r(t)) - t - (d(x, r(s)) - s)| &= |d(x, r(t)) - d(x, r(s)) - d(r(0), r(t)) + d(r(0), r(s))| \\ &\leq |d(x, r(t)) - d(r(0), r(t))| + |d(x, r(s)) - d(r(0), r(s))| \leq 2d(x, r(0)). \end{aligned}$$

Luego existe $b_r(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(x, r(t)) - t$. La función $b_r : X \rightarrow \mathbb{R}$ es la *función de Busemann* asociada al rayo r .

Lema 2.3.3. Sean $r_1, r_2 : [0, +\infty) \rightarrow X$ dos rayos asintóticos. Entonces existe $u \in \mathbb{R}$ tal que $d(r_1(t), r_2(t+u)) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Sólo daremos una idea de la prueba del lema anterior. Vamos a ver que

$$d(r_1(t), Im(r_2)) \rightarrow 0.$$

Para esto puede tomarse una familia de triángulos Δ_t con vértices en $r_1(0), r_2(0)$ y $r_2(t)$. Consideremos una familia de triángulos de comparación $\bar{\Delta}_t$ en \mathbb{H}^2 que tengan en común los lados correspondientes a $r_1(0)$ y $r_2(0)$ y que el lado correspondiente a los vértices $r_2(0)$ y $r_2(t)$ esté incluido en el mismo rayo geodésico \bar{r}_2 . Notemos por \bar{x} el punto correspondiente a $x \in \Delta_t$ en el triángulo $\bar{\Delta}_t$.

Sea $t_0 > 0$, como en un $CAT(-1)$ no existen rayos asintóticos con el mismo origen, y usando el Teorema de Arzelá-Ascoli, puede probarse que existe una sucesión de puntos $\{x_n\} \subset X$, con $x_n \in [r_1(0), r_2(t)]$ tal que $x_n \rightarrow r_1(t_0)$. Luego, como $d(x_n, r_2([0, +\infty)) \leq d(\bar{x}_n, \bar{r}_2([0, +\infty)))$, la tesis se deduce del caso $X = \mathbb{H}^2$, que es sencillo de verificar.

Fijemos ahora un punto $\xi \in \partial X$. Consideremos un rayo geodésico r que tenga como límite al punto ξ y definimos para $x, y \in X$

$$B_\xi(x, y) = b_r(x) - b_r(y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(x, r(t)) - d(y, r(t)).$$

Para ver que la definición anterior tiene sentido, es decir que no depende del rayo elegido, debemos recurrir al Lema 2.3.3.

Tomemos dos rayos r_1 y r_2 con límite en ξ . Como dichos rayos son asintóticos tenemos que existe $u \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(r_1(t), r_2(t+u)) = 0$. Luego

$$\begin{aligned} & |b_{r_1}(x) - b_{r_1}(y) - (b_{r_2}(x) - b_{r_2}(y))| \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |d(x, r_1(t)) - d(y, r_1(t)) - (d(x, r_2(t+u)) - d(y, r_2(t+u)))| \\ &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} |d(x, r_1(t)) - d(x, r_2(t+u))| + \lim_{t \rightarrow +\infty} |d(y, r_1(t)) - d(y, r_2(t+u))| \\ &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} |d(r_1(t), r_2(t+u))| + \lim_{t \rightarrow +\infty} |d(r_1(t), (y, r_2(t+u)))| = 0. \end{aligned}$$

Proposición 2.3.4. La función $B_\xi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ cumple las siguientes propiedades:

1. $B_\xi(x, y) = -B_\xi(y, x)$.
2. $B_\xi(x, z) = B_\xi(x, y) + B_\xi(y, z)$.
3. $|B_\xi(x, y)| \leq d(x, y)$, donde la igualdad se da si y solo si x, y y ξ están alineados.

La prueba de la proposición anterior es muy sencilla, se deja como ejercicio al lector.

Decimos que $B_\xi(x, y)$ es la *distancia horoesférica* entre x e y . Este nombre se debe a que $|B_\xi(x, y)|$ es la distancia entre las *horoesferas* centradas en ξ , de x e y respectivamente. Estos conjuntos se definen por

$$\mathcal{H}_\xi(x) = \{z \in X : B_\xi(x, z) = 0\} \text{ y } \mathcal{H}_\xi(y) = \{z \in X : B_\xi(y, z) = 0\}.$$

Por último diremos que en el caso de los espacios $\text{CAT}(-1)$ el producto de Gromov entre puntos del borde puede expresarse en términos de la distancia horoesférica de la siguiente manera:

$$(\xi|\eta)_x = \frac{1}{2}(B_\xi(x, p) + B_\eta(x, p)) \text{ para cualquier punto } p \in (\xi, \eta).$$

2.3.3. Distancias visuales

Como mencionamos en la sección anterior, para $x \in X$ definimos $d_x : \partial X \times \partial X \rightarrow \mathbb{R}$ por $d_x(\xi, \eta) = e^{(\xi|\eta)_x}$ si $\xi \neq \eta$ y $d_x(\xi, \xi) = 0$. En el caso de los espacios $\text{CAT}(-1)$, d_x es efectivamente una métrica en ∂X y generan la topología ya definida en el borde (ver [Bou95]). Además es fácil ver que todas estas distancias visuales elípticas son bi-Lipschitz equivalentes. Más precisamente puede probarse que si x e y son dos puntos de X , entonces

$$d_x(\xi, \eta) = e^{\frac{1}{2}(B_\xi(x, y) + B_\eta(x, y))} d_y(\xi, \eta) \leq e^{-d(x, y)} d_y(\xi, \eta)$$

para todo $\xi, \eta \in \partial X$.

Tomemos ahora $F : X \rightarrow Y$ una cuasi-isometría entre espacios $\text{CAT}(-1)$. Se ve fácilmente por el Lema 2.2.13 que $\partial F : (\partial X, d_x) \rightarrow (\partial Y, d_{F(x)})$ es un homeomorfismo bi-Hölder. Las funciones bi-Hölder son ejemplos de funciones *cuasi-Möbius*, esto será importante más adelante. Para precisar lo que quiere decir esta condición hagamos las siguientes definiciones:

Definición 2.3.5. Sea (M, ρ) un espacio cuasi-métrico y $a, b, c, d \in M$. Definimos la razón doble como

$$[a, b, c, d] = \frac{\rho(a, c)\rho(b, d)}{\rho(a, d)\rho(b, c)}.$$

Una función $f : M \rightarrow N$ entre espacios cuasi-métricos se dice *Möbius* si preserva la razón doble, es decir que para todo $w, x, y, z \in M$ se cumple

$$[f(w), f(x), f(y), f(z)] = [w, x, y, z].$$

Decimos que f es *cuasi-Möbius* si existe un homeomorfismo creciente $\theta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ tal que para $w, x, y, z \in M$ se cumple que

$$[f(w), f(x), f(y), f(z)] \leq \theta([w, x, y, z]).$$

Dadas dos cuasi-métricas ρ_1 y ρ_2 en M , decimos que son *Möbius equivalentes* (respectivamente *cuasi-Möbius equivalentes*) si $Id : (M, \rho_1) \rightarrow (M, \rho_2)$ es un mapa Möbius (resp. cuasi-Möbius).

Consideremos ahora un punto $\xi_0 \in \partial X$. Notaremos $\partial_{\xi_0} X = \partial X - \{\xi_0\}$. A continuación definiremos una familia de métricas en $\partial_{\xi_0} X$.

Definición 2.3.6. Sea $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\xi_0}$ una horoesfera centrada en ξ_0 . Para ξ y η en $\partial_{\xi_0} X$ definimos

$$d_{\xi_0, \mathcal{H}}(\xi, \eta) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}(2t - d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)))},$$

donde γ_1 y γ_2 son las geodésicas que unen ξ_0 con ξ y η respectivamente y que cumplen que $\gamma_1(0), \gamma_2(0) \in \mathcal{H}$. Llamamos a $d_{\xi_0, \mathcal{H}}$ la *distancia visual parabólica* en $\partial_{\xi_0} X$ asociada a la horoesfera \mathcal{H} .

Sea ahora r un rayo geodésico con extremo en ξ_0 . Se puede ver que

$$d_{\xi_0, \mathcal{H}}(\xi, \eta) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} d_{r(t)}(\xi, \eta).$$

De acá se deduce que $d_{\xi, \mathcal{H}}$ es una métrica. Es un ejercicio sencillo verificar que para $x \in X$ y $\xi, \eta \in \partial_{\xi_0} X$, se cumple la siguiente igualdad:

$$d_{\xi_0, \mathcal{H}}(\xi, \eta) = e^{-\frac{1}{2}(B_\xi(x, p) + B_\eta(x, q))} d_x(\xi, \eta),$$

donde p y q son los puntos de intersección de \mathcal{H} con las geodésicas (ξ_0, ξ) y (ξ_0, η) . De aquí se deduce directamente que d_x y $d_{\xi_0, \mathcal{H}}$ son Möbius equivalentes cualesquiera que sean x, ξ_0 y \mathcal{H} , en particular son cuasi-Möbius equivalentes.

Recordemos que si $F : X \rightarrow Y$ es una cuasi-isometría entre espacios $CAT(-1)$ entonces el mapa inducido en el borde $\partial F : (\partial X, d_x) \rightarrow (Y, d_{F(x)})$ es un homeomorfismo cuasi-Möbius. Luego, para $\xi_0 \in \partial X$ tenemos que $\partial F|_{\partial_{\xi_0} X} : (\partial_{\xi_0} X, d_{\xi_0, \mathcal{H}}) \rightarrow (\partial_{\partial F(\xi_0)} Y, d_{F(\xi_0), \mathcal{H}'})$, donde \mathcal{H} y \mathcal{H}' son horoesferas en X e Y centradas en ξ_0 y $F(\xi_0)$ respectivamente, también es cuasi-Möbius.

Definición 2.3.7. Un homeomorfismo entre espacios cuasi-métricos $f : (M, \rho_1) \rightarrow (N, \rho_2)$ es *cuasi-simétrico* (o una *cuasi-simetría*) si existe un homeomorfismo creciente $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ tal que para todo $x, y, z \in M$ se cumple

$$\frac{\rho_2(f(x), f(y))}{\rho_2(f(x), f(z))} \leq \varphi \left(\frac{\rho_1(x, y)}{\rho_1(x, z)} \right).$$

Se dice más precisamente en este caso que f es φ -*cuasi-simétrico*. Si ρ_1 y ρ_2 son dos cuasi-métricas en M decimos que son *cuasi-simétricamente equivalentes* si $Id : (M, \rho_1) \rightarrow (M, \rho_2)$ es cuasi-simétrica.

Se observa fácilmente que si $f : (M, \rho_1) \rightarrow (N, \rho_2)$ es un homeomorfismo φ -cuasi-simétrico entonces su inverso f^{-1} es φ^{-1} -cuasi-simétrico.

El siguiente resultado de Väisälä [Väi84] muestra que existe una única diferencia esencial entre homeomorfismos cuasi-Möbius y cuasisimétricos en el caso de espacios métricos no acotados.

Teorema 2.3.8 (Väisälä). *Sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo entre espacios métricos no acotados. Si f es φ -cuasisimétrico, entonces f es θ -cuasi-Möbius con θ dependiendo sólo de φ . Si X es no acotado y f es un homeomorfismo θ -cuasi-Möbius que lleva sucesiones no acotadas en sucesiones no acotadas, entonces f es θ -cuasi-simétrico.*

Gracias al teorema anterior se ve que el mapa

$$\partial F|_{\partial_{\xi_0} X} : (\partial_{\xi_0} X, d_{\xi_0, \mathcal{H}}) \rightarrow (\partial_{\partial F(\xi_0)} Y, d_{F(\xi_0), \mathcal{H}'}),$$

inducido por una cuasi-isometría entre X e Y , es cuasi-simétrico.

2.4. Grupos y álgebras de Lie

Introduciremos brevemente la teoría de grupos y álgebras de Lie, en particular para el caso soluble y nilpotente. No daremos referencias detalladas a cada resultado por tratarse de un contenido más o menos conocido y apoyado por basta bibliografía. Citamos como posibles complementos de la lectura de esta sección, a [Kna13], [SW86] y [Oni90].

Definición 2.4.1. Una \mathbb{K} -álgebra de Lie es un espacio vectorial de dimensión finita A sobre un cuerpo \mathbb{K} con una forma bilineal alternada $[,] : A \times A \rightarrow A$ que cumple la identidad de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y \in A.$$

A $[,]$ se le llama *corchete de Lie*.

Ejemplo 2.4.2. Si M es un variedad diferenciables entonces el espacio de campos diferenciables sobre M , notado por $\mathcal{X}(M)$, con el corchete de Lie usual es un álgebra de Lie.

Una *subálgebra* de un álgebra de Lie A es un subespacio $V \subset A$ cerrado por el corchete de Lie. La *subálgebra generada* por un conjunto B de A es la mínima subálgebra que contiene a B . Dados dos subconjuntos $B, C \subset A$ definimos $[B, C]$ como la subálgebra generada por el conjunto

$$\{[X, Y] : X \in B, Y \in C\}.$$

Un *ideal* de A es una subálgebra I que cumple $[I, A] \subset I$. Notaremos $I \triangleleft A$ para indicar que I es un ideal de A . El *centro* de un álgebra de Lie A es $\mathfrak{z}(A) = \{X \in A : [X, A] = 0\}$. Es claro que $\mathfrak{z}(A)$ es un ideal de A .

Un *homomorfismo de álgebras de Lie* es un mapa lineal $\Phi : (A, [\ , \]) \rightarrow (A', [\ , \]')$ que cumple $\Phi[X, Y] = [\Phi X, \Phi Y]$ para todo $X, Y \in A$. En el caso de ser invertible diremos que es un *isomorfismo* o *automorfismo* si $(A', [\ , \]') = (A, [\ , \])$. Notaremos por $\text{Aut}(A)$ al espacio de automorfismos de un álgebra de Lie A .

Una *derivación* en A es un mapa lineal $\alpha : A \rightarrow A$ que cumple

$$\alpha[X, Y] = [\alpha X, Y] + [X, \alpha Y]$$

para todo par de vectores $X, Y \in A$. Notamos por $\text{Der}(A)$ al espacio de derivaciones de A . Este espacio es un álgebra de Lie con el corchete definido por $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$. Una familia especial de derivaciones son las de la forma $ad_X : A \rightarrow A$ para $X \in A$, definidas por $ad_X(Y) = [X, Y]$ para todo $Y \in A$. La derivación ad_X recibe el nombre de *adjunta* de X .

Recordemos que para un operador T se define su exponencial como

$$\text{Exp}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}.$$

En nuestro caso esta fórmula define un isomorfismo lineal $\text{Exp} : \text{Der}(A) \rightarrow \text{Aut}(A)$. También escribiremos e^α para referirnos a $\text{Exp}(\alpha)$.

Definición 2.4.3. Un *grupo de Lie* es una variedad diferenciable G con estructura de grupo con operaciones diferenciables.

Diremos que $H \leq G$ es un *subgrupo de Lie* si además de ser un subgrupo, es también una subvariedad inmersa en G . Si $H \leq G$ es un grupo cerrado de un grupo de Lie, entonces H es un subgrupo de Lie de G . Un *homomorfismo de grupos de Lie* es un homomorfismo de grupos diferenciable. Decimos que es un *isomorfismo* si además es un difeomorfismo y que es un *automorfismo* en el caso de un isomorfismo de un grupo en si mismo.

Tomemos ahora (G, \cdot) un grupo de Lie. Para $x \in G$ notemos $L_x : G \rightarrow G$ a la traslación a izquierda por x , es decir que $L_x(y) = x \cdot y$ para todo $y \in G$. Diremos que un campo X en G es *invariante a izquierda* si para todo $x \in X$ se cumple que

$$d_p(L_x)(X(p)) = X(L_x(p)).$$

Se observa fácilmente que si X e Y son campos invariantes a izquierda en G , entonces $[X, Y]$ también lo es.

Definición 2.4.4. El álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie G es $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ la subálgebra de campos invariantes a izquierda.

Observemos que un campo invariante a izquierda queda determinado por su valor en la unidad del grupo $e \in G$. Luego hay una biyección entre \mathfrak{g} y el espacio tangente $T_e G$ dada por $X \mapsto X(e)$.

Aquí es importante que enunciemos el siguiente resultado:

Proposición 2.4.5. *Si A es un álgebra de Lie sobre \mathbb{R} , existe un grupo de Lie conexo y simplemente conexo G , único a menos de isomorfismos, tal que $\text{Lie}(G) = A$.*

Tenemos entonces una relación biunívoca entre las álgebras de Lie sobre \mathbb{R} y los grupos de Lie simplemente conexos. Además, existe una biyección entre los homomorfismos de Grupos y los homomorfismos de álgebras de Lie $\mathcal{F} : \text{Hom}(G, G') \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$, dada por $f \mapsto d_e f$. Esta biyección lleva isomorfismos de grupos de Lie en isomorfismos de álgebras de Lie.

Definimos un mapa *exponencial* $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ de la siguiente manera. A cada $X \in \mathfrak{g}$ le corresponde un campo invariante por izquierda sobre G , consideremos $\varphi_X : \mathbb{R} \times G \rightarrow G$ el flujo determinado por dicho campo. Luego $\exp(X) = \varphi_X(1, e)$.

El mapa exponencial nos da un mapa biyectivo entre subálgebras de \mathfrak{g} y subgrupos de Lie conexos de G , el cual le asocia a cada subálgebra \mathfrak{h} el subgrupo cerrado generado por $\exp(\mathfrak{h})$. En virtud de este mapa se tiene que:

1. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de su imagen.
2. Los ideales se corresponden con subgrupos normales.

Por último enunciaremos la *formula de Baker-Campbell-Hausdorff*, que nos dará una relación explícita entre el producto en un grupo de Lie y el corchete en su correspondiente álgebra de Lie.

Proposición 2.4.6. *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie \mathfrak{g} y sean $x = \exp(X)$ e $y = \exp(Y)$ dos puntos de G . Luego*

$$x \cdot y = \exp \left(\sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{r_i+s_i>0 \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{(\sum_{i=1}^n (r_i + s_i))^{-1}}{r_1!s_1! \dots r_n!s_n!} [X^{r_1}, Y^{s_1}, \dots, X^{r_n}, Y^{s_n}] \right),$$

donde r_i y s_i son enteros no negativos y el sumando $[Z_1^{m_1}, Z_2^{m_2}, \dots, Z_k^{m_k}]$ es definido por inducción por $[Z_1] = Z_1$ y $[Z_1^{m_1}, Z_2^{m_2}, \dots, Z_k^{m_k}] = \text{ad}_{Z_1}([Z_1^{m_1-1}, Z_2^{m_2}, \dots, Z_k^{m_k}])$.

Nos será de utilidad más adelante la siguiente fórmula, que se desprende de la proposición anterior:

$$x^{-1}yx = \exp(X)^{-1} \exp(Y) \exp(X) = \exp \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\text{ad}_X^i(Y)}{i!} \right) \quad (2.2)$$

2.4.1. Productos semidirectos

Sean K y H dos grupos y $\theta : H \rightarrow \text{Aut}(K)$, $h \mapsto \theta_h$, un morfismo de grupos. Definimos el *producto semidirecto* de los grupos K y H como el grupo que consta del conjunto $K \times H$ y la operación

$$(k, h) \cdot (k', h') = (k \cdot \theta_h(k'), h \cdot h').$$

Lo notaremos por $K \rtimes_{\theta} H$. Este grupo contiene subgrupos isomorfos a K y H , siendo el primero un subgrupo normal. En el caso de que K y H son grupos de Lie y θ va a los automorfismos de grupos de Lie, entonces el producto semidirecto es también un grupo de Lie.

Por otro lado tomemos dos álgebras de Lie A y B y un homomorfismo $\pi : B \rightarrow \text{Aut}(A)$, $X \mapsto \pi_X$. Luego definimos el producto semidirecto de A con B como el espacio vectorial $A \oplus B$ con el corchete definido por

$$[X + Y, X' + Y'] = [X, X'] - \pi_{Y'}X + \pi_Y X + [Y, Y'].$$

El producto semidirecto de álgebras de Lie es un álgebra de Lie a la que notamos $A \rtimes_{\pi} B$. Además $A \triangleleft A \rtimes_{\pi} B$.

Hay una relación entre ambos productos semidirectos: si $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ y $\mathfrak{k} = \text{Lie}(K)$, entonces $\text{Lie}(K \rtimes_{\theta} H) = \mathfrak{k} \rtimes_{\pi} \mathfrak{h}$ donde π_X es determinado por el automorfismo $d_e \theta_x$, donde $x = \exp(X)$.

Nos interesarán particularmente los productos semidirectos de grupos de Lie de forma $N \rtimes_{\theta} \mathbb{R}$ y por lo tanto de álgebras de Lie de la forma $\mathfrak{n} \rtimes_{\pi} \mathbb{R}$. En este caso $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{n})$ queda determinado por $\pi(1)$ ya que por linealidad $\pi(t) = t\pi(1)$. Además $\pi(1) = \alpha$ para una derivación α . Luego tiene sentido utilizar la notación $\mathfrak{n} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R} = \mathfrak{n} \rtimes_{\pi} \mathbb{R}$ y por consiguiente, como escribimos anteriormente, $N \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$.

2.4.2. Grupos y álgebras de Lie solubles

Sea A un álgebra de Lie. La *sucesión derivada* de A es una sucesión de subálgebras $\{A^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $A^0 = A$ y $A^{n+1} = [A^n, A^n]$. En particular A^1 se denomina *álgebra derivada* de A y se denota también por A' .

Definición 2.4.7. Decimos que el álgebra de Lie A es *soluble* si su sucesión derivada se anula, es decir, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$.

El ejemplo trivial de álgebra de Lie soluble es cuando $[X, Y] = 0$ para todo X e Y . En este caso diremos que el álgebra es *abeliana*.

Definición 2.4.8. Un grupo G es *soluble* si la sucesión

$$G_0 = G \triangleleft G^1 \triangleleft \dots \triangleleft G^n \triangleleft \dots$$

se anula en algún momento, es decir, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$. Donde G^{n+1} es $[G^n, G^n]$ el conmutador del grupo G^n .

Como es de esperarse, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.4.9. *Un grupo de Lie es soluble si y sólo si su álgebra de Lie es soluble.*

Más adelante necesitaremos utilizar cierta propiedad de la estructura de los grupos de Lie solubles para probar el Teorema 1.0.4. Lo último de esta parte será enunciar dicho resultado.

Definición 2.4.10. Un grupo de Lie G es k -soluble si es soluble y G/T simplemente conexo, donde T es el único subgrupo compacto maximal en el centro de G .

Teorema 2.4.11. *Sea G un grupo de Lie conexo y soluble. Entonces $G = L \rtimes K$ donde L es un subgrupo cerrado y k -soluble y K es un subgrupo compacto.*

Para la prueba ver [Mal45].

2.4.3. Grupos y álgebra de Lie Nilpotentes

La *sucesión central descendente* de un álgebra de Lie A es $\{A^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde $A^{(0)} = A$ y $A^{(n+1)} = [A, A^{(n)}]$. Notar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^{(n+1)}$ es un ideal de $A^{(n)}$.

Definición 2.4.12. Decimos que A es *nilpotente* si su sucesión central descendente se anula en algún momento. En este caso, el *índice de nilpotencia* de A es el mínimo n tal que $A^{(n)} = 0$.

A continuación escribimos un par de propiedades referentes a las álgebras de Lie nilpotentes.

Proposición 2.4.13. *Sea A un álgebra de Lie.*

1. *A es nilpotente si y sólo si para todo $x \in A$ se tiene que ad_x es nilpotente, es decir que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(ad_x)^n = 0$.*
2. *A es soluble si y sólo si A' es nilpotente.*

Definición 2.4.14. Un grupo G es *nilpotente* si la sucesión

$$G_0 = G \triangleleft G^{(1)} \triangleleft \dots \triangleleft G^{(n)} \triangleleft \dots$$

eventualmente se anula, donde $G^{(n+1)} = [G, G^{(n)}]$. De forma análoga a como lo hicimos con álgebras de Lie se define el *índice de nilpotencia* de G .

De forma similar a lo que sucede con los grupos solubles, tenemos lo siguiente:

Proposición 2.4.15. *Un grupo de Lie es nilpotente si su álgebra de Lie lo es.*

Si G es un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo, entonces $\exp : \text{Lie}(G) = \mathfrak{g} \rightarrow G$ es un difeomorfismo. Esto será usado más adelante.

Capítulo 3

Grupos de Heintze

El objetivo de este capítulo es probar el Teorema 1.0.4 y estudiar el borde al infinito de los grupos de Heintze. Comenzaremos sin embargo con algunos ejemplos y generalidades sobre su geometría a gran escala.

3.1. Generalidades

Ejemplo 3.1.1. Veamos que el espacio hiperbólico real \mathbb{H}^n es isométrico a $G_{Id} = \mathbb{R}^{n-1} \rtimes_{Id} \mathbb{R}$ con cierta métrica invariante a izquierda.

La estructura de producto semidirecto está dado por un morfismo $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^{n-1})$ que cumple $d_0\tau(t) = e^{tId} = e^t Id$. Como los automorfismos de \mathbb{R}^{n-1} son lineales tenemos que $\tau(t) = e^t Id$, por lo tanto el producto en G_{Id} está dado por $(x, t) \cdot (y, s) = (x + e^t y, t + s)$. Pongamos la métrica invariante a izquierda inducida por el producto interno usual en $T_{(0,0)}G_{Id} = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Explícitamente nos queda

$$\langle v, w \rangle_{(x,t)} = \langle (d_0L_{(x,t)})^{-1}v, (d_0L_{(x,t)})^{-1}w \rangle = \frac{v_1w_1 + \dots + v_{n-1}w_{n-1}}{e^{2t}} + v_nw_n.$$

Donde $L_{(x,t)}$ es la traslación a izquierda por (x, t) y $v = (v_1, \dots, v_n)$ y $w = (w_1, \dots, w_n)$ son dos elementos de $T_{(x,t)}G_{Id} = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Luego se verifica fácilmente que el mapa $f : G_{Id} \rightarrow \mathbb{H}^n$ definido por $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, e^{x_n})$ es una isometría.

El espacio hiperbólico real \mathbb{H}^n es un ejemplo de espacio simétrico. Explicaremos brevemente de qué se tratan estos espacios. Supongamos que M es una variedad Riemanniana conexa y x un punto de M . Existe una bola $B \subset T_x M$ en el cual el mapa exponencial $\exp : B \rightarrow M$ es un difeomorfismo sobre su imagen¹. La simetría $v \mapsto -v$ en B induce un mapa en $\exp(B)$ al que llamaremos simetría local de centro x . Decimos que M es simétrico si las simetrías locales con centros en puntos de M se pueden extender a isometrías en M .

¹Tener en cuenta que estamos utilizando la misma notación para el mapa exponencial de variedades Riemannianas y el definido para grupos de Lie.

Es sencillo probar que un espacio simétrico, simplemente conexo y de curvatura negativa es homogéneo: dados dos puntos x e y , llamemos z al punto medio del segmento geodésico que los une. La simetría de centro z lleva x en y .

El estudio de los espacios simétricos escapa a los objetivos de este trabajo por lo que no entraremos en detalles. Sin embargo nos gustaría mencionar que existe una clasificación completa de los espacios simétricos de curvatura negativa, estos son:

- Espacios hiperbólicos reales \mathbb{H}^n .
- Espacios hiperbólicos complejos $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$.
- Espacios hiperbólicos de cuaterniones $H\mathbb{H}^n$.
- El plano hiperbólico de octoniones $\mathbb{C}a\mathbb{H}^2$.

Para más detalles sobre esta caracterización puede consultarse [Hei74, Sección 5].

Comencemos a dar los primeros pasos hacia la comprensión de las cuasi-isometrías entre grupos de Heintze con la siguiente proposición general sobre grupos de Lie:

Proposición 3.1.2. *Sea G un grupo de Lie y g, g' dos métricas Riemannianas invariantes a izquierda. Llamemos d y d' a las distancias inducidas por g y g' respectivamente. Luego $id : (G, d) \rightarrow (G, d')$ es bi-Lipschitz.*

Demostración. Notemos $\|v\|_x = \sqrt{g_x(v, v)}$ y $\|v\|'_x = \sqrt{g'_x(v, v)}$. Como todas las normas son equivalentes en espacios de dimensión finita tenemos que existe $C > 0$ tal que para todo $v \in T_e G$

$$\frac{1}{C}\|v\|_e \leq \|v\|'_e \leq C\|v\|_e$$

En general, para $x \in G$ tenemos

$$\frac{1}{C}\|v\|_x = \frac{1}{C}\|(d_e L_x)^{-1}v\|_e \leq \|(d_e L_x)^{-1}v\|'_e = \|v\|'_x \leq C\|(d_e L_x)^{-1}v\|_e = C\|v\|_x$$

para todo $v \in T_x G$.

Si ahora α es una curva que une dos puntos x e y , se deduce directamente de la desigualdad anterior que

$$\frac{1}{C}\text{long}_g(\alpha) \leq \text{long}_{g'}(\alpha) \leq C\text{long}_g(\alpha).$$

Tomando ínfimos nos queda

$$\frac{1}{C}d(x, y) \leq d'(x, y) \leq Cd(x, y).$$

□

Como ya mencionamos en la Introducción, lo anterior permite hablar de cuasi-isometrías entre grupos de Heintze independientemente de la métrica Riemanniana invariante a izquierda. Además, la proposición anterior permite deducir directamente el siguiente resultado:

Corolario 3.1.3. *Dos grupos de Heintze con métricas invariantes a izquierda isomorfos son necesariamente cuasi-isométricos.*

Luego parece natural comenzar nuestro estudio encontrando algunos isomorfismos sencillos entre grupos de Heintze. Esto nos dará un primer panorama sobre las clases de cuasi-isometría. Como el álgebra de Lie de un grupo de Heintze $N \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ es $\mathfrak{n} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$, donde \mathfrak{n} es al álgebra de Lie de N (recordar la Sección 2.4), podemos traducir el problema a encontrar isomorfismos entre estas álgebras de Lie.

Proposición 3.1.4. 1. Sean α y β son dos derivaciones de $\mathfrak{n} = \text{Lie}(N)$. Si existe un automorfismo de \mathfrak{n} que las conjuga entonces $N \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ y $N \rtimes_{\beta} \mathbb{R}$ son isomorfos.

2. Para todo $\lambda > 0$ los grupos $N \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ y $N \rtimes_{\lambda\alpha} \mathbb{R}$ son isomorfos.

Demostración. 1. Supongamos que $\gamma \in \text{Aut}(\mathfrak{n})$ es un automorfismo tal que $\beta = \gamma\alpha\gamma^{-1}$. Veremos que hay un isomorfismo entre $\mathfrak{n} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ y $\mathfrak{n} \rtimes_{\beta} \mathbb{R}$. Esto, junto con la Proposición 2.4.5, implica que los grupos son isomorfos.

Definimos $\Phi : \mathfrak{n} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{n} \rtimes_{\beta} \mathbb{R}$ por $\Phi(X + T) = \gamma X + T$. Es claro que es lineal, biyectivo y que es un automorfismo al restringirlo a cada uno de los factores. Sólo resta probar que $\Phi([T, X]) = [\Phi(T), \Phi(X)]$. Pero esto es muy sencillo:

$$\Phi([T, X]) = \Phi(T\alpha X) = T\Phi(\alpha X) = T\gamma\alpha X = T\beta\gamma X = [\Phi(T), \Phi(X)]$$

2. Este punto es también muy sencillo, basta considerar el automorfismo $\Theta : \mathfrak{n} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{n} \rtimes_{\lambda\alpha} \mathbb{R}$ definido por $\Theta(X + T) = X + \lambda^{-1}T$.

□

Observar que en el punto 1 de la demostración se puede ver que

El punto 2 de la Proposición 3.1.4 nos dice que existe una sola clase de cuasi-isometría entre grupos de Heintze de dimensión 2. Es decir que todo grupo de Heintze de dimensión 2 es cuasi-isométrico al plano hiperbólico. Hecho que por otro lado es una consecuencia directa del Teorema de Uniformización (ver [DC92, Capítulo 8, Sección 4]).

Ya mencionamos que todo grupo de Heintze es cuasi-isométrico a uno puramente real. Para ilustrar esto veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.5. Consideremos en \mathbb{R}^2 la derivación

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $1 + i$ y $1 - i$. Procediendo de igual forma que en el Ejemplo 3.1.1 se tiene que la métrica Riemanniana invariante a izquierda en $G_\alpha = \mathbb{R}^2 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ dada por el producto interno usual en $T_{(0,0)}G_\alpha$ está dada por

$$\langle v, w \rangle_{(x,t)} = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{e^{2t}} + v_3 w_3,$$

donde $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$. Es decir que G_α es isométrico a $G_{Id} = \mathbb{R}^2 \rtimes_{Id} \mathbb{R}$. Sin embargo estos grupos no son isomorfos, probemos esto por absurdo. Sean \mathfrak{g}_α y \mathfrak{g}_{Id} sus álgebras de Lie y supongamos que $\gamma : \mathfrak{g}_\alpha \rightarrow \mathfrak{g}_{Id}$ es un isomorfismo. Al ser un isomorfismo tenemos que γ lleva \mathfrak{g}'_α en \mathfrak{g}'_{Id} . Luego para $X \in \mathfrak{g}'_\alpha$ tenemos

$$\gamma \alpha X = \gamma[1, X] = [\gamma 1, \gamma X] = [t_0, \gamma X] + [X_0, \gamma X] = t_0 \gamma X,$$

donde $\gamma(1) = t_0 + X_0$. De aquí se deduce que α y $t_0 Id$ tienen la misma forma de Jordan, lo cual es absurdo.

3.2. Caracterización de variedades homogéneas de curvatura negativa

Sea M una variedad Riemanniana homogénea, conexa, de curvatura negativa. Kobayashi ([Kob62]) prueba que una variedad de este tipo es siempre simplemente conexa y por lo tanto difeomorfa a un espacio euclídeo. Para el siguiente teorema citamos

La estructura de grupo de Lie de M saldrá de un subgrupo de isometrías soluble. Sin embargo no es claro en principio que este exista. Por ejemplo, $\text{Isom}(\mathbb{H}^2) = PSL(2, \mathbb{R})$, que no es soluble. Usaremos entonces el siguiente teorema, para el cual citamos [Wol64].

Teorema 3.2.1 (Wolf). *Sea M una variedad Riemanniana homogénea, conexa, y de curvatura no positiva. Entonces existe un grupo de isometrías de M soluble y transitivo.*

Vamos a ver que además dicho subgrupo lo podemos tomar con otras buenas propiedades.

Lema 3.2.2. *Sea $G \leq \text{Isom}(M)$ soluble y transitivo. Entonces:*

1. *La clausura $\overline{G} \leq \text{Isom}(M)$ también lo es.*
2. *Si G es cerrado entonces la componente conexa de la identidad G_e es un grupo soluble, transitivo y cerrado.*

Demostración. 1. Probaremos por inducción que $\overline{G}^k \subset \overline{G^k}$. Para $k = 0$ es claro que se cumple. Suponemos que es verdad para k , vemos que

$$\overline{G}^{k+1} = [\overline{G}^k, \overline{G}^k] \subset [\overline{G^k}, \overline{G^k}] \subset \overline{[G^k, G^k]}.$$

Para lo cual sólo falta probar la última inclusión. Sean $g_n \rightarrow g$ y $h_n \rightarrow h$ con $g_n, h_n \in G^k$. Luego $g_n h_n g_n^{-1} h_n^{-1} \rightarrow g h g^{-1} h^{-1}$, es decir que $g h g^{-1} h^{-1} \in \overline{[G^k, G^k]}$.

2. Es claro que G_e es cerrado y soluble. Veamos que es un subgrupo. Tomemos $g, h \in G_e$ y g_t, h_t dos curvas en G_e que unen la unidad e con g e h respectivamente. Luego $g_t h_t$ es una curva que une e con gh .

Para probar que es transitivo es suficiente con ver que hay una orbita abierta. Supongamos que tenemos $g(p) = q$ y que existe $\{g_n\} \subset G$ con $g_n \notin G_e$ tal que $g_n(p) = q_n \rightarrow q$, luego $g^{-1}g_n(p) \rightarrow p$.

Por Arzelá-Ascoli existe una subsucesión g_n tal que $g^{-1}g_n \rightarrow h$ tal que $h(p) = p$. Ahora $g^{-1}g_n h^{-1} \rightarrow e \in G_e$. Como para n suficientemente grande $gg_n h^{-1} \in G_e$ tenemos que g_n está en G_e para n suficientemente grande. Lo que contradice lo supuesto.

□

La proposición anterior nos dice que existe un subgrupo de isometrías $G \leq \text{Isom}(M)$, soluble, transitivo, conexo y cerrado. Como es cerrado en $\text{Isom}(M)$ (que es un grupo de Lie), entonces tiene estructura de grupo de Lie (consultar [Bal00]).

Proposición 3.2.3. *La variedad homogénea de curvatura negativa y conexa M admite una estructura de grupo de Lie soluble con una métrica invariante a izquierda.*

Demostración. Por el Teorema 2.4.11, tenemos que nuestro grupo G puede escribirse como producto semidirecto de L y K donde $L \triangleleft G$ es cerrado y k -soluble y K es compacto. Recordemos que tenemos un subgrupo normal T de L que es compacto maximal, está incluido en el centro de L y L/T es simplemente conexo.

Como K es compacto, debe fijar un punto p en M (ver [Hel79, Teorema 13.5]). De aquí sale fácilmente que L es transitivo: para todo $q \in M$ existe $lk \in G$ con $l \in L$ y $k \in K$ tal que $lk(p) = l(p) = q$.

Por lo tanto podemos identificar M con L/H , donde $H = \text{Stab}(p)$. La compacidad de H implica que $H \subset T \subset Z(L)$ (donde $Z(L)$ es el centro de L), luego H es normal y al tener un punto fijo debe actuar trivialmente en M . Como la acción de H en M es fiel, se tiene que $H = \{Id\}$. □

La proposición anterior nos permite identificar M con un grupo de Lie soluble G , ahora nos resta estudiar la estructura del grupo G con la métrica inducida por su identificación con M .

El tensor de curvatura es una función $\mathcal{R} : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \rightarrow \mathcal{X}(G)$ definida por

$$\mathcal{R}(X, Y, Z) = \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z,$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita y la curvatura seccional en un punto $x \in G$ y un plano en $T_x G$ generado por u y v se calcula

$$K_x(u, v) = \langle \mathcal{R}(X, Y, X), Y \rangle,$$

donde $X(x) = u$ y $Y(x) = v$. La curvatura de un plano π en $T_x G$ es $K_x(\pi) = K_x(u, v)$ con $\{u, v\}$ base ortonormal de π . Podemos definir la curvatura en $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ como la función $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$, $\kappa(X, Y) = K_e(X(e), Y(e))$. Como G tiene curvatura negativa es claro que $\kappa(X, Y)$ va a ser negativa para todo X e Y .

Para tener una fórmula un poco más manejable para κ estudiemos la conexión de Levi-Civita en G restringida a los campos invariantes a izquierda. Sean X, Y y Z en \mathfrak{g} , sabemos que

1. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (la conexión es libre de torsión).
2. $\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle = 0$.

Donde el segundo punto se debe a la compatibilidad de la conexión con la métrica, y a que $\langle Y, Z \rangle$ es constante. Luego tenemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= -\langle Y, \nabla_X Z \rangle = -\langle Y, \nabla_Z X \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle \\ &= \langle [Z, X], Y \rangle + \langle \nabla_Z Y, X \rangle \\ &= \langle [Z, X], Y \rangle + \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle [Z, Y], X \rangle \\ &= \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ &= \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle Z, \nabla_X Y \rangle. \end{aligned}$$

Entonces

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} (\langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle)$$

Obtenemos entonces $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] + U(X, Y)$ con U bilineal simétrica dada por

$$\langle U(X, Y), Z \rangle = \frac{1}{2} \langle [Z, Y], X \rangle + \frac{1}{2} \langle [Z, X], Y \rangle \quad (3.1)$$

para todo $Z \in \mathfrak{g}$.

Calculemos ahora la curvatura seccional determinada por $X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \kappa(X, Y) &= \langle R(X, Y, X), Y \rangle = \langle \nabla_{[X, Y]} X - \nabla_X \nabla_Y X + \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle \\ &= \langle U([X, Y], X), Y \rangle + \frac{1}{4} \langle [[X, Y], X], Y \rangle - \langle U(X, U(Y, X)), Y \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle U(X, [Y, X]), Y \rangle - \frac{1}{2} \langle [X, U(Y, X)], Y \rangle + \langle U(Y, U(X, X)), Y \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle [Y, U(X, X)], Y \rangle \end{aligned}$$

Aplicando (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \kappa(X, Y) &= -\frac{3}{4} \|[X, Y]\|^2 - \frac{3}{4} \langle [Y, [Y, X]], X \rangle - \frac{1}{4} \langle [X, [X, Y]], Y \rangle - \frac{1}{2} \langle [Y, U(X, Y)], X \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle [Y, X], U(X, Y) \rangle - \frac{1}{2} \langle [X, U(X, Y)], Y \rangle + \langle [Y, U(X, X)], Y \rangle \end{aligned}$$

Usando que $\langle U(X, X), U(Y, Y) \rangle = \langle [U(X, X), Y], Y \rangle$ y que $\langle U(X, Y), U(X, Y) \rangle = \frac{1}{2} \langle [U(X, Y), Y], X \rangle + \frac{1}{2} \langle [U(X, Y), X], Y \rangle$ nos queda

$$\begin{aligned} \kappa(X, Y) &= -\frac{3}{4} \| [X, Y] \|^2 - \frac{3}{4} \langle X, [Y, [Y, X]] \rangle - \frac{1}{4} \langle Y, [X, [X, Y]] \rangle + \| U(X, Y) \|^2 \\ &\quad - \langle U(X, X), U(Y, Y) \rangle - \frac{1}{4} \langle X, [[Y, X], Y] \rangle - \frac{1}{4} \langle Y, [[X, Y], X] \rangle \\ &= -\frac{3}{4} \| [X, Y] \|^2 - \frac{1}{2} \langle X, [Y, [Y, X]] \rangle - \frac{1}{2} \langle Y, [X, [X, Y]] \rangle \\ &\quad + \| U(X, Y) \|^2 - \langle U(X, X), U(Y, Y) \rangle. \end{aligned}$$

Una observación importante a hacer en este punto es que la curvatura puede ser definida para cualquier álgebra de Lie con producto interno, vía la fórmula de arriba. De aquí en más trabajaremos con estos objetos, que son más simples que los grupos de Lie con métricas Riemannianas. La siguiente proposición nos da información importante sobre la estructura de \mathfrak{g} .

Proposición 3.2.4. *Sea $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un álgebra de lie soluble con producto interno y curvatura negativa. Luego se cumplen las siguientes condiciones:*

- (a) $\dim(\mathfrak{g}') = \dim(\mathfrak{g} - 1)$ donde $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.
- (b) Existe un vector unitario $A \in \mathfrak{g}$ ortogonal a \mathfrak{g}' tal que la parte simétrica de $ad(A)|_{\mathfrak{g}'}$ es definida positiva.
- (c) Si $ad(A)|_{\mathfrak{g}'} = \mathcal{D} + \mathcal{S}$ es la descomposición en parte simétrica y antisimétrica entonces $\mathcal{D}^2 + \mathcal{D}\mathcal{S} - \mathcal{S}\mathcal{D} : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}'$ es definida positiva.

Demostración. Sea A un vector de norma 1 en $(\mathfrak{g}')^\perp$. Si X es ortogonal a A entonces

$$\begin{aligned} \kappa(A, X) &= \| U(X, Y) \|^2 - \langle U(A, A), U(X, X) \rangle - \frac{3}{4} \| [A, X] \|^2 - \frac{1}{2} \langle [A, [A, X]], X \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle [X, [X, A]], A \rangle = \| U(X, Y) \|^2 - \frac{3}{4} \| [A, X] \|^2 - \frac{1}{2} \langle [A, [A, X]], X \rangle \end{aligned}$$

Como la curvatura es negativa, $[A, X] \neq 0$ para todo $X \in A^\perp$. Es decir que $ad(A)|_{A^\perp} : A^\perp \rightarrow \mathfrak{g}'$ es inyectiva, lo que implica que $\dim(A^\perp) \leq \dim(\mathfrak{g}')$. Como \mathfrak{g} es soluble no puede pasar que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$, y como $A^\perp \subset \mathfrak{g}'$ debe suceder que $\mathfrak{g}' = A^\perp$. Esto prueba (a).

Observamos que si Z es un elemento no nulo en el centro de \mathfrak{g}' , se cumple $\kappa(X, Z) = \| U(X, Z) \|^2 - \langle U(X, X), U(Z, Z) \rangle$.

Si $U(X, X) = \lambda A + Y$ con $Y \in \mathfrak{g}'$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle U(Z, Z), \lambda A + Y \rangle &= \lambda \langle U(Z, Z), A \rangle + \langle U(Z, Z), Y \rangle \\ &= \langle U(X, X), A \rangle \langle U(Z, Z), A \rangle + \langle Z, [Y, Z] \rangle \\ &= \langle U(X, X), A \rangle \langle U(Z, Z), A \rangle. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\kappa(X, Z) &= \|U(X, Z)\|^2 - \langle U(X, X), A \rangle \langle U(Z, Z), A \rangle \\ &= \|U(X, Z)\|^2 - \langle [A, X], X \rangle \langle [A, Z], Z \rangle.\end{aligned}$$

Nuevamente la curvatura negativa nos dice que $\langle [A, X], X \rangle \langle [A, Z], Z \rangle > 0$ y por lo tanto el signo de

$$\langle \mathcal{D}X, X \rangle = \langle (\mathcal{D} + \mathcal{S})X, X \rangle = \langle [A, X], X \rangle$$

no depende de X . Luego \mathcal{D} es definida positiva o definida negativa, en el segundo caso cambiamos A por $-A$ y deducimos (b).

Ahora vamos a probar (c). Para esto tomemos A como en (b) y calculemos la curvatura de la sección determinada por A y X :

$$\begin{aligned}\kappa(A, X) &= \|U(A, X)\|^2 - \frac{3}{4}\|[A, X]\|^2 - \frac{1}{2}\langle [A, [A, X]], X \rangle \\ &\quad - \langle U(A, A), U(X, X) \rangle - \frac{1}{2}\langle [X, [X, A]], A \rangle.\end{aligned}$$

Como A es perpendicular a \mathfrak{g}' tenemos que $U(A, A) = 0$. Entonces

$$\kappa(A, X) = \|U(A, X)\|^2 - \frac{3}{4}\|[A, X]\|^2 - \frac{1}{2}\langle [A, [A, X]], X \rangle.$$

Es fácil ver que $U(A, X) = \frac{1}{2}(\mathcal{S} - \mathcal{D})X$, de donde se deduce

$$\begin{aligned}\kappa(A, X) &= \frac{1}{4}\langle (\mathcal{S} - \mathcal{D})X, (\mathcal{S} - \mathcal{D})X \rangle - \frac{3}{4}\langle (\mathcal{S} + \mathcal{D})X, (\mathcal{S} + \mathcal{D})X \rangle - \frac{1}{2}\langle (\mathcal{S} + \mathcal{D})^2 X, X \rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle (-\mathcal{S}^2 + \mathcal{S}\mathcal{D} - \mathcal{D}\mathcal{S} + \mathcal{D}^2)X, X \rangle - \frac{3}{4}\langle (-\mathcal{S}^2 - \mathcal{S}\mathcal{D} + \mathcal{D}\mathcal{S} + \mathcal{D}^2)X, X \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2}\langle (\mathcal{S}^2 + \mathcal{S}\mathcal{D} + \mathcal{D}\mathcal{S} + \mathcal{D}^2)X, X \rangle \\ &= \langle (-\mathcal{D}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{S}\mathcal{D} - \frac{3}{2}\mathcal{D}\mathcal{S})X, X \rangle + \frac{1}{2}\langle (\mathcal{S}\mathcal{D} + \mathcal{D}\mathcal{S})X, X \rangle \\ &= \langle (-\mathcal{D}^2 + \mathcal{S}\mathcal{D} - \mathcal{D}\mathcal{S})X, X \rangle\end{aligned}$$

Como esto es siempre menor a cero, $\mathcal{D}^2 + \mathcal{D}\mathcal{S} - \mathcal{S}\mathcal{D}$ es definida positiva. \square

Ahora consideremos $ad : \mathbb{R} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}')$ definida por $ad(t)A = ad(tA)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}' \rtimes_{ad} \mathbb{R}$. De aquí resulta que $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{g}$ por $(\lambda, X) \mapsto \lambda A + X$. En conclusión, tenemos que \mathfrak{g} es isomorfo a un producto semidirecto de \mathbb{R} con un álgebra de Lie nilpotente. Como \mathcal{D} es definida positiva, la derivación $ad(A)$ tiene valores propios con parte real positiva, de esta forma probamos la primera parte del Teorema 1.0.4.

Proposición 3.2.5. *Sea $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un álgebra de Lie soluble con producto interno y derivada \mathfrak{g}' abeliana. Entonces admite una métrica Riemanniana con curvatura negativa si y sólo si cumple las condiciones (a), (b) y (c).*

Demostración. Sólo hay que probar que dichas condiciones implican que la curvatura es negativa. Tomemos un plano π de \mathfrak{g} generado por $\{\lambda A + \mu X, Y\}$ donde X e Y son ortonormales en \mathfrak{g}' y $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. Entonces

$$\kappa(\lambda A + \mu X, Y) = \lambda^2 \kappa(A, Y) + \mu^2 \kappa(X, Y).$$

Por un lado

$$\begin{aligned} \kappa(A, Y) &= \|U(A, Y)\|^2 - \langle U(A, A), U(Y, Y) \rangle - \frac{3}{4} \| [A, Y] \|^2 - \frac{1}{2} \langle [A, [A, Y]], Y \rangle \\ &= \langle \frac{1}{2}(\mathcal{S} - \mathcal{D})Y, \frac{1}{2}(\mathcal{S} - \mathcal{D})Y \rangle - \frac{3}{4} \langle (\mathcal{S} + \mathcal{D})Y, (\mathcal{S} + \mathcal{D})Y \rangle - \frac{1}{2} \langle (\mathcal{S} + \mathcal{D})^2 Y, Y \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle (\mathcal{D}^2 - \mathcal{D}\mathcal{S} + \mathcal{S}\mathcal{D} - \mathcal{S}^2)Y, Y \rangle - \frac{3}{4} \langle (\mathcal{D}^2 + \mathcal{D}\mathcal{S} - \mathcal{S}\mathcal{D} - \mathcal{S}^2)Y, Y \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle (\mathcal{D}^2 + \mathcal{S}\mathcal{D} + \mathcal{D}\mathcal{S} + \mathcal{S}^2)Y, Y \rangle \\ &= - \langle (\mathcal{D}^2 + \mathcal{D}\mathcal{S} - \mathcal{S}\mathcal{D})Y, Y \rangle < 0. \end{aligned}$$

Además, como \mathfrak{g}' es abeliana

$$\kappa(X, Y) = \|U(X, Y)\|^2 - \langle U(X, X), U(Y, Y) \rangle.$$

Suponiendo que $U(X, Y) = \lambda_1 A + Z_1$ y $U(Y, Y) = \lambda_2 A + Z_2$ con Z_1 y Z_2 en \mathfrak{g}' , nos queda

$$\begin{aligned} \|U(X, Y)\|^2 &= \langle U(X, Y), U(X, Y) \rangle = \langle U(X, Y), \lambda_1 A + Z_1 \rangle \\ &= \frac{\lambda_1}{2} \langle X, [A, Y] \rangle + \frac{\lambda_1}{2} \langle Y, [A, X] \rangle \\ &= \frac{\lambda_1}{2} \langle X, (\mathcal{D} + \mathcal{S})Y \rangle + \frac{\lambda_1}{2} \langle Y, (\mathcal{D} + \mathcal{S})X \rangle \\ &= \lambda_1 \langle \mathcal{D}X, Y \rangle = \langle \mathcal{D}X, Y \rangle \mathcal{D}X, Y \langle \rangle = \langle \mathcal{D}X, Y \rangle^2. \end{aligned}$$

Donde en la última igualdad usamos que $\lambda_1 = \langle U(X, Y), A \rangle = \langle \mathcal{D}X, Y \rangle$. De forma similar se puede ver que $\langle U(X, X), U(Y, Y) \rangle = \langle \mathcal{D}X, X \rangle \langle \mathcal{D}Y, Y \rangle$. Nos queda entonces

$$\kappa(X, Y) = \langle \mathcal{D}X, Y \rangle^2 - \langle \mathcal{D}X, X \rangle \langle \mathcal{D}Y, Y \rangle.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz esto es menor a 0. Luego la curvatura de $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es negativa. \square

Ahora tomemos un álgebra de Lie soluble cualquiera \mathfrak{g} con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que cumple las condiciones (a), (b) y (c). Tenemos la descomposición ortogonal $\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \oplus \mathfrak{g}'$. Si $\lambda > 0$, definimos \mathfrak{g}_λ el álgebra de Lie que sólo difiere de \mathfrak{g} en el corchete entre $\mathbb{R}A$ y \mathfrak{g}' , que está definido por

$$[A, X]_\lambda = \lambda[A, X]$$

para todo $X \in \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'_\lambda$. Es claro que \mathfrak{g} y \mathfrak{g}_λ son álgebras de Lie isomorfas.

Proposición 3.2.6. *Sea $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un álgebra de Lie soluble con producto interno que cumple (a), (b) y (c). Luego existe $\lambda_0 > 0$ tal que $(\mathfrak{g}_\lambda, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tiene curvatura negativa para todo $\lambda \geq \lambda_0$.*

Demostración. Por un argumento de compacidad², es suficiente con probar que para todo 2-plano $\pi \subset \mathfrak{g}$ existe $\lambda_0(\pi) > 0$ tal que $\kappa_\lambda(\pi) < 0$ para todo $\lambda \geq \lambda_0(\pi)$. Donde κ_λ es la curvatura seccional en \mathfrak{g}_λ .

Sea π el plano en \mathfrak{g} generado por $\alpha A + \beta X$ e Y , donde $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ y $\{X, Y\} \subset \mathfrak{g}'$ es un conjunto ortonormal. Luego para $\lambda > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \kappa_\lambda(\pi) &= \kappa_\lambda(\alpha A + \beta X, Y) \\ &= \|U_\lambda(\alpha A + \beta X, Y)\|^2 - \langle U_\lambda(\alpha A + \beta X, \alpha A + \beta X), U_\lambda(Y, Y) \rangle \\ &\quad - \frac{3}{4} \|[\alpha A + \beta X, Y]_\lambda\|^2 - \frac{1}{2} \langle [\alpha A + \beta X, [\alpha A + \beta X, Y]_\lambda]_\lambda, Y \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle [Y, [Y, \alpha A + \beta X]_\lambda]_\lambda, \alpha A + \beta X \rangle. \end{aligned}$$

Desarrollando y agrupando los sumandos, obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \kappa_\lambda(\pi) &= \alpha^2 \left(\|U_\lambda(A, Y)\|^2 - \langle U_\lambda(A, A), U_\lambda(Y, Y) \rangle - \frac{3}{4} \lambda^2 \| [A, Y] \|^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \langle [A, [A, Y]], Y \rangle \right) \\ &\quad + (\beta^2 \|U_\lambda(X, Y)\|^2 - \beta^2 \langle U_\lambda(X, X), U_\lambda(Y, Y) \rangle + 2\alpha\beta \langle U_\lambda(A, Y), U_\lambda(X, Y) \rangle) \\ &\quad - 2\alpha\beta \langle U_\lambda(A, X), U_\lambda(Y, Y) \rangle + \left(-\frac{3}{4} \| [X, Y] \|^2 - \frac{1}{2} \langle [X, [X, Y]], Y \rangle - \frac{1}{2} \langle [Y, [Y, X]], X \rangle \right) \\ &\quad + \lambda\alpha\beta \left(-\frac{3}{2} \langle [A, Y], [X, Y] \rangle - \frac{1}{2} \langle [A, [X, Y]], Y \rangle - \frac{1}{2} \langle [X, [A, Y]], Y \rangle - \frac{1}{2} \langle [Y, [Y, A]], X \rangle \right). \end{aligned}$$

Para continuar el cálculo estudiemos U_λ . Notemos $U_\lambda(X_1, X_2) = a_\lambda(X_1, X_2)A + b_\lambda(X_1, X_2)Z$, donde $Z \in \mathfrak{g}'$ con $\|Z\| = 1$. Luego

$$\begin{aligned} a_\lambda(X_1, X_2) &= \langle U_\lambda(X_1, X_2), A \rangle = \frac{1}{2} \langle [A, X_1]_\lambda, X_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle [A, X_2]_\lambda, X_1 \rangle \\ &= \frac{\lambda}{2} \langle [A, X_1], X_2 \rangle + \frac{\lambda}{2} \langle [A, X_2], X_1 \rangle = \lambda a_1(X_1, X_2). \end{aligned}$$

De forma análoga se prueba que $b_\lambda(X_1, X_2) = b_1(X_1, X_2)$ si $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}'$ y $b_\lambda(X_1, X_2) =$

²La grassmanniana de dimensión 2 de \mathfrak{g} es compacta.

$\lambda b_1(X_1, X_2)$ si X_1 o X_2 son colineales con A . Utilizando esto obtenemos

$$\begin{aligned}
\kappa_\lambda(\pi) &= \lambda^2(\alpha^2\kappa_1(A, Y) + \beta^2a_1(X, Y)^2 - \beta^2a_1(X, X)a_1(Y, Y) \\
&\quad + 2\alpha\beta a_1(A, Y)a_1(X, Y) - 2\alpha\beta a_1(A, X)a_1(Y, Y)) \\
&\quad + \lambda(2\alpha\beta b_1(A, Y)b_1(X, Y) - 2\alpha\beta b_1(A, X)b_1(Y, Y)) + b_1(X, Y)^2 + b_1(X, X)b_1(Y, Y) \\
&\quad + \lambda\alpha\beta \left(-\frac{3}{2}\langle [A, Y], [X, Y] \rangle - \frac{1}{2}\langle [A, [X, Y]], Y \rangle - \frac{1}{2}\langle [X, [A, Y]], Y \rangle - \frac{1}{2}\langle [Y, [Y, A]], X \rangle \right) \\
&\quad + \left(-\frac{3}{4}\|[X, Y]\|^2 - \frac{1}{2}\langle [X, [X, Y]], Y \rangle - \frac{1}{2}\langle [Y, [Y, X]], X \rangle \right) \\
&= \lambda^2(\alpha^2\kappa_1(A, Y) + C_1(X, Y)) + \lambda C_2(X, Y) + C_3(X, Y),
\end{aligned}$$

donde $C_1(X, Y)$, $C_2(X, Y)$ y $C_3(X, Y)$ no dependen de λ . Observando que $a_1(A, Y) = a_1(A, X) = 0$ y que $a_1(X_1, X_2) = \langle \mathcal{D}X_1, X_2 \rangle$ para $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}'$, se tiene que

$$C_1(X, Y) = \beta^2(\langle \mathcal{D}X, Y \rangle^2 - \langle \mathcal{D}X, X \rangle \langle \mathcal{D}Y, Y \rangle).$$

Como \mathcal{D} es definida positiva, la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos dice que el término $C_1(X, Y)$ es negativo. Por otro lado, como bien se ve en la prueba de la Proposición 3.2.5, la condición (c) implica que $\kappa_1(A, Y) < 0$. Por lo tanto $\kappa_\lambda(\pi)$, es un polinomio en λ con coeficiente principal negativo, lo que implica que existe $\kappa_\lambda(\pi) \rightarrow 0$ cuando $\lambda \rightarrow +\infty$. \square

Antes de terminar con la demostración del Teorema 1.0.4 recordemos el siguiente teorema clásico de álgebra lineal:

Teorema 3.2.7 (de Gershgorin). *Sea $\mathcal{A} = (a_{ij})$ una matriz compleja de $n \times n$. Para cada $i \in 1, \dots, n$ sea $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ y D_i el disco cerrado de centro a_{ii} y radio r_i en \mathbb{C} . Luego*

1. *Los valores propios de A están contenidos en $\bigcup_{i=1}^n D_i$.*
2. *Si $\Omega = D_{i_1} \cup \dots \cup D_{i_k}$ es disjunta de la unión del resto de los discos, entonces en Ω hay exactamente k valores propios (contados con multiplicidad como raíces del polinomio característico).*

Teorema 3.2.8. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie soluble. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *\mathfrak{g} admite un producto interno con curvatura negativa.*
2. *$\dim(\mathfrak{g}') = \dim(\mathfrak{g} - 1)$ y existe $A \in \mathfrak{g}$ tal que los valores propios de $\text{ad}A|_{\mathfrak{g}'}$ tienen parte real positiva.*

Demostración. La implicación (1) \Rightarrow (2) sale directamente de (a) y (b) de la Proposición 3.2.4 (es fácilmente verificable que una matriz real con parte simétrica definida positiva tiene valores propios con parte real positiva).

Veamos (2) \Rightarrow (1). Para esto primero buscaremos un producto interno con el cual \mathfrak{g} cumpla las condiciones (b) y (c) (la condición (a) es automática). Tomemos en \mathfrak{g}' una base $\{X_1, \dots, X_n\}$ para la cual la matriz asociada a $ad(A)|_{\mathfrak{g}'}$ quede formada por bloques de Jordan correspondientes a los valores propios reales y bloques de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ & & \alpha & \beta \\ & & -\beta & \alpha \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \pm i\beta$ son valores propios conjugados. Si cambiamos los unos por ceros en la matriz asociada a $ad(A)|_{\mathfrak{g}'}$ en dicha base, nos queda otra matriz a la que en esta ocasión llamaremos *casi-diagonal*.

Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{B} = \{a_1 X_1, \dots, a_n X_n\}$. La matriz asociada a $ad(A)|_{\mathfrak{g}'}$ en la base \mathcal{B} nos queda formada por bloques en la diagonal de la forma

$$\begin{pmatrix} \mu & \frac{a_{i+1}}{a_i} \\ & \mu & \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}} \\ & & \mu \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

donde μ es un valor propio real, y otros de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \frac{a_{i+1}}{a_i} & \frac{a_{i+2}}{a_i} & 0 \\ -\beta \frac{a_i}{a_{i+1}} & \alpha & 0 & \frac{a_{i+3}}{a_{i+1}} \\ & & \alpha & \beta \frac{a_{i+3}}{a_{i+2}} \\ & & -\beta \frac{a_{i+2}}{a_{i+3}} & \alpha \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $a_1^\varepsilon, \dots, a_n^\varepsilon$ positivos de forma tal que la matriz asociada a $ad(A)|_{\mathfrak{g}'}$ en la base $\mathcal{B}_\varepsilon = \{A, a_1^\varepsilon X_1, \dots, a_n^\varepsilon X_n\}$, a la que llamamos \mathcal{M}_ε , quede formada por bloques de la forma

$$\begin{pmatrix} \mu & \varepsilon \\ & \mu & \varepsilon \\ & & \mu \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \varepsilon & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & \varepsilon \\ & & \alpha & \beta \\ & & -\beta & \alpha \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Es decir que \mathcal{M}_ε converge a una matriz casi-diagonal cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, lo que implica que las partes simétrica y antisimétrica

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \frac{1}{2}(\mathcal{M}_\varepsilon + \mathcal{M}_\varepsilon^T) \text{ y } \mathcal{S}_\varepsilon = \frac{1}{2}(\mathcal{M}_\varepsilon - \mathcal{M}_\varepsilon^T)$$

convergen a una diagonal y a la matriz nula respectivamente. Luego cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ las entradas diagonales de \mathcal{D}_ε y $\mathcal{D}_\varepsilon^2 + \mathcal{D}_\varepsilon \mathcal{S}_\varepsilon - \mathcal{S}_\varepsilon \mathcal{D}_\varepsilon$ convergen a reales positivos mientras que el resto de las entradas convergen a cero. Podemos tomar entonces ε suficientemente chico para asegurarnos, por el Teorema 3.2.7, de que ambas matrices simétricas sean definidas positivas. Habiendo elegido ε correctamente, tomemos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno que hace ortonormal a \mathcal{B}_ε , luego $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ cumple (b) y (c).

Ahora podemos aplicar la Proposición 3.2.6. Tomemos λ suficientemente grande para que $(\mathfrak{g}_\lambda, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tenga curvatura negativa. Luego el isomorfismo entre \mathfrak{g}_λ y \mathfrak{g} induce un producto interno en esta última con curvatura negativa. \square

Con el teorema anterior finaliza la prueba del Teorema 1.0.4 ya que un grupo de Heintze cumple la segunda condición para $A = 1 \in \mathbb{R}$.

3.3. Borde de un grupo de Heintze

En esta sección vamos a estudiar los aspectos particulares del borde al infinito de un grupo de Heintze.

Para comenzar tomemos un grupo de Heintze $G = N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ con álgebra de Lie \mathfrak{g} . Observemos que si \mathfrak{g} es su álgebra de Lie, entonces el grupo de Heintze correspondiente al álgebra \mathfrak{g}_λ es $G_\lambda = N \rtimes_{\lambda\alpha} \mathbb{R}$. En la prueba del Teorema 3.2.8, podemos ver que es posible tomar en \mathfrak{g} un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que cumpla las condiciones (a), (b) y (c), tal que $\mathfrak{n} \perp \mathbb{R}$ y $\|1\| = 1$ (llamaremos a la métrica Riemanniana inducida por este producto interno una *buena métrica*).

Consideremos ahora λ suficientemente grande para que $(g_\lambda, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tenga curvatura negativa acotada por arriba por -1 (observar en la prueba de la Proposición 3.2.6 que esto es posible). Luego G_λ con la métrica invariante a izquierda derivada de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un espacio CAT(-1). Trabajaremos a continuación con el grupo G_λ y la métrica Riemanniana mencionada, a la que notaremos por g_λ .

Observación 3.3.1. Las subvariedades $N_t = N \times \{t\}$ son invariantes por traslaciones a izquierda de N . Luego los espacios tangentes también lo son. Llamemos g_λ^t a la métrica Riemanniana restringida a N_t y d_t a la distancia Riemanniana correspondiente. Dado $t \in \mathbb{R}$, se tiene que la traslación a izquierda por (e, t) es una isometría entre (N_0, g_λ^0) y (N_t, g_λ^t) . Luego si $\tau_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(N)$ es el morfismo dado por $\lambda\alpha$, se tiene que $d_0(x, y) = d_t(\tau_\lambda(t)x, \tau_\lambda(t)y)$.

Por otro lado, es fácil verificar que las subvariedades $\mathbb{R}_x = \{x\} \times \mathbb{R}$ forman una foliación invariante por la acción a izquierda de G_λ . En conjunto obtenemos una descomposición ortogonal en el fibrado tangente TG_λ , más precisamente se tiene $T_{(x,t)}G_\lambda = T_{(x,t)}N_t \oplus T_{(x,t)}\mathbb{R}_x$.

Notamos por $\gamma_x : \mathbb{R} \rightarrow G_\lambda$ a la curva vertical $\gamma_x(t) = (x, t)$. Además definimos $\gamma_x^+, \gamma_x^- : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\gamma_x^+(t) = \gamma_x(t)$ y $\gamma_x^-(t) = \gamma_x(-t)$.

Proposición 3.3.2. *Consideremos la métrica Riemanniana g_λ en G . Luego:*

1. Las curvas γ_x son geodésicas de (G_λ, g_λ) .
2. Los rayos γ_x^+ son todos asintóticos.
3. Los rayos γ_x^- pertenecen a clases del borde diferentes.
4. Todo rayo geodésico es asintótico o bien a un γ_x^- o bien a cualquiera de los γ_x^+ .

Demostración. 1. Veamos que γ_0 es una geodésica, luego como las traslaciones a izquierda son isometrías el resto de las curvas verticales también lo serán.

Primero tomemos una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow G_\lambda$ tal que $\gamma(a) = (0, t_1), \gamma(b) = (0, t_2)$ con $t_1 < t_2$. Pongamos $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ con $\gamma_1 \in N$ y $\gamma_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{long}(\gamma) &= \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} dt = \int_a^b \sqrt{\|(\dot{\gamma}_1(t), 0)\|_{\gamma(t)}^2 + \|(0, \dot{\gamma}_2(t))\|_{\gamma(t)}^2} dt \\ &\geq \int_a^b \|(0, \dot{\gamma}_2(t))\|_{\gamma(t)} dt = \int_a^b \|(0, \dot{\gamma}_2(t))\|_{(0, \gamma_2(t))} dt \\ &= \int_a^b |\dot{\gamma}_2(t)| dt \geq \lambda(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Es fácil ver que $\text{long}(\gamma_0|_{[t_1, t_2]}) = (t_2 - t_1)$ y además esta curva está parametrizada por longitud de arco.

2. Definimos $\phi_s : G_\lambda \rightarrow G_\lambda$ por $\phi(x, t) = (x, t + s)$. Observemos primero que

$$\begin{aligned} \|d_{(e,0)}\phi_s(X, T)\|_{(e,s)}^2 &= \|(d_{(e,0)}L_{(0,s)}^{-1})(X, T)\|_{(e,0)}^2 = \|(e^{-s\alpha}X, T)\|_{(e,0)}^2 \\ &= \|e^{-s\alpha}X\|_e^2 + \|T\|_0^2 = \|e^{-t\alpha}X\|_e^2 + \lambda|T|^2. \end{aligned}$$

Es decir que $d_{(e,0)}\phi_s$ es una contracción si $s > 0$ y una dilatación si $s < 0$. Además, como ϕ_s conmuta con las traslaciones en N y estas son isometrías, tenemos que $d_{(x,0)}\phi_s$ contrae o dilata vectores. Por lo tanto, para valores negativos de s , $\phi_s|_{N_0}$ contrae la longitud de toda curva que une dos puntos de N_0 . Más aún, dicha longitud tiende a cero cuando $s \rightarrow +\infty$.

3. En la prueba del punto anterior se ve que las distancias tienden a $+\infty$ cuando $s \rightarrow -\infty$.

4. El borde al infinito de una variedad simplemente conexa de curvatura negativa de dimensión n es homeomorfo a una esfera de dimensión $n - 1$. Observamos que el espacio de las clases de los rayos γ_x^- , al que notamos en principio por \mathcal{X} , es homeomorfo a N y por lo tanto a un espacio euclídeo. Por otro lado, al agregarle $[\gamma_e^+]$ tenemos la compactificación por un punto de \mathcal{X} y por lo tanto una esfera. Luego $\mathcal{X} \cup [\gamma_e^+]$ es una esfera, por lo que debe ser todo el borde.

□

En ∂G_λ hay un punto distinguido, que es la clase de los rayos γ_x^+ , y que notamos por ∞ . Luego podemos identificar los puntos de $\partial_\infty G_\lambda = \partial_\infty G_\lambda - \{\infty\}$ con N mediante $x \mapsto [\gamma_x^-]$. Observar que en lo que hicimos hasta aquí no es necesaria la condición CAT(-1). Es más, todo se cumple para cualquier λ , inclusive $\lambda = 1$. En particular hay un punto marcado ∞ en ∂G (∞ no depende de la buena métrica definida en G). La ventaja de tomar el λ elegido es que resulta más sencillo trabajar con las métricas visuales en su borde.

Observemos que $N \times \{0\}$ es una horoesfera centrada en $(e, 0)$ a la que notaremos por \mathcal{H} . Luego la métrica visual parabólica $d_{\infty, \mathcal{H}}$ queda definida en $N = \partial_\infty G_\lambda$ por

$$d_{\infty, \mathcal{H}}(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}(2t - d(\gamma_x(t), \gamma_y(t)))},$$

donde d es la distancia Riemanniana en G_λ .

Proposición 3.3.3. *La distancia $d_{\infty, \mathcal{H}}(x, y)$ cumple las siguientes propiedades:*

1. *Es continua con respecto a la topología original de N .*
2. *Es invariante por traslaciones a izquierda.*
3. *Para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $d_{\infty, \mathcal{H}}(\tau_\lambda(t)x, \tau_\lambda(t)y) = e^t d_{\infty, \mathcal{H}}(\tau_\lambda(x), \tau_\lambda(y))$.*

Demostración. El primer punto sale de que si $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ entonces

$$d(\gamma_{x_n}(t), \gamma_{y_n}(t)) \rightarrow d(\gamma_x(t), \gamma_y(t))$$

uniformemente en conjuntos acotados inferiormente de \mathbb{R} . El segundo es obvio a partir de la invarianza por traslaciones de la métrica Riemanniana.

Veamos el tercero:

$$\begin{aligned} d_{\infty, \mathcal{H}}(x, y) &= \lim_{s \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}(2s - d(\gamma_x(s), \gamma_y(s)))} = \lim_{s \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}(2s - d(L_{(0,t)}(x,s), L_{(0,t)}(y,s)))} \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}(2s - d((\tau_\lambda(t)x, t+s), (\tau_\lambda(t)y, t+s)))} = e^{-t} \lim_{s \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}(2s + 2t - d(\gamma_{\tau_\lambda(t)x}(t+s), \gamma_{\tau_\lambda(t)y}(t+s)))} \\ &= e^{-t} d_{\infty, \mathcal{H}}(\tau_\lambda(t)x, \tau_\lambda(t)y). \end{aligned}$$

□

Proposición 3.3.4. Si ρ es una cuasi-métrica en N que cumple las condiciones 1, 2 y 3 de la Proposición 3.3.3, entonces

1. Las esferas $S(x, r) = \{y \in N : \rho(x, y) = r\}$ son compactas.
2. ρ es bi-Lipschitz equivalente a $d_{\infty, \mathcal{H}}$.

Demostración. Por las condiciones 2 y 3 es suficiente con probar que $S = S(e, 1)$ es compacta. El conjunto $\mathfrak{S} = \exp^{-1}(S)$ es cerrado en \mathfrak{n} .

Supongamos que no es acotado, luego existe una sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{S}$ con $\|X_n\| \rightarrow +\infty$, donde $\|\cdot\|$ es una norma en \mathfrak{n} . Notemos por $x_n = \exp(X_n) \in S$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \in \mathbb{R}$ tal que $\|e^{t_n} X_n\| = 1$. Como la esfera unitaria en \mathfrak{n} es compacta, existe $X \in \mathfrak{n}$ con $\|X\| = 1$ y una subsucesión $e^{t_{n_k}} X_{n_k} \rightarrow X$. Para no cargar la notación supongamos que $n_k = n$. Es importante observar que $t_n \rightarrow -\infty$, luego $\rho(e, \tau(t_n)x_n) = e^{t_n} \rho(e, x_n) = e^{t_n} \rightarrow 0$ y por lo tanto $\tau(t_n)x_n \rightarrow e$. La continuidad de \exp y la igualdad

$$\exp(e^{t_n} X_n) = \tau(t_n)x_n$$

implican $\exp(X) = e$, lo que es absurdo porque $X \neq 0$.

Para probar la segunda parte vamos a ver que si ρ_1 y ρ_2 son dos cuasi-métricas que cumplen las condiciones 1, 2 y 3, entonces son bi-Lipschitz equivalentes.

Observemos que como ρ_1 y ρ_2 son invariantes por traslaciones a izquierda de N , basta con probar que existen $C_1, C_2 > 0$ tales que para todo $x \in N$, se cumple

$$C_1 \rho_1(e, x) \leq \rho_2(e, x) \leq C_2 \rho_1(e, x).$$

Llamemos S_1 a la esfera de centro e y radio 1 con respecto a ρ_1 . Como S_1 es compacta se puede definir

$$m = \min\{\rho_2(e, x) : x \in S_1\}, \quad M = \max\{\rho_2(e, x) : x \in S_1\}.$$

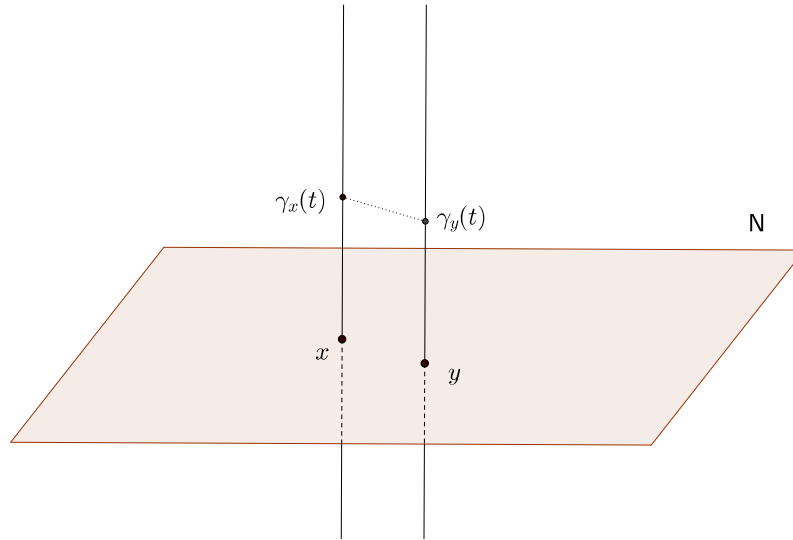
Dado un punto cualquiera $x \in N$, tomamos $t \in \mathbb{R}$ tal que $\tau(t)x \in S_1$. Por la propiedad 3 y como $\rho_1(e, \tau(t)x) = 1$, se tiene que $\rho_1(e, x) = e^{-t}$. Luego nos queda

$$\begin{aligned} m &\leq \rho_2(e, \tau(t)x) \leq M \Rightarrow m \leq e^t \rho_2(e, x) \leq M \\ &\Rightarrow m \rho_1(e, x) \leq \rho_2(e, x) \leq M \rho_1(e, x). \end{aligned}$$

□

Llamaremos de aquí en más *cuasi-métrica visual parabólica* a cualquier cuasi-métrica en N que cumpla con las condiciones de la Proposición 3.3.3 con respecto a la derivación λ_α . Entre ellas se encontraría la siguiente:

$$\varrho_{\lambda_\alpha}^0(x, y) = e^t, \quad \text{donde } t = \inf\{s : d_s(\gamma_x(s), \gamma_y(s)) \leq 1\}. \quad (3.2)$$



Ahora volvamos a nuestro grupo original $G = N \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$. Allí también es posible definir una cuasi-métrica de forma análoga a 3.2. La llamaremos ϱ_{α}^0 . En este caso ϱ_{α}^0 no será bi-Lipschitz equivalente a una métrica propiamente dicha, como lo era $\varrho_{\lambda\alpha}^0$, pero como vimos en la Proposición 2.1.6, existe $\epsilon > 0$ tal que $(\varrho_{\alpha}^0)^{\epsilon}$ sí lo es. Procediendo de la misma forma que antes podemos observar que las cuasi-métricas que cumplen con las condiciones de la Proposición 3.3.3 (cambiando τ_{λ} por τ) son bi-Lipschitz equivalentes a ϱ_{α}^0 , y llamaremos a las representantes de esta clase *cuasi-métricas visuales parabólicas* de N con respecto a la derivación α .

En general notaremos por ϱ_{α} a cualquiera de las cuasi-métricas visuales parabólicas asociadas a α , aunque usaremos simplemente ϱ para indicar dicha cuasi-métrica cuando no exista ambigüedad. Diremos también que (N, ϱ_{α}) es el *borde visual parabólico* del grupo de Heintze $N \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$.

Llamemos θ al isomorfismo natural entre G y G_{λ} . Su diferencial en el origen $d_{(e,0)}\theta : \mathfrak{n} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{n} \rtimes_{\lambda\alpha} \mathbb{R}$ está dado por $d_{(e,0)}\theta(X+T) = X + \lambda^{-1}T$. Observemos que $\theta|_N = Id$ y que $\tau_{\lambda}(t) = \tau(\lambda t)$ (ya que $d_e\tau(\lambda t) = e^{\lambda t\alpha}$). Además es claro que θ actúa en las geodésicas por reparametrizaciones. Luego podemos obtener una fórmula explícita para dicho isomorfismo: $\theta(x, t) = (x, \lambda^{-1}t)$. Es claro que $\partial\theta$ lleva ∞ en ∞ y que es la identidad en el resto del borde, que es identificado con N .

Proposición 3.3.5. *Las cuasi-métricas ϱ_{α} y $\varrho_{\lambda\alpha}$ son cuasi-simétricamente equivalentes.*

Demostración. Denotemos por d_t y d_t^{λ} a las distancias Riemannianas en N_t como sub-variedades de G y G_{λ} respectivamente. Consideramos la función $\phi_s : N_0\mathbb{R} \rightarrow N_t$,

$\phi_s(x, t) = (x, t + s)$. Luego se tiene que

$$\begin{aligned} d_t^\lambda(x, y) &= d_0^\lambda(\tau_\lambda(-t)x, \tau_\lambda(-t)y) = d_0(\tau_\lambda(-t)x, \tau_\lambda(-t)y) \\ &= d_0(\tau(-\lambda t)x, \tau(-\lambda t)y) = d_{\lambda t}(x, y), \end{aligned}$$

de donde se deduce directamente la tesis. \square

Juntando todo lo visto hasta ahora tenemos lo siguiente:

Proposición 3.3.6. *Sean $G_1 = N_1 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ y $G_2 = N_2 \rtimes_\beta \mathbb{R}$ dos grupos de Heintze y ϱ_α y ϱ_β dos métricas visuales parabólicas en N_1 y N_2 con respecto a α y β respectivamente. Si $F : (G_1, \varrho_\alpha) \rightarrow (G_2, \varrho_\beta)$ es una cuasi-isometría que lleva ∞ en ∞ , entonces $\partial_\infty F : (N_1, \varrho_\alpha) \rightarrow (N_2, \varrho_\beta)$ es una cuasi-simetría.*

Demostración. Tomemos θ_1 y θ_2 los isomorfismos naturales entre G_1 y $G_1^\lambda = N_1 \rtimes_{\lambda\alpha} \mathbb{R}$ y entre G_2 y $G_2^\mu = N_2 \rtimes_{\mu\beta} \mathbb{R}$ respectivamente, donde λ y μ son suficientemente grandes para que los grupos G_1^λ y G_2^μ sean $CAT(-1)$. La cuasi-isometría $\Phi = \theta_2 \circ F \circ \theta_1^{-1} : G_1^\lambda \rightarrow G_2^\mu$ preserva el infinito, luego, por lo visto final de la Sección 2.3, el mapa en el borde visual parabólico $\partial\Phi : (N_1, \varrho_{\lambda\alpha}) \rightarrow (N_2, \varrho_{\mu\beta})$ es una cuasi-simetría, donde $\varrho_{\lambda\alpha}$ y $\varrho_{\mu\beta}$ son cuasi-métricas visuales parabólicas en N_1 y N_2 con respecto a $\lambda\alpha$ y $\mu\beta$ respectivamente. La prueba termina evocando la Proposición anterior. \square

Para terminar vamos a desembarazarnos de la hipótesis que F preserve el punto marcado ∞ . Para esto probemos lo siguiente:

Proposición 3.3.7. *Si G_1 y G_2 son dos grupos de Heintze cuasi-isométricos, entonces existe una cuasi-isometría que preserva ∞ .*

Demostración. Estudiemos la acción del grupo de cuasi-isometrías de un grupo de Heintze G sobre el borde ∂G , al que notamos por $\text{QIsom}(G)$. Las traslaciones a izquierda por elementos de N están incluido en $\text{Isom}(G)$, entonces $\text{Isom}(G)$ actúa transitivamente en $\partial_\infty G$. Tenemos por lo tanto las siguientes opciones:

- (a) $\text{QIsom}(G)$ actúa transitivamente en ∂G .
- (b) $\text{QIsom}(G)$ fija ∞ .

Es claro que, conforme a esta clasificación, los grupos G_1 y G_2 son de la misma naturaleza, pues cumplir con una condición o la otra es un invariante por cuasi-isometrías.

Si G_1 y G_2 están en la primera clase, no hay nada que probar. Ocupémonos entonces del caso en el que $\text{QIsom}(G_1)$ y $\text{QIsom}(G_2)$ fijan ∞ . Para distinguir los puntos marcados de los dos grupos escribiremos ∞_1 y ∞_2 .

Tomemos $F : G_1 \rightarrow G_2$ una cuasi-isometría tal que $f(\infty_1) \neq \infty_2$, donde $f = \partial F$, y sea $F' = G_2 \rightarrow G_1$ una cuasi-inversa. La condición de ser cuasi-inversa implica que

$\partial F' = f^{-1}$. Notemos $x = f^{-1}(\infty_2)$ e $y = f(\infty_1)$, y tomemos $z \in \partial G_2$ diferente a ∞_2 y a y , y notemos $w = f^{-1}(z)$. Vamos a encontrar una cuasi-isometría de G_2 que lleve z en ∞_2 , llegando a una contradicción.

Como mencionamos anteriormente existe una isometría de G_1 a la que llamaremos ϕ , cuyo mapa de borde $\partial\phi$ lleva w en x . Ahora si consideramos la cuasi-isometría $\Theta = F \circ \phi \circ F' : G_2 \rightarrow G_2$, tenemos

$$\partial\Theta = f \circ \partial\phi \circ f^{-1}(z) = \infty_2.$$

Lo que es absurdo. □

Combinando las Proposiciones 3.3.6 y 3.3.7 obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.3.8. *Si dos grupos de Heintze $G_1 = N_1 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ y $G_2 = N_2 \rtimes_{\beta} \mathbb{R}$ son cuasi-isométricos y ϱ_{α} y ϱ_{β} son dos métricas visuales parabólicas en N_1 y N_2 con respecto a α y β respectivamente, entonces (N_1, ϱ_{α}) y (N_2, ϱ_{β}) son cuasi-simétricos.*

Por último vamos a probar un lema que nos será útil en varias ocasiones.

Lema 3.3.9. *Sea $K \leq N$ un subgrupo τ -invariante con $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(N)$ determinado por α . El álgebra de Lie de K , al que notamos por \mathfrak{k} , es α invariante. Sea además ϱ_{α} una cuasi-métrica visual parabólica asociada a α . Luego $\varrho_{\alpha}|_K$ es una cuasi-métrica visual parabólica asociada a $\alpha|_{\mathfrak{k}}$.*

Demostración. Basta observar que $\varrho_{\alpha}|_K$ cumple las condición 3 de la Proposición 3.3.3 puesto que 1 y 2 son directas. Esto viene directamente del hecho de que la acción por automorfismos en K no es otra que $\tilde{\tau} : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(K)$ definida por $\tilde{\tau}(t) = \tau(t)|_K$ para todo $t \in \mathbb{R}$. El lector puede verificar rápidamente esta igualdad derivando en $e \in K$ el automorfismo $\tilde{\tau}(t)$. □

3.4. Grupos de tipo Carnot

Definición 3.4.1. Una *estratificación* en un álgebra de Lie \mathfrak{g} es una familia de subespacios no triviales $\{E_1, \dots, E_s\}$ de forma tal que

1. $\mathfrak{g} = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$.
2. $[E_1, E_i] = E_{i+1}$ para todo $i = \{1, \dots, s\}$, donde $E_{s+1} = \{0\}$.

Un álgebra de Lie junto con una estratificación se denomina *álgebra de Lie estratificada*.

Observación 3.4.2. Si $\mathfrak{g} = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$ es un álgebra de Lie estratificada entonces:

1. \mathfrak{g} es nilpotente.

2. La subálgebra generada por E_1 es \mathfrak{g} .
3. $\mathfrak{g} = E_1 \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Un álgebra de Lie estratificada $\mathfrak{g} = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$ admite una familia de automorfismos a un parámetro $\theta_t : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ($t \in (0, +\infty)$), donde $\theta_t(X) = t^i X$ para $X \in E_i$. Si ahora tomamos $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{E}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{E}_s$ álgebra de Lie estratificada vemos que un morfismo $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ cumple que $\phi(E_i) = \tilde{E}_i$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$ si y sólo si conmuta con θ_t para todo $t > 0$. En este caso diremos que el morfismo *preserva los estratos*.

Definición 3.4.3. Un grupo de Lie G es de *Carnot* si su álgebra de Lie asociada admite una estratificación.

Si G es un grupo de Carnot con álgebra de Lie $\mathfrak{g} = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$ tenemos que existe para cada $t > 0$ un único automorfismo $\Theta_t : G \rightarrow G$ que cumple $d_e \Theta_t = \theta_t$. Diremos que un morfismo entre dos grupos de Carnot $h : G_1 \rightarrow G_2$ preserva los estratos si conmuta con Θ_t para todo $t > 0$. Esto resulta ser equivalente a que el correspondiente mapa en las álgebras de Lie $H : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ preserve los estratos.

Consideramos en G el fibrado HG (subfibrado del fibrado tangente TG) dado por $H_x G = d_e L_x(E_1)$ donde $x \in G$. Si $\|\cdot\|$ es una norma en E_1 , podemos extenderla a HG para que sea invariante a izquierda, es decir, $\|d_e L_x(v)\|_x = \|v\|$ para todo $x \in G$ y $v \in V_1$.

Definición 3.4.4. Definimos la *distancia de Carnot-Carathéodory* entre dos puntos x e y de G , notado por $d_{cc}(x, y)$, como el ínfimo de las longitudes de las curvas diferenciables tangentes a HG que unen dichos puntos.

La distancia de Carnot-Carathéodory está bien definida: todo par de puntos puede ser unido por una curva tangente a HG (ver Teorema de Chow [LeD]). Además es una métrica compatible con la topología de G .

Definición 3.4.5. Sean G_1 y G_2 dos grupos de Carnot con distancias de Carnot-Carathéodory d_1 y d_2 y sean $U_1 \subset G_1$ y $U_2 \subset G_2$ abiertos. Un mapa $f : U_1 \rightarrow U_2$ es *Pansu diferenciable* en $x \in U$ si existe un morfismo que preserva los estratos $h : G_1 \rightarrow G_2$ tal que

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{d'(f(x)^{-1}f(y), h(x^{-1}y))}{d(x, y)} = 0.$$

En ese caso diremos que h es el *diferencial de Pansu* de f en x y lo notamos por $df(x)$.

La siguiente noción es similar a la de cuasi-simetría vista en la introducción.

Definición 3.4.6. Supongamos que $f : (X, \rho_1) \rightarrow (Y, \rho_2)$ es una biyección entre espacios cuasi-métricos. Sea $x \in X$ y $t > 0$, se define

$$H_f(x, t) = \frac{\sup\{\rho_2(f(x'), f(x)) : \rho_1(x', x) \leq t\}}{\inf\{\rho_2(f(x'), f(x)) : \rho_1(x', x) \geq t\}}.$$

El mapa f es λ -cuasiconforme si f y f^{-1} son continuos y

$$\limsup_{t \rightarrow 0} H_f(x, t) \leq \lambda$$

para todo $x \in X$. Decimos simplemente que f es cuasiconforme si es λ -cuasiconforme para algún λ .

En general un mapa cuasisimétrico es cuasiconforme. En el caso de los grupos de Carnot, un mapa cuasiconforme es localmente cuasisimétrico ([HK98]).

El siguiente teorema se debe a Pansu ([Pan89c]).

Teorema 3.4.7. *Consideremos dos grupos de Carnot G_1 y G_2 , y dos conjuntos abiertos $U_1 \subset G_1$ y $U_2 \subset G_2$. Sea $f : U_1 \rightarrow U_2$ un mapa cuasiconforme. Luego f es Pansu diferenciable para casi todo punto. Más aún, df es un isomorfismo para casi todo $x \in U_1$. Donde la medida utilizada es una de Haar del grupo G .*

Supongamos ahora que α es una derivación en un álgebra de Lie $\mathfrak{n} = \text{Lie}(N)$ con valores propios positivos $1 = \lambda_1 < \dots < \lambda_d$. Recordemos que a menos de cuasiisometrías podemos elegir el menor valor propio de la derivación de un grupo de Heintze.

Si la subálgebra generada por el subespacio propio asociado a λ_1 , al que notaremos por $\cdot E_1$, es \mathfrak{n} , entonces N es un grupo de Carnot. Diremos en este caso que $N \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ es un grupo de Heintze de tipo Carnot.

Por otro lado si $\mathfrak{g} = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$ es un álgebra de Lie estratificada, podemos definir una derivación $\alpha_{\mathfrak{g}}$ cuyos espacios propios sean E_1, \dots, E_s . Esto lo hacemos simplemente poniendo $\alpha_{\mathfrak{g}}|_{V_1} = Id$ y extendiéndola a todo \mathfrak{g} . Observar que aplicando esto para el caso del álgebra \mathfrak{n} , se tiene $\alpha_{\mathfrak{n}} = \alpha$.

Con esto tenemos que todo grupo de Carnot N con álgebra de Lie \mathfrak{n} es el conmutador de un grupo de Heintze de tipo Carnot $N \rtimes_{\alpha_{\mathfrak{n}}} \mathbb{R}$.

Proposición 3.4.8. *La distancia de Carnot-Carathéodory en N es una cuasi-métrica visual parabólica con respecto a α .*

Demostración. Debemos probar que se cumplen las tres condiciones de la Proposición 3.3.3. La continuidad es obvia a partir del hecho de que d_{cc} es compatible con la topología de N . La invarianza por traslaciones a izquierda también es evidente ya que $\|\cdot\|$ lo es.

Veamos el último punto. Si γ es una curva tangente al fibrado HG que une x con y , la curva $\tau_{\alpha}(t)\gamma$ es una curva que une $\tau_{\alpha}(t)x$ con $\tau_{\alpha}(t)y$ y es también tangente a HG .

Para calcular la longitud de esta última observemos que

$$d_x(\tau_{\alpha}(t)) = d_e L_{\tau_{\alpha}(t)x} e^{t\alpha} (d_e L_x)^{-1}.$$

Esto sale directamente de lo siguiente:

$$\tau_\alpha(t) \circ L_x(y) = \tau_\alpha(t)(xy) = \tau_\alpha(t)(x)\tau_\alpha(t)(y) = L_{\tau_\alpha(t)(x)} \circ \tau_\alpha(t)(y).$$

Luego

$$\begin{aligned} \text{long}(\tau_\alpha(t)\gamma) &= \int_0^1 \|d_{\gamma(s)}(\tau_\alpha(t))\dot{\gamma}(s)\|_{\tau_\alpha(t)\gamma(s)} ds \\ &= \int_0^1 \|d_e L_{\tau_\alpha(t)\gamma(s)} e^{t\alpha} (d_e L_{\gamma(s)})^{-1} \dot{\gamma}(s)\|_{\tau_\alpha(t)\gamma(s)} ds \\ &= \int_0^1 \|e^{t\alpha} (d_e L_{\gamma(s)})^{-1} \dot{\gamma}(s)\| ds \\ &= e^t \int_0^1 \|(d_e L_{\gamma(s)})^{-1} \dot{\gamma}(s)\| ds \\ &= e^t \int_0^1 \|\dot{\gamma}(s)\|_{\gamma(s)} ds \\ &= e^t \text{long}(\gamma). \end{aligned}$$

Esto indica que $d_{cc}(\tau_\alpha(t)x, \tau_\alpha(t)y) \leq e^t d_{cc}(x, y)$. Tomando γ con extremos en $\tau_\alpha(t)x$ y $\tau_\alpha(t)y$ y aplicando $\tau_\alpha(-t)$, tenemos la otra desigualdad. \square

Recordemos que aquí estamos suponiendo que $\lambda_1 = 1$, sin embargo, por la Proposición 3.3.5, tenemos en el caso general, que si $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ es un grupo de tipo Carnot, entonces una cuasi-métrica visual parabólica ϱ_α en N es bi-Lipschitz equivalente a $d_{cc}^{\lambda_1}$.

Si existe una cuasi-isometría entre dos grupos de Heintze de tipo Carnot $N_1 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ y $N_2 \rtimes_\beta \mathbb{R}$ que fije el infinito, entonces el mapa inducido por dicha cuasi-isometría en los bordes visuales parabólicos es cuasi-conforme y por lo tanto Pansu diferenciable en casi todo punto. El Teorema 3.4.7 dice además que el diferencial es un isomorfismo entre los grupos N_1 y N_2 que preserva los estratos. Luego podemos probar el siguiente corolario:

Corolario 3.4.9. (*Pansu*) *Dos grupos de Heintze de Tipo Carnot $N_1 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ y $N_2 \rtimes_\beta \mathbb{R}$ son cuasi-isométricos si y sólo si son isomorfos.*

Demostración. Para el recíproco basta recordar el Corolario 3.1.3. Para probar el directo comenzamos observando que α y β son diagonalizables y sus subespacios propios dan las estratificaciones de $\mathfrak{n}_1 = \text{Lie}(N_1)$ y $\mathfrak{n}_2 = \text{Lie}(N_2)$. Sabemos que existe un isomorfismo $\gamma : \mathfrak{n}_1 \rightarrow \mathfrak{n}_2$ que preserva los estratos, luego este debe mandar los subespacios propios de una en los de la otra. Esto implica que $\gamma\alpha = \beta\gamma$. Es una verificación simple probar que $\Phi : \mathfrak{n}_1 \rtimes_\alpha \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{n}_2 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$, definida por $\Phi(T + X) = T + \gamma(X)$ es un isomorfismo. \square

Por último observemos que si $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ es un grupo de Heintze y \mathfrak{k} es una subálgebra incluida en el álgebra generada por los vectores propios asociados a λ_1 , y si además \mathfrak{k}

es α -invariante, entonces $K \rtimes_{\alpha|_{\mathfrak{k}}} \mathbb{R}$ es un subgrupo de $N \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$, donde K es el subgrupo conexo de N cuya álgebra de Lie es \mathfrak{k} . Luego $K \rtimes_{\alpha|_{\mathfrak{k}}} \mathbb{R}$ es un grupo de tipo Carnot, y por el Lema 3.3.9, tenemos que la restricción a K de una cuasi-métrica visual parabólica asociada a α es bi-Lipschitz equivalente a $d_{cc}^{\lambda_1}$, donde d_{cc} es la métrica de Carnot-Carathéodory en K y λ_1 es el menor valor propio de α .

Capítulo 4

Fibrados Invariantes y Regularidad de Cuasi-isometrías en el Borde

Este capítulo tiene principalmente dos objetivos. El primero es encontrar ciertas estructuras en el borde de un grupo de Heintze que sean invariantes por la acción de cuasi-isometrías. El segundo es probar, usando la existencia de dichas estructuras, que bajo ciertas condiciones los mapas inducidos en el borde por las mismas son homeomorfismos bi-Lipschitz.

4.1. Un teorema de rigidez

Como probamos en el capítulo anterior, los mapas inducidos en los bordes visuales parabólicos de grupos de Heintze por cuasi-isometrías son homeomorfismos cuasi-simétricos entre espacios cuasi-métricos. En esta sección se prueba que bajo ciertas hipótesis dichos mapas son bi-Lipschitz.

El contenido de esta sección es extraído de [LX15]. Más adelante mostraremos que nuestro caso se encuentra bajo las hipótesis del resultado principal de esta sección.

Recordemos que la distancia de Hausdorff entre dos subconjuntos A y B de un espacio cuasi-métrico (X, ρ) se define como

$$\text{dist}_H(A, B) = \text{máx} \left\{ \sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A) \right\}.$$

Definición 4.1.1. Decimos que dos conjuntos A y B son *paralelos* si dados $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ se cumple $\rho(a, B) = \rho(a', B) = \rho(A, b) = \rho(A, b')$. Observar que en este caso $\text{dist}_H(A, B) = \rho(A, B)$.

Definición 4.1.2. Sean $\lambda > 0$, $L \geq 1$. Decimos que un espacio cuasi-métrico (X, ρ) es un (λ, L) -fibrado cuasi-métrico si admite un cubrimiento \mathcal{U} por cerrados disjuntos, llamados *fibras*, con las siguientes propiedades:

1. Las fibras son (λ, L) -snow-flake equivalentes a un espacio métrico geodésico no acotado: para cada $U \in \mathcal{U}$, existe un espacio métrico geodésico no acotado (\tilde{U}, d) tal que (U, ρ) es L-bi-Lipchitz equivalente a (\tilde{U}, d^λ) .
2. Las fibras paralelas no son aisladas: para toda $U \in \mathcal{U}$ existe una sucesión $\{U_n\} \in \mathcal{U}$ de fibras distintas y paralelas a U tal que $\text{dist}_H(U_n, U) \rightarrow 0$.
3. Las fibras están a distancia positiva, es decir que si U y V son dos fibras distintas, entonces $\rho(U, V) > 0$.
4. Las fibras que no son paralelas están a distancia de Hausdorff infinita. Diremos en este caso que dichas fibras *divergen*.

El resultado principal de esta sección es el siguiente.

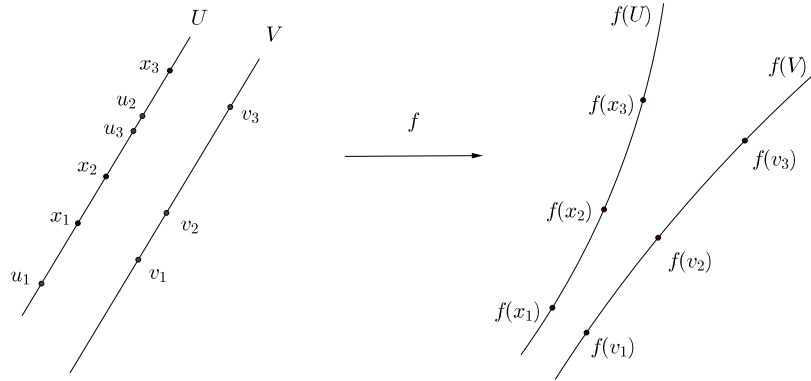
Teorema 4.1.3. *Sea $f : (X, \rho_1) \rightarrow (Y, \rho_2)$ un homeomorfismo cuasi-simétrico entre dos (λ, L) -fibrados cuasi-métricos que lleva fibras en fibras. Luego f es bi-Lipschitz.*

Fijemos entonces f un homeomorfismo φ -cuasi-simétrico como en las hipótesis del Teorema 4.1.3.

Lema 4.1.4. *Si dos fibras U y V son paralelas, entonces $f(U)$ y $f(V)$ también lo son.*

Demostración. Supongamos que $f(U)$ y $f(V)$ no son paralelas, luego deben diverger. Podemos asumir que existe una sucesión $\{x_i\}$ en U tal que $\rho_2(f(x_i), f(V)) \rightarrow +\infty$. Como U y V son paralelas, para todo i existe $v_i \in V$ tal que $\rho_1(x_i, v_i) = \rho_1(U, V)$. Usando que las fibras son snow-flake equivalentes a un espacio geodésico no acotado podemos ver que en U hay puntos a distancia arbitraria de cualquier punto. Luego para todo i existe $u_i \in U$ tal que $\rho_1(x_i, u_i) = \rho_1(x_i, v_i)$.

Como $\rho_2(f(x_i), f(V)) \rightarrow +\infty$, tenemos $\rho_2(f(x_i), f(v_i)) \rightarrow +\infty$. La condición de cuasi-simetría y el hecho de que $\rho_1(x_i, u_i) = \rho_1(x_i, v_i)$ implican que $\rho_2(f(x_i), f(u_i)) \rightarrow +\infty$.



Luego como las fibras paralelas no están aisladas podemos tomar $U' \neq f(U)$ paralela a $f(U)$. Tomemos $y_i \in U'$ tal que $\rho_2(f(x_i), y_i) = \rho_2(f(U), U')$. Luego

$$\frac{\rho_2(f(x_i), y_i)}{\rho_2(f(x_i), f(u_i))} \rightarrow 0$$

y por la condición de cuasi-simetría de f^{-1} , tenemos

$$\frac{\rho_1(x_i, f^{-1}(y_i))}{\rho_1(U, V)} = \frac{\rho_1(x_i, f^{-1}(y_i))}{\rho_1(x_i, u_i)} \rightarrow 0.$$

De aquí se deduce que $\rho_1(x_i, f^{-1}(y_i)) \rightarrow 0$. Como $x_i \in U$ y $f^{-1}(y_i) \in f^{-1}(U')$ tenemos que $\rho_1(U, f^{-1}(U')) = 0$, lo que contradice que la distancia entre las fibras es positiva. \square

Lema 4.1.5. *Existe $K_1 \geq 1$ tal que para dos fibras paralelas U_1 y U_2 en X y para todo par de puntos $p, q \in U_1$ que satisfacen*

1. $\rho_1(p, q) \geq L\rho_1(U_1, U_2)$.
2. $\rho_2(f(p), f(q)) \geq L\rho_2(f(U_1), f(U_2))$.

Se tiene

$$\frac{1}{K_1} \frac{\rho_2(f(U_1), f(U_2))}{\rho_1(U_1, U_2)} \leq \frac{\rho_2(f(p), f(q))}{\rho_1(p, q)} \leq K_1 \frac{\rho_2(f(U_1), f(U_2))}{\rho_1(U_1, U_2)}.$$

Demostración. Sabemos que existe (\tilde{X}, d_1) geodésico y un mapa L -bi-Lipschitz $h : (\tilde{U}_1, \rho_1) \rightarrow (\tilde{X}, d_1^\lambda)$. La hipótesis 1 implica

$$d_1(h(p), h(q)) \geq \rho_1(U_1, U_2)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Tomemos un entero $k \geq 2$ tal que

$$(k-1)\rho_1(U_1, U_2)^{\frac{1}{\lambda}} \leq d_1(h(p), h(q)) < k\rho_1(U_1, U_2)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

La propiedad bi-Lipschitz de h implica

$$\frac{1}{L}(k-1)^\lambda \rho_1(U_1, U_2) \leq \rho_1(p, q) < Lk^\lambda \rho_1(U_1, U_2). \quad (4.1)$$

Como (\tilde{X}, d_1) es geodésico, existen puntos $p_0 = p, p_1, \dots, p_k = q$ en U_1 tales que

$$\frac{1}{2}\rho_1(U_1, U_2)^{\frac{1}{\lambda}} \leq d_1(h(p_i), h(p_{i+1})) \leq \rho_1(U_1, U_2)^{\frac{1}{\lambda}}$$

para todo i . Tenemos entonces

$$\frac{1}{L2^\lambda} \rho_1(U_1, U_2) \leq \rho_1(p_i, p_{i+1}) \leq L\rho_1(U_1, U_2).$$

Como U_1 y U_2 son paralelas, el lema anterior implica que $f(U_1)$ y $f(U_2)$ también lo son. Consideramos para cada $i \in \{0, \dots, k\}$, un punto $q_i \in U_2$ de forma tal que $\rho_2(f(p_i), f(q_i)) = \rho_2(f(U_1), f(U_2))$. Tenemos

$$\rho_1(p_i, p_{i+1}) \leq L\rho_1(U_1, U_2) \leq L\rho_1(p_i, q_i),$$

y como f es φ -cuasisimétrico se cumple

$$\rho_2(f(p_i), f(p_{i+1})) \leq \varphi(L)\rho_2(f(p_i), f(q_i)) = \varphi(L)\rho_2(f(U_1), f(U_2)).$$

Consideramos otro espacio geodésico (\tilde{Y}, d_2) y un mapa L -bi-Lipschitz $g : (f(U_1), \rho_2) \rightarrow (\tilde{Y}, d_2^\lambda)$. Luego

$$d_2(g \circ f(p_i), g \circ f(p_{i+1})) \leq \varphi(L)^{\frac{1}{\lambda}} \rho_2(f(U_1), f(U_2))^{\frac{1}{\lambda}}.$$

La desigualdad triangular para la métrica d_2 implica

$$d_2(g \circ f(p), g \circ f(q)) \leq k(L\varphi(L))^{\frac{1}{\lambda}} \rho_2(f(U_1), f(U_2))^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Luego por la propiedad bi-Lipschitz de g tenemos

$$\rho_2(f(p), f(q)) \leq Ld_2^\lambda(g \circ f(p), g \circ f(q)) \leq L^2\varphi(L)k^\lambda \rho_2(f(U_1), f(U_2)).$$

Juntando esto con 4.1 obtenemos

$$\frac{\rho_2(f(p), f(q))}{\rho_1(p, q)} \leq \frac{L^2\varphi(L)k^\lambda \rho_2(f(U_1), f(U_2))}{1/L(k-1)^\lambda \rho_1(U_1, U_2)} \leq 2^\lambda L^3 \frac{\rho_2(f(U_1), f(U_2))}{\rho_1(U_1, U_2)}.$$

Usando el mismo argumento para f^{-1} y los puntos $f(p)$ y $f(q)$ obtenemos la otra desigualdad. \square

Lema 4.1.6. *Para dos fibras paralelas U_1 y U_2 en X , y dos puntos $p, q \in U_1$, se cumple*

$$\frac{1}{K_1^3} \frac{\rho_2(f(U_1), f(U_2))}{\rho_1(U_1, U_2)} \leq \frac{\rho_2(f(p), f(q))}{\rho_1(p, q)} \leq K_1^3 \frac{\rho_2(f(U_1), f(U_2))}{\rho_1(U_1, U_2)},$$

donde K_1 sólo depende de λ , L y φ .

Demostración. Tomemos U_1, U_2, p y q como en las hipótesis y dos puntos $p_0, q_0 \in U_1$ tal que $\rho_1(p_0, q_0) > L\rho_1(U_1, U_2)$ y $\rho_2(f(p_0), f(q_0)) > L\rho_2(f(U_1), f(U_2))$. Por el lema anterior se tiene que

$$\frac{1}{K_1} \frac{\rho_2(f(U_1), f(U_2))}{\rho_1(U_1, U_2)} \leq \frac{\rho_2(f(p_0), f(q_0))}{\rho_1(p_0, q_0)} \leq K_1 \frac{\rho_2(f(U_1), f(U_2))}{\rho_1(U_1, U_2)}.$$

Podemos tomar una sucesión de fibras $\{U_n\}_{n \geq 3}$, paralelas a U_1 , y que converja a esta última. Para n suficientemente grande

$$\min\{\rho_1(p, q), \rho_1(p_0, q_0)\} > L\rho_1(U_1, U_n)$$

y

$$\min\{\rho_2(f(p), f(q)), \rho_2(f(p_0), f(q_0))\} > L\rho_2(f(U_1), f(U_n))$$

Ahora, si aplicamos el lema anterior a U_1, U_n, p y q tenemos

$$\frac{1}{K_1} \frac{\rho_2(f(U_1), f(U_n))}{\rho_1(U_1, U_n)} \leq \frac{\rho_2(f(p), f(q))}{\rho_1(p, q)} \leq K_1 \frac{\rho_2(f(U_1), f(U_n))}{\rho_1(U_1, U_n)}.$$

De forma similar tenemos

$$\frac{1}{K_1} \frac{\rho_2(f(U_1), f(U_n))}{\rho_1(U_1, U_n)} \leq \frac{\rho_2(f(p_0), f(q_0))}{\rho_1(p_0, q_0)} \leq K_1 \frac{\rho_2(f(U_1), f(U_n))}{\rho_1(U_1, U_n)},$$

de lo que sigue

$$\frac{1}{K_1^2} \frac{\rho_2(f(p_0), f(q_0))}{\rho_1(p_0, q_0)} \leq \frac{\rho_2(f(p), f(q))}{\rho_1(p, q)} \leq K_1^2 \frac{\rho_2(f(p_0), f(q_0))}{\rho_1(p_0, q_0)}.$$

De donde se deduce la tesis. \square

Este lema nos dice que si U es una fibra en X , entonces $f|_U$ es bi-Lipschitz con una constante que puede depender de U . El siguiente lema prueba que puede tomarse una constante no dependiente de U .

Lema 4.1.7. *Existe $C \geq 1$ tal que $f|_U$ es C -bi-Lipschitz para toda fibra U .*

Demostración. Fijemos dos fibras U_1 y U_2 en X . Por el lema anterior existen C_1 y C_2 tal que $f|_{U_1}$ es C_1 -bi-Lipschitz y $f|_{U_2}$ es C_2 -bi-Lipschitz.

Sea $M \geq 1$ una constante para las cuasi-métricas ρ_1 y ρ_2 . Fijemos $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$ y tomemos $y_1 \in U_1$ y $y_2 \in U_2$ tales que

$$\rho_1(x_1, y_1) = \rho_1(x_2, y_2) = 10M\rho_1(x_1, x_2).$$

La desigualdad cuasi-triangular en X aplicada a x_1, x_2 e y_1 implica

$$\frac{1}{2M}\rho_1(x_2, y_2) = \frac{1}{2M}\rho_1(x_1, y_1) \leq \rho_1(x_2, y_1) = 2M\rho_1(x_1, y_1) = 2M\rho_1(x_2, y_2).$$

Luego, la condición de cuasisimetría implica

$$\frac{\rho_2(f(x_1), f(y_1))}{\varphi(2M)} \leq \rho_2(f(x_2), f(y_1)) \leq \varphi(2M)\rho_2(f(x_1), f(y_1))$$

y

$$\frac{\rho_2(f(x_2), f(y_2))}{\varphi(2M)} \leq \rho_2(f(x_2), f(y_1)) \leq \varphi(2M)\rho_2(f(x_2), f(y_2)),$$

de donde se deduce

$$\frac{1}{\varphi(2M)^2}\rho_2(f(x_1), f(y_1)) \leq \rho_2(f(x_2), f(y_2)) \leq \varphi(2M)^2\rho_2(f(x_1), f(y_1)).$$

Tomando $C = C_1\varphi(2M)^2$ tenemos lo que buscábamos. \square

Demostración del Teorema 4.1.3. Sean p y q dos puntos arbitrarios de X , y U y V dos fibras en X de forma tal que $p \in U$ y $q \in V$. Tomemos $x \in U$ tal que $\rho_1(p, x) = \rho_1(p, q)$. Luego

$$\rho_2(f(p), f(q)) \leq \varphi(1)\rho_2(f(p), f(x)) \leq C\varphi(1)\rho_1(p, x) = C\varphi(1)\rho_1(p, q).$$

Si hacemos lo mismo con f^{-1} obtenemos la otra desigualdad. \square

4.2. Cohomología de Orlicz

En topología algebraica la teoría de cohomología es una herramienta poderosa para encontrar invariantes topológicos. De la misma forma, en geometría, puede utilizarse una teoría similar para encontrar invariantes por cuasi-isometrías. Estas teorías de cohomología consisten en construir espacios funcionales asociados a espacios métricos.

En nuestro caso dichos espacios funcionales serán los llamados *espacios de Orlicz*. La teoría de cohomología de Orlicz es una generalización de la cohomología l^p ([Pan89a, BP03, Pan07]). Esta visión más general permite encontrar invariantes más finos que los que se han logrado encontrar mediante la cohomología l^p .

Este capítulo pretende mostrar algunas definiciones y resultados que serán útiles más adelante, dejando los detalles a un lado. Para un estudio más profundo de los temas aquí tratados se recomienda leer [Pia16]. Nuestro principal objetivo es encontrar un candidato a fibrado cuasi-métrico invariante por cuasi-isometrías en el borde parabólico de un grupo de Heintze que nos ubique en las hipótesis del Teorema 4.1.3 y que nos sirva como punto de partida para encontrar otros invariantes.

4.2.1. Espacios de Orlicz

Antes de definir la cohomología de Orlicz veamos algo de espacios de Orlicz. Para esta sección referimos a [RR91].

Una *función de Young* es un función convexa $\phi : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ que satisface $\phi(0) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty$. Consideremos ahora un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ con μ σ -finita. Para una función medible $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definimos la *norma de Luxemburgo* de f como

$$\|f\|_\phi = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_\Omega \phi \left(\frac{f}{\alpha} \right) d\mu \leq 1 \right\},$$

donde $\inf\{\emptyset\} = +\infty$. El *espacio de Orlicz* $L^\phi(\Omega)$ es el cociente del espacio vectorial de las funciones medibles $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\|f\|_\phi < \infty$ por las funciones con norma cero. Este resulta ser un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_\phi$. Si μ es la medida de conteo escribimos $l^\phi(\Omega)$.

Lema 4.2.1. Para $K \geq 1$, el mapa identidad $id : L^{K\phi}(\Omega, \mu) \rightarrow L^\phi(\Omega, \mu)$ es continuo y biyectivo, y además $\| \cdot \|_{K\phi}$ y $\| \cdot \|_\phi$ son bi-Lipschitz equivalentes.

Si μ es una medida finita, entonces $L^\phi(\Omega, \mu)$ está contenido en $L^1(\Omega, \mu)$ y la inclusión es continua. En particular, si μ es una medida de Radon en un espacio localmente compacto, las funciones en $L^\phi(\Omega, \mu)$ serán localmente integrables.

Definición 4.2.2. Una función de Young ϕ es *duplicante* si existe $t_0 > 0$ y $K \geq 2$ tal que $\phi(2t) \leq K\phi(t)$ para todo $t \in [0, t_0]$.

Observemos que como ϕ' es no decreciente, entonces tenemos

$$\frac{t\phi'(t)}{\phi(t)} \geq 1$$

para todo $t > 0$. Consideramos

$$p_\phi = \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{t\phi'(t)}{\phi(t)} \in [1, +\infty].$$

Luego ϕ es duplicante si y sólo si $p_\phi < +\infty$. Es importante notar que si ϕ es duplicante, luego $f \in L^\phi(\Omega, \mu)$ si y sólo si

$$\int_{\Omega} \phi(f) d\mu < +\infty.$$

Una función de Young duplicante tiene decaimiento polinomial con exponente p para cualquier $p > p_\phi$. Esto significa que existe $t_0 > 0$ y $C > 0$ tal que $\phi(t) \geq Ct^p$ para todo $t \in [0, t_0]$.

Definición 4.2.3. Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos funciones de Young. Escribimos $\phi_1 \preceq \phi_2$ si existen $a, b > 0$ y $t_0 > 0$ tal que $\phi_2(t) \leq a\phi_1(bt)$ para $t \leq t_0$. Decimos que ϕ_1 y ϕ_2 son equivalentes, y escribimos $\phi_1 \sim \phi_2$, si $\phi_1 \preceq \phi_2$ y $\phi_2 \preceq \phi_1$.

El siguiente Lema nos dice, para el caso numerable, que sólo nos interesa el comportamiento de las funciones de Young duplicantes en un entorno de cero.

Lema 4.2.4. Sea Ω un conjunto numerable y ϕ_1 y ϕ_2 dos funciones de Young equivalentes. Entonces las normas $\| \cdot \|_{\phi_1}$ y $\| \cdot \|_{\phi_2}$ son bi-Lipschitz equivalentes.

Ahora si ϕ es una función de Young duplicante, siempre podemos cambiarla por una equivalente para la cual la condición de ser duplicante se cumpla para $t_0 = +\infty$.

Lema 4.2.5. Sea ϕ una función de Young duplicante con constantes K y $t_0 = +\infty$. Luego para todo $y > 0$ y $x \in [0, 1]$ tenemos $x^k \phi(y) \leq \phi(xy)$

4.2.2. Cohomología de Orlicz simplicial

Consideremos un complejo simplicial de dimensión finita X con una distancia d que cumple con las siguientes condiciones:

1. Cada simplejo es isométrico a un simplejo euclídeo estandar.
2. Es *uniformemente contractible*: toda bola $B(x, r)$ es contractible en $B(x, r')$ donde r' sólo depende de r .
3. Tiene *geometría acotada*: existe una constante N tal que todo vértice está contenido en a lo sumo N simplejos.

Notar que existe una función $N_X : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{N}$ tal que toda bola de radio $r \geq 0$ contiene a lo sumo $N_X(r)$ simplejos y que $N_X(1) = N$.

Puede que la teoría de cohomología simplicial parezca alejada de nuestros objetivos, puesto que nos interesa trabajar con grupos de Heintze. Más si tenemos en cuenta que existe una teoría análoga para variedades Riemannianas. Sin embargo, como quedará claro más adelante, existe una correspondencia entre ambas.

Para $k \in \mathbb{N}$ sea X_k el conjunto de los k -simplejos en X y $C_k(X)$ el espacio vectorial de las k -cadenas en X . Es decir, las combinaciones lineales finitas de elementos de X_k , o más formalmente las funciones $c : X_k \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte finito.

Sea ahora ϕ una función de Young. El k -espacio de co-cadenas ϕ -integrables es por definición el espacio de Banach $l^\phi(X_k)$. Es decir, el espacio de funciones $\omega : X_k \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\|\omega\|_\phi = \inf \left\{ \alpha > 0 : \sum_{\sigma \in X_k} \phi \left(\frac{\omega(\sigma)}{\alpha} \right) \leq 1 \right\} < \infty.$$

El operador de coborde $\delta_k : l^\phi(X_k) \rightarrow l^\phi(X_{k+1})$ es definido por $\delta_k(\omega)(\sigma) = \omega(\partial\sigma)$. Es fácil probar que δ_k está bien definido como operador acotado, esto sale directamente de la convexidad de ϕ , de la geometría acotada de X y del Lema 4.2.1.

Definición 4.2.6. El k -espacio de l^ϕ -cohomología de X es el espacio vectorial topológico

$$l^\phi H^k(X) = Ker(\delta_k) / Im(\delta_{k-1}).$$

El k -espacio de l^ϕ -cohomología reducida de X es el espacio de Banach

$$l^\phi \overline{H}^k(X) = Ker(\delta_k) / \overline{Im(\delta_{k-1})}.$$

El siguiente es uno de los resultados centrales de esta sección. Como dijimos anteriormente, su prueba puede leerse en [Pia16].

Teorema 4.2.7. *Sea ϕ una función de Young, X e Y dos complejos simpliciales con métricas que cumplen las condiciones 1 – 3. Si X e Y son cuasi-isométricos entonces para todo k los espacios $l^\phi H^k(X)$ y $l^\phi H^k(Y)$ son isomorfos como espacios vectoriales topológicos. Lo mismo se cumple para la cohomología reducida.*

El isomorfismo inducido por una cuasi-métrica $F : X \rightarrow Y$ es un mapa $F^* : l^\phi H^k(Y) \rightarrow l^\phi H^k(X)$, denominado *pull-back* (ver [Pia16, Sección 3]).

4.2.3. Cohomología de Orlicz-De Rham de grado 1

Tomemos M una variedad Riemanniana simplemente conexa y completa con curvatura de Ricci acotada por debajo y radio de inyectividad positivo. Denotamos por dx al elemento de volumen de M .

En estas condiciones M es cuasi-isométrico a un grafo simplicial geométrico X_M (ver [Kan85]). Es posible construir un complejo simplicial cuasi-isométrico a X_M que cumpla las condiciones 1 – 3, cuyo 1-esqueleto sea X_M y tal que el mapa borde ∂_1 sea trivial (ver construcción del complejo de Rips en [BH99, Sección 3.23]). Sin embargo, como sólo nos va a interesar la cohomología en grado, no habrá diferencia entre trabajar con este complejo de Rips y trabajar directamente con X_M .

Sea $Z^\infty(M)$ el espacio de las 1-formas diferenciales cerradas en M equipadas con la norma de Luxemburgo:

$$\|\omega\|_\phi = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_M \phi \left(\frac{|\omega_x|}{\alpha} \right) dx \leq 1 \right\} \in [0, +\infty],$$

donde $|\omega_x|$ es la norma de operador.

Definimos

$$Z_\phi^\infty(M) = \{\omega \in Z^\infty(M) : \|\omega\|_\phi < +\infty\}.$$

Su completación $Z_\phi(M)$ es el espacio de las 1-formas ϕ -integrables en M que tienen derivada exterior débil nula.

Sea $C_\phi^\infty(M)$ es el espacio de funciones diferenciables ϕ -integrables. La derivada exterior $d : C_\phi^\infty(M) \rightarrow Z_\phi^\infty(M)$ es acotada si en $C_\phi^\infty(M)$. Consideramos la norma $\|u\|_\phi + \|du\|_\phi$. El operador d se puede extender a la completación de $C_\phi^\infty(M)$, es decir, las funciones ϕ -integrables en M con derivada débil ϕ -integrable. Luego definimos el primer espacio de cohomología de Orlicz-Rham de M como el cociente

$$L^\phi H^1(M) = Z_\phi(M)/Im(d).$$

Puede probarse que $L^\phi H^1(M)$ es isomorfo a

$$\{u \in L_{loc}^1(M) : \|du\|_\phi < +\infty\} / \{u \in L^\phi(M) : \|du\|_\phi < +\infty\} \oplus \mathbb{R},$$

donde \mathbb{R} indica las funciones constantes. De acuerdo a esta identificación, se puede probar también que todas las clases contienen una función diferenciable. El siguiente teorema relaciona esta noción de cohomología con la cohomología simplicial definida más arriba.

Teorema 4.2.8. *Si M es una variedad Riemanniana con las hipótesis de antes, entonces $L^\phi H^1(M)$ y $l^\phi H^1(X_M)$ son isomorfos.*

4.2.4. Espacios de Orlicz-Besov

Sea (Z, d_0) un espacio métrico compacto que cumple las siguientes propiedades:

- (1) Es *uniformemente perfecto*, es decir, existe una constante $C > 1$ tal que para todo $z \in Z$ y $r \leq \text{diam}(Z)$ se tiene $B(z, r) - B(z, R/C) \neq \emptyset$.
- (2) Posee una medida boreliana duplicante μ : para toda bola $B(z, r)$ se tiene que

$$0 < \mu(B(z, 2r)) < C\mu(B(z, r)) < +\infty,$$

donde C es una constante que no depende de z ni de r .

Puede probarse que las propiedades (1) y (2) son invariantes por cuasi-simetrías.

Decimos que d es una métrica *Ahlfors-regular* en Z si existe una constante $C \geq 1$ tal que la Q -medida de Hausdorff \mathcal{H} (con Q la dimensión de Hausdorff) cumple

$$C^{-1}r^Q \leq \mathcal{H}(B(z, r)) \leq Cr^Q$$

para todo $z \in Z$ y $r \leq \text{diam}(Z)$. Las propiedades (1) y (2) implican que existe una métrica d en Z , cuasi-simétricamente equivalente a d_0 que es Ahlfors-regular. Es más, toda medida duplicante en (Z, d_0) es esencialmente una medida de Hausdorff para una métrica Ahlfors-regular d cuasi-simétricamente equivalente a d_0 (ver [Hei01, Capítulo 14]).

Tomemos ahora una función de Young ϕ y d una métrica Ahlfors-regular en Z tal que la dimensión de Hausdorff de (Z, d) es Q . Notemos por Δ al conjunto $\{(z, z) : z \in Z\}$. Para $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ medible definimos la ϕ -norma por

$$\langle f \rangle_\phi = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_{Z \times Z - \Delta} \phi \left(\frac{f(z_1) - f(z_2)}{\alpha} \right) d\lambda(z_1, z_2) \leq 1 \right\}$$

donde

$$d\lambda(z_1, z_2) = \frac{d\mathcal{H} \otimes d\mathcal{H}(z_1, z_2)}{d(z_1, z_2)^{2Q}}.$$

El espacio de Orlicz-Besov de (Z, d) para la función ϕ es por definición

$$B^\phi(Z, d) = \{f : Z \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ medible y } \langle f \rangle_\phi < +\infty\}.$$

Si notamos por \mathbb{R} a las funciones que son constantes \mathcal{H} -ctp, entonces $B^\phi(Z, d)/\mathbb{R}$ es un espacio de Banach equipado con $\langle \rangle_\phi$.

Tomemos ahora un complejo simplicial (X, d) que cumpla las condiciones 1 – 3 de la Sección 4.2.2, además de las siguientes:

4. Es hipebólico en el sentido de Gromov.
5. Es *cuasi-estrellado*: todo punto de X está a una distancia uniformemente acotada de un rayo geodésico.

Luego tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.2.9. *Sea ϕ una función de Young duplicante, y ρ una distancia visual elíptica Ahlfors-regular en ∂X . Luego existe un isomorfismo de espacios de Banach entre $l^\phi H^1(X)$ y $B^\phi(\partial X, \rho)/\mathbb{R}$. En particular $l^\phi H^1(X)$ es reducida.*

Vamos a explicar brevemente como es este isomorfismo. Para esto primero observemos que $l^\phi H^1(X)$ es isomorfo al espacio $\{f : X_0 \rightarrow \mathbb{R} : \partial_0 f \in l^\phi(X_1)\}/(l^\phi(X_0) + \mathbb{R})$, donde \mathbb{R} indica el espacio de las funciones constantes. Dicho isomorfismo es inducido por el operador de coborde δ_0 .

Definamos ahora las coordenadas polares en el 1-esqueleto de X (que es cuasi-isométrico a X). Sea \mathcal{R}_{x_0} el espacio de rayos geodésicos que parten de x_0 y $\pi_{x_0} : \mathcal{R}_{x_0} \rightarrow \partial X$ la proyección definida por $\pi_{x_0}(r) = \lim_{t \rightarrow +\infty} r(t)$. Existe una sección medible de π_{x_0} , $\theta : \partial X \rightarrow \mathcal{R}_{x_0}$, $\xi \mapsto \theta_\xi$ (la prueba de la existencia puede verse en [Par05]). Ahora si $f : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\delta_0 f \in l^\phi(X_1)$, definimos para $\xi \in \partial X$, en caso de que exista,

$$f_\infty(\xi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(\theta_\xi(t)).$$

El mapa $f \mapsto f_\infty$ inducirá el isomorfismo entre $\{f : X_0 \rightarrow \mathbb{R} : \partial_0 f \in l^\phi(X_1)\}/(l^\phi(X_0) + \mathbb{R})$ y $B^\phi(\partial X, \rho)$.

Corolario 4.2.10. *Si ϕ es una función de Young y ρ_1 y ρ_2 son distancias visuales en los complejos simpliciales cuasi-isométricos X e Y (que cumplen las condiciones 1 – 5), entonces los espacios de Orlicz-Besov $B^\phi(\partial X, \rho_1)$ y $B^\phi(\partial Y, \rho_2)$ son isomorfos como espacios de Banach.*

Por [BP03, Sección 2], todo espacio métrico compacto y Ahlfors-regular es homeomorfo a ∂X para algún complejo simplicial X como arriba, y la clase de cuasi-isometría de X depende únicamente de la clase de cuasi-simetría de Z . Luego los espacios de Orlicz-Besov de Z son invariantes por cuasi-simetría.

Consideremos el álgebra de las funciones continuas en el espacio de Orlicz-Besov

$$A^\phi = A^\phi(\partial X, \rho) = \{u \in B^\phi(\partial X, \rho) : u \text{ es continua}\}.$$

Esta es un álgebra de Banach unital equipada con la norma $N_\phi(u) = \|u\|_\phi + \langle u \rangle_\phi$. El espectro de A^ϕ , denotado por $\text{Sp}(A^\phi)$, es un espacio topológico compacto invariante por isomorfismos de álgebras de Banach, en particular es invariante por cuasi-isometrías de X .

El especto de A^ϕ es un espacio cociente de ∂X , donde la relación de equivalencia está dada por $\zeta \sim_\phi \zeta'$ si y sólo si $u(\zeta) = u(\zeta')$ para toda $u \in A^\phi$. Luego dichas clases en ∂X son preservadas por cuasi-isometrías de X .

4.2.5. Localización

Aunque esta parte está hecha más en general en [Pia16], vamos a suponer aquí que nuestro complejo simplicial X es CAT(-1). De este modo nos ahorraremos algunos detalles en las definiciones. Consideremos ξ un punto en ∂X y ϱ una métrica visual parabólica centrada en el punto ξ . Trataremos aquí con espacios y álgebras de Fréchet, para cuya teoría básica referimos a [Gol90].

Llamemos $\mathcal{Y}(X, \xi)$ a la colección de encajes cuasi-isométricos $\iota : Y \rightarrow X$ con $\partial\iota(\partial Y) \subset \partial_\xi X$, donde Y es otro complejo simplicial hiperbólico con geometría acotada. Denotamos por i^* al pull-back definido anteriormente. Luego definimos el espacio de k -cocadenas ϕ -integrables del par (X, ξ) como

$$l_{\text{loc}}^\phi(X_k, \xi) = \{\tau : X_k \rightarrow \mathbb{R} : \iota^*(\tau) \in l^\phi(Y_k), \forall \iota \in \mathcal{Y}(X, \xi)\}.$$

Donde X_k e Y_k indican el conjunto de k -simplejos de X e Y respectivamente. Puede verse que $l_{\text{loc}}^\phi(X_k, \xi)$ es un espacio de Fréchet y los operadores de coborde

$$\delta_k : l_{\text{loc}}^\phi(X_k, \xi) \rightarrow l_{\text{loc}}^\phi(X_{k+1}, \xi)$$

son Lipschitz. Luego podemos definir los espacios de cohomología local l^ϕ del par (X, ξ) como

$$l_{\text{loc}}^\phi H^k(X, \xi) = \text{Ker}(\delta_k) / \text{Im}(\delta_{k-1}).$$

La cohomología l^ϕ reducida se define de forma análoga tomando cociente por $\overline{\text{Im}(\delta_{k-1})}$.

La cohomología local l^ϕ es un invariante por cuasi-isometrías. Es decir que si $F : X_1 \rightarrow X_2$ es una cuasi-isometría, entonces para todo k se tiene que $l_{\text{loc}}^\phi H^k(X_1, \xi)$ y $l_{\text{loc}}^\phi H^k(X_2, \partial F(\xi))$ son isomorfos como espacios vectoriales topológicos (lo mismo sucede por la cohomología reducida).

Como sucede con la cohomología global, podemos identificar la cohomología local de Orlicz en grado uno con un espacio local de Orlicz-Besov en $\partial_\xi X$. Dicho espacio se define como

$$B_{\text{loc}}^\phi(\partial_\xi X, \varrho) = \{u : \partial_\xi X \rightarrow \mathbb{R} : \langle u \rangle_{\phi, \xi, K} < +\infty, \forall K \subset \partial_\xi X \text{ compacto}\},$$

donde $\langle \rangle_{\phi, K}$ es la norma de Orlicz-Besov para el espacio (K, ϱ) .

Teorema 4.2.11. *Sea ϕ una función de Young duplicante y ϱ una métrica visual parabólica en $\partial_\xi X$ que es Ahlfors-regular. Luego existe un isomorfismo canónico de espacios de Fréchet entre $l_{loc}^\phi(X, \xi)$ y $B_{loc}^\phi(\partial_\xi X, \varrho)/\mathbb{R}$. En particular $l_{loc}^\phi(X, \xi)$ es reducida.*

El teorema anterior muestra entonces que las cuasi-isometrías preservan los espacios de Orlicz-Besov en el borde parabólico. Es decir que si $F : X \rightarrow Y$ es una cuasi-isometría y ϱ_ξ y $\varrho_{F(\xi)}$ son métricas visuales parabólicas en $\partial_\xi X$ y $\partial_{F(\xi)} Y$ respectivamente, entonces $B_{loc}^\phi(\partial_\xi X, \varrho_\xi)$ es isomorfo a $B_{loc}^\phi(\partial_{F(\xi)} Y, \varrho_{F(\xi)})$. Con respecto a la condición de Ahlfors-regularidad de la métrica visual parabólica es importante mencionar que para un espacio CAT(-1) se da que las distancias visuales elípticas son Ahlfors-regular si y sólo si las distancias visuales parabólicas lo son (ver [Wil08, Sección 6]).

Consideremos ahora la cohomología l^ϕ local continua

$$A_\xi^\phi = A_{loc}^\phi(\partial_\xi X, \varrho) = \left\{ u \in B_{loc}^\phi(\partial_\xi X, \varrho) : u \text{ es continua} \right\}.$$

El espacio A_ξ^ϕ es un álgebra de Fréchet conmutativa y unital equipada con la familia de seminormas multiplicativas

$$p_n(u) = \|u\|_{K_n} + \langle u \rangle_{\phi, K_n},$$

donde K_n es una sucesión creciente de compactos cuya unión es todo $\partial_\xi X$.

Su espectro $\text{Sp}(A_\xi^\phi)$ es un espacio topológico de Hausdorff invariante por isomorfismos de álgebras de Fréchet. Este es isomorfo al cociente $\partial_\xi X / \sim_\phi$, donde la relación \sim_ϕ es definida por $\zeta \sim_\phi \zeta'$ si y sólo si $u(\zeta) = u(\zeta')$ para toda función $u \in A_\xi^\phi$. Las clases de esta relación, llamadas clases de cohomología local l^ϕ , deben preservarse por cuasi-isometrías.

4.2.6. Aplicaciones a grupos de Heintze

Sea $G = N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ un grupo de Heintze puramente real. Como vimos en el Capítulo 3, podemos tomar $\lambda > 0$ suficientemente grande para que $G_\lambda = N \rtimes_{\lambda\alpha} \mathbb{R}$, con una métrica Riemanniana como en la prueba del Teorema 3.2.8, sea CAT(-1). Equipamos $\partial_\infty G_\lambda$ con una métrica visual parabólica ϱ .

Sean $\lambda_1 < \dots < \lambda_d$ los valores propios de $\lambda\alpha$, cuyos subespacios propios generalizados son V_1, \dots, V_d . Consideremos además para cada i el subespacio V_i^0 , generado por los λ_i -vectores propios asociados a los sub-bloques de Jordan de tamaño máximo. Ahora consideramos las subálgebras de Lie \mathfrak{u}_i y \mathfrak{h}_i , generadas por los subespacios

$$W_i = \bigoplus_{r=1}^i V_r, \text{ y } W'_i = W_{i-1} \oplus V_i^0$$

respectivamente. Aquí W_0 es trivial.

Definimos U_i y H_i como los subgrupos de Lie de N conexos cuyas álgebras de Lie son \mathfrak{u}_i y \mathfrak{h}_i respectivamente. Por último definimos m_i como el tamaño del sub-bloque de Jordan más grande asociado a λ_i .

Observemos que aquí los espacios de Orlicz-Besov (tanto global como local) en el borde están bien definidos y son invariantes por cuasi-isometrías. Esto es así ya que G_λ es cuasi-isométrico a un complejo simplicial con las hipótesis 1 – 5, la condición de Ahlfors-regularidad se deduce de las condiciones de la Proposición 3.3.3. Luego todas las construcciones hechas anteriormente, en particular A^ϕ y A_∞^ϕ y sus espectros, son invariantes por cuasi-isometrías.

Tomemos la familia de funciones de Young duplicantes

$$\phi_{p,k}(t) = \frac{|t|^p}{\log(e + |t|^{-1})^k},$$

con $(p, k) \in I = [1, +\infty) \times [0, +\infty)$.

Teorema 4.2.12. *Para $i = 1, \dots, d$ consideremos el exponente $p_i = \text{tr}(\lambda\alpha)/\lambda_i$ y pongamos $p_{d+1} = 1$.*

1. *Si $p \in (p_{i+1}, p_i)$ y $k \geq 0$, entonces el espectro de $A_\infty^{\phi_{p,k}}$ es homeomorfo a N/U_i .*
2. *Si $p = p_i$ y $m_i = 1$ entonces:*
 - a) *Si $k \leq 1$, el espectro de $A_\infty^{\phi_{p,k}}$ es homeomorfo a N/U_i .*
 - b) *Si $k > 1$, el espectro de $A_\infty^{\phi_{p,k}}$ es homeomorfo a N/U_{i-1} .*
3. *Si $p = p_i$, $m \geq 2$ y $k \in (1 + p_i(m_i - 2), 1 + p_i(m_i - 1))$, entonces el espectro de $A_\infty^{\phi_{p,k}}$ es homeomorfo a N/H_{i-1} .*

En particular, en todos los casos, las clases de la cohomología local $l^{\phi_{p,k}}$ en N coinciden con las coclases a izquierda de los subgrupos correspondientes.

El Teorema 4.2.12 nos dice en particular que si tenemos una cuasi-isometría entre grupos de Heintze CAT(-1) que preserve el infinito, entonces su extensión al borde debe preservar las coclases de los grupos H_i y U_i correspondientes a cada uno de ellos.

Como el isomorfismo canónico entre G y G_λ preserva las coclases a izquierda de los subgrupos H_i y U_i , vemos que la hipótesis de que sean CAT(-1) puede ser eliminada. En particular los subgrupos H_1 y U_1 asociado a un grupo de Heintze $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ serán importantes más adelante. También nos referiremos a ellos como H_α y U_α , y notaremos \mathfrak{h}_α y \mathfrak{u}_α a sus álgebras de Lie.

Por último, el teorema 4.2.12 junto con la última observación de la Sección 3.4 y el corolario 3.4.9 implican el siguiente corolario.

Corolario 4.2.13. *Sean $G_1 = N_1 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ y $G_2 = N_2 \rtimes_\beta \mathbb{R}$ dos grupos de Heintze puramente reales. Si existe una cuasi-isometría entre ellos, entonces $H_\alpha \rtimes_{\alpha|_{\mathfrak{h}_\alpha}} \mathbb{R}$ y $H_\beta \rtimes_{\beta|_{\mathfrak{h}_\beta}} \mathbb{R}$ son isomorfos. En particular, si G_1 es de tipo Carnot entonces G_2 también lo es.*

4.3. Distancia de Hausdorff entre coclases

Consideramos en esta sección un grupo de Lie nilpotente conexo y simplemente conexo N , dotado de una distancia visual parabólica ϱ_α , donde α es una derivación en $\mathfrak{n} = \text{Lie}(N)$ con valores propios reales positivos $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_d$. Sea \mathfrak{h} una subálgebra propia de \mathfrak{n} y H el correspondiente subgrupo conexo de N .

El objetivo de esta sección es estudiar cuándo dos coclases a izquierda de H están a distancia de Hausdorff finita. Esto nos dará otras foliaciones invariantes en el borde a partir de la obtenida en la primera sección del presente capítulo.

Lema 4.3.1. *Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno en \mathfrak{n} . Para todo $\mu > \lambda_d$ existe una constante $c > 0$ tal que*

$$c\|X\| \leq \varrho_\alpha(e, \exp X)^\mu$$

para todo $X \in \mathfrak{n}$ con $\varrho_\alpha(e, \exp X) \geq 1$.

Demostración. Consideremos $C = \max\{\|X\| : X \in \mathfrak{n}, \varrho_\alpha(e, \exp X) = 1\}$ que es finito porque $\{x \in N : \varrho_\alpha(e, x) = 1\}$ es compacto por 3.3.4. Fijemos $X \in \mathfrak{n}$ con $\varrho_\alpha(e, \exp X) \geq 1$ y sea $x = \exp X$. Elegimos $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varrho_\alpha(e, \tau(t)x) = e^t \varrho_\alpha(e, x) = 1.$$

Notar que $t \leq 0$. Como $\tau(t)x = \exp(e^{t\alpha}X)$, tenemos que $\|e^{t\alpha}X\| \leq C$. Observar que de la fórmula de la exponencial de matrices se deduce que existe un polinomio p tal que

$$\|e^{t\alpha}X\| \geq \frac{e^{t\lambda_d}\|X\|}{p(t)},$$

donde $p(s) \sim c_1|s|^{n_d-1}$ cuando $s \rightarrow -\infty$, siendo $c_1 > 0$ y n_d la dimensión del espacio propio generalizado asociado a λ_d . Dado $\mu > \lambda_d$, podemos elegir una constante $c_2 > 0$ tal que

$$\frac{e^{s\lambda_d}}{p(s)} \geq c_2 e^{s\mu} \text{ para todo } s \leq 0.$$

De las anteriores desigualdades se deduce que $c_2 e^{t\mu}\|X\| \leq C$, y luego

$$\frac{c_2}{C}\|X\| \leq \varrho_\alpha(e, \exp X)^\mu.$$

□

Supongamos que K es un subgrupo conexo de N y \mathfrak{k} su álgebra de Lie. Como ϱ_α es invariante a izquierda, para todo $x \in N$, tenemos

$$\text{dist}_H(Kx, K) = \varrho_\alpha(x, K).$$

Aquí dist_H está en función de ϱ_α . En particular, si x está en el normalizador $N(K) = \{y \in N : yxy^{-1} \in K\}$, entonces

$$\text{dist}_H(xK, K) = \text{dist}_H(Kx, K) = \varrho_\alpha(x, K) < \infty.$$

Esto muestra que si las coclases xK e yK están en la misma coclase a izquierda de $N(K)$, entonces se encuentran a distancia de Hausdorff finita. Además en este caso son paralelas ya que para todo $k \in K$ se tiene

$$\text{dist}_H(xK, yK) = \varrho_\alpha(xk, yK) = \varrho_\alpha(xK, yk).$$

Supongamos ahora que K es un subgrupo normal τ -invariante de N . Usando lo anterior vemos que ϱ_α induce una cuasi-métrica $\tilde{\varrho}_\alpha$ en N/K por $\tilde{\varrho}_\alpha(xK, yK) = \text{dist}_H(xK, yK)$ para la cual la proyección $\pi : N \rightarrow N/K$ es 1-Lipschitz. Por otro lado \mathfrak{k} es invariante por α y por lo tanto induce una derivación de $\mathfrak{n}/\mathfrak{k}$ con valores propios positivos $\tilde{\alpha}$ dada por

$$\tilde{\alpha}(X + \mathfrak{k}) = \alpha(X) + \mathfrak{k} \tag{4.2}$$

Lema 4.3.2. $\tilde{\varrho}_\alpha$ es una cuasi-métrica visual parabólica en N/K asociada a $\tilde{\alpha}$.

Demostración. Debemos probar las tres propiedades de la Proposición 3.3.3. La continuidad y la invarianza a izquierda son fácilmente verificables, probemos la tercera propiedad.

Llamemos $\pi : N \rightarrow N/K$ y $\Pi : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}/\mathfrak{k}$ a las proyecciones canónicas. Observamos que $\pi \circ \exp = \exp \circ \Pi$, donde \exp de ambos lados de la igualdad indica el mapa exponencial correspondiente. Luego para todo $t \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\pi \circ \tau(t)x = \pi \circ \exp(e^{t\alpha}) = \exp \circ \Pi(e^{t\alpha}X) = \exp(e^{t\tilde{\alpha}}X).$$

Como K es τ -invariante, $\tilde{\tau}(t)\pi(x) = \pi(\tau(t)x) = \tau(t)(xK)$ define la acción por automorfismos correspondiente a $\tilde{\alpha}$, y luego

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho}_\alpha(\tilde{\tau}(t)xK, \tilde{\tau}(t)yK) &= \tilde{\varrho}_\alpha(\pi(\tau(t)x), \pi(\tau(t)y)) \\ &= \tilde{\varrho}_\alpha(\tau(t)(xK), \tau(t)(yK)) = e^t \varrho(xK, yK). \end{aligned}$$

□

El siguiente lema es probado para grupos de tipo Carnot en [LX15].

Lema 4.3.3. *Dos coclases a izquierda de H están a distancia de Hausdorff finita si y sólo si están contenidas en la misma coclase a izquierda de $N(H)$. Además en ese caso las coclases son paralelas.*

Demostración. Ya observamos que si dos coclases a izquierda de H están en la misma coclase a izquierda de $N(H)$, entonces están a distancia de Hausdorff finita y son paralelas.

Nos resta probar la otra implicación. Para esto vamos a hacer inducción en el índice de nilpotencia de N . El caso abeliano es obvio ya que $N(H) = N$. Supongamos ahora que la afirmación es cierta para grupos de índice de nilpotencia menor a m .

Sea Z el centro de N . Luego el grupo cociente N/Z tiene índice de nilpotencia a lo sumo $m - 1$. Tomemos dos coclases a izquierda de H , contenidas en diferentes coclases a izquierda de $N(H)$. Como ϱ_α es invariante a izquierda, podemos asumir que estas coclases son H y xH con $x \notin N(H)$. Esto significa que existe $h_0 \in H$ tal que $x^{-1}h_0x \notin H$. Si $\pi : N \rightarrow N/Z$ es la proyección canónica, tenemos las siguientes opciones:

1. $\pi(x) \notin N(\pi(H))$; o
2. $\pi(x) \in N(\pi(H))$ y por lo tanto $\pi(x^{-1}hx) \in \pi(H)$ para todo $h \in H$.

En el primer caso podemos aplicar la hipótesis de inducción: $\pi(x)\pi(H) = \pi(xH)$ y $\pi(H)$ deben estar a distancia de Hausdorff infinita. Luego como π es una contracción, la distancia de Hausdorff entre H y xH debe ser también infinita.

Supongamos que se da el segundo caso. Sea $X, Y_0 \in \mathfrak{n}$ tal que $\exp X = x$ y $\exp Y_0 = h_0$, y definamos $h_0^{(t)} := \exp(tY_0)$ para $t \in \mathbb{R}$. Notar que $h_0^{(t)}$ está también en H . Para todo $t \in \mathbb{R}$, existe $h_t \in H$ tal que $h_t^{-1}x^{-1}h_0^{(t)}x \in Z$. Esto es porque $\pi(x^{-1}h_0^{(t)}x) \in \pi(H)$. En particular, $x^{-1}h_0^{(t)}x \in N(H)$.

Por la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, como

$$x^{-1}h_0x = \exp\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{ad_{-X}^j(Y_0)}{j!}\right) \notin H,$$

tenemos que

$$W := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{ad_{-X}^j(Y_0)}{j!} - Y_0 \notin \mathfrak{h}.$$

Además, notar que para todo t tenemos

$$x^{-1}h_0^{(t)}x = \exp\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{ad_{-X}^j(tY_0)}{j!}\right) = \exp(tY_0 + tW).$$

Sea h un punto en H y consideremos $Y \in \mathfrak{h}$ tal que $\exp Y = h$. Luego, como $tY_0 + tW$ está en el normalizador $\mathfrak{N}(\mathfrak{h})$, podemos escribir

$$h^{-1}x^{-1}h_0^{(t)}x = \exp(Y(t) + tW)$$

con $Y(t) \in \mathfrak{h}$ y $tW \notin \mathfrak{h}$.

Podemos ponerle a \mathfrak{n} un producto interno que haga W ortogonal con \mathfrak{h} . Luego

$$\|Y(t) + tW\|^2 = \|Y(t)\|^2 + \|tW\|^2 \geq t^2\|W\|^2.$$

Como W es un vector fijo no trivial, podemos encontrar un t suficientemente grande para que $\varrho_\alpha(\exp(Y(t) + tW), e) \geq 1$. Fijemos $\mu > \lambda_d$, Luego por el Lema 4.3.1, existe $c > 0$ tal que

$$\inf_{h \in H} \varrho_\alpha(h, x^{-1}h_0^{(t)}x) \geq \inf_{h \in H} c\|Y(t) + tW\|^{\frac{1}{\mu}} \geq c(t\|W\|)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Esto implica que

$$\text{dist}_H(xH, Hx) = \text{dist}_H(H, x^{-1}Hx) \geq \sup_{t \geq 0} c(t\|W\|)^{\frac{1}{\mu}} = \infty.$$

Recordemos que H and Hx están siempre a distancia de Hausdorff finita. Luego concluimos que $\text{dist}_H(xH, H) = \infty$.

□

Queremos probar que las coclases de los grupos H_α definidos en la Sección 4.2.6 forman un (λ, L) -fibrado cuasi-métrico. Luego de probar los siguientes lemas, contaremos con todos los ingredientes para hacerlo. El primero de estos lemas es extraído de [LX15], el segundo está adaptado de una prueba del mismo artículo al caso Carnot.

Lema 4.3.4. *Si \mathfrak{n} es un álgebra de Lie nilpotente y \mathfrak{h} es una subálgebra propia, entonces el normalizador $N(\mathfrak{h})$ es estrictamente mayor a \mathfrak{h} . Luego si H es un subgrupo de Lie conexo de un grupo de Lie nilpotente N , se tiene que su normalizador $N(H)$ es estrictamente mayor que H .*

Demostración. Lo probaremos por inducción en el índice de nilpotencia de \mathfrak{n} . El caso abeliano es obvio ya que $N(\mathfrak{h}) = \mathfrak{n}$. Supongamos entonces que la tesis se cumple para álgebras de Lie k -nilpotentes. Tomemos \mathfrak{n} con índice de nilpotencia $k + 1$ tal que existe una subálgebra \mathfrak{h} que cumple $N(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. En este caso el centro de \mathfrak{n} , al que llamamos \mathfrak{z} , está contenido en \mathfrak{h} , luego $\mathfrak{h}/\mathfrak{z}$ es una subálgebra de $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$, que es k -nilpotente.

Por hipótesis de inducción existe $X \in \mathfrak{n}$ tal que $X + \mathfrak{z} \in N(\mathfrak{h}/\mathfrak{z})$ pero $X \notin \mathfrak{h}/\mathfrak{z}$. Esto es absurdo ya que para todo $Y \in \mathfrak{h}$ se tiene

$$[X, Y] + \mathfrak{z} = [X + \mathfrak{z}, Y + \mathfrak{z}] \in \mathfrak{h}/\mathfrak{z},$$

Lo que implica que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.

□

Lema 4.3.5. *Sea $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ un grupo de Heintze. Entonces las coclases a izquierda del subgrupo $H_\alpha \leq N$ están siempre a distancia positiva (para una cuasi-métrica visual parabólica).*

Demostración. Observar que alcanza con probar que para todo $x \in N - H_\alpha$ las coclases H_α y xH_α están a distancia positiva. Consideramos la sucesión

$$\mathfrak{h}^i = \mathfrak{h}_\alpha \triangleleft \mathfrak{h}^1 \triangleleft \mathfrak{h}^2 \triangleleft \dots,$$

donde \mathfrak{h}^{i+1} es el normalizador de \mathfrak{h}^i . Por el Lema 4.3.4 se tiene que las inclusiones $\mathfrak{h}^i \subset \mathfrak{h}^{i+1}$ son estrictas a menos que $\mathfrak{h}^i = \mathfrak{n}$. Como \mathfrak{n} es de dimensión finita se tiene que existe k tal que $\mathfrak{h}^k = \mathfrak{n}$.

Para cada i sean H^i el subgrupo de Lie conexo de N asociados a \mathfrak{h}^i . Se puede ver que H^{i+1} es el normalizador de \mathfrak{h}^i . Tomemos ahora $x \in N - H_\alpha$. Sea $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x \in H^j - H^{j-1}$. Luego, por el Lema 4.3.3 se tiene que H^{j-1} y xH^{j-1} son paralelas y por lo tanto están a distancia positiva. Como $H_\alpha \subset H^{j-1}$ y $xH_\alpha \subset xH^{j-1}$ entonces las distancias entre H_α y xH_α es positiva. \square

Teorema 4.3.6. *Sea $F : N_1 \rtimes_\alpha \mathbb{R} \rightarrow N_2 \rtimes_\beta \mathbb{R}$ una cuasi-isometría entre grupos de Heintze puramente reales, ninguno de ellos de tipo Carnot. Supongamos que el menor valor propio de α y el de β son iguales y tomemos ϱ_α y ϱ_β dos cuasi-métricas visuales parabólicas en N_1 y N_2 con respecto a α y β respectivamente. Si $f = \partial F$ preserva el infinito entonces su restricción a $N_1 = \partial_\infty X$, $f : (N_1, \varrho_\alpha) \rightarrow (N_2, \varrho_\beta)$ es un homeomorfismo bi-Lipschitz.*

Demostración. En virtud del Teorema 4.1.3, sólo debemos probar que (N_1, ϱ_α) y (N_2, ϱ_β) , junto con las coclases a izquierda de H_α y de H_β definidas en 4.2.6 son (λ, L) -fibrados cuasi-métricos. Acabamos de probar que las fibras están a distancia positiva. Además por el Lema 4.3.3, las paralelas no están aisladas y que las que no lo son, están a distancia de Hausdorff infinita. Por otro lado, al restringir ϱ_α y ϱ_β a las coclases a izquierda de H_α y H_β , nos quedan $(\frac{1}{\lambda_1}, L)$ -snow-fake equivalentes a las distancias de Carnot-Carathéodory en H_α y H_β para algún L uniforme. \square

Observar que si los grupos $N_1 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ y $N_2 \rtimes_\beta \mathbb{R}$ fueran de tipo Carnot la prueba no funcionaría ya que en ese caso sucedería $H_\alpha = N_1$ y $H_\beta = N_2$.

Corolario 4.3.7. *En las hipótesis del teorema anterior, si f lleva coclases a izquierda de un subgrupo $H_\alpha \leq N_1$ en coclases a izquierda de un subgrupo $H_\beta \leq N_2$, entonces f también lleva coclases a izquierda de $N(H_\alpha)$ en coclases a izquierda de $N(H_\beta)$.*

Demostración. Supongamos que $x, y \in N$ están en la misma coclase a izquierda de $N(H_\alpha)$, luego xH e yH están a distancia de Hausdorff finita. Como f es bi-Lipschitz tenemos que $f(xH_\alpha)$ y $f(yH_\alpha)$ también lo están. Luego, como estas son coclases a izquierda de H_β , se tiene que deben estar en la misma coclase a izquierda de $N(H_\beta)$. En particular $f(x)$ y $f(y)$ están en la misma coclase a izquierda de $N(H_\beta)$. \square

4.4. Conjuntos de dimensión mínima

En la Sección 4.2 construimos un fibrado cuasi-métrico invariante por cuasi-isometrías en el borde de un grupo de Heintze, lo que nos permitió probar que los mapas inducidos en el borde por las cuasi-isometrías son bi-Lipschitz. Este fibrado está constituido por las coclases a izquierda del subgrupo notado por H_1 .

El Teorema 4.2.12 también nos da otros subgrupos cuyas coclases a izquierda son invariantes por cuasi-isometrías, entre ellos está el grupo llamado U_1 . En esta sección haremos una prueba elemental de la invarianza de las coclases de U_1 asumiendo el Teorema 4.3.6.

Para un espacio métrico (M, d) se tiene que todo conexo no degenerado tiene dimensión de Hausdorff mayor o igual a 1. Como vimos en la Proposición 2.1.6, si ρ es una cuasi-métrica en M , sabemos que ρ^ϵ es bi-Lipschitz equivalente a una métrica. Por lo tanto, como para todo $A \subset M$ se tiene que

$$\text{Hdim}(A, \rho^\epsilon) = \frac{\text{Hdim}(A, \rho)}{\epsilon},$$

podemos afirmar que

$$d_0(M, \rho) = \inf \{ \text{Hdim}(A, \rho) : A \subset N \text{ es un conjunto conexo no degenerado} \} \quad (4.3)$$

es mayor que cero.

Consideremos ahora N un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo y ρ una cuasi-métrica visual parabólica asociada a una derivación α con valores propios positivos $\lambda_1 < \dots < \lambda_d$.

Proposición 4.4.1. *Se cumple que $d_0(N, \rho) = \lambda_1$.*

Para probar esta proposición vamos a reducir nuestro estudio al caso diagonalizable.

Lema 4.4.2. *Sea α una derivación en $\mathfrak{n} = \text{Lie}(N)$ y δ y ν su parte diagonalizable y su parte nilpotente respectivamente. Entonces tanto ν como δ son derivaciones en \mathfrak{n} .*

Demostración. Consideremos

$$V_i^j = \{ X \in \mathfrak{n} : (\alpha - \lambda_i \text{Id})^j X = 0 \text{ y } (\alpha - \lambda_i \text{Id})^{j-1} X \neq 0 \}.$$

Sea V_i la suma directa de los V_i^j , es decir, el espacio propio generalizado asociado a λ_i .

Vamos a probar primero que si $\lambda_i + \lambda_j = \lambda_k$, entonces

$$[V_i^l, V_j^m] \subset \bigoplus_{q \leq l+m-1} V_k^q.$$

Lo haremos por inducción en $l + m$.

Observamos que para $l + m = 2$ es obvio. Supongamos ahora que se cumple para $r + p \leq l + m$.

Tomemos $X \in V_i^l$ e $Y \in V_j^m$. Luego

$$(\alpha - \lambda_k)^{l+m-1}[X, Y] = (\alpha - \lambda_k)^{l+m-2}([\alpha X, Y] + [X, \alpha Y] - \lambda_i[X, Y] - \lambda_j[X, Y]).$$

Supongamos que $\alpha X = \lambda_i X + Z$ y $\alpha Y = \lambda_j Y + W$ con $Z \in V_i^{l-1}$ y $W \in V_j^{m-1}$, entonces

$$[\alpha X, Y] + [X, \alpha Y] - \lambda_i[X, Y] - \lambda_j[X, Y] = [Z, Y] + [X, W] \in [V_i^{l-1}, V_j^m] + [V_i^l, V_j^{m-1}]$$

Por hipótesis de inducción $[V_i^{l-1}, V_j^m] + [V_i^l, V_j^{m-1}] \subset \bigoplus_{q \leq l+m-2} V_k^q$, y por lo tanto $(\alpha - \lambda_k)^{l+m-1}[X, Y] = 0$.

Lo anterior concluye que si $\lambda_i + \lambda_j = \lambda_k$ entonces $[V_i, V_j] = V_k$.

Probemos ahora que si $\lambda_i + \lambda_j$ no es un valor propio de α entonces $[V_i, V_j] = 0$. Nuevamente probamos por inducción que $[V_i^l, V_j^m] = 0$. Para $l + m = 2$ es una cuenta sencilla pues V_i^1 y V_j^1 son subespacios propios. Supongamos que se cumple que $[V_i^r, V_j^p] = 0$ para $r + p < l + m$. Tomemos $X \in V_i^l$ y $Y \in V_j^m$, y supongamos que $\alpha X = \lambda_i X + Z$ y $\alpha Y = \lambda_j Y + W$, donde $Z \in V_i^{l-1}$ y $W \in V_j^{m-1}$. Luego tenemos

$$\alpha[X, Y] = (\lambda_i + \lambda_j)[X, Y] + [Z, Y] + [X, W] = (\lambda_i + \lambda_j)[X, Y].$$

Lo que implica que $[X, Y] = 0$.

Si $\{X_1, \dots, X_n\}$ es una base de Jordan para α (y por lo tanto diagonaliza δ), es sencillo probar que $\delta[X_i, X_j] = [\delta X_i, X_j] + [X_i, \delta X_j]$, lo que implica que δ es una derivación. Además como $\nu = \alpha - \delta$, esta debe ser también una derivación. \square

Lema 4.4.3. *Para todo subconjunto A de N , tenemos $\text{Hdim}_{\varrho_\alpha}(A) = \text{Hdim}_{\varrho_\delta}(A)$.*

Demostración. Consideramos en el espacio $\mathfrak{n} \oplus \mathbb{R}$ un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que induzca buenas métricas Riemannianas g^α y g^δ en $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ y $N \rtimes_\delta \mathbb{R}$ respectivamente. Notar que para este producto interno los subespacios V_i son ortogonales. Consideraremos particularmente las cuasi-métricas ϱ_α^0 y ϱ_δ^0 tal cual se definen en (3.2). Podemos hacer esto porque la dimensión de Hausdorff es un invariante bi-Lipschitz. De todas formas, para no cargar la notación seguiremos llamaremos ϱ_α^0 y ϱ_δ^0 a las cuasi-métricas elegidas. Probaremos que para todo $\mu > 1$ existe una constante $c = c(\mu) \geq 1$ tal que.

$$\frac{1}{c} \varrho_\delta(x, y)^\mu \leq \varrho_\alpha(x, y) \leq c \varrho_\delta(x, y)^{\frac{1}{\mu}}, \quad (4.4)$$

para todo $x, y \in N$. Un cálculo sencillo permite probar la tesis a partir de esta desigualdad.

Primero comparemos las métricas Riemannianas en $N \times \{t\}$ para $t \leq 0$ inducidas por α y δ . Observemos que $\|v\|_t^\delta = \|e^{-t\delta}v\|$ y $\|v\|_t^\alpha = \|e^{-t\alpha}v\|$ para $v \in T_e N$, donde

$\|v\|_t^\delta = g_{(0,t)}^\delta(v, 0)$ y $\|v\|_t^\alpha = g_{(0,t)}^\alpha(v, 0)$. Fijemos $v \in T_e N$, $v = v_1 + \dots + v_d$ con $v_i \in V_i$. Luego

$$\|e^{-t\alpha}v\| = \|e^{-t\nu}e^{t\delta}v\| \leq p(t)\|e^{-t\delta}v\|,$$

donde

$$p(t) = K \sum_{j=0}^{m-1} \frac{|t|^j}{j!},$$

donde m es el índice de nilpotencia de ν y $K = \max\{1, \|\nu\|, \dots, \|\nu\|^{m-1}\}$.

Fijemos $\mu > 1$. Como los subespacios V_i son ortogonales tenemos

$$p(t)^2 \|e^{-t\delta}v\|_0^2 = \sum_{i=1}^d p(t)^2 e^{-2t\lambda_i} \|v_i\|_0^2 \leq C \sum_{i=1}^d e^{-2\mu t\lambda_i} \|v_i\|_0^2 = C \|e^{-t\mu\delta}v\|_0^2,$$

para $t \leq 0$ si C es suficientemente grande. La constante C depende únicamente de μ y α .

Para probar la otra desigualdad, notar que

$$\|e^{-t\delta}v\|_0 = \|e^{t\nu}e^{-t\alpha}v\|_0 \leq p(t) \|e^{-t\alpha}v\|_0,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|e^{-t\alpha}v\|_0^2 &\geq p(t)^{-2} \|e^{-t\delta}v\|_0^2 = \sum_{i=1}^d p(t)^{-2} e^{-2t\lambda_i} \|v_i\|_0^2 \\ &\geq \frac{1}{C} \sum_{i=1}^d e^{-2\frac{1}{\mu}t\lambda_i} \|v_i\|_0^2 = \frac{1}{C} \|e^{-t\frac{1}{\mu}\delta}v\|_0^2. \end{aligned}$$

Aquí, al igual que antes, la desigualdad se cumple para $t \leq 0$ y la constante C depende solamente de μ y la derivación α .

En conclusión, mostramos que para todo $\mu > 1$, existe una constante C tal que para todo $t \leq 0$ y $v \in T_e N$ se tiene

$$\frac{1}{C} \|e^{-t\frac{1}{\mu}\delta}v\|_0 \leq \|e^{-t\alpha}v\|_0 \leq C \|e^{-t\mu\delta}v\|_0.$$

Como $\varrho_{\mu\delta} = \varrho_\delta^{1/\mu}$ y $\varrho_{1/\mu\delta} = \varrho_\delta^\mu$, se concluye (4.4) a partir de las anteriores desigualdades. \square

Demostración la Proposición 4.4.1. Por el Lema 4.4.3, podemos asumir que α es diagonalizable. Primero probaremos por inducción en el índice de nilpotencia de N que $d_0(N, \varrho) \geq \lambda_1$.

Primero supongamos que N es abeliano, es decir $N = \mathbb{R}^n$. Luego ϱ es bi-Lipschitz equivalente a la cuasi-métrica dada por

$$\hat{\varrho}(x, y) = \sum_{i=1}^d \|x_i - y_i\|_0^{\frac{1}{\lambda_i}},$$

donde $\|\cdot\|_0$ es la norma euclídea. Es sencillo probar que $\hat{\rho}$ cumple con las condiciones 1, 2 y 3 de la Proposición 3.3.3. En este caso es fácil probar que $d_0(\mathbb{R}^n, \hat{\rho}) = \lambda_1$ teniendo en cuenta que las proyecciones $p_i : (\mathbb{R}^n, \hat{\rho}) \rightarrow (V_i, \|\cdot\|_0)$ son λ_i -Hölder y que las rectas en V_1 tienen dimensión λ_1 .

Supongamos ahora que la desigualdad se cumple para todo grupo k -nilpotente, y sea N un grupo $k+1$ -nilpotente con $k \geq 0$. Llamemos Z al centro de N y sea $\pi : N \rightarrow N/Z$ la proyección canónica. Dado un conjunto conexo no degenerado $A \subset N$, tenemos que $\pi(A)$ un subconjunto conexo de N/Z . Como N/Z es a lo sumo k -nilpotente, si $\pi(A)$ es no degenerado, tenemos por hipótesis de inducción que

$$\lambda_1 \leq \text{Hdim}_{\tilde{\rho}}(\pi(A)) \leq \text{Hdim}_{\rho}(A),$$

donde $\tilde{\rho}$ es la cuasi-métrica en N/Z inducida por ρ , y por el Lema 4.3.2, una cuasi-métrica visual parabólica asociada a $\tilde{\alpha}$ (la derivación inducida por α). La segunda desigualdad sale del hecho que π es 1-Lipschitz.

Si $\pi(A)$ es un conjunto unitario, entonces A está contenido en una coclase a izquierda xZ para algún $x \in N$. Recordemos que el centro \mathfrak{z} de \mathfrak{n} es α -invariante, luego podemos restringir α a \mathfrak{z} . Además los valores propios de esta restricción están acotados por debajo por λ_1 . Como Z es abeliano, por hipótesis de inducción tenemos que $\text{Hdim}(A) \geq \lambda_1$. Lo que termina esta parte de la prueba.

Ahora probaremos la desigualdad restante. Sean $\mathfrak{u}_\alpha = \text{Lie}(V_1)$ y $U_\alpha \leq N$ su subgrupo asociado. Por definición, $U_\alpha \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ es un grupo de Heintze de tipo Carnot y por lo tanto la restricción de la cuasi-métrica visual parabólica ρ a U_α es bi-Lipschitz equivalente a la cuasi-métrica snow-flake $\rho_{\text{CC}}^{1/\lambda_1}$, donde ρ_{CC} es la distancia de Carnot-Carathéodory en U_α . En particular, ρ_{CC} es una distancia geodésica, luego existen curvas de dimensión uno. De aquí sale que $d_0(N, \rho) \leq \lambda_1$. \square

Observar que la prueba anterior implica además que el ínfimo en 4.3 es alcanzado.

Sean x e y dos puntos en N , definimos $x \sim_1 y$ si son iguales o existe un conexo $A \subset N$, con dimensión λ_1 que contiene ambos puntos. Es claro que las coclases a izquierda de U_α están contenidas en las clases de equivalencia de \sim_1 .

Lema 4.4.4. *Las clases de equivalencia de \sim_1 coinciden con las coclases a izquierda de U_α .*

Demostración. Resta probar que las clases de equivalencia de \sim_1 están contenidas en las coclases a izquierda de U_α . Consideremos la cadena creciente de normalizadores

$$U_\alpha = N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft N_2 \triangleleft \cdots,$$

donde N_{j+1} es el normalizador de N_j . Sea k tal que $N_k = N$. Observar que su existencia se debe a 4.3.4.

Sean $x, y \in N$ dos puntos diferentes en un conexo A con dimensión de Hausdorff λ_1 . Denotemos por $\pi : N \rightarrow N/N_{k-1}$ a la proyección canónica. Luego, como N_{k-1} contiene

a U , los valores propios de la derivación $\tilde{\alpha}$, inducida por α en $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_{k-1}$, son estrictamente mayores que λ_1 . Si $\pi(A)$ es no degenerado, por el Lema 4.4.1, tenemos

$$\lambda_1 < \text{Hdim}(\pi(A)) \leq \text{Hdim}(A) = \lambda_1,$$

lo que es una contradicción. Luego $\pi(A)$ es un conjunto unitario y A está contenido en una coclase a izquierda de N_{k-1} . Argumentando por inducción, tenemos que A está contenido en una coclase a izquierda de U_α . \square

Como conclusión de esto, ya que los homeomorfismos bi-Lipschitz llevan conjuntos de dimensión mínima en conjuntos de dimensión mínima, tenemos el siguiente corloario.

Corolario 4.4.5. *Sean N_1 y N_2 dos grupos de Lie nilpotentes y α y β derivaciones en $\mathfrak{n}_1 = \text{Lie}(N_1)$ y $\mathfrak{n}_2 = \text{Lie}(N_2)$ con valores propios positivos. Sean ϱ_α y ϱ_β cuasi-métricas visuales parabólicas en N_1 y N_2 , asociadas a α y β respectivamente. Si $f : (N_1, \varrho_\alpha) \rightarrow (N_2, \varrho_\beta)$ es un homeomorfismo bi-Lipschitz, entonces los menores valores propios de α y β coinciden y f lleva coclases a izquierda de U_α en coclases a izquierda de U_β .*

Capítulo 5

Algunos Invariantes Algebraicos

5.1. Invarianza del polinomio característico

En esta sección probaremos el Teorema 1.0.6. Como podrá observarse, la prueba resulta sencilla a partir de lo visto en el capítulo anterior. Luego utilizaremos dicho resultado y lo visto en los capítulos anteriores para clasificar a menos de cuasi-isometrías los grupos de Heintze de dimensión 3.

5.1.1. Prueba del primer resultado

Consideramos dos grupos de Heintze puramente reales $G_1 = N_1 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ y $G_2 = N_2 \rtimes_{\beta} \mathbb{R}$. Como ser de tipo Carnot es invariante por cuasi-isometrías por el Corolario 4.2.13 y este caso está resuelto (ver Corolario 3.4.9), podemos suponer que tanto G_1 como G_2 no son de tipo Carnot.

Como multiplicar α y β por constantes no cambia la clase de cuasi-isometría de G_1 y G_2 , podemos suponer además que ambas derivaciones tienen en común el menor valor propio.

Sean ϱ_{α} y ϱ_{β} dos cuasi-métricas visuales parabólicas en N_1 y N_2 asociadas a α y β respectivamente. Supongamos que $F : G_1 \rightarrow G_2$ es una cuasi-isometría que preserva el infinito y notemos $f = \partial F$. Por el Teorema 4.3.6 sabemos que $f : (N_1, \varrho_{\alpha}) \rightarrow (N_2, \varrho_{\beta})$ es un homomorfismo bi-Lipschitz. Luego el Teorema 1.0.6 se deduce del siguiente lema.

Lema 5.1.1. *Sean N_1 y N_2 dos grupos de Lie nilpotentes simplemente conexos con álgebras de Lie \mathfrak{n}_1 y \mathfrak{n}_2 . Consideremos $\alpha \in \text{Der}(\mathfrak{n}_1)$ y $\beta \in \text{Der}(\mathfrak{n}_2)$ con valores propios positivos. Si $f : (N_1, \varrho_{\alpha}) \rightarrow (N_2, \varrho_{\beta})$ es un homeomorfismo bi-Lipschitz, entonces α y β tienen el mismo polinomio característico.*

Demostración. Sean \mathfrak{h}_{α} y \mathfrak{h}_{β} las subálgebras de Lie definidas en 4.2.6, y $H_{\alpha} \leq N_1$ y $H_{\beta} \leq N_2$ los correspondientes subgrupos de Lie conexos.

Por el Teorema 4.2.12, las coclases a izquierda de H_α son llevadas por f en coclases a izquierda de H_β . Consideremos entonces la sucesión de normalizadores

$$H_\alpha = H_0^\alpha \triangleleft H_1^\alpha \triangleleft H_2^\alpha \dots$$

donde H_{i+1}^α es el normalizador de H_i^α y

$$\mathfrak{h}_\alpha = \mathfrak{h}_0^\alpha \triangleleft \mathfrak{h}_1^\alpha \triangleleft \mathfrak{h}_2^\alpha \dots$$

las correspondientes álgebras de Lie. De la misma forma se definen H_i^β y \mathfrak{h}_i^β . Notar que existen k_1 y k_2 tal que $H_{k_1}^\alpha = N_1$ y $H_{k_2}^\beta = N_2$ (recordar el Lema 4.3.4).

Por el Teorema 4.2.12, sabemos que las coclases a izquierda de H_j^α se mapean en coclases a izquierda de H_j^β para todo j . Esto implica que $k_1 = k_2 = k$.

Vamos a probar por inducción en la dimensión n de los grupos N_1 y N_2 . El caso $n = 1$ es trivial, ya que, en virtud del Lema 4.4.1, las derivaciones α y β deben ser homotecias de la misma razón para que f sea bi-Lipschitz. Supongamos ahora que el lema es verdadero para dimensiones estrictamente menores que n .

Componiendo f con una traslación si es necesario, podemos asumir que el subgrupo H_{k-1}^α es mapeado en H_{k-1}^β . Como ya vimos en el Lema 3.3.9, la restricción de ϱ_α a H_{k-1}^α es una cuasi-métrica visual parabólica para la derivación $\alpha|_{\mathfrak{h}_{k-1}^\alpha}$. Lo mismo pasa para la restricción de ϱ_β a H_{k-1}^β . Como $\dim(H_{k-1}^\alpha) = \dim(H_{k-1}^\beta) < n$, luego $\alpha|_{\mathfrak{h}_{k-1}^\alpha}$ y $\beta|_{\mathfrak{h}_{k-1}^\beta}$ tienen el mismo polinomio característico, es decir que $p_{\alpha|_{\mathfrak{h}_{k-1}^\alpha}} = p_{\beta|_{\mathfrak{h}_{k-1}^\beta}}$.

Por otro lado, por el Lema 4.3.2, las cuasi-métricas inducidas por ϱ_α y ϱ_β en N_1/H_{k-1}^α y N_2/H_{k-1}^β , a las que llamamos $\tilde{\varrho}_\alpha$ y $\tilde{\varrho}_\beta$ respectivamente, son cuasi-métricas visuales parabólicas asociadas a $\tilde{\alpha} \in \text{Der}(\mathfrak{n}_1/\mathfrak{h}_{k-1}^\alpha)$ y $\tilde{\alpha} \in \text{Der}(\mathfrak{n}_2/\mathfrak{h}_{k-1}^\beta)$ (definidas como en 4.2). El homeomorfismo f induce un mapa bi-Lipschitz

$$\tilde{f} : (N_1/H_{k-1}^\alpha, \tilde{\varrho}_\alpha) \rightarrow (N_2/H_{k-1}^\beta, \tilde{\varrho}_\beta).$$

Luego por hipótesis de inducción, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ tienen los mismos polinomios característicos, es decir, $p_{\tilde{\alpha}} = p_{\tilde{\beta}}$. Para concluir tenemos que $p_\alpha = p_{\tilde{\alpha}} p_{\alpha|_{\mathfrak{h}_{k-1}^\alpha}} = p_{\tilde{\beta}} p_{\beta|_{\mathfrak{h}_{k-1}^\beta}} = p_\beta$. \square

5.1.2. Aplicación: Clasificación de grupos de Heintze de dimensión 3

Lo que sigue fue probado en general por Xie en [Xie14]. Aquí lo obtendremos fácilmente como aplicación de lo visto hasta ahora.

Tomemos \mathfrak{n} un álgebra de Lie nilpotente de dimensión 2. Sabemos que el centro $\mathfrak{z} = \{X \in \mathfrak{n} : [X, \mathfrak{n}] = 0\}$ es no trivial, supongamos que tiene dimensión 1 y está generado por Z . Tomemos ahora una base $\{X, Z\}$ y calculemos el corchete de dos elementos cualesquiera de \mathfrak{n} :

$$[V, W] = [aX + bZ, cX + dZ] = ac[X, X] + ad[X, Z] + bc[Z, X] + bd[Z, Z] = 0$$

Es decir que \mathfrak{n} es abeliana y por lo tanto también lo es el correspondiente grupo de Lie conexo N . Por otro lado sabemos que el único grupo de Lie abeliano simplemente conexos de dimensión 2 es \mathbb{R}^2 . Nos disponemos entonces a clasificar a menos de cuasi-isometrías los grupos de Heintze de la forma $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$.

Primero observemos que cualquier isomorfismo lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 es un automorfismo y que cualquier transformación lineal es una derivación. Luego, por la Proposición 3.1.4, si dos derivaciones α y β en \mathbb{R}^2 tienen la misma forma de Jordan a menos de una homotecia, entonces los grupos $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\beta} \mathbb{R}$ son isomorfos y luego cuasi-isométricos. Notar que esto es cierto si ponemos \mathbb{R}^n en lugar de \mathbb{R}^2 .

Por lo tanto todo grupo de Heintze de dimensión 3 es cuasi-isométrico a uno determinado por una de las siguientes derivaciones:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta_{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda > 1. \quad (5.1)$$

Observemos primero que $\mathbb{R}^2 \rtimes_I \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ no pueden ser cuasi-isométricos porque los subgrupos H_I y H_{α} , tienen dimensión diferente ($\dim(H_I) = 2$ y $\dim(H_{\alpha}) = 1$). Observando los polinomios característicos de las derivaciones listadas podemos distinguir los grupos $\mathbb{R}^2 \rtimes_I \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ de los $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\beta_{\lambda}} \mathbb{R}$, que a su vez se distinguen entre ellos por el mismo principio. En conclusión tenemos que los grupos de Heintze de dimensión tres quedan caracterizados por las derivaciones (5.1).

Enunciamos a continuación el teorema general. Una posible prueba del mismo consiste en aplicar un argumento similar al que desarrollaremos en la próxima sección.

Teorema 5.1.2 (Xie). *Si $\mathbb{R}^n \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n \rtimes_{\beta} \mathbb{R}$ son grupos de Heintze puramente reales cuasi-isométricos, entonces existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda\alpha$ y β tienen la misma forma de Jordan y por lo tanto son isomorfos.*

5.2. El caso Heisenberg

Consideremos K_n el grupo de Heisenberg de dimensión $2n + 1$. Notaremos \mathfrak{k}_n a su álgebra de Lie. Diremos también que \mathfrak{k}_n es un álgebra de Heisenberg de dimensión $2n + 1$. Estas álgebras admiten una descripción particular, lo que nos hará más fácil su estudio.

Proposición 5.2.1. *Existe una base $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z\}$ de \mathfrak{k}_n (a la que llamaremos base canónica) que cumple:*

1. Z genera el centro de \mathfrak{k}_n .
2. $[X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = 0$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
3. $[X_i, Y_i] = Z$ para todo i y $[X_i, Y_j] = 0$ si $i \neq j$.

Demostración. Definimos los elementos de \mathcal{B} de forma tal que

$$\exp(X_i) = \begin{pmatrix} 1 & e_i & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \exp(Y_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & e_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \exp(Z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donde e_i es el i -ésimo elemento de la base canónica de \mathbb{R}^n . Es claro que es una base puesto que es la imagen por \exp^{-1} de un generador del grupo y tiene $2n + 1$ elementos.

El elemento Z está en el centro porque su imagen por \exp lo está. Es sencillo probar que la dimensión del centro de K_n es 1, luego Z debe generar el centro de \mathfrak{k}_n . Además el grupo K_n es 2-nilpotente, luego también lo es su álgebra de Lie, por lo que si $X, Y \in \mathfrak{k}_n$ se tiene que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $[X, Y] = \lambda Z$.

Es fácil verificar que $\exp(X_i)$ conmuta con $\exp(X_j)$ para todo par i, j , que $\exp(Y_i)$ conmuta con $\exp(Y_j)$ para todo par i, j y que $\exp(X_i)$ conmuta con $\exp(Y_j)$ si $i \neq j$. Luego usando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff se ve que \mathcal{B} cumple el punto 2 y que $[X_i, Y_j] = 0$ si $i \neq j$. Es claro además que $[X_i, Y_i] \neq 0$, porque de otro modo X_i e Y_i estarían en el centro. Luego $[X_i, Y_i] = \lambda_i Z$ con $\lambda_i \neq 0$, por lo que multiplicando los X_i o los Y_i , por λ_i^{-1} si es necesario obtenemos la base deseada. \square

Ya sabemos que si $K_n \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ es cuasi-isométrico a $K_n \rtimes_{\beta} \mathbb{R}$, entonces ambas derivaciones α y β tienen la misma cantidad de valores propios. Nuestro segundo resultado será probado por inducción en dicha cantidad d . Para esto será necesario probar un par de casos que sirvan de bases para la inducción, específicamente $d = 2$ y $d = 3$, puesto que $d = 1$ corresponde al caso tipo Carnot. El primer caso será probado en una clase más grande de grupos de Lie. Procedamos a su definición.

Definición 5.2.2. Decimos que un álgebra de Lie nilpotente es de clase \mathcal{C} si es de la forma $\mathfrak{k}_n \oplus \mathbb{R}^p$ con $p \geq 0$ y $n \geq 0$.

Observemos que esta es una clase de álgebras de Lie 2-nilpotentes cuyas álgebras derivadas tienen dimensión menor o igual a 1.

Sea $\mathfrak{n} \in \mathcal{C}$ no abeliana. Notar que si \mathfrak{k} es una subálgebra de \mathfrak{n} que no contiene la derivada $\mathfrak{n}' = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$, entonces el normalizador de \mathfrak{n} coincide con su centralizador. Además, si $\mathfrak{n} = V \oplus \mathfrak{n}'$ y $\mathfrak{k} \subset V$, entonces

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{k}) = (\mathfrak{N}(\mathfrak{k}) \cap V) \oplus \mathfrak{n}'.$$

5.2.1. Derivaciones en álgebras de \mathcal{C}

Consideremos \mathfrak{n} un álgebra de Lie en \mathcal{C} y α una derivación en \mathfrak{n} con valores propios $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_d$. Fijemos una base de Jordan

$$\{X_{ir}^k : 1 \leq i \leq d, 1 \leq r \leq n_i, 1 \leq k \leq m_{ir}\}$$

de \mathbf{n} asociada a α , donde n_i indica el número de sub-bloques de Jordan asociados a λ_i y m_{ir} es el tamaño del r -ésimo sub-bloque asociado a dicho valor propio. Supongamos además que $m_{i1} \geq m_{i2} \geq \dots \geq m_{in_i}$ para todo i y notemos $m_i = m_{i1}$. Cuando sea necesario escribiremos m_i^α .

Observemos que los elementos de la forma X_{ir}^1 son los vectores propios de α y que para todo $k > 1$ se tiene $\alpha(X_{ir}^k) = \lambda_i X_{ir}^k + X_{ir}^{k-1}$. Llamemos como antes V_1, \dots, V_d a los espacios propios generalizados asociados a α . Es claro que $V_i = \text{Span}\{X_{ir}^k : 1 \leq r \leq n_i, 1 \leq k \leq m_{ir}\}$. Además notemos que si \mathbf{n} no es abeliana, entonces \mathbf{n}' es generada por un vector propio asociado a λ_p para algún p .

A continuación probaremos un par de lemas que serán de utilidad en la prueba del caso $d = 2$.

Lema 5.2.3. *Si $[X_{ir}^1, X_{js}^l] \neq 0$, entonces $l = m_{js}$. En particular, si dos valores propios satisfacen $[X_{ir}^1, X_{js}^1] \neq 0$, entonces $m_{ir} = m_{js} = 1$.*

Demostración. Si $m_{js} = 1$ no hay nada que probar, por lo tanto podemos asumir que $m_{js} > 1$. Como $[X_{ir}^1, X_{js}^l] \neq 0$, se debe cumplir $\lambda_i + \lambda_j = \lambda_p$ (ver la prueba del Lema 4.4.2). Para $l > 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \lambda_p [X_{ir}^1, X_{js}^l] &= \alpha [X_{ir}^1, X_{js}^l] = [\alpha X_{ir}^1, X_{js}^l] + [X_{ir}^1, \alpha X_{js}^l] \\ &= \lambda_i [X_{ir}^1, X_{js}^l] + \lambda_j [X_{ir}^1, X_{js}^l] + [X_{ir}^1, X_{js}^{l-1}] \\ &= \lambda_p [X_{ir}^1, X_{js}^l] + [X_{ir}^1, X_{js}^{l-1}]. \end{aligned}$$

Luego $[X_{ir}^1, X_{js}^l] = 0$ para todo $l < m_{js}$. □

Lema 5.2.4. *Si $[X_{ir}^1, X_{js}^{m_{js}}] \neq 0$ y $m_{ir} \geq m_{js}$, entonces $m_{js} = m_{ir}$.*

Demostración. Si $m_{js} = 1$, la tesis sale directamente del Lema 5.2.3. Luego podemos asumir que $m_{js} > 1$. Sean $k, l > 1$ y supongamos que $[X_{ir}^1, X_{js}^{m_{js}}] \neq 0$. Como antes, se tiene que $\lambda_i + \lambda_j = \lambda_p$. Luego

$$\begin{aligned} \lambda_p [X_{ir}^k, X_{js}^l] &= \alpha [X_{ir}^k, X_{js}^l] = [\alpha X_{ir}^k, X_{js}^l] + [X_{ir}^k, \alpha X_{js}^l] \\ &= \lambda_i [X_{ir}^k, X_{js}^l] + \lambda_j [X_{ir}^k, X_{js}^l] + [X_{ir}^k, X_{js}^{l-1}] + [X_{ir}^{k-1}, X_{js}^l] \\ &= \lambda_p [X_{ir}^k, X_{js}^l] + [X_{ir}^k, X_{js}^{l-1}] + [X_{ir}^{k-1}, X_{js}^l]. \end{aligned}$$

Esto implica que $[X_{ir}^{k-1}, X_{js}^l] = -[X_{ir}^k, X_{js}^{l-1}]$. Si $m_{ir} \geq m_{js}$, tenemos

$$0 \neq [X_{ir}^1, X_{js}^{m_{js}}] = -[X_{ir}^2, X_{js}^{m_{js}-1}] = \dots = (-1)^{m_{js}-1} [X_{ir}^{m_{js}}, X_{js}^1].$$

Por el Lema 5.2.3, esto implica que $m_{ir} = m_{js}$. □

5.2.2. Prueba del segundo resultado

Sean \mathfrak{n}_1 y \mathfrak{n}_2 dos álgebras de Lie en \mathcal{C} y α y β dos derivaciones en \mathfrak{n}_1 y \mathfrak{n}_2 con valores propios positivos iguales $\lambda_1 < \dots < \lambda_d$. Consideramos

$$\mathfrak{n}_1 = V_1 \oplus \dots \oplus V_d \text{ y } \mathfrak{n}_2 = W_1, \dots, W_d$$

las descomposiciones en espacios propios generalizados asociadas a α y β respectivamente. Llamaremos N_1 y N_2 a los grupos de Lie conexos correspondientes a \mathfrak{n}_1 y \mathfrak{n}_2 . De aquí en adelante trabajaremos con estas hipótesis junto con otras que iremos agregando cuando sea pertinente.

Lema 5.2.5. *Supongamos que existe un homeomorfismo bi-Lipschitz $f : (N_1, \varrho_\alpha) \rightarrow (N_2, \varrho_\beta)$, donde α and β tienen dos valores propios y $\dim V_2 = \dim W_2 = 1$. Luego α y β tienen la misma forma de Jordan.*

Demostración. Por el Teorema 4.2.12, el tamaño máximo de los sub-bloques asociados al menor valor propio es un invariante por cuasi-simetrías. Luego $m_1^\alpha = m_1^\beta = m$. Probaremos la tesis por inducción en m .

Si $m = 1$, entonces tanto α como β son diagonalizables. En este caso el polinomio característico determina la forma de Jordan.

Supongamos que $m > 1$ y que el lema es cierto cuando el tamaño máximo de los sub-bloques asociados a λ_1 es menor que m . Como dijimos anteriormente, las álgebras derivadas \mathfrak{n}'_1 y \mathfrak{n}'_2 (si no son triviales) están contenidas en espacios propios que en este caso deben ser V_2 y W_2 .

Notar que los Lemas 5.2.3 y 5.2.4 implican

$$\ker(\alpha - \lambda_1 I)^{m-1} \subset \mathfrak{N}(\mathfrak{h}_\alpha) \cap V_1 \subset V_1.$$

Luego podemos elegir $\{X_{ir}^k\}_{i,r,k}$ una base de Jordan de \mathfrak{n}_1 con respecto a α , donde $X_{11}^m, X_{12}^m, \dots, X_{1q_\alpha}^m$ estén en $\mathfrak{N}(\mathfrak{h}_\alpha)$ y

$$\text{Span}\{X_{11}^m, X_{12}^m, \dots, X_{1q_\alpha}^m\} \oplus \ker((\alpha - \lambda_1 I)^{m-1}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{h}_\alpha) \cap V_1.$$

De la misma forma podemos elegir una base de Jordan $\{Y_{ir}^k\}_{i,r,k}$ de \mathfrak{n}_2 para β . Tenemos

$$\begin{aligned} q_\alpha &= \dim(\mathfrak{N}(\mathfrak{h}_\alpha) \cap V_1) - \dim \ker(\alpha - \lambda_1 I)^{m-1}; \\ q_\beta &= \dim(\mathfrak{N}(\mathfrak{h}_\beta) \cap W_1) - \dim \ker(\beta - \lambda_1 I)^{m-1}. \end{aligned}$$

Por los Lemas 5.2.3 y 5.2.4, las álgebras de Lie \mathfrak{h}_α y \mathfrak{h}_β son abelianas y sus dimensiones son

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{h}_\alpha &= \text{número de } \lambda_1\text{-sub-bloques maximales de } \alpha; \\ \dim \mathfrak{h}_\beta &= \text{número de } \lambda_1\text{-sub-bloques maximales de } \beta. \end{aligned}$$

Componiendo con una traslación a izquierda si es necesario podemos asumir que f lleva H_α en H_β . Luego $\dim(\mathfrak{h}_\alpha) = \dim(\mathfrak{h}_\beta) = a$ y

$$\dim \ker(\alpha - \lambda_1 I)^{m-1} = \dim \ker(\beta - \lambda_1 I)^{m-1} = \dim V_1 - a.$$

Por el Corolario 4.3.7, f lleva $N(H_\alpha)$ en $N(H_\beta)$ y como

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{h}_\alpha) = (\mathfrak{N}(\mathfrak{h}_\alpha) \cap V_1) \oplus V_2 \text{ y } \mathfrak{N}(\mathfrak{h}_\beta) = (\mathfrak{N}(\mathfrak{h}_\beta) \cap W_1) \oplus W_2,$$

tenemos $\dim(\mathfrak{N}(\mathfrak{h}_\alpha) \cap V_1) = \dim(\mathfrak{N}(\mathfrak{h}_\beta) \cap W_1)$ y por lo tanto $q_\alpha = q_\beta = q$.

El mapa f induce un mapa bi-Lipschitz entre $N(H_\alpha)/H_\alpha$ y $N(H_\beta)/H_\beta$, donde los cocientes están equipados con las cuasi métricas $\tilde{\varrho}_\alpha$ y $\tilde{\varrho}_\beta$, inducidas por ϱ_α y ϱ_β respectivamente.

Observar que las álgebras $\mathfrak{N}(\mathfrak{h}_\alpha)/\mathfrak{h}_\alpha$ y $\mathfrak{N}(\mathfrak{h}_\beta)/\mathfrak{h}_\beta$ son isomorfas a las subálgebras

$$\mathfrak{m}_1 = \text{Span}\{X_{ir}^k : (i, r, k) \neq (1, s, m) \text{ con } s > q \text{ y } (i, r, k) \neq (1, s, 1) \text{ con } m_{1s} = m\};$$

$$\mathfrak{m}_2 = \text{Span}\{Y_{ir}^k : (i, r, k) \neq (1, s, m) \text{ con } s > q \text{ y } (i, r, k) \neq (1, s, 1) \text{ con } m_{1s} = m\}$$

respectivamente. Como $\tilde{\alpha} = \alpha|_{\mathfrak{m}_1}$ y $\tilde{\beta} = \beta|_{\mathfrak{m}_2}$ se corresponden a las derivaciones inducidas en el cociente por α and β respectivamente, tenemos que $\tilde{\varrho}_\alpha$ and $\tilde{\varrho}_\beta$ son cuasi-métricas visuales parabólicas en \mathfrak{m}_1 y \mathfrak{m}_2 inducidas por $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$. Notar que los sub-bloques de Jordan de estas derivaciones tienen tamaño menor a m .

Ahora tomemos el homeomorfismo bi-Lipschitz

$$\tilde{f} : (N(H_\alpha)/H_\alpha, \tilde{\varrho}_\alpha) \rightarrow (N(H_\beta)/H_\beta, \tilde{\varrho}_\beta),$$

inducido por f en el cociente, donde los grupos $N(H_\alpha)/H_\alpha$ y $N(H_\beta)/H_\beta$ tienen su álgebra de Lie en \mathcal{C} . Usando la hipótesis de inducción tenemos que $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ tienen la misma forma de Jordan.

Podemos recuperar la forma de Jordan de α a partir de $\tilde{\alpha}$ eligiendo q λ_1 -sub-bloques de tamaño $m - 1$ de $\tilde{\alpha}$ y agregandoles una columna, y eligiendo $a - q$ λ_1 -sub-bloques de tamaño $m - 2$ y agregandoles dos columnas. Lo mismo sucede para β . Esto muestra que α y β tienen la misma forma de Jordan y completa la prueba. \square

Para el siguiente caso nos restringiremos a las álgebras de Heisenberg.

Lema 5.2.6. *Supongamos que $d = 3$. Sea $f : (K_n, \varrho_\alpha) \rightarrow (K_n, \varrho_\beta)$ un homeomorfismo bi-Lipschitz. Luego α y β tienen la misma forma de Jordan.*

Demostración. Por el Corolario 4.4.5, f lleva coclases a izquierda de U_α en coclases a izquierda de U_β . Componiendo f con una traslación a izquierda si es necesario podemos asumir $f(U_\alpha) = U_\beta$. Luego tenemos un mapa bi-Lipschitz entre $(U_\alpha, \varrho_{\alpha|_{V_1}})$ y $(U_\beta, \varrho_{\beta|_{W_1}})$. Como estos grupos son abelianos, por el Teorema 5.1.2 tenemos que $\alpha|_{V_1}$ y $\beta|_{W_1}$ tienen la misma forma de Jordan.

Es fácil ver que $\mathfrak{N}(V_1) = V_1 \oplus V_3$ y $\mathfrak{N}(W_1) = W_1 \oplus W_3$. Luego $\mathfrak{k}_n/\mathfrak{N}(V_1)$ y $\mathfrak{k}_n/\mathfrak{N}(W_1)$ son isomorfas a V_2 y W_2 respectivamente, y por lo tanto abelianas. Las cuasi-métricas inducidas en estos cocientes por ϱ_α y ϱ_β son, vistas en V_2 y W_2 , cuasi-métricas visuales parabólicas asociadas a $\alpha|_{V_2}$ y $\beta|_{W_2}$. Luego f induce un homeomorfismo bi-Lipschitz

$$\tilde{f} : (K_n/N(U_\alpha), \varrho_\alpha) \rightarrow (K_n/N(U_\beta), \varrho_\beta),$$

lo que implica que $\alpha|_{V_2}$ y $\beta|_{W_2}$ tienen la misma forma de Jordan. Esto nos permite concluir que α y β tienen la misma forma de Jordan. \square

Ahora vamos a probar el segundo resultado. Para esto supongamos que tenemos una cusi-isometría entre grupos de Heintze $F : K_n \rtimes_\alpha \mathbb{R} \rightarrow K_n \rtimes_\beta \mathbb{R}$. Multiplicando β por un real positivo, en caso de que sea necesario, podemos suponer que ambas derivaciones tienen los mismos valores propios.

Hay dos hechos que salen directamente de nuestro trabajo anterior:

- (a) α y β tienen los mismos valores propios $\lambda_1 < \dots < \lambda_d$.
- (b) Existe un homeomorfismo bi-Lipschitz $f : (K_n, \varrho_\alpha) \rightarrow (K_n, \varrho_\beta)$. Donde ϱ_α y ϱ_β son dos cuasi-métricas visuales parabólicas en K_n asociadas a α y β respectivamente.

Asumimos entonces la notación del comienzo de la sección. Probaremos por inducción en d que (a) y (b) implican que α y β tienen la misma forma de Jordan.

Los Lemas 5.2.5 y 5.2.6 son los casos bases de nuestra inducción. Supongamos que el resultado es cierto para $d' < d$ y que d es mayor que 3. Por el Corolario 4.4.5, podemos asumir que f lleva U_α en U_β . Como en 5.2.6, sabemos que $\alpha|_{V_1}$ y $\beta|_{W_1}$ tienen la misma forma de Jordan.

Observar que $\mathfrak{N}(V_1) = \bigoplus_{i \neq d-1} V_i$ y $\mathfrak{N}(W_1) = \bigoplus_{i \neq d-1} W_i$. Además, podemos identificar los cocientes

$$\mathfrak{N}(V_1)/V_1 = \bigoplus_{i \neq 1, d-1} V_i \text{ y } \mathfrak{N}(W_1)/W_1 = \bigoplus_{i \neq 1, d-1} W_i.$$

Luego tenemos que f lleva $N(U_\alpha)$ en $N(U_\beta)$, y por lo tanto induce un mapa bi-Lipschitz

$$\tilde{f} : N(U_\alpha)/U_\alpha \rightarrow N(U_\beta)/U_\beta,$$

con las cuasi-métricas inducidas por $\alpha|_{\mathfrak{N}(V_1)}$ y $\beta|_{\mathfrak{N}(W_1)}$ respectivamente, a las que llamaremos $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$. Estos cocientes son grupos de Heisenberg y las derivaciones consideradas tienen menos valores propios que d . Luego $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ tienen la misma forma de Jordan.

Finalmente, usando que f induce un homeomorfismo bi-Lipschitz entre los grupos abelianos $K_n/N(U_\alpha)$ y $K_n/N(U_\beta)$, por el Teorema 5.1.2, tenemos que $\alpha|_{V_{d-1}}$ y $\beta|_{W_{d-1}}$ tienen la misma forma de Jordan. La prueba se completa al observar que $p_\alpha = p_{\alpha|_{V_1}} p_{\tilde{\alpha}} p_{\alpha|_{V_{d-1}}} = p_{\beta|_{W_1}} p_{\tilde{\beta}} p_{\beta|_{W_{d-1}}} = p_\beta$.

5.2.3. Un ejemplo

En el caso de que las derivaciones α y β sean diagonalizables puede verse que si tienen la misma forma diagonal, entonces los grupos $K_n \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ y $K_n \rtimes_\beta \mathbb{R}$ son isomorfos (ver [Xie15]). Esto no es cierto en general. Mostrémoslo con un ejemplo.

Consideremos en \mathfrak{k}_2 una base canónica ordenada $\mathcal{B} = \{X_1, Y_1, X_2, Y_2, Z\}$, donde $[X_1, Y_1] = [X_2, Y_2] = Z$ y el resto de los corchetes dan cero. Sean α y β dos derivaciones cuyas matrices asociadas en la base \mathcal{B} están dadas por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix} \text{ and } \beta = \begin{pmatrix} 1 & & -1 & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Se comprueba fácilmente que estas derivaciones tienen la misma forma de Jordan, la segunda se alcanza con la base $\{-X_1, X_2, Y_2, Y_1\}$.

Supongamos que existe un isomorfismo $\phi : \mathfrak{k}_2 \rtimes_\alpha \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{k}_2 \rtimes_\beta \mathbb{R}$. Como \mathfrak{k}_2 es la derivada de ambos grupos, entonces ϕ induce un isomorfismo $\gamma : \mathfrak{k}_2 \rightarrow \mathfrak{k}_2$ para el que $\mathfrak{z} = \text{Span}(Z)$ es fijo, por lo que existe $\lambda \neq 0$ tal que $\gamma(Z) = \lambda Z$. Pongamos $\phi(1) = X_0 + t_0$, donde $1 = (0, 1) \in \mathfrak{k}_2 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ y $X_0 \in \mathfrak{k}_2$. Sabemos que $t_0 \neq 0$ porque si no ϕ no sería sobreyectivo. Luego para todo $X \in \mathfrak{k}_2$ tenemos

$$\phi([1, X]) = [\phi(1), \gamma(X)] = [X_0, \gamma(X)] + [t_0, \gamma(X)] = ad_{X_0}\gamma(X) + t_0\beta\gamma(X).$$

Por otro lado $\phi([1, X]) = \phi\alpha(X) = \gamma\alpha(X)$. Es decir que $ad_{X_0}\gamma + t_0\beta\gamma = \gamma\alpha$, y por lo tanto

$$t_0\beta = \gamma\alpha\gamma^{-1} - ad_{X_0}.$$

Consideremos ahora en \mathfrak{k}_2 las formas cuadráticas $Q_\alpha(X) = \langle [\alpha(X), X], Z \rangle$ y $Q_\beta(X) = \langle [\beta(X), X], Z \rangle$. Vamos a observar primero que son equivalentes a menos de un múltiplo escalar:

$$\begin{aligned} Q_\beta(X) &= \langle [\beta(X), X], Z \rangle = \frac{1}{t_0} \langle [\gamma\alpha\gamma^{-1} - ad_{X_0}(X), X], Z \rangle \\ &= \frac{1}{t_0} \langle \gamma[\alpha\gamma^{-1}(X), \gamma^{-1}(X)], Z \rangle - \frac{1}{t_0} \langle [[X_0, X], X], Z \rangle = \frac{\lambda}{t_0} Q_\alpha(\gamma^{-1}(X)). \end{aligned}$$

Sin embargo las signaturas de Q_α y Q_β son $(3, 2, 0)$ y $(3, 1, 1)$ respectivamente, lo que es una contradicción.

El ejemplo anterior nos dice que los grupos $K_n \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ y $K_n \rtimes_\beta \mathbb{R}$ no son isomorfos. Sin embargo la pregunta de si son cuasi-isométricos o no sigue abierta. Una posible idea sería estudiar si las formas cuadráticas asociadas a las derivaciones, que vimos que nos dan un invariante de isomorfismo, pueden brindarnos un invariante de cuasi-isometría.

Bibliografía

- [Bal00] Ballmann, W. Automorphism groups. <http://people.mpim-bonn.mpg.de/hwbllmnn/notes.html>, 2000.
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Bou95] Marc Bourdon. Structure conforme au bord et flot géodésique d'un $\text{cat}(-1)$ -espace. *L'Ens. Math.*, 41:63–102, 1995.
- [BP03] Marc Bourdon and Hervé Pajot. Cohomologie l_p et espaces de Besov. *J. Reine Angew. Math.*, 558:85–108, 2003.
- [Cor12] Y. Cornulier. On the quasi-isometric classification of locally compact groups. *ArXiv e-prints*, December 2012.
- [DC92] Manfredo Do Carmo. *Riemannian Geometry*. Mathematics:Theory and Applications. Birkhäuser, 1992.
- [GdlH90] É. Ghys and P. de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.
- [Gol90] Helmut Goldmann. *Uniform Fréchet algebras*, volume 162 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.
- [Hei74] Ernst Heintze. On homogeneous manifolds of negative curvature. *Math. Ann.*, 211:23–34, 1974.
- [Hei01] Juha Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Hel79] Sigurdur Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, volume 80. Academic press, 1979.
- [HK98] Juha Heinonen and Pekka Koskela. Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry. *Acta Mathematica*, 181(1):1–61, 1998.

- [HP97] Sa'ar Hersensky and Frédéric Paulin. On the rigidity of discrete isometry groups of negatively curved spaces. *Comment. Math. Helv.*, 72(3):349–388, 1997.
- [Kan85] Masahiko Kanai. Rough isometries, and combinatorial approximations of geometries of noncompact riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, 37(3):391–413, 1985.
- [Kna13] Anthony W Knapp. *Lie groups beyond an introduction*, volume 140. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Kob62] Shoshichi Kobayashi. Homogeneous riemannian manifolds of negative curvature. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 14(4):413–415, 1962.
- [LeD] LeDonne, E. Lecture notes on sub-Rimannian geometry. <https://sites.google.com/site/enricoledonne>.
- [LX15] E. Le Donne and X. Xie. Rigidity of fiber-preserving quasisymmetric maps. *ArXiv e-prints*, January 2015.
- [Mal45] A. Malcev. On the theory of the lie groups in the large. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 16(58):163–190, 1945.
- [Oni90] E. Onishchik, A; Vinberg. *Lie Groups and Algebraic Groups*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.
- [Pan89a] Pierre Pansu. Cohomologie L^p des variétés à courbure négative, cas du degré 1. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, (Special Issue):95–120 (1990), 1989. Conference on Partial Differential Equations and Geometry (Torino, 1988).
- [Pan89b] Pierre Pansu. Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 14(2):177–212, 1989.
- [Pan89c] Pierre Pansu. Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un. *Ann. of Math. (2)*, 129(1):1–60, 1989.
- [Pan07] Pierre Pansu. Cohomologie L^p en degré 1 des espaces homogènes. *Potential Anal.*, 27(2):151–165, 2007.
- [Par05] K. R. Parthasarathy. *Probability measures on metric spaces*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005. Reprint of the 1967 original.
- [Pia16] Matias Carrasco Piaggio. Orlicz spaces and the large scale geometry of heintze groups. *Mathematische Annalen*, pages 1–49, 2016.
- [RR91] M. M. Rao and Z. D. Ren. *Theory of Orlicz spaces*, volume 146 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.

- [SW86] Arthur A Sagle and Ralph Walde. *Introduction to Lie Groups and Lie Algebra*, 51. Elsevier, 1986.
- [Väi84] Jussi Väisälä. Quasimöbius maps. *Journal d'Analyse Mathématique*, 44(1):218–234, 1984.
- [Wil08] K. Wildrick. Quasisymmetric parametrizations of two-dimensional metric planes. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 97(3):783–812, 2008.
- [Wol64] Joseph A. Wolf. Homogeneity and bounded isometries in manifolds of negative curvature. *Illinois J. Math.*, 8(1):14–18, 03 1964.
- [Xie14] Xiangdong Xie. Large scale geometry of negatively curved $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}$. *Geom. Topol.*, 18(2):831–872, 2014.
- [Xie15] Xiangdong Xie. Quasiisometries of negatively curved homogeneous manifolds associated with Heisenberg groups. *J. Topol.*, 8(1):247–266, 2015.