

TESIS DE MAESTRÍA

# FLUJOS HOROCÍCLICOS SIN CONJUNTOS MINIMALES

Por: María Victoria García

Orientadores: Dra. Matilde Martínez y Dr. Rafael Potrie

Maestría en Matemática  
Facultad de Ciencias  
Universidad de la República  
Uruguay

## Agradecimientos

Quiero dedicar esta primera sección a agradecer a todos los que me acompañaron y colaboraron de alguna manera con el proceso que finaliza con este trabajo. Es imposible plasmar en él todo lo aprendido en este período.

En primer lugar, agradezco a Miguel, Eleonora y Francoise por haber leído y participar del tribunal de defensa de esta tesis. En particular, agradezco a Francoise por todas las explicaciones y ayuda recibida mientras intentaba comprender el problema a estudiar, y a Eleonora por todas las correcciones y sugerencias para mejorar este texto. Los tres son importantes referentes para mí.

No tengo palabras para agradecer a Rafael y a Matilde por su orientación, pero ellos saben que es mucho más que eso: su paciencia y su buena disposición para explicarme miles de veces la misma idea, el entusiasmo por descubrir (o demostrar) algo nuevo, el sin fin de hojas con cuentas tachadas, los maravillosos dibujos que resuelven todo... ¡Gracias!

También agradezco a mis compañeros del CMat y del IMERL, que hacen que todo sea más disfrutable. Y por supuesto, agradezco a mi familia y amigos que me acompañan y apoyan en lo que se me ocurra meterme. En especial agradezco a Diego, mi compañero de la vida, y quien me banca en todas.

## Resumen

El flujo horocíclico en una superficie de curvatura negativa está estrechamente relacionado al flujo geodésico, el cual a su vez tiene propiedades de hiperbolicidad. En el contexto de curvatura negativa constante, resultados de Dani, Ratner y otras personas dan una descripción muy precisa de las medidas de probabilidad invariantes por el flujo horocíclico, pero poco se sabe de la clausura de las órbitas cuando la superficie tiene volumen infinito, particularmente, cuando es de tipo infinito. Recientemente, Matsuoto estudio una clase de superficies de curvatura negativa que aparecen naturalmente en el estudio de ciertas laminaciones por superficies hiperbólicas y logró probar que en dichas superficies el flujo horocíclico no tiene conjuntos minimales. El objetivo de este trabajo es extender esos resultados al contexto de curvatura negativa variable y describimos la clausura de algunas órbitas horocíclicas en esta clase de superficies. La dificultad de la extensión, radica en que no se cuenta con las técnicas algebraicas disponibles en el caso de curvatura constante. Muchas ideas se apoyan en un influyente trabajo de Dal'Bo en el que estudia el caso de superficies de tipo finito.

# Índice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1      | Resultados previos . . . . .                                    | 5         |
| a        | El teorema de Hedlund . . . . .                                 | 5         |
| b        | Teorema de la clausura de la órbita de Ratner . . . . .         | 6         |
| c        | El teorema de Matsumoto . . . . .                               | 8         |
| <b>2</b> | <b>Los flujos geodésico y horocíclico en curvatura negativa</b> | <b>10</b> |
| 2.1      | El flujo geodésico . . . . .                                    | 10        |
| 2.2      | El tensor de curvatura . . . . .                                | 10        |
| 2.3      | Flujos de Anosov . . . . .                                      | 11        |
| 2.4      | El plano hiperbólico . . . . .                                  | 13        |
| <b>3</b> | <b>Algunas definiciones en curvatura variable</b>               | <b>19</b> |
| 3.1      | La función de Busemann . . . . .                                | 19        |
| 3.2      | Caracterización del espacio de horociclos . . . . .             | 22        |
| <b>4</b> | <b>Ejemplos</b>   | <b>23</b> |
| 4.1      | La foliación de Hirsch . . . . .                                | 23        |
| 4.2      | Otro ejemplo . . . . .  | 25        |
| <b>5</b> | <b>Órbitas densas y conjuntos minimales</b>                     | <b>27</b> |
| 5.1      | Puntos límite . . . . .   | 27        |
| 5.2      | Horociclos densos . . . . .                                     | 29        |
| a        | Existencia de horociclos densos . . . . .                       | 29        |
| 5.3      | Conjuntos minimales y puntos límite . . . . .                   | 35        |

# 1 Introducción

Sea  $M$  una superficie no compacta, Riemanniana, completa, de curvatura negativa no necesariamente constante, pero sí acotada. Sea  $\Gamma$  su grupo fundamental, el cual supondremos puramente hiperbólico<sup>1</sup> y que no es finitamente generado. Supongamos además que  $M$  se puede escribir como  $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots$  donde  $M_i \subseteq M_{i+1}$  para todo  $i$ , donde las  $M_i$  son subvariedades de  $M$ , compactas con borde, tales que los bordes  $\partial M_i$  son geodésicas cuya longitud está acotada por una constante  $C > 0$ . El objetivo de este trabajo es ver que bajo estas hipótesis se cumple el siguiente teorema:

**Teorema 1.1.** *Sea  $M$  como en las hipótesis de más arriba. Entonces no existen conjuntos minimales para la acción del flujo horocíclico en  $T^1M$ .*

Consideremos entonces  $M$  en las hipótesis mencionadas. Sea  $\tilde{M}$  el cubrimiento universal de  $M$ . Como es conocido, existe un subgrupo del grupo de isometrías de  $\tilde{M}$  que es isomorfo a  $\Gamma$  (y lo llamaremos con el mismo nombre, o sea, podemos pensar  $\Gamma < Isom^+(\tilde{M})$ ). En  $\tilde{M}$  ponemos la métrica que surge de levantar la métrica de  $M$ , de modo que  $M \cong \Gamma \backslash \tilde{M}$ . El flujo geodésico es aquel que tiene como trayectorias a las geodésicas que, por ser  $M$  completa, están definidas en todo  $\mathbb{R}$ . En estas condiciones, el flujo geodésico en  $\tilde{M}$  (y en  $M$ ) será hiperbólico, y sus variedades estables serán las trayectorias del flujo horocíclico en  $\tilde{M}$ . La proyección de este flujo sobre  $\Gamma \backslash \tilde{M}$  será el flujo horocíclico en  $M$ . Tanto el flujo geodésico como el horocíclico pasan al cociente en  $T^1M$ , de modo que geodésicas y horociclos se proyectan sobre geodésicas y horociclos respectivamente.

La topología de  $\tilde{M}$  será la misma que la de un plano, pero su geometría se parecerá a la del plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  (o a la del disco de Poincaré  $\mathbb{D}$ ) que presentaremos más adelante, con la diferencia de que la curvatura en  $\tilde{M}$  no será necesariamente constante. Un conjunto *minimal* para la acción del flujo horocíclico, es un conjunto cerrado, invariante por el flujo horocíclico, y que no contiene como subconjunto propio otro conjunto con estas características.

## 1.1 Resultados previos

### a El teorema de Hedlund

Un resultado de Hedlund de 1936, dice que si tenemos una superficie  $M$  compacta, de curvatura constante negativa (hiperbólica), el flujo horocíclico en  $T^1M$  es minimal, esto es, que no existen cerrados, invariantes para el flujo horocíclico y no vacíos, que no sean todo  $T^1M$ . (Ver [13])

Más adelante, en una publicación del año 2000, F. Dal'Bo generaliza el resultado de Hedlund, probando que en una superficie compacta de curvatura negativa, todos los horociclos son densos, incluso si la curvatura no es constante (ver [9]). En este mismo artículo, se prueba que para una superficie de curvatura negativa cuyo grupo fundamental es finitamente generado, los horociclos en el conjunto no errante son densos o periódicos. Esto

---

<sup>1</sup>Todos los elementos de  $\Gamma$  son isometrías hiperbólicas.

motiva el interés por centrar nuestra atención en el caso en que el grupo fundamental es infinitamente generado.

Una superficie hiperbólica se obtiene siempre de la siguiente forma: sabemos que su cubrimiento universal es el semiespacio superior  $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ . Entonces, existirá un subgrupo discreto del grupo de isometrías que preservan la orientación de  $\mathbb{H}^+$ ,  $\Gamma < \text{Isom}^+(\mathbb{H}^+)$  tal que la superficie  $M$  es  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^+$ . A su vez, el grupo de isometrías de  $\mathbb{H}^+$  se identifica con el grupo de matrices  $2 \times 2$  con determinante igual a 1, en el que identificamos una matriz con su opuesta ( $PSL(2, \mathbb{R})$ ). Esto es porque las isometrías de  $\mathbb{H}^+$  son las transformaciones de Möbius:

$$\text{Isom}^+(\mathbb{H}^+) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

A la transformación  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  la podemos identificar con la matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

Claramente si cambiamos  $a, b, c$  y  $d$  por sus opuestos, la transformación sigue siendo la misma. Es por eso que identificamos con  $PSL(2, \mathbb{R})$  y no con  $SL(2, \mathbb{R})$ . A su vez, tenemos que  $PSL(2, \mathbb{R})$  se identifica con  $T^1\mathbb{H}^+$ , aunque de una forma no tan obvia, como explicaremos a continuación.

Para cada punto-vector  $(p, v) \in T^1\mathbb{H}^+$ , existe una única isometría (transformación de Möbius) que lleva al elemento  $i \in \mathbb{H}^+$  en  $p$  y su diferencial lleva al elemento  $i = (0, 1) \in T_i^1\mathbb{H}^+$  en  $v \in T_p^1\mathbb{H}^+$ . Así que la identificación de  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^+)$  con  $T^1\mathbb{H}^+$ , consiste en asociar a  $(p, v)$  la transformación de Möbius  $(abcd)$  (que como vimos la puedo mirar en  $PSL(2, \mathbb{R})$ ) que lleva (en cierto sentido)  $(i, i)$  en  $(p, v)$ .

Resulta además que con esta identificación, el tangente unitario a la superficie,  $T^1M$  se puede también identificar con  $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}^+$ .

La ventaja de pensar  $T^1M$  como  $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}^+$ , es que aquí tenemos la estructura de grupos de Lie, y podemos usar las herramientas de álgebra para estudiar tanto el flujo geodésico como el horocíclico. Desde este punto de vista, también tenemos una forma simple de ver estos dos flujos. El flujo geodésico  $g^t$  actúa en  $PSL(2, \mathbb{R})$  mediante la multiplicación a derecha por

$$\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix},$$

mientras que el flujo horocíclico  $h^s$  actúa por multiplicación a derecha por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estas acciones pasan a su vez al cociente  $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}^+ = T^1M$ .

## b Teorema de la clausura de la órbita de Ratner

Sea  $G$  un grupo de Lie, esto es, un grupo que además es una variedad, y tal que las operaciones de grupo son diferenciables, y sea  $\Gamma < G$  un subgrupo discreto tal que  $\Gamma \backslash G$

tiene volumen finito. Sea  $\{u^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  un subgrupo a un parámetro de  $G$ , unipotente, y  $\varphi_t$  el flujo definido en  $\Gamma \backslash G$  mediante:

$$\varphi_t(\Gamma x) = \Gamma x u^t.$$

En los años 90, Marina Ratner probó que bajo estas hipótesis, se cumple que para todo  $x \in G$  existe un subgrupo conexo  $S < G$  tal que:

1.  $\{u^t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset S$ , por lo que  $\varphi_t(\Gamma x) \subset \Gamma x S$ .
2.  $\Gamma x S$  es compacto en  $\Gamma \backslash G$ .
3. La  $\varphi_t$ -órbita de  $\Gamma x$  es densa en  $\Gamma x S$ , o sea  $\Gamma x S$  es la clausura de  $\Gamma x u^t$ .

Además, prueba que la órbita  $\Gamma x u^t$  se distribuye uniformemente en su clausura, en un sentido medible. (Ver [18]).

Volvamos al ejemplo de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , y observemos que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{s \in \mathbb{R}}.$$

es un subgrupo a un parámetro de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , y este es a su vez un grupo de Lie. Llamemos

$$H_s := \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea  $\Gamma$  un subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{R})$  tal que  $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$  es compacto, y consideramos el flujo definido en  $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$  mediante:

$$h_s(\Gamma x) = \Gamma x H_s,$$

para todo  $x \in PSL(2, \mathbb{R})$ .

Además, como todas las matrices  $H_s$  son unipotentes, ya que el único valor propio es 1, tendremos que  $\{H_s\}_{s \in \mathbb{R}}$  es un subgrupo a un parámetro unipotente. De modo que el flujo  $h_s$ , que resulta ser el flujo horocíclico en la superficie  $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ , está en las hipótesis del teorema de la clausura de la órbita de Ratner. Por lo que la clausura de cualquier horociclo será un conjunto como se describe más arriba.

Una consecuencia del teorema de Ratner es que si tenemos una probabilidad ergódica para el flujo horocíclico en  $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ , donde  $\Gamma$  es cualquier subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , el soporte de esta medida debe estar o bien contenido en una órbita periódica, o bien ser  $PSL(2, \mathbb{R})$ -invariante. Una prueba se puede encontrar en el capítulo 12 de [5]. En las superficies de nuestras hipótesis, el volumen es infinito, por lo que no hay medidas de probabilidad invariantes, entonces no puede haber ningún compacto invariante, de otro modo, allí habría soportada una medida invariante. Esto de alguna manera se acerca al resultado que veremos a continuación.

### c El teorema de Matsumoto

El resultado de Hedlund es acerca de superficies hiperbólicas (compactas de curvatura constante negativa). De hecho, en una superficie compacta, cualquier flujo admite un conjunto minimal: observar que si toda órbita es densa, todo el tangente unitario es un minimal. Si alguna órbita no es densa, su clausura es un conjunto invariante. Si este no es minimal, admite otro subconjunto invariante, y así sucesivamente, construyo una familia decreciente de compactos. Por ser la superficie compacta, su intersección será no vacía, y será una cota inferior de la cadena decreciente de compactos ordenados por la inclusión. El lema de Zorn nos dice entonces que debe existir un elemtno minimal. Pero ¿qué pasa si no tenemos la hipótesis de compacidad? Vimos más arriba un resultado para el caso no compacto pero con volumen finito. Matsumoto probó más recientemente que no existen minimales para el flujo horocíclico para cierta clase de superficies de curvatura constante negativa, pero no compactas, que se obtienen como  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^+$ , donde  $\Gamma$  es un grupo “tight”. Un grupo Fuchsiano  $\Gamma$  se dice que es **tight** si cumple:

1.  $\Gamma$  es puramente hiperbólico
2. La variedad  $\Sigma := \Gamma \backslash \mathbb{H}^+$  es no compacta, y se puede escribir como union creciente de variedades compactas  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , cuyos bordes son geodésicas (o unión de geodésicas) de longitud acotada por cierta constante  $C > 0$ .

Estas hipótesis son las mismas que las del teorema 1.1, salvo por el hecho de que tenemos  $\mathbb{H}^+$  en vez de  $\tilde{M}$ , y como mencionamos estas superficies son geoméricamente diferentes. Los grupos Fuchsianos tipo “tight” son infinitamente generados y de primer tipo, o sea, que el conjunto límite de un grupo de ese tipo es todo  $\mathbb{R} \cup \infty$ .

La prueba de esto se puede encontrar en [15].

Si bien estudiar la acción de  $h^t$  en  $\Gamma \backslash T^1 \mathbb{H}^+$  no parece tan complicado, existe en realidad una forma algo más simple. Resulta que esta acción es (de alguna manera) equivalente a la acción de  $\Gamma$  en  $T^1 \mathbb{H}^+ / \langle h^s \rangle =: \mathbb{A}$ , esto es, el espacio de los horociclos en  $T^1 M$ . Este último a su vez se identifica con  $\mathbb{R}^2 / \langle \pm 1 \rangle$ , y allí la acción del flujo geodésico  $g^t$  no es más que la multiplicación escalar por  $e^{t/2}$ . Cada dirección representa una familia de horociclos que se levantan a horociclos en  $T^1 \mathbb{H}^+$  que son tangentes a  $\partial_\infty \mathbb{H}$  en un mismo punto.

Con esta equivalencia en mente, encontrar un minimal para la acción de  $\Gamma$  en  $\mathbb{A}$ , es equivalente a encontrar un minimal para la acción de  $h^t$  en  $T^1 M$ . Del mismo modo, si una acción no tiene minimales, la otra tampoco.

En vista del resultado de Matsumoto, nos preguntamos qué pasaría si tampoco tenemos la hipótesis de curvatura constante. Las hipótesis del teorema 1.1, surgen de adaptar el concepto de superficie *tight* al contexto de curvatura variable negativa, y la tesis es que con esta adaptación sigue valiendo el resultado. La estrategia para la demostración es extraer las ideas geométricas dentro de la prueba de Matsumoto, para llevarla al contexto de curvatura variable.

En curvatura variable, ya no podremos partir del flujo definido en el cubrimiento universal para luego “bajarlo” a la superficie, sino que tendríamos que hacer al revés. Como

dijimos inicialmente, partimos de la superficie, que ya tiene una métrica, levantamos esa métrica al cubrimiento universal, y miramos allí el flujo horocíclico.

Algo posterior a la publicación de Matsumoto, se publicó un artículo (ver [1]) con una prueba del mismo resultado, en el contexto de superficies **coarsely tame**, que se definen como las que cumplen:

1. Son no compactas.
2. Existe  $b > 0$  tal que todo rayo geodésico o bien se mantiene en una región compacta, o bien corta infinitas geodésicas cuyas longitudes están acotadas superiormente por  $b$ .

Ser “coarsely tame”, implica que una superficie es geoméricamente infinita (o sea, el grupo fundamental es infinitamente generado), el conjunto límite es todo el borde infinito, y además que tiene área infinita. Esto significa que las superficies “tight” y “coarsely tame” cumplen las mismas condiciones. Este artículo contiene además una prueba de la minimalidad del flujo horocíclico para cierta familia de foliaciones.

## 2 Los flujos geodésico y horocíclico en curvatura negativa

En esta sección presentaremos el flujo geodésico, y enunciaremos algunos resultados acerca del mismo en el contexto de curvatura negativa. Esto nos permitirá definir el flujo horocíclico a partir de su relación con el flujo geodésico. En particular, dedicaremos una subsección a estudiar estos flujos en el caso en que la curvatura es constante y negativa.

Empezaremos por establecer algo sobre de la notación que estaremos empleando a lo largo de este texto, que podría llegar a generar confusiones o ambigüedades: consideremos una variedad Riemanniana  $M$ . Cuando nos referimos a un elemento del fibrado tangente unitario de  $M$ , que es un par  $(z, v)$  con  $z \in M$  y  $v \in T_z^1 M$ , haremos un abuso de notación al escribir  $v \in T^1 M$ , ya que dado un vector tangente ya está asociado con el punto de la superficie a cuyo espacio tangente pertenece. De este modo también podremos escribir  $\hat{\pi}(v) = z$ , donde  $\hat{\pi}$  se refiere a la proyección canónica de  $T^1 M$  en  $M$ .

De forma análoga, si nos referimos por  $\tilde{M}$  al cubrimiento universal de  $M$ , escribiremos  $\tilde{v} \in T^1 \tilde{M}$ , y  $\hat{\pi}(\tilde{v}) = \tilde{z} \in \tilde{M}$ , usando el mismo nombre  $\hat{\pi}$  para la proyección canónica de  $T^1 \tilde{M}$  en  $\tilde{M}$ .

### 2.1 El flujo geodésico

Vamos entonces a definir formalmente el flujo geodésico.

**Definición 2.1.** Sea  $M$  una variedad Riemanniana geodésicamente completa (las geodésicas están definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ ). Para  $p \in M$ ,  $v \in T_p^1 M$  consideramos  $\gamma_v : \mathbb{R} \rightarrow M$ , la única geodésica que en tiempo 0 pasa por  $p$  con  $\dot{\gamma}_v(0) = v$ . Luego, para cada  $t \in \mathbb{R}$  definimos el siguiente difeomorfismo  $\phi_t : T^1 M \rightarrow T^1 M$ , mediante

$$\phi_t(v) = \dot{\gamma}_v(t).$$

Es fácil verificar que la familia de difeomorfismos

$$\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$$

determina un flujo en  $T^1 M$ , al que llamaremos *flujo geodésico*. (Ver cap. 1 de [16])

### 2.2 El tensor de curvatura

Vamos a explicar brevemente en esta sección qué es la curvatura de una variedad Riemanniana, para que quede bien establecido a qué nos referimos con curvatura negativa. Los detalles de esto se pueden ver en [11].

**Definición 2.2.** Dada una variedad Riemanniana  $M$ , definimos su curvatura,  $R$ , como la correspondencia que, a cada par de campos de vectores  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  le asocia un mapa  $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  definido mediante

$$R(X, Y)(Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

para todo  $Z \in \mathcal{X}(M)$ , y donde  $\nabla$  denota la conexión Riemanniana en  $M$ .

Dados dos vectores  $x$  e  $y$  en el plano, denotemos por  $|x \wedge y|$  a la expresión

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

que representa el área del paralelogramo determinado por los vectores  $x$  e  $y$ .

Además, dados campos  $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$ , denotaremos mediante  $\langle X, Y, Z, T \rangle$  a  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle$ .

**Proposición 2.3.** *Sea  $M$  una variedad Riemanniana, y sean  $p \in M$  y  $\sigma$  un subespacio de dimensión 2 de  $T_pM$ , y  $\{x, y\}$  una base cualquiera de  $\sigma$ . Luego, el valor*

$$k(x, y) = \frac{\langle x, y, x, y \rangle}{|x \wedge y|}$$

*no depende de la base  $\{x, y\}$  de  $\sigma$  elegida.*

La prueba de esta proposición se encuentra en [11], Prop. 3.1, pág. 94.

**Definición 2.4.** Al valor  $k(x, y)$  definido en la proposición anterior, le llamaremos *curvatura seccional* de  $\sigma$ . Podemos notarlo  $k(\sigma)$ .

Cuando decimos que una variedad tiene curvatura negativa, queremos decir que la curvatura seccional en todo punto  $p \in M$  y para todo  $\sigma \subset T_pM$  con  $\dim(\sigma) = 2$ , es  $k(\sigma) < 0$ .

## 2.3 Flujos de Anosov

Presentaremos ahora una familia particular de flujos, los flujos de Anosov. Veremos más adelante bajo qué hipótesis los flujos geodésicos cumplen la propiedad de Anosov. Este concepto será fundamental en nuestra definición de flujo horocíclico. Para esto las principales referencias serán [12] y [14].

Consideremos entonces una variedad Riemanniana  $M$ , y  $\varphi_t : \mathbb{R} \rightarrow M$  un flujo diferenciable en  $M$ . Diremos que  $\Lambda \subset M$ , es un conjunto  $\varphi_t$ -invariante, si se cumple que

$$\varphi_t(\Lambda) \subset \Lambda$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definición 2.5.** Diremos que un subconjunto  $\varphi_t$ -invariante,  $\Lambda \subset M$ , es un conjunto *hiperbólico* para  $\varphi_t$ , si existen  $\lambda < 1 < \mu$  tales que para todo  $x \in \Lambda$  existe una descomposición de  $T_xM$ :

$$T_xM = E_x^0 \oplus E_x^+ \oplus E_x^-$$

tal que se cumple:

- $\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t(x) \in E_x^0 - \{0\}$
- $\dim E_x^0 = 1$
- $D\varphi_t(E^\pm) = E^\pm$

y además

$$\begin{aligned}\|D\varphi_t|_{E_x^-}\| &\leq \lambda^t, \\ \|D\varphi_{-t}|_{E_x^+}\| &\leq \mu^{-t}.\end{aligned}$$

**Definición 2.6.** El flujo  $\varphi_t$  es un flujo de Anosov (o hiperbólico) en la variedad  $M$ , si  $M$  es un conjunto hiperbólico para  $\varphi_t$  en el sentido de la definición anterior.

**Teorema 2.7.** Sea  $\varphi_t : M \rightarrow M$  un flujo de Anosov de clase  $C^r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , y sean  $\lambda$  y  $\mu$  las constantes en la definición 2.5, y  $t_0 > 0$ . Luego para cada  $x \in \Lambda$  existe un par de  $C^r$ -discos encajados en  $M$ ,  $W^s(x)$  y  $W^u(x)$ , llamados variedad estable e inestable local respectivamente, tales que:

- $T_x W^s(x) = E_x^-$ ,  $T_x W^u(x) = E_x^+$
- $\varphi_t(W^s(x)) \subseteq W^s(\varphi_t(x))$  y  $\varphi_{-t}(W^u(x)) \subseteq W^u(\varphi_{-t}(x))$  para todo  $t \geq t_0$
- Para todo  $\delta > 0$  existe  $C(\delta)$  tal que
  - $\text{dist}(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) < C(\delta)(\lambda + \delta)^t \text{dist}(x, y)$  para todo  $y \in W^s(x)$  y para todo  $t > 0$
  - $\text{dist}(\varphi_{-t}(x), \varphi_{-t}(y)) < C(\delta)(\mu - \delta)^{-t} \text{dist}(x, y)$  para todo  $y \in W^u(x)$  y para todo  $t > 0$ .
- Existe una familia continua de entornos de  $x$ ,  $\{U_x\}$  tales que:
  - $W^s(x) = \{y \text{ tal que } \varphi_t(y) \in U_{\varphi_t(x)}, t > 0, \text{dist}(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$
  - $W^u(x) = \{y \text{ tal que } \varphi_{-t}(y) \in U_{\varphi_{-t}(x)}, t > 0, \text{dist}(\varphi_{-t}(x), \varphi_{-t}(y)) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$

La prueba de est teorema se puede encontrar en [14] (Teorema 17.4.2, pág 545.)

**Definición 2.8.** Para  $\varphi$  en las hipótesis del teorema anterior, definimos:

$$\hat{W}^s(x) := \bigcup_{t>0} \varphi^{-t}(W^s(\varphi_t(x)))$$

y

$$\hat{W}^u(x) := \bigcup_{t>0} \varphi^{-t}(W^s(\varphi^t(x)))$$

y les llamaremos *variedad estable fuerte global* y *variedad inestable fuerte global* en  $x$  respectivamente. Se caracterizan por cumplir:

- $\hat{W}^s(x) = \{y \in M \text{ tal que } \text{dist}(\varphi^t(x), \varphi^t(y)) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$
- $\hat{W}^u(x) = \{y \in M \text{ tal que } \text{dist}(\varphi^{-t}(x), \varphi^{-t}(y)) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$

**Definición 2.9.** Las variedades  $\hat{W}^{0s}(x) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \varphi^t(\hat{W}^s(x))$  y  $\hat{W}^{0u}(x) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \varphi^t(\hat{W}^u(x))$  serán las variedades *estable débil* e *inestable débil* de  $x$  respectivamente. Además  $\hat{W}^{0s} = E_x^0 \oplus E_x^-$  y  $\hat{W}^{0u} = E_x^0 \oplus E_x^+$ .

(Ver [14], pág. 546).

**Teorema 2.10.** *Sea  $M$  una variedad Riemanniana conexa, tal que la curvatura seccional en todos sus puntos es estrictamente negativa, y la misma está acotada superiormente. Entonces el flujo geodésico en  $T^1M$  es un flujo de Anosov.*

Una prueba de esto en el caso de que  $M$  sea compacta, se puede encontrar en [14] (Teorema 17.6.2, pág. 554).

**Definición 2.11.** Sea  $M$  una variedad Riemanniana de curvatura seccional estrictamente negativa, acotada superiormente, y sea  $v \in T^1M$ . Definimos entonces el *horociclo estable* por  $v$ , como la variedad estable fuerte global  $\hat{W}^s(v) \subset T^1M$  dada por la definición 2.8.

Observar que ahora la variedad en la que estamos considerando el flujo de Anosov no es  $M$  sino  $T^1M$ .

**Definición 2.12.** Si  $M$  es como en la definición anterior, definimos el *flujo horocíclico* en  $T^1M$ ,  $\{h_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ , como el flujo que a cada  $v \in T^1M$  lo mueve a lo largo del horociclo estable  $\hat{W}^s(v)$  con velocidad 1 (con respecto a la métrica natural en  $TTM$  inducida por la métrica Riemanniana en  $M$ ).

## 2.4 El plano hiperbólico

En esta sección presentaremos más detalladamente al plano hiperbólico y su geometría. La principal referencia para esto, será [4].

Consideramos el semiespacio superior  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0\}$ , con la métrica

$$ds = \frac{|dz|}{y},$$

donde  $z = x + yi$ . Se puede verificar que esta métrica le otorga a  $\mathbb{H}$  curvatura seccional negativa en todos sus puntos e igual a  $-1$ . (Ver capítulo 8.3 de [11])

A su vez, para esta métrica, las isometrías que preservan la orientación son el siguiente conjunto

$$Isom^+(\mathbb{H}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

A las funciones de esta forma, se les llama transformaciones de Möbius.

**Definición 2.13.** Definiremos el *borde infinito* de  $\mathbb{H}$  mediante

$$\partial_\infty \mathbb{H} := \mathbb{R} \cup \infty.$$

Podemos pensar incluso que el grupo  $Isom^+(\mathbb{H})$  actúa en  $\mathbb{H} \cup \partial_\infty \mathbb{H}$ . Clasificaremos a las isometrías de  $Isom^+(\mathbb{H})$  según su clase de conjugación, o equivalentemente, según sus puntos fijos.

Caractericemos primero este grupo para poder trabajar mejor con él. Haremos entonces la siguiente identificación:

$$Isom^+(\mathbb{H}) \simeq PSL(2, \mathbb{R}).$$

Para esto, a la transformación

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

la podemos identificar con la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Observar que si cambiamos  $a, b, c$  y  $d$  por sus opuestos, la transformación sigue siendo la misma. Es por eso que identificamos con  $PSL(2, \mathbb{R})$  y no con  $SL(2, \mathbb{R})$ .

A su vez, tenemos que  $PSL(2, \mathbb{R})$  se identifica con  $T^1\mathbb{H}^+$ , aunque de una forma no tan obvia.

Para cada punto-vector  $(p, v) \in T^1\mathbb{H}$ , existe una única isometría (transformación de Möbius) que lleva al elemento  $i \in \mathbb{H}$  en  $p$ , y su diferencial lleva al elemento  $i = (0, 1) \in T_i^1\mathbb{H}$  en  $v \in T_p^1\mathbb{H}$ . O sea, existe una única  $f \in Isom^+(\mathbb{H})$  tal que

•

$$f(i) = p$$

•

$$df_i(i) = v$$

Así que la identificación de  $Isom^+(\mathbb{H})$  con  $T^1\mathbb{H}$ , consiste en asociar a  $(p, v)$  la transformación de Möbius  $(abcd)$  (que como vimos la puedo mirar en  $PSL(2, \mathbb{R})$ ) que lleva (en cierto sentido)  $(i, i)$  en  $(p, v)$ .

Nos preguntamos ahora quienes son las geodésicas del plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ . Podríamos escribir los coeficientes de esta métrica, calcular los símbolos de Christoffel y resolver la ecuación diferencial que define a las geodésicas. Otra forma es considerar lo siguiente: hemos visto que las isometrías de  $\mathbb{H}$  son las transformaciones de Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Además, todas las geodésicas en una variedad Riemanniana son isométricas entre sí. Tenemos además los siguientes resultados:

**Teorema 2.14.** 1. *El eje imaginario  $\{x + iy \in \mathbb{H} : x = 0\}$ , es una geodésica de  $\mathbb{H}$ .*

2. *Las transformaciones de Möbius llevan líneas verticales en líneas verticales y en semicírculos perpendiculares al eje real (o sea, que su centro pertenece al eje real).*

**Corolario 2.15.** *Las geodésicas de  $\mathbb{H}$  son las líneas verticales y las semicírculos ortogonales al eje real.*

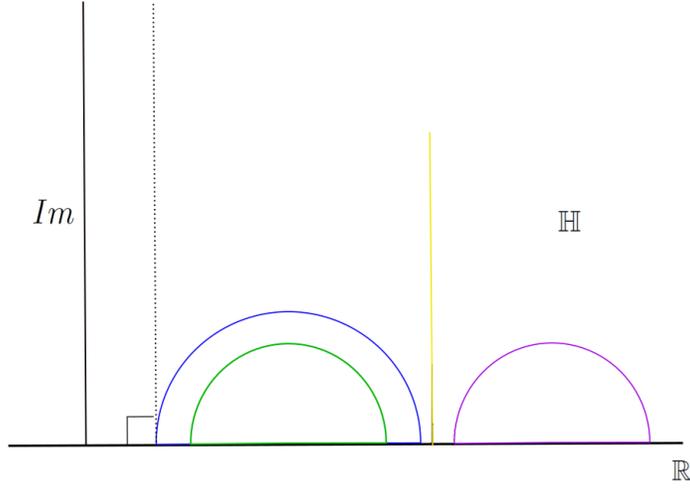


Figura 1: Las líneas en colores sólidos representan algunas geodésicas del plano hiperbólico.

**Observación 2.16.** *El corolario anterior se refiere a las geodésicas como curvas en  $\mathbb{H}$ . Sin embargo, nosotros queremos pensar las geodésicas en  $T^1\mathbb{H}$ , ya que el flujo geodésico está definido allí. Pensaremos entonces las geodésicas de la siguiente forma: si  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$  parametriza por longitud de arco una curva en  $\mathbb{H}$  que es una geodésica, entonces  $\{(\gamma(t), \gamma'(t)) : t \in \mathbb{R}\}$  es una geodésica en  $T^1\mathbb{H}$ .*

Las geodésicas de la observación anterior son entonces las órbitas del flujo geodésico. Como mencionábamos, la métrica hiperbólica le otorga al plano hiperbólico curvatura constante negativa (Ver capítulo 8 en [11]). Por este motivo, y en vista del teorema 2.10, el flujo geodésico aquí es un flujo de Anosov. ¿Cómo se ven entonces las variedades estables para el flujo geodésico?

Como dijimos, las variedades estables fuertes para el flujo geodésico son los conjuntos

$$\hat{W}^s(v) = \{w \in T^1\mathbb{H} : \text{dist}(g_t(v), g_t(w)) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty\}.$$

A los conjuntos estables para el para el flujo geodésico se les llama horociclos estables, y por eso el flujo horocíclico es aquel que tiene como órbitas a los conjuntos estables. Entonces, el horociclo por un elemento  $v \in T^1\mathbb{H}$  es el conjunto de los vectores de  $T^1\mathbb{H}$  tales que su órbita futura por el flujo geodésico se pega en el futuro a la de  $v$ . Lo vemos gráficamente en la Figura 2.

Pensando ahora una isometría  $f$  de  $\mathbb{H}$  como la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  en  $PSL(2, \mathbb{R})$ , definimos

$$\tau(f) := [\text{traza}(A)]^2.$$

De hecho, dos isometrías  $f$  y  $g$  son conjugadas si y solamente si  $\tau(f) = \tau(g)$  (ver sección 1.2.3 en [4]).

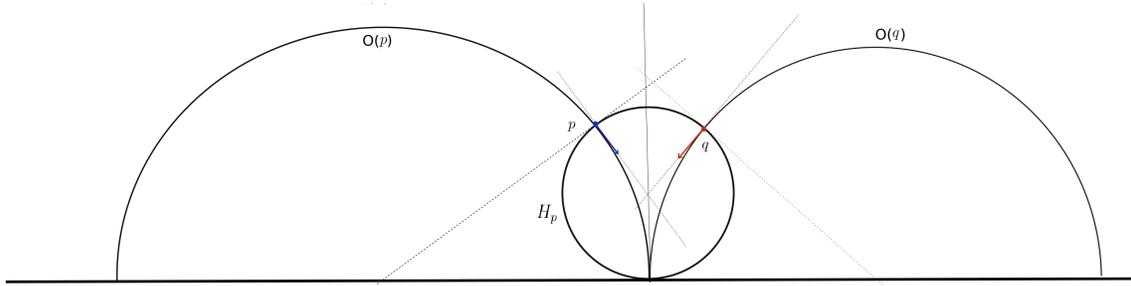


Figura 2: Aquí  $(p, v)$  está en  $T^1\mathbb{H}$  ( $v$  está representado por el vector azul), y  $O(p)$  es la proyección de la geodésica por  $(p, v)$  en  $\mathbb{H}$ , y  $H_p$  es la proyección en  $\mathbb{H}$  del horociclo por  $(p, v)$ . Los elementos de este horociclo, son los  $(q, w) \in T^1\mathbb{H}$ , tales que  $q$  está en la circunferencia por  $p$  que es tangente al eje real en el extremo de la geodésica por  $p$ , y el vector  $w$  apunta radialmente hacia el centro de esta cfa. Se puede ver que efectivamente estos  $(q, w)$  son los elementos de  $T^1\mathbb{H}$  cuya órbita por el flujo geodésico se pega a la de  $(p, v)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Un elemento  $(q, w)$  en dicho horociclo está representado en la figura,  $w$  mediante el vector rojo.  $O(q)$  es la proyección de la geodésica por  $(q, w)$ .

**Definición 2.17.** 1. Una isometría  $f \in Isom^+(\mathbb{H})$  se dice *parabólica* si es conjugada a una isometría de la forma

$$z \mapsto z + 1.$$

En este caso,  $\tau(f) = 4$ .

2. Una isometría  $f \in Isom^+(\mathbb{H})$  se dice *elíptica* si es conjugada a una rotación:

$$z \mapsto e^{i\theta} z.$$

En este caso,  $\tau(f) \in [0, 4)$ .

3. Una isometría  $f \in Isom^+(\mathbb{H})$  se dice *hiperbólica* si es conjugada a una isometría de la forma:

$$z \mapsto kz.$$

En este caso,  $\tau(f) > 4$ .

**Teorema 2.18.** Sea  $f \in PSL(2, \mathbb{R})$  distinta de la identidad, entonces ocurre una de las siguientes afirmaciones:

- $f$  tiene un único punto fijo, y éste pertenece a  $\partial_\infty\mathbb{H}$ ;
- $f$  tiene exactamente dos puntos fijos, y ambos están en  $\partial_\infty\mathbb{H}$ ;
- $f$  tiene un único punto fijo en  $\mathbb{H}$ , y ninguno en  $\partial_\infty\mathbb{H}$ .

La prueba de este teorema se encuentra en la sección 1.2.2 de [4] (Teorema 1.24).

**Teorema 2.19.** Sea  $f \in PSL(2, \mathbb{R})$  distinta de la identidad, entonces son equivalentes:

- $f$  es parabólico;
- $f$  tiene un único punto fijo en  $\partial_\infty \mathbb{H}$ ;
- $\tau(f) = 4$ .

(Ver Teorema 1.25 en la sección 1.2.4 de [4]).

**Definición 2.20.** Un *grupo Fuchsiano*, es un subgrupo  $\Gamma$  de  $Isom^+(\mathbb{H})$  que actúa en  $\mathbb{H}$  discontinuamente. Esto es que, para todo  $K \subset \mathbb{H}$  compacto, se tiene que

$$\gamma(K) \cap K \neq \emptyset$$

únicamente para finitos  $\gamma \in \Gamma$ .

**Observación 2.21.** En nuestro caso, y dado que  $Isom^+(\mathbb{H}) \simeq PSL(2, \mathbb{R})$ , la definición anterior es equivalente a decir que  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

**Definición 2.22.** Supongamos que  $\Gamma \subset Isom^+(\mathbb{H})$  es un grupo Fuchsiano. Un *dominio fundamental* para  $\Gamma$  es un conjunto  $F \subset \mathbb{H}$ , abierto, tal que:

- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{F}) = \mathbb{H}$ ,
- $\gamma(F) \cap \gamma'(F) = \emptyset$  si  $\gamma \neq \gamma'$ .

**Definición 2.23.** Sea  $\Gamma$  un grupo Fuchsiano que actúa en  $\mathbb{H}$ . Un punto  $\zeta \in \mathbb{H} \cup \partial_\infty \mathbb{H}$  es un *punto límite* para  $\Gamma$ , si existe  $z \in \mathbb{H}$  tal que

$$\Gamma z := \{\gamma z : \gamma \in \Gamma\}$$

tiene a  $\zeta$  como punto de acumulación.

Es claro que en realidad un  $\zeta$  como en la definición anterior, en realidad debe pertenecer a  $\partial_\infty \mathbb{H}$ , ya que al ser la acción de  $\Gamma$  discontinua en  $\mathbb{H}$ , las órbitas no pueden quedar confinadas a ningún compacto de  $\mathbb{H}$ .

Observar también que si la órbita de un punto  $z \in \mathbb{H}$  acumula sobre  $\zeta \in \partial_\infty \mathbb{H}$ , entonces la órbita de cualquier otro  $w \in \mathbb{H}$  acumula también sobre  $\zeta$  (ver sección 1.4.1 en [4]).

**Definición 2.24.** Definimos el *conjunto límite* de  $\Gamma$ ,  $\Lambda_\Gamma$ , como el conjunto de los puntos donde acumula alguna órbita  $\Gamma z$  con  $z \in \mathbb{H}$ . Equivalentemente y en vista de la última observación, podemos definirlo como el conjunto de los puntos de acumulación de todas las  $\Gamma$ -órbitas.

**Observación 2.25.** • El conjunto  $\Lambda_\Gamma$  es cerrado en  $\partial_\infty \mathbb{H}$  por definición.

- Para todo  $\gamma \in \Gamma$ , se tiene que  $\gamma(\Lambda_\Gamma) = \Lambda_\Gamma$

Sobre la cardinalidad de  $\Lambda_\Gamma$ , tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.26.** *O bien  $\Lambda_\Gamma$  tiene a lo sumo 2 elementos, o bien es no numerable.*

(Ver teorema 1.46 en [4]).

Consideremos ahora  $\Gamma$ , un grupo Fuchsiano que actúa en  $\mathbb{H}$ , y la superficie que se obtiene mediante:

$$S := \Gamma \backslash \mathbb{H} := \{\Gamma z : z \in \mathbb{H}\}.$$

Los flujos geodésico y horocíclico,  $g_t$  y  $h_s$ , pasan al cociente porque las isometrías de  $\mathbb{H}$  conmutan con estos flujos. La acción de  $\Gamma$  en  $T^1M$  está dada por:

$$\gamma(x, v) = (\gamma x, D_x \gamma(v)), \gamma \in \Gamma.$$

Si  $\pi : \mathbb{H} \rightarrow S$  es la proyección canónica, en  $S$  la distancia inducida es

$$d(\pi(z), \pi(z')) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(z, \gamma(z')).$$

A su vez, si  $\pi' : T^1\mathbb{H} \rightarrow T^1S$  es la proyección canónica, la distancia inducida en  $T^1S$  es

$$d(\pi'(z, v), \pi'(z', v')) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d((z, v), \gamma(z', v')).$$

Recordemos que en  $T^1\mathbb{H} \simeq PSL(2, \mathbb{R})$ , el flujo horocíclico actúa como la multiplicación a derecha por la matriz  $H_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , y el flujo geodésico actúa por multiplicación a derecha por la matriz  $G_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix}$ . O sea

$$h_s(M) = MH_s,$$

$$g_t(M) = MG_t,$$

para todo  $M \in PSL(2, \mathbb{R})$ . Observar además que las acciones de estos flujos conmutan en  $PSL(2, \mathbb{R})$  ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t/2} & se^{t/2} \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix}.$$

Luego, el flujo geodésico en  $S$  lo podemos escribir de la siguiente forma: sea  $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$  y  $v(t)_{t \in \mathbb{R}}$  una parametrización por longitud de arco de la geodésica asociada a  $v$ . Esto es,  $v(0) = z$ ,  $v'(0) = v$ . De modo que  $\gamma(v(0)) = \gamma(z)$  y  $\frac{d}{dt} \gamma \circ v(0) = D_z \gamma(v)$ . Luego,  $g_t(\gamma(z, v)) = \gamma(g_t(z, v))$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Esto nos permite escribir entonces:

$$g_t(\pi'(z, v)) := \pi'(g_t(z, v)),$$

y de la misma forma

$$h_s(\pi'(z, v)) := \pi'(h_s(z, v)).$$

### 3 Algunas definiciones en curvatura variable

El objetivo de esta sección es generalizar algunas definiciones que dimos para el contexto del plano hiperbólico y las superficies de curvatura constante. Hemos hecho referencia al grupo de isometrías de  $\mathbb{H}$  y las hemos clasificado. También nos referimos al borde infinito de  $\mathbb{H}$ ,  $\partial_\infty \mathbb{H}$ , y al conjunto límite de un subgrupo  $\Gamma$  del grupo de isometrías de  $\mathbb{H}$ . Queremos entonces tener nociones equivalentes de estas cosas para el contexto de curvatura variable.

Comenzamos por dar formalmente la definición de conjunto minimal.

**Definición 3.1.** Decimos que un subconjunto  $X \subset T^1 M$  es *minimal* para el flujo horocíclico, si es cerrado, invariante para este flujo, y minimal con estas características respecto de la inclusión (o sea, no tiene a su vez subconjuntos propios cerrados e invariantes).

**Definición 3.2.** Diremos que  $\tilde{v}$  y  $\tilde{v}'$  se corresponden con el mismo punto al infinito si se cumple que, dado un punto de referencia  $y \in M$  se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\hat{\pi}(g_t(\tilde{v}), y) - d(\hat{\pi}(g_t(\tilde{v}'), y) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(\hat{\pi}(g_t(\tilde{v}), y) - d(\hat{\pi}(g_t(\tilde{v}'), y),$$

donde la última igualdad es de funciones en  $C(\tilde{M})$ , esto es, el espacio de las funciones continuas en  $\tilde{M}$ . Si esto se cumple, escribiremos  $\tilde{v} \sim_* \tilde{v}'$ . Además,

**Definición 3.3.** El *borde infinito* de  $\tilde{M}$  será el conjunto definido mediante

$$\partial_\infty \tilde{M} := T^1 \tilde{M} / \sim_* .$$

**Definición 3.4.** Si  $\tilde{v} \in T^1 \tilde{M}$ , denotaremos por  $\tilde{v}(\infty)$  a su clase de equivalencia por la relación  $\sim_*$ .

**Definición 3.5.** Una isometría  $\gamma \in \Gamma = Isom^+(\tilde{M})$  es *hiperbólica*, si tiene dos puntos fijos y ambos pertenecen al borde infinito  $\partial_\infty \tilde{M}$ .

#### 3.1 La función de Busemann

La función que definiremos a continuación será fundamental para trabajar con el flujo horocíclico, ya que alternativamente podemos definirlo a partir de ella. Dijimos que dado un horociclo  $H$  en  $T^1 \tilde{M}$  y  $(p, v) \in H$ ,  $H$  es la variedad estable por  $(p, v)$  del flujo geodésico, el cual es hiperbólico por ser  $\tilde{M}$  una superficie de curvatura negativa (ver [12]). Sin embargo, daremos una nueva definición que consistirá en ver a los horociclos como conjuntos de nivel de una función de clase  $C^1$ . Veremos luego que ambas definiciones son equivalentes en este contexto, por lo cual podremos trabajar con ambas indistintamente. Como referencia principal para esta sección tendremos [3].

**Definición 3.6.** Una *variedad de Hadamard* es una variedad Riemanniana de curvatura no positiva, simplemente conexa, sin borde y completa.

Supongamos ahora que  $\tilde{M}$  es una superficie de Hadamard. O sea, una variedad de Hadamard de dimensión 2. Sea  $d$  la distancia inducida en  $\tilde{M}$  por la métrica Riemanniana. Definimos

$$b : \tilde{M} \times \tilde{M} \times \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$b(x, y, z) = d(x, z) - d(x, y), x, y, z \in \tilde{M}.$$

Como  $d$  es una función continua,  $b$  también lo es. Algunas propiedades de la función  $b$  son:

1.  $b(x, y, y) = 0$  para todo  $x, y \in \tilde{M}$
2.  $|b(x, y, z) - b(x, y, z')| \leq d(z, z')$  para todo  $x, y, z, z' \in \tilde{M}$
3.  $b(x, y, z) = b(x, y, z') + b(x, z', z)$  para todo  $x, y, z, z' \in \tilde{M}$

Estas propiedades se deducen directamente de la definición de la función  $b$ . Si fijamos dos elementos  $x, y \in \tilde{M}$ , la función  $b_y(x) : \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante

$$b_y(x)(z) := b(x, y, z), z \in \tilde{M}$$

es una función continua de  $\tilde{M}$ . Consideramos ahora  $C(\tilde{M})$  el espacio de las funciones continuas en  $\tilde{M}$  con la topología de la convergencia uniforme. Sea  $\{x_n\}$  una sucesión en  $\tilde{M}$  tal que  $x_n \longrightarrow \xi \in \partial_\infty \tilde{M}$ . Entonces  $b_y(x_n)$  converge en  $C(\tilde{M})$  a una cierta función que notaremos  $B_\xi(y, \cdot)$ . Esta será la función de Busemann en  $\xi$ , basada en  $y$ . Explícitamente tenemos entonces

$$B_\xi(y, z) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) - d(x_n, y), \quad (1)$$

donde  $x_n$  es una sucesión en  $\tilde{M}$  que tiende a  $\xi$ .

En el mismo sentido que en la observación 3.2, podemos cambiar  $x_n$  por una sucesión equivalente, siendo  $x_n$  e  $x'_n$  dos sucesiones equivalentes siempre que

$$\lim_n b_y(x_n) = \lim_n b_y(x'_n)$$

para todo  $y \in \tilde{M}$ .

**Proposición 3.7.** *Sea  $N$  una variedad de Hadamard, y sea  $p \in N$ . Entonces  $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$  es una función de Busemann basada en  $p$  si y solo si cumple las siguientes condiciones:*

1.  $f(p) = 0$ ,
2.  $f$  es de Lipschitz con constante igual a 1,
3.  $f$  es convexa,
4. Para todo  $q \in N$  existe  $q' \in N$  de modo tal que  $f(q) - f(q') = 1$ .

*La prueba de esto se encuentra en pág. 61 de [3].*

La relación que esta función guarda con el flujo geodésico y que precisamos establecer, se puede deducir de la siguiente proposición.

**Proposición 3.8.** *Sea  $N$  una variedad de Hadamard,  $p \in N$  y  $\xi \in \partial_\infty N$  y  $f = b(\xi, p, \cdot) = B_\xi(p, \cdot)$  la función de Busemann en  $\xi$  basada en  $p$ . Consideremos  $\gamma_{\xi,p}$  el rayo geodésico parametrizado por longitud de arco que une  $p$  con  $\xi$ , y  $v_\xi : N \rightarrow T^1N$ , tal que  $v_\xi(p) := \gamma'_{\xi,p}(0)$ . Entonces se tiene*

$$\nabla f = v_\xi.$$

*Demostración.* Sea  $\{p_n\} \subset N$  una sucesión que tiende a  $\xi$ , y sean las funciones  $f_n$  definidas mediante

$$f_n(q) = b(p_n, p, q) = d(q, p_n) - d(p, p_n).$$

Luego,  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en compactos de  $N$ . Observar que como función de  $q$ ,  $f_n$  decrece cuando la distancia de  $q$  a  $p_n$  tiende a cero. De modo que la dirección de máximo crecimiento de  $f$  en  $q$  es la que apunta en la dirección contraria a  $p_n$ . O sea,  $\nabla f = -v_n$ , donde  $v_n$  serían los vectores en  $T_q^1N$  que apuntan hacia  $p_n$ . Tenemos entonces

$$\|v_n - v_\xi\| (q) \leq p_n \hat{q} \xi.$$

El término de la derecha, que se refiere al ángulo entre  $v_n$  y  $v_\xi$ , tiende a 0 porque  $\cos(p_n \hat{q} \xi)$  tiende a 1 cuando  $n$  tiende a infinito. Esto nos permite concluir que

$$\nabla f = \lim_n \nabla f_n = \lim_n v_n = -v_\xi,$$

como queríamos ver. Además es continuo por ser límite uniforme de funciones continuas, por lo que  $f$  es de clase  $C^1$ . □

El cubrimiento universal de una superficie  $M$ ,  $\tilde{M}$  como en el teorema 1.1 es en particular una variedad de Hadamard, solo que la curvatura es estrictamente negativa, entonces esta proposición se cumple para  $\tilde{M}$ .

Dado  $v \in T^1\tilde{M}$ , diremos que  $w \in T^1\tilde{M}$  es asintótico a  $v$  si  $v(\infty) = w(\infty)$ . Ahora bien, la proposición anterior nos está diciendo que, si  $q \in \tilde{M}$  es  $\hat{\pi}(w)$  (o sea,  $q$  es el punto base del vector  $w$ ), y  $p = \hat{\pi}(v)$  entonces  $-\nabla B_\xi(p, q)$  es el único vector de  $T_q^1\tilde{M}$  que es asintótico a  $v$ . De hecho, si definimos el horociclo asociado a  $v$  como  $B_\xi(p, \cdot)^{-1}(\{0\}) \subset \tilde{M}$ , esto será

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{C}(v(R), R),$$

donde

$$\mathcal{C}(z, r) := \{a \in \tilde{M} / d(a, z) = r\}, \text{ para todo } z \in \tilde{M}, r \in \mathbb{R}^+,$$

y  $v(R) = \gamma_v(R) \in \tilde{M}$ . Esto quiere decir que no solo los vectores  $w = -\nabla B_\xi(p, q)$  con  $q \in B_\xi(p, \cdot)^{-1}(\{0\})$  son asintóticos a  $v$ , si no que además de permanecer acotada la distancia entre  $v(t)$  y  $w(t)$  cuando  $t$  tiende a infinito, se cumple que

$$d(v(t), w(t)) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

De modo que esto es la variedad estable fuerte para el flujo geodésico, que definimos previamente en 2.8.

La definición de horociclo como conjunto de nivel de la función de Busemann es para un conjunto en  $\tilde{M}$ , pero nuestros horociclos deben ser órbitas de un flujo en  $T^1\tilde{M}$ .

Entonces más formalmente, dado  $(p, v) = v \in T^1\tilde{M}$ , el horociclo por  $v$  será

$$\{(q, -\nabla B_\xi(p, q)) \in T^1\tilde{M} \text{ tal que } q \in B_\xi(p, \cdot)^{-1}(\{0\})\}$$

¿Qué pasará entonces en  $T^1M$ ? No podemos decir en realidad que la variedad estable fuerte para el flujo geodésico en  $T^1M$  coincide con los horociclos, si los definimos como curvas de nivel de la función de Busemann, pero a los efectos del teorema que queremos probar, nos alcanza con que esto se cumpla en el cubrimiento universal. Definimos los horociclos en  $T^1M$  como las proyecciones de los horociclos en  $T^1\tilde{M}$ .

### 3.2 Caracterización del espacio de horociclos

Queremos ahora pensar en el flujo horocíclico, y más concretamente, tener una manera de pensar en el espacio que resulta de pasar al cociente  $\tilde{M}$  por la acción del flujo horocíclico, esto sería  $\tilde{M}/h_{\mathbb{R}}$ .

Consideremos  $\xi \in \partial_\infty\tilde{M}$ . Así como en el plano hiperbólico definimos la función de Busemann  $B_\xi$  para cada elemento del borde infinito  $\partial_\infty\mathbb{H}$ , vale ahora la misma definición, y podemos también pensar a los horociclos como las curvas de nivel de la función  $B_\xi(i, \cdot)$ , o  $B_\xi(0, \cdot)$  si pensamos en el modelo del círculo.

También en este contexto los horociclos serán los conjuntos estables del flujo geodésico, porque de hecho eso son por definición. Pensemos entonces en la definición que dimos más arriba de  $\partial_\infty\tilde{M}$ ; cada  $(p, v) \in T^1\tilde{M}$  determina un rayo geodésico que “termina” en un punto de  $\partial_\infty\tilde{M}$  y a su vez, por cada punto base de cada elemento de ese rayo geodésico pasa un único horociclo estable. De modo que los horociclos quedan determinados por un elemento  $\xi$  y por el valor de la función de Busemann en los puntos base de los elementos del horociclo. Podemos pensar el espacio de los horociclos como  $S^1 \times \mathbb{R}$ , ya que  $\partial_\infty\tilde{M} \simeq S^1$ .

Sea  $H_{(p,v)}$  el horociclo por  $(z, v) \in T^1\tilde{M}$  y  $\xi = \gamma_v(\infty)$ , entonces tenemos la siguiente identificación:

$$\begin{aligned} T^1\tilde{M}/h_{\mathbb{R}} &\longrightarrow \partial_\infty\tilde{M} \times \mathbb{R} \\ H &\mapsto (\xi, B_\xi(0, z)), \end{aligned}$$

donde  $h_{\mathbb{R}}$  es el flujo horocíclico.

Con esta identificación, podemos pensar la acción de  $\Gamma$  en  $T^1\tilde{M}/h_{\mathbb{R}}$  de la siguiente manera: dado  $\gamma \in \Gamma$  tenemos

$$\gamma(\xi, t) = (\gamma(\xi), t + B_\xi(\gamma^{-1}(0), 0)).$$

## 4 Ejemplos

En esta sección, veremos que efectivamente hay superficies en las condiciones del teorema 1.1. Los ejemplos que mostraremos, aparecen naturalmente como hojas de foliaciones. Así que primero explicaremos este contexto.

**Definición 4.1.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , y  $B^k$  la bola unitaria en  $\mathbb{R}^k$ . Una *foliación* de dimensión  $k$  en  $M$ , es una partición  $W$  de  $M$  en subvariedades  $W(x)$ , todas de clase  $C^1$  y de dimensión  $k$ , tal que para todo  $x \in M$ , existe un entorno de  $x$ ,  $U_x$ , y un homeomorfismo  $w_x : B^k \times B^{n-k} \rightarrow U_x$  tal que

- $w_x(0, 0) = x$
- $w(B^k, z)$  es  $W_U(w(0, z))$ , la componente conexa de  $W(w(0, z)) \cap U_x$  que contiene a  $w(0, z)$ .
- El mapa  $w(\cdot, z) : B^k \rightarrow w(B^k, z)$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$ .

Diremos que es una foliación de clase  $C^1$ , si los homeomorfismos  $w_x$  son además difeomorfismos.

**Observación 4.2.** Los homeomorfismos  $w_x$  son parametrizaciones de  $M$  alrededor de  $x$  que forman un atlas de  $M$ . También los difeomorfismos  $w_x(\cdot, z)$  son parametrizaciones de  $W(x)$  alrededor de  $x$  y forman un atlas de  $W(x)$ .

En el artículo [1] (Teorema 2), se prueba el siguiente teorema:

**Teorema 4.3.** Sea  $(M, F)$  una foliación minimal compacta por superficies hiperbólicas, esto es, las hojas de  $F$  son densas y además son superficies hiperbólicas. Entonces son equivalentes:

1. Ninguna hoja es simplemente conexa.
2. Todas las hojas son "tight".

### 4.1 La foliación de Hirsch

Veremos acá un ejemplo de foliación, cuyas hojas son superficies como las de las hipótesis del teorema 1.1. Consideramos el disco unitario cerrado en  $\mathbb{C}$ , al que le sacamos el interior de otros dos discos de radio  $1/4$  centrados respectivamente en  $-1/2$  y  $1/2$ . A la región obtenida, le llamamos  $P$ . (Ver Figura 3).

Considero el mapa  $\varphi : P \rightarrow P$  definido mediante

$$\varphi(z) = -z.$$

Consideramos la suspensión de  $P$  por el mapa  $\varphi$ , en el sentido topológico, que no es más que considerar el cilindro  $N = P \times [0, 1]$  (ver Figura 4), y pegar  $P \times \{0\}$  con  $P \times \{1\}$  mediante la siguiente identificación:

$$(x, 0) \sim (\varphi(x), 1).$$

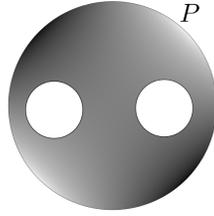


Figura 3: La superficie  $P$  que se obtiene de sacarle al disco unitario dos discos más chicos.

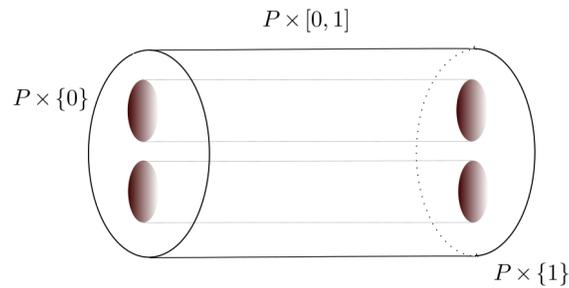


Figura 4:  $N = P \times [0, 1]$ .

Lo que obtuvimos ahora es la 3-variedad,

$$T = N / \sim$$

la cual se puede ver como un toro sólido al cual le removimos otro toro interno, que da dos vueltas en el sentido del eje principal, y una vuelta en el sentido meridional. Cada sección meridional de este toro es  $P \times \{t\}$  con  $t \in [0, 1]$ . Observar que esta variedad  $T$ , tiene como bordes a otros dos toros de dimensión 2,  $T_1$  y  $T_2$ , bordes interno y externo respectivamente. A continuación vamos a “pegar”  $T_1$  con  $T_2$ . Para esto, consideremos los mapas  $h_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $i = 0, 1$ , definidas mediante:

$$h_0(t) = t/2,$$

$$h_1(t) = (t + 1)/2.$$

Entonces, cada  $P \times \{t\}$  tiene su borde externo incluido en  $T_2$  y su borde interno incluido en  $T_1$ . Haremos la identificación de  $T_1$  con  $T_2$  indicando con quien se pegan los bordes de cada  $P \times \{t\}$ : los círculos que forman el borde interno de  $P \times \{t\}$  se pegan uno con el borde externo de  $P \times \{h_0(t)\}$  y otro con el borde externo de  $P \times \{h_1(t)\}$ . Las  $P \times \{t\}$  pegadas de esta manera, forman las hojas de la foliación de la variedad que obtenemos al tomar

$T$  y pegar sus bordes externo e interno:  $N = T/(T_1 \sim T_2)$ . Ocurrirá que al hacer esta identificación en los bordes de las  $P \times \{t\}$ , ocurrirá para algunos valores de  $t$  que el borde externo se pegue con uno de sus propios bordes internos, formándose así un “asa”, por lo que estas hojas tendrán género 1. (Ver Figura 5).

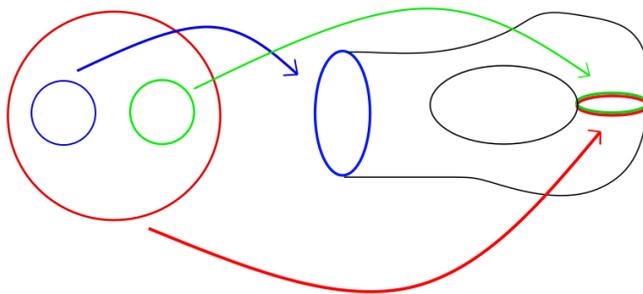


Figura 5:  $P$  identificando el borde externo con una componente de su borde interno, formándose un asa.

En otras hojas esto no sucederá y se verán como en la Figura 6 .

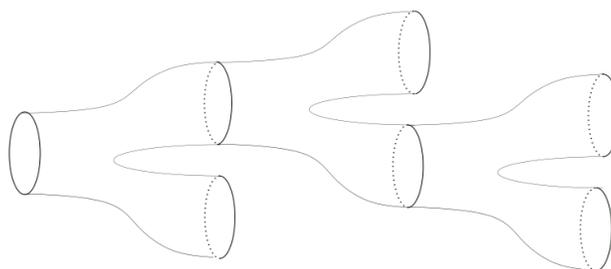


Figura 6: Hoja de género 0

Se puede probar que todas las hojas de esta foliación son densas. De hecho, en vista del teorema 4.3 cada hoja de esta foliación es una superficie “tight” como las que define Matsumoto.

## 4.2 Otro ejemplo

Consideremos el disco hiperbólico  $\mathbb{D}$ , y  $\Gamma$  el subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{R})$  (que como vimos en la sección 2.4, se identifica con el grupo de isometrías de  $\mathbb{D}$ ), generado por los elementos  $a, b, c$  y  $d$  con las identificaciones que se indican a continuación:

$$\Gamma := \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}, cdc^{-1}d^{-1} = id \rangle.$$

Sea  $S$  la superficie definida por  $\Gamma \backslash \mathbb{D}$ . Considero además el círculo unitario  $S^1 = [0, 1]/\{0 \equiv 1\}$ . Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  una rotación irracional, y definimos el morfismo

$$\rho : \Gamma \rightarrow \text{Diff}(S^1)$$

en los generadores de  $\Gamma$  mediante:

$$a \mapsto f,$$

$$b, c, d \mapsto \text{id}.$$

Podemos pensar que el grupo  $\Gamma$  actúa en  $\mathbb{D} \times S^1$  de la siguiente manera: dado  $\gamma \in \Gamma$ ,  $z \in \mathbb{D}$  y  $x \in S^1$ , ponemos

$$\gamma(z, x) := (\gamma(z), \rho(\gamma)(x)).$$

Con esta acción en mente definimos

$$M := \Gamma \backslash (\mathbb{D} \times S^1).$$

Los elementos de  $M$  tienen una primera coordenada que se corresponde con su proyección en  $S$  por  $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{D} = S$ . La segunda coordenada en  $S^1$  dada por la clase de  $\rho(\gamma)(x)$ , que es la de todos los elementos  $f^n(x)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Considero en  $\mathbb{D} \times S^1$  la foliación horizontal, o sea, la foliación cuyas hojas son de la forma  $\mathbb{D} \times \{x\}$ . Esta foliación se proyecta sobre una foliación en  $M$ , donde las hojas son  $\Gamma \backslash (\mathbb{D} \times \{x\})$ . Es claro que la hoja por  $\mathbb{D} \times \{x\}$  coincide con la hoja por  $\mathbb{D} \times \{f^n(x)\}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Es por esto que, al ser  $f$  minimal, todas las hojas de la foliación serán densas. Además, el grupo fundamental de las hojas es isomorfo al núcleo del morfismo  $\rho$ . Por este motivo, ninguna hoja es simplemente conexa, y la foliación cumple con las hipótesis del teorema 4.3. Se puede ver más detalles sobre esta construcción en la sección 3.1 de [6].

## 5 Órbitas densas y conjuntos minimales

En esta sección, probaremos el teorema 1.1. Demostraremos previamente algunos resultados y daremos algunas definiciones que son esenciales para la prueba de este teorema, y que surgen de adaptar las pruebas de resultados equivalentes en curvatura constante. Las principales referencias para los contenidos de esta sección son [9], [1] y [15].

Comenzamos por recordar cuales son las hipótesis bajo las cuales trabajaremos en esta sección:

- $M$  es una superficie Riemanniana, con una métrica que le otorga curvatura negativa.
- $M$  es no compacta, y se puede escribir como  $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots$  donde  $M_i \subseteq M_{i+1}$  para todo  $i$ , donde las  $M_i$  son subvariedades de  $M$ , compactas con borde, tales que los bordes  $\partial M_i$  son geodésicas cuya longitud está acotada por una constante  $C > 0$ .
- El grupo fundamental  $\Gamma$  de  $M$  actúa en el cubrimiento universal  $\tilde{M}$  por isometrías, siendo  $\gamma$  una isometría hiperbólica para toda  $\gamma \in \Gamma$ .

A su vez, pensaremos  $\tilde{M}$  como el disco  $\mathbb{D}$ , pero sin perder de vista que la métrica allí no es la hiperbólica. De esta forma podremos pensar  $0 \in \tilde{M}$ , ya que es un elemento que usaremos como referencia en varias oportunidades.

Recordemos que hemos definido el flujo horocíclico en  $T^1M$  como la proyección del flujo horocíclico en  $T^1\tilde{M}$ , y que en  $T^1\tilde{M}$  podemos pensar a sus trayectorias como las trayectorias estables del flujo geodésico, o verlas como conjuntos de nivel de la función de Busemann.

### 5.1 Puntos límite

Definiremos ahora los puntos límite para  $\tilde{M}$  en las condiciones mencionadas más arriba, y veremos una clasificación para los mismos.

**Definición 5.1.** Un punto  $\xi \in \partial_\infty \tilde{M}$  se dice que es un *punto límite* para la acción de  $\Gamma$  en  $T^1\tilde{M}$  si dado  $z \in \tilde{M}$  existe una sucesión  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \Gamma$  tal que  $\gamma_n(z) \rightarrow \xi$  cuando  $n$  tiende a infinito.

**Observación 5.2.** Al igual que en las superficies “tight” de Matsumoto, en las superficies que estamos considerando, todos los puntos de  $\partial_\infty \tilde{M}$  son puntos límite para la acción de  $\Gamma$ .

Como vimos, en las superficies de nuestras hipótesis todos los puntos del borde infinito  $\partial_\infty \tilde{M}$  son puntos límite para  $\Gamma$ , y por tanto todos los horociclos están basados en un punto límite. Veremos que el comportamiento de un horociclo está relacionado en cierto sentido con el punto límite en el cual está basado. Vamos a distinguir entonces dos tipos de punto límite en  $\partial_\infty \tilde{M}$ : los puntos límite “horocíclicos”, y los puntos límite “no horocíclicos”.

**Definición 5.3.** Un punto límite  $\xi$  se dice que es un punto límite *horocíclico*, si para cada horociclo  $(\xi, t)$  y para cada  $z \in \tilde{M}$ , existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $B_\xi(0, \gamma(z)) < t$ . Diremos que  $\xi$  es *no horocíclico*, si no es horocíclico.

**Lema 5.4.** *En una superficie como en el teorema 1.1, existen tanto puntos límite horocíclicos como no horocíclicos.*

*Demostración.* Observamos primero que los puntos fijos de las isometrías  $\gamma \in \Gamma$ , son puntos límite horocíclicos, y estos forman un subconjunto denso en  $\partial_\infty \tilde{M}$ .

Veamos que también hay puntos límite no horocíclicos. Considero un dominio fundamental de Dirichlet para  $0 \in \tilde{M}$ , esto es

$$D := \{x \in \tilde{M} : d(x, 0) \leq d(x, \gamma(0)), \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Como  $D$  es un dominio fundamental para  $\Gamma$ , y como la superficie  $M$  no es compacta, se tiene que  $\overline{D} \cap \partial \tilde{M} \neq \emptyset$ . Considero ahora  $\xi \in \overline{D} \cap \partial \tilde{M}$ , y sea  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$  tal que  $z_n \rightarrow \xi$ .

Observar que por la definición de  $D$ , resulta que para todo  $z \in D$  y para todo  $\gamma \in \Gamma$  se cumple que  $d(z, 0) - d(z, \gamma(0)) < 0$ . En particular, para todo  $n \in \mathbb{N}$  podemos escribir:

$$d(z_n, 0) - d(z_n, \gamma(0)) < 0.$$

La fórmula (1) nos dice que si  $\tilde{M} \ni x_n \rightarrow \xi \in \partial_\infty \tilde{M}$ , y tomamos dos puntos  $y, z \in \tilde{M}$ , entonces

$$B_\xi(y, z) := \lim_{x \rightarrow \infty} d(x_n, z) - d(x_n, y),$$

por lo tanto tendremos que

$$B_\xi(\gamma(0), 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} [d(z_n, 0) - d(z_n, \gamma(0))] \leq 0.$$

O sea que  $\gamma(0)$  no puede estar en el horodisco definido por  $B_\xi(\cdot, 0) > 0$ , para ningún  $\gamma \in \Gamma$ . De modo que hay horodiscos centrados en  $\xi$  que no contienen elementos de la  $\Gamma$ -órbita de 0. Por lo cual  $\xi$  es un punto límite no horocíclico.  $\square$

Veamos ahora como se relaciona el tipo de punto límite (si es horocíclico o no) con el flujo geodésico.

**Definición 5.5.** Un rayo geodésico  $v[0, \infty)$  en  $T^1 M$  se dice *casi minimizante*, si existe una constante  $k > 0$  tal que  $d(\hat{\pi}(g^t(v)), \hat{\pi}(v)) \geq t - k$  para todo  $t \geq 0$ .

Observar que un rayo geodésico casi minimizante, solo puede existir en un contexto de no compacidad. Además, como el cubrimiento universal es una superficie completa y simplemente conexa, de curvatura negativa, el teorema de Hadarmard nos dice que las geodésicas son siempre minimizantes a nivel global. En particular cumplen esta condición de ser casi minimizantes.

**Lema 5.6.** *Sea  $\tilde{v}$  un levantado de  $v \in T^1 M$ . Entonces  $\xi := \tilde{v}(\infty)$  es un punto límite horocíclico si y solo si  $v[0, \infty)$  es un rayo geodésico casi minimizante.*

*Demostración.* Supongo sin pérdida de generalidad que  $\tilde{v} \in T_0^1 \tilde{M}$ . Supongo que  $\xi = \tilde{v}(\infty)$  es un punto límite no horocíclico. Entonces hay un horodisco <sup>2</sup> centrado en  $\xi$  donde la

---

<sup>2</sup>Por horodisco nos referimos a los semiespacios que tienen como borde al horociclo. Cada horodisco es un conjunto de la forma  $\{z \in \tilde{M} : B_\xi(0, z) \geq k, k \in \mathbb{R}\}$

$\Gamma$ -órbita de 0 no entra. Esto es, existe  $k > 0$  tal que para todo  $\gamma \in \Gamma$ ,  $B_\xi(0, \gamma(0)) \geq -k$ . Por definición de  $B_\xi$ , esto es equivalente a que  $d(\gamma 0, \hat{\pi}(g^t(\tilde{v}))) \geq t - k$  para todo  $\gamma \in \Gamma$  y para todo  $t \geq 0$ . Como  $\pi$  (la proyección de  $T^1\tilde{M}$  en  $T^1M$ ) es una isometría, lo anterior implica que  $d(\hat{\pi}(v), \hat{\pi}(g^t(v))) \geq t - k$ , y esta es la definición de que  $v[0, \infty)$  sea un rayo geodésico casi minimizante. Todas las implicancias en este razonamiento son en realidad un si y solo sí, de modo que el recíproco queda también así probado.  $\square$

## 5.2 Horociclos densos

Un aspecto importante a tener en cuenta cuando pensamos en conjuntos minimales, es la existencia de órbitas densas. Como nuestra intención es probar que no existen minimales, en particular queremos ver que no todas las órbitas son densas, aunque luego veremos que sí hay órbitas de este tipo.

Veamos primero la relación que hay entre las  $\Gamma$ -órbitas densas en el espacio de horociclos, y los horociclos densos en  $T^1M$ .

**Lema 5.7.** *Sea  $(\xi, t) \in T^1\tilde{M}/h_{\mathbb{R}}$  el horociclo por  $(z, v) \in T^1\tilde{M}$ , y considero  $\Gamma(\xi, t)$  su órbita por la acción de  $\Gamma$ . Si  $\Gamma(\xi, t)$  es denso en  $T^1\tilde{M}/h_{\mathbb{R}}$  entonces  $\pi(h_{\mathbb{R}}(z, v))$  es denso en  $T^1M$ , donde  $\pi$  se refiere a la proyección canónica de  $T^1\tilde{M}$  en  $T^1M$ .*

*Demostración.* Llamaremos  $\pi'$  a la proyección canónica  $\pi' : T^1\tilde{M} \rightarrow T^1\tilde{M}/h_{\mathbb{R}}$ . Supongamos entonces que  $(\xi, t) \in T^1\tilde{M}/h_{\mathbb{R}}$  es tal que  $\overline{\Gamma(\xi, t)} = T^1\tilde{M}/h_{\mathbb{R}}$ . Esto sucede si y solo si para todo  $U$  abierto en  $T^1\tilde{M}/h_{\mathbb{R}}$  existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma(\xi, t) \in U$ . Considero ahora  $\pi'^{-1}(\Gamma(\xi, t))$ , esto es, todos los elementos de  $T^1\tilde{M}$  tales que su horociclo contiene un punto de la órbita de  $(\xi, t)$ . Veremos que este conjunto es denso en  $T^1\tilde{M}$ .

Supongamos que  $(\xi, t) = \pi'((z, v))$ . Sea  $V \subset T^1\tilde{M}$  abierto, y  $\pi'(V)$  es entonces abierto en  $T^1\tilde{M}/h_{\mathbb{R}}$ , por lo cual existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma(\xi, t) \in \pi'(V)$ . De esto puedo deducir que

$$\pi'^{-1}(\gamma(\xi, t)) \cap \pi'^{-1}(\pi'(V)) \neq \emptyset.$$

Pero además

$$\pi'^{-1}(\gamma(\xi, t)) = h_{\mathbb{R}}(\gamma(z, v)) = \gamma(h_{\mathbb{R}}(z, v)).$$

Y como  $\pi'^{-1}(\pi'(V)) = h_{\mathbb{R}}(V)$ , se tiene:

$$h_{\mathbb{R}}(V) \cap \gamma(h_{\mathbb{R}}(z, v)) \neq \emptyset.$$

Entonces existe  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $h_s(V) \cap \gamma(h_{\mathbb{R}}(\xi, t)) \neq \emptyset$ . De modo que

$$V \cap h_{-s}\gamma h_{\mathbb{R}}(z, v) = V \cap \gamma(h_{\mathbb{R}}(z, v)) \neq \emptyset.$$

$\square$

### a Existencia de horociclos densos

La próxima proposición es clave para la prueba del teorema 1.1, ya que nos da una condición suficiente para que un horociclo sea denso. Daremos previamente una definición, y enunciaremos un teorema que precisaremos para probar esta proposición.

**Definición 5.8.** Diremos que el grupo  $\Gamma$  es *aritmético*, si el grupo generado por las longitudes de traslación de los elementos hiperbólicos de  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de  $\mathbb{R}$ . Si no, diremos que es *no aritmético*.

**Teorema 5.9.** *En una superficie en las hipótesis del teorema 1.1, el grupo fundamental  $\Gamma$  es no aritmético.*

La prueba de este teorema se puede encontrar en [8] (Proposición 2.1).

**Corolario 5.10.** *En una superficie en las hipótesis del teorema 1.1, se tiene que para toda  $\gamma_1 \in \Gamma$  existe  $\gamma_2 \in \Gamma$  tal que  $\mathbb{Z}\rho(\gamma_1) + \mathbb{Z}\rho(\gamma_2) = \mathbb{R}$ .*

**Lema 5.11.** *La acción de  $\Gamma$  en  $\partial_\infty \tilde{M}$  es minimal.*

*Demostración.* Sea  $\xi \in \partial_\infty \tilde{M}$  y considero en  $\partial_\infty \tilde{M}$  otro punto cualquiera,  $\xi_1$ . Queremos ver que existe  $\gamma_n \in \partial_\infty \tilde{M}$  tal que

$$\gamma_n(\xi_1) \longrightarrow \xi.$$

Esto es equivalente a ver que en cualquier entorno de  $\xi$  hay elementos de la órbita de  $\xi_1$ . Consideremos entonces un entorno  $I$  de  $\xi$ . Cómo los puntos límite de las isometrías hiperbólicas son densos, en  $I$  hay un  $\xi_0^+$ , el cual es atractor para una cierta isometría  $\gamma_0$ . Si toda la órbita de  $\xi_1$  está dentro de  $I$  ya tengo lo que quería. Si no, existe  $\gamma_1 \in \Gamma$  tal que  $\gamma_1(\xi_1) \in I$  y  $\gamma_1(\xi_1) \neq \xi_0^-$  donde  $\xi_0^-$  es el repulsor de  $\gamma_0$ . Consideramos  $\hat{I}$  un entorno de  $\xi_0^+$  tal que  $\hat{I} \subset I$ . Luego, existe  $N$  tal que  $\gamma_0^n(\gamma_1(\xi)) \in \hat{I}$  para todo  $n > N$ . Probando que la órbita de  $\xi_1$  tiene elementos en  $I$ .  $\square$

**Proposición 5.12.** *Sea  $\xi_0 \in \partial_\infty \tilde{M}$  un punto límite horocíclico, y  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Supongamos que  $(z, v) \in T^1 \tilde{M}$  es tal que  $\pi'(z, v) = (\xi_0, t_0)$ . Entonces  $\pi(h_{\mathbb{R}}(z, v))$  es denso en  $T^1 M$ .*

Para simplificar la prueba de esta proposición, demostraremos previamente dos lemas.

**Lema 5.13.** *Sea  $\xi_0 \in \partial_\infty \tilde{M}$  un punto fijo para una isometría hiperbólica  $\gamma_0 \in \Gamma$ , y  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Supongamos que  $(z, v) \in T^1 \tilde{M}$  es tal que  $\pi'(z, v) = (\xi_0, t_0)$ . Entonces si  $\xi_1$  es un punto fijo para otra isometría hiperbólica  $\gamma_1 \in \Gamma$ , se tiene que para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $(\xi_1, t)$  está en  $\Gamma(\xi_0, t_0)$ .*

*Demostración.* Tenemos que

$$\gamma_1(\xi_0, t_0) = (\gamma_1 \xi_0, t_0 + B_{\xi_0}(\gamma_1^{-1} 0, 0)),$$

y por lo tanto

$$\gamma_1^n(\xi_0, t_0) = (\gamma_1^n \xi_0, t_0 + B_{\xi_0}(\gamma_1^{-n} 0, 0)).$$

Ahora, como  $\gamma_1$  tiene a  $\xi_1$  como atractor en  $\partial_\infty \tilde{M}$ , tenemos que

$$\gamma_1^n(\xi_0) \longrightarrow \xi_1.$$

Entonces si  $B_{\xi_0}(\gamma_1^{-n}(0), 0) \longrightarrow \beta \in \mathbb{R}$ , poniendo  $t_1 = t_0 + \beta$  tenemos que  $(\xi_1, t_1) \in \overline{\Gamma(\xi_0, t_0)}$ , como queríamos. Si no,  $B_{\xi_0}(\gamma_1^{-n}(0), 0) \longrightarrow \pm\infty$ . Sustituyo entonces  $\gamma_1^n$  por  $\gamma_1^n \circ \gamma_0^{p_n}$ , para cierto  $p_n$  que veremos cómo elegir. Observar primero que  $\gamma_1^n \circ \gamma_0^{p_n}(\xi_0) \longrightarrow \xi_1$ , ya que  $\gamma_0$

fija a  $\xi_0$ . Considero ahora  $B_{\xi_0}(\gamma_0^{-p_n}\gamma_1^{-n}0, 0)$ , y como las isometrías dejan invariante a la función de Busemann, aplicando  $\gamma_0^{p_n}$ , esto es igual a  $B_{\xi_0}(\gamma_1^{-n}0, \gamma_0^{p_n}0)$ . Y esto, aplicando las propiedades de la función de Busemann es igual a

$$B_{\xi_0}(\gamma_1^{-n}0, 0) + B_{\xi_0}(0, \gamma_0^{p_n}0).$$

Eligiendo  $p_n$  adecuadamente, consigo que esto sea igual a cierto  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Probamos entonces que  $(\xi_1, t_1) \in \overline{\Gamma(\xi_0, t_0)}$  para cierto  $t_1$ . Esto implica que todos los horociclos de la forma  $(\xi_1, t_1 + n\rho(\gamma_0))$  están en  $\overline{\Gamma(\xi_0, t_0)}$ , donde  $\rho(\gamma)$  es la longitud de traslación de la isometría hiperbólica  $\gamma$  a lo largo de su eje. Esto es porque al existir  $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $\gamma_k(\xi_0, t_0) \rightarrow (\xi_1, t_1)$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ , se tiene que

$$\gamma_k(\gamma_0^n(\xi_0, t_0)) = \gamma_k(\xi_0, t_0 + n\rho(\gamma_0)) = (\gamma_k(\xi_0), t_0 + n\rho(\gamma_0) + B_{\xi_0}(0, \gamma_k^{-1}(0))).$$

Como  $t_0 + B_{\xi_0}(0, \gamma_k^{-1}(0))$  tiende a  $t_1$  cuando  $k$  tiende a infinito, tenemos finalmente que

$$\gamma_k \circ \gamma_0^n(\xi_0, t_0) \rightarrow (\xi_1, t_1 + n\rho(\gamma_0)).$$

Ahora, aplicando  $\gamma_1^p$  a  $(\xi_1, t_1 + n\rho(\gamma_0))$ , obtenemos

$$(\xi_1, t_1 + n\rho(\gamma_0) + p\rho(\gamma_1)).$$

Finalmente, por el corolario 5.10 podemos elegir  $\gamma_1$  de modo tal que  $\mathbb{Z}\rho(\gamma_0) + \mathbb{Z}\rho(\gamma_1)$  es denso en  $\mathbb{R}$ . De modo que eligiendo el  $n$  y el  $p$  adecuadamente, obtengo que para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $(\xi_1, t) \in \overline{\Gamma(\xi_0, t_0)}$ . □

**Lema 5.14.** *Sea  $\xi_0 \in \partial_\infty \tilde{M}$  un punto fijo para una isometría hiperbólica  $\gamma_0 \in \Gamma$ , y  $t_0 \in \mathbb{R}$ , y  $\xi \in \partial_\infty \tilde{M}$  un punto límite cualquiera. Entonces para todo  $t \in \mathbb{R}$  se tiene  $\Gamma(\xi, t) \in \overline{\Gamma(\xi_0, t_0)}$ .*

*Demostración.* Considero  $\gamma_n$  tal que  $\gamma_n(\xi_1) \rightarrow \xi$ , donde  $\xi_1$  es como en la proposición 5.13. Puedo tomarme una sucesión  $\gamma_n$  de esa forma ya que la acción de  $\Gamma$  en  $\partial_\infty \tilde{M}$  es minimal en vista del lema 5.11. Para todo  $s \in \mathbb{R}$ , se tiene

$$\gamma_n(\xi_1, s) = (\gamma_n \xi_1, s + B_{\xi_1}(\gamma_n^{-1}0, 0)),$$

y para todo  $t$  existe  $s_n$  tal que  $\gamma_n(\xi_1, s_n) \rightarrow (\xi, t)$ , porque puedo elegir el  $s_n$  de modo que

$$s_n + B_{\xi_1}(\gamma_n^{-1}0, 0) \rightarrow t \in \mathbb{R}.$$

Quiero ver ahora que  $(\xi, t) \in \overline{\Gamma(\xi_0, t_0)}$ .

Sabemos que para todo  $s \in \mathbb{R}$  existe una sucesión que depende de  $s$ ,  $\gamma_n^s$  tal que

$$\gamma_n^s(\xi_0, t_0) \rightarrow (\xi_1, s).$$

Existe además cierta sucesión  $\eta_k$  en  $\Gamma$ , tal que  $\eta_k(\xi_1) \rightarrow \xi$ . A su vez puedo elegir una sucesión  $\{s_k\} \subset \mathbb{R}$ , de modo que

$$\eta_k(\xi_1, s_k) \rightarrow (\xi, t).$$

Considero en  $\partial_\infty \tilde{M} \times \mathbb{R} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ , una distancia  $d$  que induzca la topología usual. Entonces, para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $k(\epsilon)$  tal que

$$d(\eta_{k(\epsilon)}(\xi_1, s_{k(\epsilon)}); (\xi, t)) < \epsilon.$$

Además, para todo  $\epsilon' > 0$  existe un  $n$  que depende de  $\epsilon$  y de  $\epsilon'$ , digamos  $n(\epsilon, \epsilon')$ , para el cual se cumple

$$d(\gamma_{n(\epsilon, \epsilon')}^{s_{k(\epsilon)}}(\xi_0, t_0), (\xi_1, s_{k(\epsilon)})) < \epsilon'.$$

Fijo entonces el  $\epsilon > 0$ , esto determina como dijimos un  $k(\epsilon)$  y un  $s_{k(\epsilon)}$ . Cada  $\eta_{k(\epsilon)} \in \Gamma$  es continua en el punto  $(\xi_1, s_{k(\epsilon)})$ , por lo cual existirá un  $\delta$  positivo, tal que para todo  $(\xi', t')$  que esté a una distancia menor que  $\delta$  de  $(\xi_1, s_{k(\epsilon)})$ , se tiene que

$$d(\eta_{k(\epsilon)}(\xi_1, s_{k(\epsilon)}); \eta_{k(\epsilon)}(\xi', t')) < \epsilon.$$

Ahora tomo  $\epsilon' := \delta$ , y como vimos antes existe un  $n$  que depende de  $\epsilon$  y de  $\delta$  tal que

$$d(\gamma_{n(\epsilon, \delta)}^{s_{k(\epsilon)}}(\xi_0, t_0), (\xi_1, s_{k(\epsilon)})) < \delta,$$

por lo cual

$$d(\eta_{k(\epsilon)} \gamma_{n(\epsilon, \delta)}^{s_{k(\epsilon)}}(\xi_0, t_0), \eta_{k(\epsilon)}(\xi_1, s_{k(\epsilon)})) < \epsilon.$$

Entonces tenemos ahora que

$$d((\xi, t), \eta_{k(\epsilon)} \gamma_{n(\epsilon, \delta)}^{s_{k(\epsilon)}}(\xi_0, t_0)) < 2\epsilon.$$

Definiendo ahora  $\gamma := \eta_{k(\epsilon)} \gamma_{n(\epsilon, \delta)}^{s_{k(\epsilon)}}$ , tengo que para todo  $\epsilon$  encontré un  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $d(\gamma(\xi_0, t_0), (\xi, t)) < 2\epsilon$ . Por lo cual  $(\xi, t) \in \overline{\Gamma(\xi_0, t_0)}$ , como queríamos.  $\square$

A continuación, probamos la proposición [5.12](#)

*Demostración.* La estrategia consistirá en probar que existe un  $\xi_1$  punto fijo de una isometría hiperbólica  $\gamma_1$ , y un  $t_1 \in \mathbb{R}$  de modo que

$$(\xi_1, t_1) \in \overline{\Gamma(\xi_0, t_0)}.$$

Si demostramos esto tendremos que, por lo que hemos probado en el caso anterior  $\overline{\Gamma(\xi_1, t_1)} = \partial_\infty \tilde{M}$ , y como  $\overline{\Gamma(\xi_0, t_0)}$  es un conjunto invariante para la acción de  $\Gamma$ , se tiene

$$\partial_\infty \tilde{M} = \overline{\Gamma(\xi_1, t_1)} \subset \overline{\Gamma(\xi_0, t_0)} \subset \partial_\infty \tilde{M},$$

por lo cual

$$\overline{\Gamma(\xi_0, t_0)} = \partial_\infty \tilde{M}$$

como queremos ver.

Probemos entonces que la órbita de  $(\xi_0, t_0)$  contiene un horociclo basado en un punto fijo de una isometría hiperbólica.

Como  $\xi_0$  es horocíclico, la  $\Gamma$ -órbita del 0 tiene puntos en cualquier horodisco por  $\xi_0$ , y en particular, esto significa que existe  $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$  tal que

$$B_{\xi_0}(0, \gamma_n^{-1}(0)) \longrightarrow \infty, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Podemos suponer además que  $\gamma_n \neq \gamma_m$  si  $m \neq n$ .

Definimos ahora el conjunto  $A := \{\gamma_n(\xi_0), n \in \mathbb{N}\} \subset \partial_\infty \tilde{M}$ . Si  $A$  es finito, entonces existen  $m \neq n$  tal que  $\gamma_m(\xi_0) = \gamma_n(\xi_0)$ , por lo que  $\gamma_m^{-1}\gamma_n(\xi_0) = \xi_0$ . Entonces el propio  $\xi_0$  es un punto fijo de una isometría hiperbólica, con lo cual tenemos el resultado en este caso.

Supongamos entonces que  $A$  no es finito. En este caso,  $A$  tiene un punto de acumulación. Sea  $B = \{\xi \in \partial_\infty \tilde{M} : \text{tal que } \xi \text{ es punto fijo de alguna } \gamma \in \Gamma\}$ . En nuestro caso, como todas las isometrías de  $\Gamma$  son hiperbólicas, tendremos que  $B$  es denso en  $\partial_\infty \tilde{M}$ . Pero lo que nos interesa en particular, es que  $B$  tiene al menos dos puntos. Elijo  $b \in B$  tal que  $b$  no es el único punto de acumulación de  $A$ . O sea, si  $A$  tuviese un único punto de acumulación, este podría coincidir con un elemento de  $B$ , pero como  $B$  tiene al menos dos puntos, puedo elegir  $b$  de modo que exista algún punto de acumulación de  $A$  que sea distinto de  $b$ .

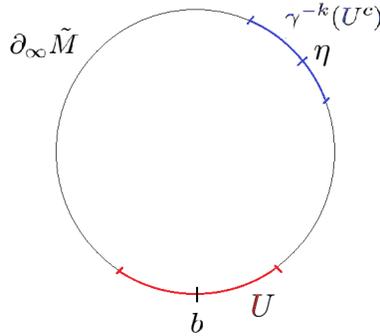


Figura 7: Se muestran los puntos  $b$  y  $\eta$  en  $\partial_\infty \tilde{M}$ , el conjunto  $U$  y un iterado por  $\gamma^{-1}$  de  $U^c$ .

Considero  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma(b) = b$ . Supongo sin pérdida de generalidad que  $b$  es un atractor para  $\gamma$  (de lo contrario, cambio  $\gamma$  por  $\gamma^{-1}$ ). Existe entonces un entorno  $U$  de  $b$  tal que  $A \cap U^c$  es infinito. O sea, fuera de  $U$  hay infinitos puntos de la forma  $\gamma_n(\xi_0)$ . Tomando una subsucesión de  $\{\gamma_n\}$  podemos pensar que  $A \subset U^c$ . Sea  $\eta$  repulsor para  $\gamma$ ,  $\eta \in \partial_\infty \tilde{M}$ . Entonces, para  $k$  suficientemente grande,  $\gamma^{-k}(U^c)$  es un entorno relativamente pequeño de  $\eta$  (Ver Figura 7). De hecho,  $\gamma^{-k}(\gamma_n(\xi_0)) \longrightarrow \eta$ , cuando  $k$  tiende a infinito, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Definimos ahora la expresión  $|\gamma'_n(\xi, t)| = B_\xi(0, \gamma_n^{-1}(0))$ , para todo  $\xi \in \partial_\infty \tilde{M}$ . Definimos también la función  $D : \partial_\infty \tilde{M} \times \partial_\infty \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ , mediante

$$D(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}[B_\xi(0, z) + B_\eta(0, z)],$$

donde  $z$  es un punto cualquiera de la geodésica que une  $\xi$  con  $\eta$ .

Observar que si  $\gamma$  es hiperbólica,  $\gamma^+$  y  $\gamma^-$  sus puntos fijos en  $\partial_\infty \tilde{M}$ , y  $l(\gamma)$  es su longitud de traslación, entonces  $|\gamma'(\gamma^\pm)| = \pm l(\gamma)$ . Tendremos entonces la siguiente forma de expresar

la acción de  $\Gamma$  en  $\partial_\infty \tilde{M}$ :

$$\gamma(\xi, t) = (\gamma(\xi), t + |\gamma'(\xi)|),$$

para todo  $\xi \in \partial_\infty \tilde{M}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Si pensamos en la sucesión  $\gamma_n$  definida más arriba y para  $\xi_0$ , tendremos además que

$$|\gamma'_n| = 2D(\gamma_n(\xi_0); \gamma_n^-) - 2D(\xi_0; \gamma_n^-) + (\gamma_n) \quad (2)$$

Probaremos más adelante que esta igualdad, pero por ahora asumiremos que se cumple. Como vimos, se cumple que  $B_{\xi_0}(0, \gamma_n^{-1}(0)) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Podemos entonces elegir en  $\mathbb{R}$  una sucesión  $\{r_n\}$  de modo que  $-r_n l(\gamma) + B_{\xi_0}(0, \gamma_n^{-1}(0))$  es acotado para todo  $n$ , y entonces podremos tomar una subsucesión que converge a cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Sabíamos además que  $\gamma^{-r_n} \gamma_n(\xi_0) \rightarrow \eta$ , ya que  $\eta$  es el repulsor de  $\gamma$ . Luego,

$$\gamma^{-r_n} \gamma_n(\xi_0, t_0) = (\gamma^{r_n} \gamma_n(\xi_0), t_0 + B_{\xi_0}(0, \gamma_n^{-1}(0)) - B_{\gamma_n(\xi)}(0, \gamma^{-r_n}(0))).$$

En esta última igualdad estoy usando que  $B_{\gamma_n(\xi)}(0, \gamma^{r_n}(0)) = -B_{\gamma_n(\xi)}(0, \gamma^{-r_n}(0))$ . Como  $B_{\gamma_n(\xi)}(0, \gamma^{-r_n}(0)) = |(\gamma^{r_n})'(\gamma_n(\xi_0))|$  y como  $\|\gamma_n(\xi_0, t_0)\| = B_{\xi_0}(0, \gamma_n^{-1}(0))$ , tenemos:

$$\|\gamma^{r_n} \gamma_n(\xi_0, t_0)\| = t_0 + \|\gamma_n(\xi_0, t_0)\| - |(\gamma^{r_n})'(\gamma_n(\xi_0))|,$$

y en vista de la ecuación 2, el término de la derecha es

$$t_0 + \|\gamma_n(\xi_0, t_0)\| - 2D(\gamma^{r_n}(\gamma_n(\xi_0)), (\gamma^{r_n})^-) + 2D(\gamma_n(\xi_0), (\gamma^{r_n})^-) - l(\gamma^{r_n}).$$

Aquí, cuando escribimos  $(\gamma^{r_n})^-$ , nos referimos al repulsor de la isometría  $\gamma^{r_n}$ , que es el mismo que para la isometría  $\gamma$ , o sea,  $\gamma^-$  al que también habíamos llamado  $\eta$ . Además,  $l(\gamma^{r_n}) = r_n l(\gamma)$ . Por lo que nos queda

$$\|\gamma^{r_n} \gamma_n(\xi_0, t_0)\| = t_0 + \|\gamma_n(\xi_0, t_0)\| - 2D(\gamma^{r_n}(\gamma_n(\xi_0)), \eta) + 2D(\gamma_n(\xi_0), \eta) - r_n l(\gamma).$$

Como vimos más arriba, eligiendo correctamente la sucesión  $r_n$ , tendremos que

$$\|\gamma_n(\xi_0, t_0)\| - r_n l(\gamma) \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\gamma^{r_n} \gamma_n(\xi_0, t_0)\| = t_0 + \lambda + \lim_{n \rightarrow \infty} [2D(\gamma_n(\xi_0), \eta) - 2D(\gamma^{r_n}(\gamma_n(\xi_0)), \eta)].$$

Pero  $\lim_{n \rightarrow \infty} [2D(\gamma_n(\xi_0), \eta) - 2D(\gamma^{r_n}(\gamma_n(\xi_0)), \eta)] = 0$ , por lo que tenemos finalmente que

$$\gamma^{r_n} \gamma_n(\xi_0, t_0) \rightarrow (\eta, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

como queríamos ver.

Probaremos ahora que se cumple la desigualdad en la ecuación (2). Queremos ver que

$$|\gamma'_n| = B_\xi(0, \gamma_n^{-1}(0)) = 2D(\gamma_n(\xi_0); \gamma_n^-) - 2D(\xi_0; \gamma_n^-) + (\gamma_n).$$

Recordamos que  $l(\gamma) = B_{\gamma_n^-}(0, \gamma_n^{-1}(0))$ . Tenemos

$$2D(\gamma_n(\xi_0); \gamma_n^-) - 2D(\xi_0; \gamma_n^-) + l(\gamma_n) = -B_{\gamma_n(\xi)}(0, w) - B_{\gamma_n^-}(0, w) + B_\xi(0, z) + B_{\gamma_n^-}(0, z) + l(\gamma_n),$$

donde  $w$  es un punto cualquiera de la geodésica que une  $\gamma_n(\xi)$  con  $\gamma_n^-$ , a la que escribiremos como  $[\gamma_n(\xi), \gamma_n^-]$ , y  $z$  es un punto cualquiera de la geodésica que une  $\xi$  con  $\gamma_n^-$ , a la que escribiremos  $[\xi, \gamma_n^-]$ .

Observar que  $\gamma([\xi, \gamma_n^-]) = [\gamma_n(\xi), \gamma_n^-]$ , porque  $\gamma_n(\gamma_n^-) = \gamma_n^-$ . Entonces puedo elegir  $w = \gamma_n(z)$ .

Luego aplicando  $\gamma_n^{-1}$  se tiene

$$-B_{\gamma_n(\xi)}(0, w) + B_\xi(0, z) = -B_\xi(\gamma_n^{-1}(0), z) + B_\xi(0, z) = -B_\xi(\gamma_n^{-1}(0), z) - B_\xi(z, 0),$$

y esto último, por propiedades de la función de Busemann, nos queda

$$-B_\xi(\gamma_n^{-1}(0), 0) = B_\xi(0, \gamma_n^{-1}(0)) = |\gamma_n'(\xi)|.$$

En resumen, tenemos que

$$-B_{\gamma_n(\xi)}(0, w) + B_\xi(0, z) = -B_\xi(\gamma_n^{-1}(0), z) + B_\xi(0, z) = |\gamma_n'(\xi)| \quad (3)$$

Sea  $h(z)$  el horociclo basado en  $\gamma_n^-$  por  $z$ , y  $h(w)$  el horociclo basado en  $\gamma_n^-$  por  $w = \gamma_n(z)$ . De modo que  $\gamma_n(h(z)) = h(\gamma_n(z)) = h(w)$ . Por lo cual tendremos

$$B_{\gamma_n^-}(0, w) - B_{\gamma_n^-}(0, z) = B_{\gamma_n^-}(0, \gamma_n(z)) - B_{\gamma_n^-}(0, z) = -l(\gamma_n) \quad (4)$$

De las ecuaciones (3) y (4) se deduce la ecuación (2). Esto concluye la demostración.  $\square$

Los lemas (5.12) y (5.4) implican lo siguiente:

**Corolario 5.15.** *Existen horociclos densos en  $T^1M$ .*

### 5.3 Conjuntos minimales y puntos límite

Veremos ahora como se relacionaría la existencia de un conjunto minimal con los puntos límite en los que se basan las órbitas horocíclicas de sus puntos. Finalmente probaremos el teorema 1.1.

**Lema 5.16.** *Supongamos que  $X \subset T^1M$  es un conjunto minimal para la acción del flujo horocíclico. Supongamos que existe  $\tilde{v} \in T^1\tilde{M}$  tal que  $\tilde{v}(\infty) = \xi$ , con  $\xi$  un punto límite no horocíclico, y supongamos que  $\pi(\tilde{v}) = v \in X$ . Entonces existe  $t_0 > 0$  tal que  $g_{t_0}(X) = X$ .*

*Demostración.* Bastará probar que existe  $t_0$  tal que  $g_{t_0}(v) \in \overline{h_{\mathbb{R}}(v)}$ , ya que si esto es así, tenemos: como  $X = \overline{h_{\mathbb{R}}(v)}$ , si  $g_{t_0}(v) \in \overline{h_{\mathbb{R}}(v)}$ , entonces  $g_{t_0}(v) \in X$ . Entonces  $X \cap g_{t_0}(X) \neq \emptyset$ . Como  $X$  es un minimal y  $X \cap g_{t_0}(X)$  también es un cerrado invariante para el flujo horocíclico, debe ser  $g_{t_0}(X) = X$ .

Encontraremos entonces un  $t_0$  tal que  $g_{t_0}(v) \in \overline{h_{\mathbb{R}}(v)}$ . Recordemos que por nuestras hipótesis acerca de  $M$ , y como  $\xi \in \partial_{\infty} \tilde{M}$  es un punto límite no horocíclico, la geodésica dirigida por el vector  $v$  será casi minimizante, y por tanto cortará a infinitos bordes de las superficies  $M_n$ . Escribamos  $\alpha_n := \partial M_n$ , y llamaremos  $\tilde{\alpha}_n$  a sus respectivos levantados. Como las  $\alpha_n$  son geodésicas cerradas, sus levantados son ejes de alguna transformación hiperbólica  $\gamma_n$ , o sea,  $\tilde{\alpha}_n$  es la traza de una geodésica que es invariante por una transformación hiperbólica  $\gamma_n \in \Gamma$ . También llamaremos  $\gamma_n^+$  y  $\gamma_n^-$  respectivamente a los extremos infinitos de la geodésica  $\tilde{\alpha}_n$  en  $\partial_{\infty} \tilde{M}$ . Vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que la geodésica que dirige el vector  $\tilde{v}$  es vertical, en el sentido de que  $\tilde{v}(\infty) = \infty \in \partial_{\infty} \tilde{M}$  y que el punto base de  $\tilde{v}$  es  $0 \in \tilde{M}$ . Consideramos  $\{r(t)\}_{t \geq 0} = \hat{\pi}(\tilde{v}(t))_{t \geq 0}$ , o sea,  $r(t)$  es una parametrización de la proyección de  $\tilde{v}$  sobre  $\tilde{M}$  (recordar que  $\tilde{v} \in T^1 \tilde{M}$ ). Además, asumiremos que el ángulo entre  $r(t)$  y  $\gamma_n(t)$  es menor que  $\pi/2$ . Esto lo podemos hacer porque en caso de que el ángulo sea mayor, cambiamos  $\gamma_n$  por  $\gamma_n^{-1}$  que también está en  $\Gamma$ . (Ver figura 5.3).

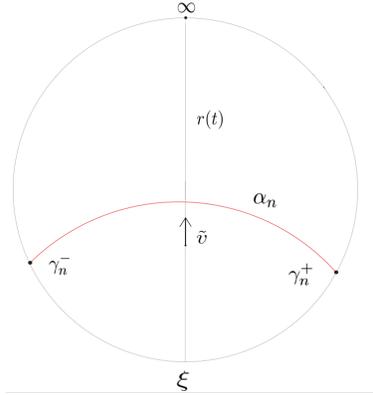


Figura 8: Los puntos  $\gamma_n^+$  y  $\gamma_n^-$  son los extremos de la geodésica  $\alpha_n$  en  $\partial_{\infty} \tilde{M}$ . La geodésica por  $\tilde{v}$  que es vertical tiene traza  $r(t)$ .

Con todo esto en mente, reduciremos la demostración a probar que existe  $\{\gamma'_n\}_{n \geq 1} \subset \Gamma$  tal que:

1.  $\gamma'_n(\infty) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
2.  $B_{\gamma'_n(\infty)}(0, \gamma'_n(0)) \rightarrow \alpha \neq 0$ .

Veamos primero qué nos dice cada condición y cómo esto implica lo que queremos probar. Sean  $z = \hat{\pi}(\tilde{v})$ , y  $H$  el horociclo por  $\tilde{v}$  horizontal, en el sentido de que está basado en el punto  $\infty \in \partial_{\infty} \tilde{M}$ . La condición 1 nos dice que  $\gamma'_n(H)$  tiende a un horociclo cuya proyección sobre  $\tilde{M}$  contiene al punto  $\lim_n(\gamma'_n(z))$ , y que también estará basado en  $\infty \in \partial_{\infty} \tilde{M}$ , o sea, que también es horizontal en este sentido.

Ahora bien, la función  $B_{\gamma'_n(\infty)}(0, \cdot)$  tiene por conjuntos de nivel a los horociclos basados en  $\gamma'_n(\infty)$ , y su conjunto de nivel 0 es justamente  $\gamma'_n(H)$ . El conjunto de nivel  $\alpha$  para esta

función se obtiene al aplicar al conjunto de nivel cero, el flujo geodésico un tiempo  $\alpha$ , por lo que:

$$[B_{\gamma'_n(\infty)}(0, \cdot)]^{-1}(\alpha) = g_\alpha(\gamma'_n(H)).$$

Luego, la condición 2 nos dice que  $B_{\gamma'_n(\infty)}(0, \gamma'_n(0)) \rightarrow \alpha$ , y tendremos por lo tanto que

$$\gamma'_n(H) \rightarrow g_\alpha(H).$$

Pero para que esto pase, debe existir una sucesión de elementos  $\tilde{v}_n \in \gamma'_n(H)$  que convergen a  $g_\alpha(\tilde{v})$ . Como  $\gamma'_n(H)$  es un horociclo, y como  $\tilde{v} \in H$ , existirá una sucesión  $\{s_n\}$  en  $\mathbb{R}$  tal que los  $\tilde{v}_n$  serán de la forma

$$\tilde{v}_n = h_{s_n}(\gamma'_n(\tilde{v})) = \gamma'_n(h_{s_n}(\tilde{v})),$$

luego

$$\gamma'_n(h_{s_n}(\tilde{v})) \rightarrow g_\alpha(\tilde{v}) \text{ en } T^1\tilde{M}.$$

Mirándolo ahora en  $T^1M$ , como la proyección es continua tenemos

$$\pi(\gamma'_n(h_{s_n}(\tilde{v}))) \rightarrow \pi(g_\alpha(\tilde{v})),$$

o sea

$$h_{s_n}(v) \rightarrow g_\alpha(v).$$

Esto finalmente implica que  $g_\alpha(v) \in \overline{h_{\mathbb{R}}v}$ . O sea,  $\alpha$  será el  $t_0$  buscado.

Vamos a probar primero 1. Sea  $t_n$  el tiempo para el que  $r(t)$  corta a la curva  $\tilde{\alpha}_n = (\gamma_n^-, \gamma_n^+)$ , que son las curvas que tienen como extremos al infinito a los puntos  $\gamma_n^+$  y  $\gamma_n^-$  como mencionamos anteriormente. Como  $r(t_n)$  tiende a  $\infty$ , o bien  $\gamma_n^+ \rightarrow \infty$ , o bien  $\gamma_n^- \rightarrow \infty$ . Como estamos asumiendo que el ángulo entre  $r(t)$  y  $\alpha_n(t)$  es menor a  $\pi/2$ , debe ser entonces

$$\gamma_n^+ \rightarrow \infty. \tag{5}$$

Además, en vista de la dinámica de  $\gamma_n$  en  $\partial_\infty\tilde{M}$  y como  $\gamma_n^+$  es un atractor, debe ser  $\gamma_n(\infty) \in [\gamma_n^+, \infty)$ , por lo cual  $\gamma_n(\infty) \rightarrow \infty$ . (Ver Figura 9) Esto prueba 1.

Vamos a probar ahora que se cumple la condición 2. Observemos que si  $B_{\gamma_n(\infty)}(0, \gamma_n(0)) \rightarrow -\infty$ , entonces  $B_\infty(\gamma_n^{-1}(0), 0) \rightarrow -\infty$ , ya que  $B_\infty(\gamma_n^{-1}(0), 0) = B_{\gamma_n(\infty)}(0, \gamma_n(0))$ . Como además esto es igual a  $-B_\infty(0, \gamma_n^{-1}(0))$ , podemos escribir:

$$B_\infty(0, \gamma_n^{-1}(0)) \rightarrow \infty.$$

Esto implica que en todo horodisco de la forma

$$\{z \in \tilde{M} : B_\infty(0, z) \geq k\}$$

hay puntos de la  $\Gamma$ -órbita del 0, por lo que  $\infty$  sería un punto límite horocíclico de  $\partial_\infty\tilde{M}$ , contrario a nuestra hipótesis. Entonces no puede pasar que  $B_{\gamma_n(\infty)}(0, \gamma_n(0))$  se vaya a  $-\infty$ , de modo que existe  $A \in \mathbb{R}$  tal que

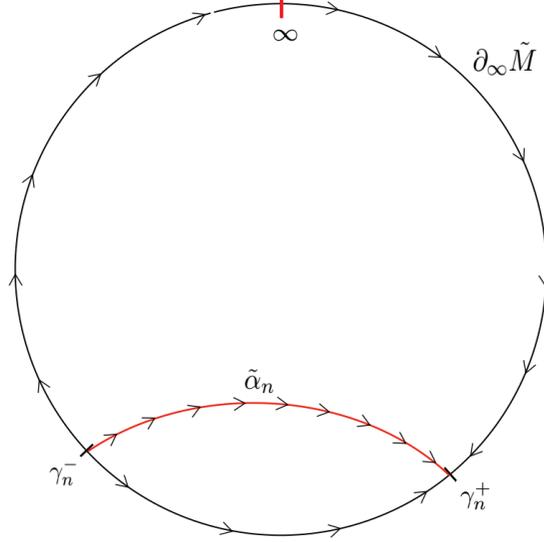


Figura 9: La dinámica de  $\gamma_n$  en  $\partial_\infty \tilde{M}$  tiene como atractor a  $\gamma_n^+$  y como repulsor a  $\gamma_n^-$ , por eso  $\gamma_n(\infty) \in [\gamma_n^+, \infty)$ .

$$B_{\gamma_n(\infty)}(0, \gamma_n(0)) \geq A \quad (6)$$

Veamos ahora que  $B_{\gamma_n(\infty)}(0, \gamma_n(0)) \leq B$  para cierto  $B \in \mathbb{R}$ . Tenemos

$$B_{\gamma_n(\infty)}(0, \gamma_n(0)) = B_\infty(\gamma_n^{-1}(0), 0),$$

y a su vez tenemos por las propiedades de la función de Busemann

$$B_\infty(\gamma_n^{-1}(0), 0) = B_\infty(\gamma_n^{-1}(0), \gamma_n^{-1}(r(t_n))) + B_\infty(\gamma_n^{-1}(r(t_n)), r(t_n)) + B_\infty(r(t_n), 0). \quad (7)$$

Por otro lado,  $B_\infty(r(t_n), 0) = -t_n$ . Esto es porque  $r(0) = 0 = \hat{\pi}(\tilde{v})$ , y  $r(t_n) = \hat{\pi}(g_{t_n}(\tilde{v}))$ . Tenemos a su vez que

$$B_\infty(\gamma_n^{-1}(r(t_n)), r(t_n)) \leq d((\gamma_n^{-1}(r(t_n)), r(t_n))).$$

De hecho,  $r(t_n)$  y  $\gamma_n^{-1}(r(t_n))$  son dos puntos en el eje de  $\gamma_n$ , y la distancia entre ellos es a lo sumo la longitud de la geodésica cerrada  $(\gamma_n^-, \gamma_n^+)$ , la cual está acotada por cierto  $B \in \mathbb{R}$ .

El primer sumando en (7) es  $B_\infty(\gamma_n^{-1}(0), \gamma_n^{-1}(r(t_n))) \leq d(\gamma_n^{-1}(0), \gamma_n^{-1}(r(t_n))) = t_n$ . Podemos concluir entonces que

$$B_{\gamma_n(\infty)}(0, \gamma_n(0)) \leq t_n + B - t_n \leq B \quad (8)$$

De (6) y (8), podemos concluir que  $B_{\gamma_n(\infty)}(0, \gamma_n(0))$  está acotada, entonces existe una subsucesión de los  $\gamma_n$  tal que esta expresión converge. □

**Proposición 5.17.** *Sea  $X \subset T^1M$  un conjunto minimal para el flujo horocíclico, y sea  $v \in X$  tal que su levantado es  $\tilde{v} \in T^1\tilde{M}$  con  $v(\infty) = \xi$ . Entonces  $\xi$  debe ser un punto límite horocíclico.*

*Demostración.* Consideremos un horodisco  $B$  al cual, como hemos visto, lo podemos escribir en términos de la función de Buseman mediante

$$B := \{z \in \tilde{M} : B_\xi(0, z) > \kappa\}.$$

Asumiremos sin pérdida de generalidad que  $v \in T_0^1\tilde{M}$ , o sea, que  $z$  en el enunciado del lema es  $0 \in \tilde{M}$ , y también que  $v(-\infty) = \infty \in \partial_\infty\tilde{M}$  (o sea, que el vector  $v$  es "vertical"). Supongamos entonces por absurdo que  $\xi$  es un punto límite no horocíclico. Por el lema 5.16, existe  $t_0$  tal que  $g_{t_0}(X) = X$ , y por tanto para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $g_{t_0n}(X) = X$ . Eventualmente habrá un  $n$  para el cual  $\hat{\pi}(g_{t_0n}(v)) \in B$  (porque  $v$  es horizontal). A su vez se tiene

$$g_{-t_0n}v \in X = \overline{h_{\mathbb{R}}v},$$

por lo cual existe una sucesión  $\{t_k\}_{k \geq 1}$ , tal que  $h_{t_k}v \rightarrow g_{-t_0n}v$ , y esto significa que debe existir una sucesión  $\{\gamma_k\}_{k \geq 1} \subset \Gamma$  tal que  $h_{t_k}\gamma_k(\tilde{v}) \rightarrow g_{-t_0n}(v)$  en  $T^1\tilde{M}$ . Definimos ahora

$$p_k := \hat{\pi}(h_k\gamma_k(0, v)) \in \tilde{M},$$

$$q := \hat{\pi}(g_{-t_0n}(0, v)) \in \tilde{M}.$$

Ahora, como  $p_k$  y  $\pi(\gamma_k 0)$  están en el mismo horociclo (por definición de  $p_k$ ), y en vista de las propiedades de la función de Busemann podemos escribir:

$$B_{\gamma_k\xi}(0, p_k) = B_{\gamma_k\xi}(0, \gamma_k 0) = B_\xi(\gamma_k^{-1}0, 0). \quad (9)$$

Observar además que

$$p_k = \hat{\pi}(h_{s_k}\gamma_k\tilde{v}) \rightarrow \hat{\pi}(g_{-t_0n}\tilde{v}) = q,$$

porque  $\hat{\pi}$  es continua. Y como  $B_{\gamma_k\xi}(0, \cdot)$  también es continua, se tiene que

$$B_{\gamma_k\xi}(0, p_k) \xrightarrow{k} B_\xi(0, q) = -t_0n.$$

En la última expresión estoy usando también el hecho de que  $\gamma_k\xi$  tiende a  $\xi$  cuando  $k$  tiende a  $\infty$ . Esto es porque  $h_{t_k}\gamma_k(\tilde{v}) \rightarrow g_{-t_0n}(\tilde{v})$  y la convergencia es en  $T^1\tilde{M}$ , esto significa que también convergen los puntos base. Entonces

$$h_{t_k}\gamma_k\tilde{v}(\infty) \rightarrow g_{-t_0n}\tilde{v}(\infty).$$

Entonces en vista de (9) tenemos

$$B_\xi(0, \gamma_k^{-1}0) \xrightarrow{k} t_0n,$$

y eligiendo el  $n$  suficientemente grande,  $t_0n > \kappa$ , y por tanto, para  $k$  suficientemente grande  $B_\xi(0, \gamma_k^{-1}(0))$  también será mayor que  $\kappa$ , por lo que  $\gamma_k^{-1}(0)$  está en el horodisco  $B$ .

Entonces, dado un horodisco cualquiera, encontramos un elemento de la  $\Gamma$ -órbita de  $0$  que se mete en él, por lo que  $\xi$  es un punto límite horocíclico, contradiciendo nuestra suposición de que  $\xi$  es un punto límite no horocíclico. □

*Demostración.* (Del Teorema 1.1) Supongamos que  $X \subset T^1M$  es un conjunto minimal para el flujo horocíclico. Entonces, si tomo un elemento  $x \in X$ , el horociclo por  $x$  debe ser denso en  $X$ . De otro modo, la clausura de su órbita sería un minimal dentro de  $X$  que no es todo  $X$ , contradiciendo que  $X$  es minimal. Si  $X$  es todo  $T^1M$ , entonces todas las órbitas del flujo horocíclico serían densas, y como vimos, esto implicaría que todos los puntos límite de  $\partial_\infty \tilde{M}$  son puntos límite horocíclicos. Pero hemos visto que debe haber también puntos límite no horocíclicos. De modo que  $X$  debe ser un subconjunto propio de  $T^1M$ . Ahora considero un levantado de  $x$ ,  $(z, v) \in T^1\tilde{M}$ , tal que  $\gamma_v(\infty) = \xi$ . Por el lema 5.12, si  $\xi$  fuera un punto límite horocíclico, el horociclo por  $x$  debería ser denso en  $T^1M$ , y no lo es porque la clausura de su órbita por el flujo horocíclico es  $X$ , que no es todo  $T^1M$  como vimos recién. Entonces debe ser  $\xi$  un punto límite no horocíclico. Pero esto no puede ser porque contradice la proposición 5.17.

Es entonces absurdo suponer que existe un conjunto minimal para el flujo horocíclico en  $T^1M$ , como queríamos ver.  $\square$

## Referencias

- [1] F. ALCALDE, M. MARTÍNEZ, F. DAL'BO y A. VERJOVSKY *Minimality of the horocycle flow on laminations by hyperbolic surfaces with non-trivial topology*, (.arXiv:1412.3259v3)(2016)
- [2] D. ANOSOV *Geodesic flows in closed Riemannian manifolds of negative curvature*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, vol 90, (1967).
- [3] W. BALLMANN *Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature*, Birkhäuser (1995).
- [4] T. BEDFORD, M. KEANE y C. SERIES *Ergodic Theory, symbolic dynamics and hyperbolic spaces*, Oxford University Press (1991).
- [5] YVES BENOIST *Réseaux des groupes de Lie*, <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~benoist/prepubli/08m2p6ch1a13.pdf>
- [6] A. CANDEL and L. CONLON *Foliations I*, Graduate Studies in Mathematics. 23. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. ISBN 0-8218-0809-5. (2000)
- [7] E. CATSIGERAS *Teoría ergódica de los sistemas dinámicos discretos*, (ISBN:978-9974-0-0949-3), Montevideo (2013).
- [8] F. DAL'BO *Remarques sur le spectre des longueurs d'une surface et comptages*, Bol. Soc. Bras. Math., Vol. 30, no. 2 (1999).
- [9] F. DAL'BO *Topologie du feuilletage fortement stable*, Annales de l'institut Fourier, tome 50, no 3 (2000), p. 981-993.
- [10] F. DAL'BO *Geodesic and Horocyclic Trajectories*, Springer (2011).
- [11] M. DO CARMO *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston (1992).
- [12] V. GARCÍA *Flujo geodésico en variedades de curvatura negativa*, Monografía de grado, CMAT (2016).
- [13] GUSTAV A. HEDLUND *Fuchsian groups and transitive horocycles*, Duke Math. J. 2 (1936), no. 3, 530–542. MR 1545946
- [14] A.KATOK y B. HASSELBLATT *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press (1995).
- [15] S. MATSUMOTO *Horocycle flows without minimal sets*. (2014).
- [16] G. PATERNAIN *Geodesic Flows*, Birkhäuser, Boston (1999).
- [17] P. PETERSEN *Riemannian Geometry*, Springer (2006).
- [18] D. WITTE MORRIS *Ratner's Theorems on Unipotent Flows* (2005).