

TESIS DE MAESTRÍA

**Flocking bajo liderazgo
jerárquico con interacciones
aleatorias**

Federico Dalmao Artigas

Orientadores: Ernesto Mordecki

Gustavo Guerberoﬀ

Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Diciembre 2008
Uruguay

Resumen

Consideremos una bandada de pájaros ordenada según una jerarquía. En este trabajo estudiamos el alineamiento asintótico de las velocidades, o “flocking”, en la bandada cuando cada uno de los pájaros corrige su velocidad, en cada etapa, de acuerdo a un promedio ponderado de las velocidades de los pájaros superiores a él en la jerarquía, donde la ponderación decrece con la distancia entre los pájaros. Este modelo, llamado de liderazgo jerárquico, fué propuesto y estudiado por Shen [13], modificando el modelo ya clásico propuesto por Cucker y Smale en [5]. En nuestro modelo elegimos al azar cuales interacciones actúan, respetando la jerarquía, en forma independiente para cada par de pájaros y cada tiempo, debilitando entonces la interacción en la bandada del modelo de Shen. Es decir, buscamos analizar casos donde la ‘comunicación entre los pájaros se ve entorpecida por la presencia de cierto ‘ruido’. Los resultados obtenidos son análogos a los obtenidos por Shen en [13], es decir, condiciones suficientes para la alineación asintótica de las velocidades, en otros términos, la existencia de flocking.

Palabras clave: Flocking, emergencia, modelo de Cucker-Smale, grafos aleatorios.

Abstract

Consider a flock of birds ordered according to a certain hierarchy. In this work we study the existence of flocking of this system, i.e. the asymptotic alignment of the velocities of the flock, in the case when each bird corrects its own velocity, at each step, according to a weighted mean of the velocities of the birds that happen to be superior to him according to the hierarchy, where the weights decrease with the distance between the pair of birds considered. This model, known as Hierarchical Leadership, was introduced and studied by Shen [13], as a modification of the classical model introduced by Cucker and Smale [5]. In our study, we choose at random, taking into account the hierarchy, independently for each pair of birds and each step, which pair of birds do communicate, obtaining a weaker interaction than in Shen's model. In other words, we are interested in the model when in some cases the 'communication' among birds is broken, due to the presence of some 'noise'. The results obtained are similar to the ones obtained by Shen in [13], that is, we obtain sufficient conditions for the existence of flocking in the system.

Key words: Flocking, emergence, Cucker - Smale's model, random graphs

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Introducción	8
1.1.1. Formulación general del problema.	10
1.1.2. Modelos de interacción	14
1.1.3. Descripción de los contenidos	15
2. Interacciones determinísticas	17
2.1. Modelo simétrico de Cucker y Smale	18
2.2. Modelo con liderazgo jerárquico de Shen	20
2.3. Prueba por inducción	29
3. Interacciones exponenciales	31
3.1. Interacciones exponenciales	32
4. Interacciones aleatorias	39
4.1. Interacciones aleatorias	40
4.1.1. Interacciones independientes de la posición	42
4.1.2. Interacciones dependientes de la posición	50

4.1.3. Medio aleatorio	68
5. Conclusiones	73

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo se enmarca en el estudio del surgimiento de un comportamiento común en un grupo de agentes autónomos que interactúan entre sí.

Los artículos que dan inicio a nuestro estudio sobre este tema son debidos a Cucker y Smale ([5]) y a Shen, [13]. Los primeros estudios con modelos aleatorios, derivados del planteado por Cucker y Smale, [5], se presentan en Cucker y Mordecki, [4], y en Canale, Mordecki y Souza, [1].

En este trabajo nos proponemos el estudio del surgimiento de un comportamiento común en grupos de agentes que responden al modelo de flocking con liderazgo jerárquico propuesto por Shen en tiempo discreto, [13], con la presencia de algún tipo de incertidumbre en las interacciones o en el medio. Es decir, buscamos analizar casos donde la ‘comunicación entre los agentes se vea entorpecida por la presencia de cierto ‘ruido’.

A continuación presentamos los aspectos generales del problema.

1.1. Introducción

Consideramos un grupo de k individuos entre los cuales se producen interacciones de a pares. Es decir, cada individuo puede, en principio, interactuar con cada uno de los demás individuos del grupo. Estas interacciones modifican la conducta de los individuos.

Esto es, consideramos un grupo de agentes donde el comportamiento de cada uno de los individuos es influido por el de los demás, pero en tal grupo no se toman decisiones en forma centralizada.

La cuestión es si a partir de estas interacciones entre cada par de agentes, surge un comportamiento global común. En este sentido, el tema central en

este trabajo es la llegada a un consenso en un grupo de agentes autónomos que interactúan entre sí, sin la presencia de una dirección central.

Ejemplos de esta situación pueden ser, la formación de un lenguaje común en una sociedad primitiva, [7, 10, 11], la coordinación y cooperación de diversos robots o sensores, [16, 17], la creencia común en un sistema de precios en un mercado complejo, el comportamiento de un grupo de animales (bandadas de pájaros, manadas de lobos, etc.), [2, 9, 14, 15].

Aquí tomaremos, por simplicidad y para fijar ideas, una población de agentes, digamos una bandada de pájaros, que se mueven en \mathbb{R}^3 . En este sentido hablaremos indistintamente de agentes y pájaros, grupos y bandadas, etc.

El surgimiento de un comportamiento común en una bandada es la convergencia a una velocidad común de todos los pájaros, a esta convergencia la llamaremos también ‘flocking’, por su nombre en inglés.

Se ha observado que bajo ciertas condiciones la bandada converge a un estado en el que todos los pájaros vuelan con la misma velocidad, es decir que emerge un comportamiento común entre los individuos del grupo.

Son múltiples los esfuerzos realizados para explicar este hecho. Hay mucha literatura sobre el tema, la mayor parte de ésta es descriptiva. En muchos otros trabajos se proponen modelos y se estudian vía simulaciones, [18, 9]. Uno de estos modelos es el de Vicsek, [18], que describimos más abajo.

A partir de este último, surge el modelo planteado por Cucker y Smale, [5], donde se intenta dar una justificación matemática de la emergencia del comportamiento común bajo determinadas condiciones. El punto de partida de esta monografía es el modelo de Cucker y Smale, [5].

Pasamos ahora a la descripción general de los modelos en cuestión.

El modelo de Vicsek, [18], propone que cada pájaro va modificando su velocidad de acuerdo a las velocidades relativas de los demás pájaros con el propósito de mantenerse ligado a la bandada. En este caso se estableció la convergencia a una velocidad común basada en condiciones sobre toda la sucesión de infinitos estados de la bandada.

En el modelo de Cucker y Smale, [5], se ‘suaviza’ la dependencia de las interacciones respecto de la distancia entre los agentes y se consigue establecer la convergencia a una velocidad común dependiendo únicamente de las condiciones iniciales de la bandada, i.e: las posiciones y velocidades iniciales de los agentes. Esto permite una fácil verificación de las condiciones de convergencia.

En el trabajo de Shen, [13], se estudia el modelo de Cucker y Smale, [5], bajo jerarquías y se establece la convergencia a una velocidad común dependiendo únicamente de las condiciones iniciales.

Observación 1. En realidad Cucker y Smale, [5], y Shen, [13], establecieron la existencia de β_0 tal que si $\beta < \beta_0$ la convergencia se da independientemente de las condiciones iniciales; si $\beta \geq \beta_0$ la convergencia depende de las condiciones iniciales.

1.1.1. Formulación general del problema.

En general, estos modelos proponen el siguiente comportamiento de los agentes: en cada instante, cada uno de los pájaros de la bandada (numerados por $1, 2, \dots, k$) ajusta su velocidad sumándole a su velocidad anterior un

promedio ponderado de las diferencias entre ésta y las velocidades anteriores de los demás pájaros. Esto es, en el instante n para el agente i se tiene

$$v_i(n+h) = v_i(n) + h \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} a_{ij} (v_j(n) - v_i(n)), \quad (1.1)$$

donde $v_i(n)$ representa la velocidad en \mathbb{R}^3 del agente i en el instante n , $h > 0$ es el intervalo de tiempo entre las actualizaciones de las velocidades, los coeficientes a_{ij} son los pesos que cuantifican la forma en que los agentes se influyen entre sí y $\mathcal{L}(i)$ es el conjunto de agentes que directamente influyen al agente i .

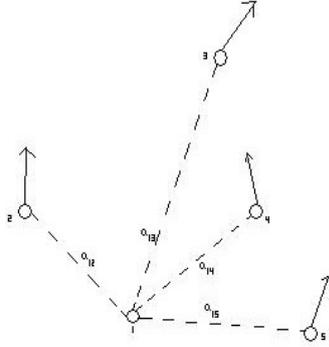


Figura 1.1: Actualización de las velocidades, el agente 1 observa a los demás agentes.

Observación 2. Podemos asociar a este modelo un grafo coloreado, para ello, consideramos nodos $1, 2, \dots, k$ y cada arista (i, j) está presente si y sólo si los agentes i, j interactúan entre sí, $a_{ij} \neq 0$. Además cada arista tiene asociado un peso, a saber, a_{ij} .

De aquí en adelante, para simplificar un poco la notación, ponemos $v_i[n]$ en vez de $v_i(nh)$, siempre y cuando no haya riesgo de confusión. Además, ponemos $x[n] = (x_1[n], \dots, x_k[n]) \in (\mathbb{R}^3)^k$ para la posición de la bandada en tiempo n , y análogamente ponemos $v[n] = (v_1[n], \dots, v_k[n]) \in (\mathbb{R}^3)^k$ para la velocidad de la bandada en tiempo n .

Es razonable suponer que la fuerza de interacción entre dos agentes es una función decreciente de la distancia entre ambos. Se formaliza esta asunción a través de una función no creciente $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ de modo que

$$a_{ij} = \eta \left(\|x_i - x_j\|^2 \right) \quad (1.2)$$

donde x_i denota la posición del agente i en \mathbb{R}^3 . Este es el criterio seguido por Vicsek, [18], Cucker y Smale, [5], y Shen, [13].

Se puede escribir el conjunto de ecuaciones (1.1) en una forma más concisa. Para ello definimos la matriz de adyacencias, o de conectividades, $A_n = ((a_{ij}[n]))$ y la matriz laplaciana $L_n = D_n - A_n$ donde D_n es la matriz diagonal cuyas entradas no nulas son $d_i = \sum_{j \leq k} a_{ij}$. Entonces

$$\begin{aligned} v_i[n+1] - v_i[n] &= - \sum_{j=1}^k h a_{ij} (v_i[n] - v_j[n]), \\ &= - \left(\sum_{j=1}^k h a_{ij} \right) v_i[n] + \sum_{j=1}^k h a_{ij} v_j[n], \\ &= -h [D_n v[n]]_i + h [A_n v[n]]_i, \\ &= -h [L_n v[n]]_i. \end{aligned}$$

Es importante notar que la expresión $A_n v(n)$ no tiene el significado usual de una matriz $k \times k$ actuando en \mathbb{R}^k , sino que la matriz A_n actúa en $(\mathbb{R}^3)^k$ mapeando

$$(v_1(n), \dots, v_k(n)) \text{ en } \begin{pmatrix} a_{11}v_1[n] + \dots + a_{1k}v_k[n] \\ \vdots \\ a_{k1}v_1[n] + \dots + a_{kk}v_k[n] \end{pmatrix}.$$

Vale una observación análoga para la matriz L_n .

Debemos notar que estamos trabajando en el espacio $\mathcal{X} = (\mathbb{R}^3)^k$ con su estructura heredada de \mathbb{R}^3 .

Hemos obtenido de esta manera una ecuación matricial que modela la evolución, en tiempo discreto, de las velocidades de los agentes. Agregando una

ecuación natural para el cambio de las posiciones, en función de las velocidades, llegamos al sistema

$$\begin{cases} x[n+1] &= x[n] + hv[n], \\ v[n+1] &= (Id - hL_n)v[n], \end{cases} \quad (1.3)$$

que describe la dinámica de la bandada.

Para medir la distancia entre las posiciones y velocidades de los agentes se usa, como es natural, una norma en \mathbb{R}^{3k} . Como $\dim(\mathbb{R}^{3k}) < \infty$ todas las normas son equivalentes.

Debido a los productos de matrices $k \times k$ por vectores en \mathbb{R}^{3k} involucrados en la dinámica anterior, tomaremos la norma de las matrices compatible con la norma usada para los vectores. Esto es, asumimos que se han elegido las normas vectoriales y matriciales de modo que

$$\|Mx\| \leq \|M\| \|x\|,$$

donde M es una matriz y x un vector.

Para ver que esto es posible, observar que, dada una norma en \mathbb{R}^{3k} , basta tomar, para las matrices, la norma inducida

$$\|M\| = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\|.$$

La diferencia entre los distintos modelos que consideramos está en la elección de los coeficientes a_{ij} y de los conjuntos \mathcal{L}_i .

Esto es, las diferencias están en la forma en que decae la fuerza de interacción entre los agentes con la distancia entre ellos, y en la elección de cuáles agentes pueden influir directamente sobre cada agente.

A continuación vemos los modelos que tomamos como base para nuestro trabajo.

1.1.2. Modelos de interacción

Los modelos considerados son los siguientes.

En el caso de Vicsek se toma $\mathcal{L}_i = \{1, \dots, k\}$ para todo i y

$$\eta(y) = \eta_r(y) = \mathbb{I}_{\{y \leq r^2\}}(y),$$

donde $r > 0$ es fijado a priori y permanece constante en el tiempo. Esto es, los agentes i y j interactúan si y sólo si su distancia es a lo sumo r .

El corte abrupto en el decaimiento de la interacción con la distancia y la falta de interacciones de largo alcance hacen de este modelo muy difícil de analizar analíticamente. Existen, sin embargo, resultados de simulación, [18, 9].

Para posibilitar el tratamiento matemático, Cucker y Smale, [5], se proponen la siguiente modificación: $\mathcal{L}_i = \{1, \dots, k\}$ para todo i y

$$\eta(y) = \frac{K}{(\sigma^2 + y)^\beta}, \quad (1.4)$$

con $K, \sigma > 0$ y $\beta \geq 0$.

De esta forma, la interacción decae en forma continua con la distancia y no se anula nunca. El parámetro β controla la velocidad con la cual decae la interacción entre agentes. Por lo tanto se evita el salto en las interacciones.

Finalmente, en el caso de Shen, [13], se mantiene la función η del caso de Cucker y Smale, [5], pero se toma $\mathcal{L}_i = \{1, \dots, i-1\}$, $i > 1$ y $\mathcal{L}_1 = \emptyset$. En consecuencia, cada agente sólo puede observar a los pájaros que le preceden.

1.1.3. Descripción de los contenidos

En el Capítulo dos, se describen los trabajos base de esta monografía.

En la sección (2.1) se ve el modelo de Cucker y Smale, [5], en el cual la matriz laplaciana L_n resulta ser simétrica y definida no negativa, en consecuencia el problema deriva en acotar inferiormente el número de Fiedler, Φ_n , de la matriz laplaciana L_n , es decir, el segundo menor valor propio de L_n . Para esto es suficiente acotar mín a_{ij} lo cual se logra acotando superiormente $\|x[n]\|$.

En la sección (2.2) se ve el modelo de Shen, [13], en el cual la matriz laplaciana no es simétrica sino triangular inferior, en esta situación el enfoque anterior no tiene validez. Sin embargo, Shen, [13], resuelve el problema a través de argumentos de dominación similares a los del teorema de convergencia dominada. En particular, se busca acotar superiormente las entradas de la matriz de la dinámica y esto vuelve a implicar la cota superior de $\|x[n]\|$.

En la sección (2.3) se ve la adaptación hecha por Cucker y Dong, [3], del método de inducción, propuesto por Shen, [13], para tiempo continuo, a tiempo discreto para mejorar el valor crítico.

Todos los contenidos de este capítulo se encuentran en las referencias.

En el capítulo tres, comenzamos nuestro estudio de nuevos casos. En primer lugar consideramos un modelo determinístico intermedio entre el de Vicsek, [18], y el de Cucker y Smale, [5], en el sentido que las interacciones decaen en forma continua con la distancia y no se anulan pero la velocidad de decaimiento es mucho mayor que en el modelo de Cucker y Smale, [5].

Por una comunicación personal sabemos que Cucker y Smale ya estudiaron este caso.

El capítulo cuatro contiene la parte central de la tesis, en él presentamos resultados sobre el modelo de flocking bajo liderazgo jerárquico, donde la interacción entre los pares de pájaros es modelado con variables aleatorias. Hasta donde sabemos, estos resultados son originales.

Para comenzar, tomamos un modelo sencillo donde las interacciones a_{ij} son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución de Bernoulli. En consecuencia las velocidades no dependen de la posición. Se prueba la convergencia a una velocidad común con probabilidad uno.

A continuación, consideramos el modelo de Shen, [13], con el agregado que las interacciones pueden no estar presentes. Las parejas de pájaros que interactúan en cada instante se modelan con variables independientes con distribución de Bernoulli. Aquí se prueba la convergencia casi segura para el caso subcrítico, $\beta < \frac{1}{2}$, y para el valor crítico, $\beta = \frac{1}{2}$.

Finalmente, tomamos interacciones proporcionales en promedio a las anteriores pero donde las probabilidades de interacción son las que dependen de la distancia entre los agentes, en lugar los coeficientes de interacción. En este caso probamos la convergencia casi segura sólomente para el caso correspondiente a $\beta < \frac{1}{2k}$.

Capítulo 2

Interacciones determinísticas

En este capítulo hacemos una revisión de los métodos disponibles para abordar los problemas de surgimiento de un comportamiento común en un grupo de agentes autónomos respondiendo al modelo de Cucker y Smale, [5], y al modelo de Shen, [13].

Los resultados mencionados en esta sección se encuentran en los artículos [5], [13] y [3]. En aras de completitud, incluimos la prueba de los resultados que usamos directamente, sin modificación al caso aleatorio.

2.1. Modelo simétrico de Cucker y Smale

El modelo inicial para nuestro estudio, es como mencionamos en la introducción el modelo propuesto por Cucker y Smale en [5].

En esta sección comentamos las ideas generales de este artículo sin entrar en mayor detalle. Esto es debido a que nuestro interés es trabajar sobre el modelo no simétrico con liderazgo jerárquico, propuesto posteriormente por Shen en [13].

Los coeficientes de conectividad son para cada instante $n \geq 0$ y para cada par de pájaros $i, j \leq k$

$$a_{ij}[n] = \frac{H}{\left(1 + \|x_i[n] - x_j[n]\|^2\right)^\beta}.$$

Es claro que $a_{ij} = a_{ji}$, luego la matriz laplaciana L_n es simétrica y definida no negativa y por lo tanto es diagonalizable con autovalores reales no negativos.

Por lo tanto los autovalores de la matriz de la dinámica $Id - hL_n$ son $1 - h\lambda_i$ donde λ_i son los valores propios de L_n .

Es claro además que $\Delta = [(1, 1, \dots, 1)] = \ker L_n$ porque las filas de L_n

suman cero y el grafo asociado es conexo. Por lo tanto, los puntos de Δ son los puntos fijos de la dinámica.

También se puede ver que el complemento ortogonal, Δ^\perp , del subespacio Δ respecto del producto interno inducido en \mathbb{R}^{3k} por \mathbb{R}^3 , es L_n invariante. Por lo tanto, la dinámica se puede restringir a Δ^\perp . En consecuencia, el alineamiento asintótico de las velocidades de los agentes es equivalente a la convergencia a cero de la velocidad de la bandada en Δ^\perp .

Esta proyección sobre Δ^\perp remarca que nuestro interés es sobre las velocidades y posiciones relativas, más que sobre las velocidades y posiciones absolutas.

En consecuencia, Cucker y Smale [5], proponen continuar el estudio de la convergencia en el espacio cociente $\mathbb{R}^{3k}/\Delta \equiv \Delta^\perp$.

Notemos que $\|1 - hL_n\| = 1 - h\Phi_n$ donde Φ_n es el número de Fiedler, es decir, el segundo menor valor propio de L_n . Por lo tanto, acotar la norma de la matriz de la dinámica se reduce a acotar el número de Fiedler para lo cual es suficiente acotar superiormente $\|x[n]\|$ uniformemente en n .

Para lograr la cota del número de Fiedler¹ se usa que con el producto interno inducido en \mathbb{R}^{3k} se verifica

$$\langle L_n v, v \rangle = \sum_{i,j=1}^k a_{ij} \|v_i - v_j\|^2.$$

Finalmente, para la acotación de $\|x[n]\|$ se procede fijando un natural $N \in \mathbb{N}$, y luego tomando el máximo de las posiciones hasta este momento y a partir de las cotas anteriores obtener una desigualdad para el máximo de la cual se deducen cotas independientes de N .

¹Ver la proposición (4) de [5]

Observación 3. En algunos casos, la condición de que cada agente interactúa con todos los demás agentes de la bandada puede ser poco realista, y se intenta, levantarla parcialmente en el capítulo 3.

2.2. Modelo con liderazgo jerárquico de Shen

En esta sección vemos el modelo de Shen [13] en tiempo discreto. En este modelo se introducen jerarquías entre los agentes. Esto significa, básicamente, que cada agente observa únicamente a los agentes que están por encima de él en el orden impuesto y es observado por los que están por debajo en dicho orden.

En esta situación el método del número de Fiedler carece de validez por la estructura de la matriz asociada, que no es simétrica sino triangular. Para sortear este obstáculo Shen, [13], desarrolla el método de la dominación.

Para comenzar definimos lo que se entiende por una bandada con una estructura de orden jerárquico, o HL - bandada por la sigla en inglés. En este contexto $a_{ij} > 0$ quiere decir que el agente i es guiado, o influido, por el agente j .

Definición 2.1 (HL - bandada). Una bandada es una *bandada con estructura de liderazgo jerárquico*, o *HL-bandada*, si los agentes se pueden numerar como $1, 2, \dots, k$ de modo que

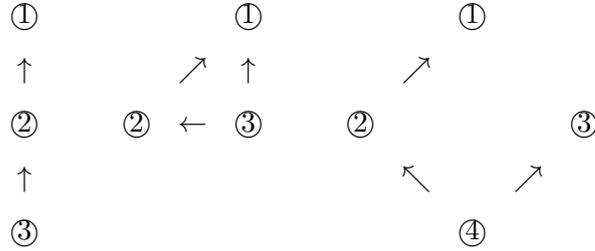
(a) $a_{ij} \neq 0$ implica $j < i$,

(b) si para cada agente definimos el conjunto

$$\mathcal{L}_i = \{j : a_{ij} \neq 0\},$$

entonces para todo $i > 1$ se verifica $\mathcal{L}_i \neq \emptyset$.

Ejemplo 1. De las siguientes bandadas



las primeras dos verifican la definición de HL-bandada pero no así la tercera, pues el agente 3 no tiene ningún líder.

Observación 4. Una bandada de k pájaros es una HL - bandada si y sólo si los agentes se pueden numerar $1, 2, \dots, k$ de modo que la matriz de conectividades, $A = ((a_{ij}))$, sea triangular inferior y desde la fila dos en adelante, todas las filas tienen alguna entrada no nula.

Por ejemplo, las matrices de conectividades de las bandadas del ejemplo anterior son respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En analogía con Cucker y Smale [5], se definen la matriz laplaciana y los siguientes subespacios

Definición 2.2. La matriz laplaciana es $L_n = D_n - A_n$ donde la matriz D_n es la matriz diagonal cuyas entradas no nulas son $d_i[n] = \sum_j a_{ij}[n]$.

Definimos los subespacios (de \mathbb{R}^{3k})

$$\Delta = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{array} \right)_k, x \in \mathbb{R}^3 \right\} \text{ y } R^{k-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{array} \right) : x_i \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Observación 5. Es fácil verificar que $\Delta = \ker(L_n)$ y $R^{k-1} = \text{Im}(L_n)$ y por lo tanto Δ y R^{k-1} son L_n -invariantes. Es decir, $L_n(\Delta) \subset \Delta$ y $L_n(R^{k-1}) \subset R^{k-1}$. Luego, se ve que los puntos fijos de la dinámica son los puntos de Δ y que, denotando por $v_{R^{k-1}}$ la componente en R^{k-1} de v

$$v_{R^{k-1}}[n+1] = (Id - hL_n)_{R^{k-1}} v_{R^{k-1}}[n]$$

y análogamente para las posiciones.

Esto implica que se puede restringir la dinámica a R^{k-1} y que la convergencia a una velocidad común es equivalente a la convergencia a cero de la componente en R^{k-1} de la velocidad.

En este caso, a diferencia de lo que ocurre en el caso de Cucker y Smale, [5], estos subespacios no son ortogonales.

En consecuencia, a partir de ahora consideramos la dinámica restringida a R^{k-1} .

Como vimos en la sección anterior, los resultados de Cucker y Smale, [5], dependen crucialmente de la existencia de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en el espacio restringido tal que

$$\langle L_n v, v \rangle \geq \Phi_n \langle v, v \rangle$$

siendo Φ_n el número de Fiedler de L_n . Sin embargo, en el caso de Shen, [13], la no simetría de L_n implica que en general no existe un producto interno en estas condiciones. En consecuencia, es necesario otra forma de abordar el problema, que veremos a continuación.

Los coeficientes de conectividad son de la forma

$$a_{ij}^S [n] = \begin{cases} \frac{H}{(1+\|x_i[n]-x_j[n]\|^2/2)^\beta} & \text{si } j < i, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (2.1)$$

La dinámica del sistema es

$$\begin{cases} x[n+1] &= x[n] + hv[n], \\ v[n+1] &= S[n]v[n], \end{cases}$$

donde $S[n] = Id - hL_n$.

Aplicando recursivamente la segunda ecuación de la dinámica, correspondiente a la velocidad de la bandada, se obtiene una relación entre $\|v[n+1]\|$ y $\|v[0]\|$, a saber:

$$\|v[n+1]\| \leq \|S[n] \dots S[0]\| \|v[0]\|. \quad (2.2)$$

Análogamente, a partir de esta relación y de la primer ecuación de la dinámica, correspondiente a la posición de la bandada, se obtiene, sumando y restando $x[j]$, con $j \leq n$, que

$$\begin{aligned} \|x[n+1]\| &\leq \|x[0]\| + \sum_{j=0}^n \|x[j+1] - x[j]\|, \\ &\leq \|x[0]\| + h \sum_{j=0}^n \|S[j] \dots S[0]\| \|v[0]\|. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Por lo tanto, el problema es, como en el caso Cucker y Smale, [5], acotar convenientemente las normas $\|S[j] \dots S[0]\|$.

La razón por la cual ponemos $\|S[j] \dots S[0]\|$ y no $\|S[j]\| \dots \|S[0]\|$ quedará clara más abajo.

El primer paso para esto es acotar por encima cada entrada de la matriz $S[n]$. Suponemos en principio la existencia de B_h tal que $\|x[n]\|^2 \leq B_h, \forall n \in \mathbb{N}$. Tal cota se logra eligiendo h suficientemente chico de modo que los términos fuera de la diagonal se puedan despreciar y luego se acotan los términos de la diagonal, de modo que

$$\max_{ij} S_{ij}[n] \leq 1 - hd_* =: \rho_h,$$

$$\text{con } d_* = \frac{H}{(1+B_h)^\beta} \leq d_i.$$

Basado en este resultado se define

Definición 2.3 (Dominación). Sean $B, C \in \mathcal{M}_{k \times k}$, decimos que B está *dominada* por C si $|b_{ij}| \leq c_{ij}, \forall i, j$.

En este caso escribimos $B \prec C$.

La dominación de matrices tiene la importante propiedad siguiente.

Proposición 2.2.1 (Prop. 3 de Shen, [13]). *Si $B \prec C$, entonces existe α tal que $\|B\| \leq \alpha \|C\|$. La constante α depende únicamente de la norma usada.*

Demostración. Todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes, entonces basta probar la proposición para una norma cualquiera. Usamos, por conveniencia, la norma de Frobenius

$$\|A_{k \times k}\| = \sum_{i,j=1}^k a_{ij}^2.$$

Entonces, se verifica

$$\|B\| = \sum_{i,j=1}^k b_{ij}^2 \leq \sum_{i,j=1}^k c_{ij}^2 = \|C\|$$

donde hemos usado la hipótesis para obtener la desigualdad.

En el caso de usar otra norma, la constante α depende de las constantes en la definición de equivalencia entre esta norma y la norma de Frobenius. \square

Proposición 2.2.2 (Prop. 4 de Shen, [13]). *Si $B_i \prec C_i, i = 1, \dots, n$, entonces*

$$B_1 \dots B_n \prec C_1 \dots C_n.$$

Para escribir matricialmente la consecuencia de la proposición 2.2.2 definimos la matriz $T = ((t_{ij}))$ tal que $t_{ij} = \begin{cases} 1 & i \geq j \\ 0 & i < j \end{cases}$. Por ejemplo, si $k = 3$ es

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, resumiendo lo anterior, tenemos

Corolario 2.2.3 (Corolario 1 de Shen, [13]). *En las condiciones anteriores se tiene*

$$\begin{aligned} S[n] &\prec \rho_{\Delta t} T \\ S[n] \dots S[0] &\prec \rho_{\Delta t}^n T^n \end{aligned}$$

Acotamos ahora la norma de la matriz T^n , que es lo que falta para obtener la acotación buscada de $\|S[n] \dots S[0]\|$.

Lema 2.2.4 (Lema 1 de Shen, [13]). *Para T definida como arriba y $n \in \mathbb{N}$*

$$\|T^n\| = O(n^{k-1}).$$

Demostración. Primero se descompone T como suma de matrices más sencillas. Con este fin definimos $J = ((J_{ij}))$ por $J_{ij} = \delta_{i+1,j}$, por ejemplo, para $k = 3$ es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil verificar que

$$T = I + J + J^2 + \dots + J^{k-1} = \sum_{m=0}^{k-1} J^m.$$

Además se cumple $J^m = 0, \forall m \geq k$. En conclusión tenemos

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} J^m.$$

Se puede definir para $|t| < 1$

$$T(t) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m J^m$$

que es convergente a $(I - tJ)^{-1}$. Así que, en conclusión

$$T(t) = (I - tJ)^{-1}.$$

Esta expresión es conveniente para calcular la n -ésima potencia de la matriz T , tenemos

$$T(t)^n = (I - tJ)^{-n}.$$

Usando el teorema del binomio y asociando convenientemente

$$\begin{aligned} T(t)^n &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-n}{m} (-t)^m J^m, \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \binom{-n}{m} (-t)^m J^m, \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \binom{n+m-1}{m} t^m J^m. \end{aligned}$$

Ahora, es claro que si $t \rightarrow 1$ entonces $T(t) \rightarrow T$ pues

$$\begin{aligned} \|T - T(t)\| &= \left\| \sum_{m=0}^{k-1} (t-1) J^m \right\|, \\ &\leq (t-1) \|T\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que $T^n = \lim_{t \rightarrow 1} T(t)^n$, es decir

$$T^n = \sum_{m=0}^{k-1} \binom{n+m-1}{m} J^m.$$

En este punto, alcanza con probar que $\binom{n+m-1}{m} = O(n^{k-1})$. Esto se deduce fácilmente dado que el cociente $\frac{n+l-1}{nl}$ tiende a $\frac{1}{l}$ con n y por lo tanto permanece acotado.

Con esto queda probado el lema. □

Como consecuencia de los resultados anteriores se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.2.5 (Teorema 2 de Shen, [13]). *Si existe B_h tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $\|x[n]\|^2 \leq B_h$, entonces*

$$S[n] \dots S[0] \prec O\left(\rho_h^n n^{k-1}\right) T$$

y en particular

$$\|v[n]\| \leq O\left(\rho_h^n n^{k-1}\right).$$

Finalmente es necesaria la siguiente acotación,

Lema 2.2.6 (Lema 2 de Shen, [13]). *Para todos $k \geq 1$ y t tal que $|t| < 1$ se tiene*

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m m^{k-1} \leq (k-1)! (1-t)^{-k}.$$

Demostración. Observar que se da la igualdad cuando $k = 1$. En general, si $t \in [0, 1)$ se tiene

$$\begin{aligned}
(k-1)!(1-t)^{-k} &= (k-1)! \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-k}{m} (-t)^m, \\
&= (k-1)! \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{m} t^m, \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (m+k-1) \dots (m+1) t^m, \\
&\geq \sum_{m=0}^{\infty} m^{k-1} t^m,
\end{aligned}$$

con lo cual queda establecida la tesis. \square

Observación 6. Hasta aquí hemos visto que si $\|x[n]\|^2 \leq B_h, \forall n$ entonces $\|v[n]\| \leq O(\rho_h^n n^{k-1})$ con $\rho_h = 1 - h \frac{H}{(1+B_h)^\beta} < 1$. Luego, $\|v[n]\| \rightarrow 0$.

Por lo tanto, asumiendo la existencia de B_h hay convergencia a una velocidad común.

Pasamos ahora a ver la existencia de la cota de las posiciones B_h , para ello usamos las acotaciones anteriores y procedemos como en los artículos [5, 13]. Esto es, se fija $N \in \mathbb{N}$, se acota primero la posición en $[0, N]$ y de ahí se obtiene una desigualdad de la forma

$$z - a - bz^{2k\beta} \leq 0 \tag{2.4}$$

que permite establecer la acotación de la posición en todo tiempo².

Shen, [13], notó que el valor crítico obtenido por este método, $\beta_c = \frac{1}{2k}$, debería poder ser mejorado a $\beta_c = \frac{1}{2}$. Es decir, el valor $\beta_c = \frac{1}{2k}$ es debido a las acotaciones groseras del método de dominación y no al modelos en sí.

²Ver Lema (4.1.9).

2.3. Prueba por inducción

Finalmente, vemos el método de inducción, adaptado por Cucker y Dong, [3], a partir del método propuesto inicialmente por Shen, [13], para el caso en tiempo continuo.

Consideremos una HL-bandada $\{1, 2, \dots, k\}$. La idea principal de este enfoque es que, debido a la estructura jerárquica, los grupos $\{1, 2, \dots, \ell\}$, con $2 \leq \ell \leq k$ son también bandadas con una estructura jerárquica.

Se comienza estableciendo que la sub-bandada $\{1, 2\}$ converge a una velocidad común.

Luego, por inducción, si la sub-bandada $\{1, 2, \dots, \ell - 1\}$ ha alcanzado el equilibrio, ésta es vista por el ℓ -ésimo agente como un único agente situado en la posición media y moviéndose a la velocidad media.

Esto lleva a considerar una dinámica perturbada que surge al considerar la bandada formada por dos agentes $\{\{1, 2, \dots, \ell - 1\}, \ell\}$ donde el primer agente se ubica en la posición media y con la velocidad media.

Se prueba entonces, que la perturbación es lo suficientemente chica como para obtener la convergencia de esta nueva HL-bandada de dos agentes.

Capítulo 3

Interacciones exponenciales

3.1. Interacciones exponenciales

En este capítulo comenzamos a estudiar algunas modificaciones al modelo de Shen, [13].

En lugar de tomar un decaimiento potencial de la conectividad respecto de la distancia entre los agentes, tomamos un decaimiento exponencial. De esta forma, la interacción decae más rápido con la distancia entre los agentes. En el capítulo siguiente consideramos interacciones aleatorias.

Es razonable pensar que este modelo es intermedio entre el modelo planteado por Cucker y Smale, [5], y el modelo de Vicsek, [18], pues si bien los coeficientes de interacción decaen en forma continua y no se anulan, como en el primero, el peso de las interacciones de largo alcance es insignificante, como en el segundo.

En una comunicación personal Cucker nos dijo que había hecho el estudio de este caso.

En el modelo de Shen, [13], la conectividad entre los agentes i y j ($j < i$) es

$$a_{ij}^S[n] = \frac{H}{\left(1 + \|x_i[n] - x_j[n]\|^2 / 2\right)^\beta}, \quad (3.1)$$

donde $H > 0$, $\beta > 0$ y $\|\cdot\|$ denota la norma en el espacio cociente R^{k-1} .

En este caso, tomaremos la conectividad entre los agentes i y j ($j < i$) como

$$a_{ij}[n] = H \exp(-\|x_i[n] - x_j[n]\| / 2), \quad (3.2)$$

donde $H > 0$.

Debido al decaimiento más rápido de la fuerza de interacción entre los agentes con la distancia y al menor peso de las interacciones de largo alcance, es de esperar que la convergencia hacia una velocidad común sea más dificultosa en este caso.

La idea es adaptar los cálculos de [13] a este modelo.

Proposición 3.1.1. *Si $h < \frac{1}{2Hk}$ se verifica*

$$\max_i S_{ij} [n] \leq 1 - hHe^{-\|x[n]\|}.$$

Demostración. Tomando $h < \frac{1}{2Hk}$ se tiene (al igual que en [13])

$$\begin{aligned} \max_{ij} S_{ij} [n] &= \max_i S_{ii} [n], \\ &= \max_i [1 - hd_i [n]], \\ &= 1 - h \min_i [d_i [n]], \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} a_{ij} [n] &= H \exp(-\|x_i [n] - x_j [n]\| / 2), \\ &\geq He^{-\|x[n]\|}, \end{aligned}$$

donde $\|x[n]\|$ denota la posición de la bandada en R^{k-1} , se tiene que

$$d_i [n] \geq He^{-\|x[n]\|}$$

y luego

$$\max_i S_{ii} [n] \leq 1 - hHe^{-\|x[n]\|}.$$

□

Teorema 3.1.2. *Consideramos el modelo de flocking con liderazgo jerárquico y conectividades exponenciales dadas por (3.2), i.e:*

$$a_{ij} [n] = H \exp(-\|x_i [n] - x_j [n]\| / 2),$$

Entonces, si

$$\|v[0]\| \leq \frac{1}{hk} \left(\log \left(\frac{1}{b} \right) - a - 1 \right),$$

donde a y b^1 están definidas por

$$a = k \|x[0]\| \quad y \quad b = khA(k-1)!(hH)^{-k} \|v[0]\|,$$

se tiene que, con probabilidad uno, la velocidad relativa de la bandada converge exponencialmente a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Para establecer la acotación de la posición $\|x[n]\|$ con $n \in \mathbb{N}$ procedemos como en [13] (que a su vez sigue a [5]). Esto es, en primer lugar se fija un natural N y se toma

$$\|x\|_* = \max_{0 \leq n \leq N} \|x[n]\| \quad y \quad \rho_h = 1 - hHe^{-\|x\|_*^2}.$$

Es claro que $\|x\|_*$ y ρ_h dependen de N .

Podemos utilizar las acotaciones de Shen, [13], para la velocidad pues sólo ha cambiado el valor de ρ_h . Por lo tanto, se verifica la desigualdad

$$\|v[n]\| \leq O(\rho_h^n n^{k-1}) \|v[0]\|.$$

Luego, para $n \leq N - 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \|x[n+1]\| &\leq \|x[0]\| + h \sum_{m=0}^n \|v[m]\|, \\ &\leq \|x[0]\| + hA \sum_{m=0}^n \rho_h^m m^{k-1} \|v[0]\|, \\ &\leq \|x[0]\| + hA(k-1)!(1-\rho_h)^{-k} \|v[0]\|. \end{aligned}$$

Aplicando para $n \in \operatorname{argmax} \|x[n]\|$ se obtiene la desigualdad buscada (del tipo Cucker-Smale, [5])

$$\|x\|_* \leq \|x[0]\| + hA(k-1)!(1-\rho_h)^{-k} \|v[0]\|.$$

¹En realidad b depende de $\|v[0]\|$.

Por lo tanto, recordando que $\rho_h = 1 - hHe^{-\|x\|_*}$ se obtiene

$$\begin{aligned}\|x\|_* &\leq \|x[0]\| + hA(k-1)! \left(1 - (1 - hHe^{-\|x\|_*})\right)^{-k} \|v[0]\|, \\ &= \|x[0]\| + A(k-1)! H^{-k} h^{-k+1} e^{k\|x\|_*} \|v[0]\|.\end{aligned}$$

Llamando $z = k\|x\|_*$, $a = k\|x[0]\|$ y $b = khA(k-1)!(hH)^{-k} \|v[0]\|$, la desigualdad anterior se expresa de la forma

$$z \leq a + be^z,$$

o en forma equivalente

$$z - a - be^z \leq 0. \quad (3.3)$$

A continuación analizamos la desigualdad $z - a - be^z \leq 0$.

Observación 7. Si $b < 1$ entonces $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(z) = z - a - be^z$$

tiene máximo en el punto $z_* = \log\left(\frac{1}{b}\right)$ cuyo valor es $\log\left(\frac{1}{b}\right) - a - 1$.

Demostración. Es inmediato ver que $F(0) = -a - b < 0$. Además

$$F'(z) = 1 - be^z$$

que se anula en $z_* = \log\left(\frac{1}{b}\right) > 0$ por hipótesis. Sustituyendo este valor en la definición de F se obtiene

$$F(z_*) = \log\left(\frac{1}{b}\right) - a - 1.$$

□

A partir de ahora asumiremos que $\log\left(\frac{1}{b}\right) - a - 1 > 0$. Entonces, la gráfica de F tiene el siguiente aspecto

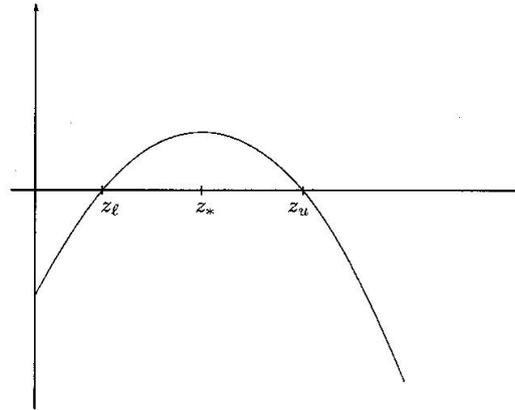


Figura 3.1: Bosquejo de $F(z)$

Veamos que $\|x[n]\|$ queda acotada.

Para cada n llamamos n_* a cualquier elemento de $\operatorname{argmax}_{0 \leq m \leq n} \|x[m]\|$.
Claramente $0_* = 0$.

Definimos $z[n] = k \|x[n_*]\|$ que es creciente con n . Entonces

$$z[0] = k \|x[0]\| = a < \log\left(\frac{1}{b}\right) = z_*,$$

esto implica en realidad que $z[0] \leq z_l$.

Sea $T = \inf \{n : z[n] > z_u\}$, como es usual, convenimos que $\inf \emptyset = \infty$.

Queremos descartar el caso $T < \infty$, de modo de concluir que $z[n] \leq z_*$ para todo n .

Ahora, para $n < T$ vale

$$k \|x[n]\| \leq k \|x[n_*]\| = z[n] \leq z[T-1].$$

Por lo tanto, para $n < T$, se tiene

$$\|x[n]\| \leq \frac{z_*}{k} =: B_0.$$

En particular

$$\|x [T - 1]\| \leq \frac{z_l}{\beta k},$$

sin embargo, para T se verifica

$$\|x [T]\| \geq \frac{z_u}{k} \geq \frac{z_*}{k}.$$

A partir de estas dos desigualdades concluimos que si existe T se debe verificar

$$\begin{aligned} \|x [T]\| - \|x [T - 1]\| &\geq \frac{z_* - z_l}{k} \\ &\geq \frac{F(z_*)}{k}. \end{aligned}$$

Pero por otro lado, por la dinámica de la bandada esta diferencia cumple

$$\|x [T]\| - \|x [T - 1]\| \leq h \|v [0]\|.$$

Comparando estas dos desigualdades se obtiene

$$F(z_*) \leq hk \|v [0]\|.$$

Luego, si asumimos que

$$\log\left(\frac{1}{b}\right) - a - 1 \geq hk \|v [0]\|,$$

la desigualdad anterior se vuelve una contradicción. Esta contradicción aparece por suponer la existencia de T . Por lo tanto se concluye que

$$\|x [n]\| \leq \frac{z_*}{k}$$

para todo n . □

Observación 8. Notar que en este caso la desigualdad $F(z) \leq 0$ es similar al caso supercrítico, $\beta > \frac{1}{2}$, de [13]. En consecuencia no se da la convergencia incondicional como en el caso subcrítico, $\beta < \frac{1}{2}$, de [13], por el contrario, es menester pedir condiciones adicionales sobre la velocidad y la posición inicial de la bandada para asegurar la convergencia a una velocidad común.

Observar también, que esta condición es similar a la condición del caso supercrítico, $\beta > \frac{1}{2}$, de [5].

Capítulo 4

Interacciones aleatorias

En este capítulo presentamos nuevas modificaciones al modelo de flocking con liderazgo jerárquico. Estas modificaciones buscan debilitar las interacciones entre los agentes de la bandada y estudiar la emergencia de un comportamiento común bajo estas condiciones más débiles.

Ahora, pasamos al caso de mayor interés, introducimos azar en los coeficientes de interacción. Para ser más precisos, consideramos que la presencia de interacción entre cada par de agentes es, en cada instante, un evento aleatorio.

En consecuencia la posición y la velocidad de la bandada son variables aleatorias. Los resultados que se obtienen son en consecuencia, resultados con probabilidad uno.

Por la observación (5), consideramos la dinámica restringida a R^{k-1} . Por lo tanto, buscamos establecer la convergencia de $v_{R^{k-1}}$ a cero. En otras palabras, trabajamos con la velocidad relativa de la bandada y no con la velocidad absoluta de la misma.

En consecuencia, en el resto del capítulo, a menos que se indique lo contrario, las posiciones y velocidades serán las relativas, es decir, pondremos x, v en lugar de $x_{R^{k-1}}, v_{R^{k-1}}$ respectivamente.

4.1. Interacciones aleatorias

Consideramos ahora el caso en el que la existencia de la interacción entre cada par de pájaros en cada instante es un evento aleatorio. Por simplicidad asumimos independencia entre tales eventos en dos de los tres casos.

Sea $\{1, \dots, k\}$ una HL-bandada de k agentes.

Consideramos las tres siguientes variantes para los coeficientes de inte- rac-

ción:

- (a) En el primer caso consideramos interacciones independientes de la posición, donde la probabilidad de presencia de las interacciones es también independiente de la posición y constante a través del tiempo. Es decir, consideramos $p \in (0, 1)$ y para cada $0 < j < i$ definimos los coeficientes de interacción como

$$a_{ij}[n] = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p, \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p. \end{cases}$$

Las variables aleatorias $a_{ij}[n]$ son mutuamente independientes.

- (b) En el segundo caso retiramos la condición de que los coeficientes no dependan de las posiciones pero mantenemos tal condición para las probabilidades de interacción, es decir, si $p \in (0, 1)$ y para cada $0 < j < i$ se tiene

$$a_{ij}[n] = \begin{cases} a_{ij}^S[n] & \text{con probabilidad } p, \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p. \end{cases}$$

donde $a_{ij}^S[n]$ es la conectividad del modelo de Shen, (2.1), i.e:

$$a_{ij}^S = \frac{H}{\left(1 + \|x_i - x_j\|^2\right)^\beta}$$

Las variables aleatorias $a_{ij}[n]$ son mutuamente independientes.

- (c) En el último caso volvemos a coeficientes independientes de la posición pero, en su lugar, dejamos que las probabilidades dependan de la posición. Sin embargo, introducimos una pequeña modificación en la forma del decaimiento respecto de la distancia.

Entonces, para cada $i > 0$, $j < i$ ponemos

$$a_{ij}[n] = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p_{ij}[n], \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p_{ij}[n], \end{cases}$$

donde

$$p_{ij}[n] = \frac{1}{(1 + \|x_i[n] - x_j[n]\|)^\alpha}$$

y $p_{ij}[n] = 0$ si $j > i$. El parámetro α es positivo y es análogo a 2β en los casos anteriores. Es claro que esta modificación no altera el espíritu del modelo. El numerador se ha tomado como uno para que p_{ij} pueda ser una probabilidad, se puede pensar que la constante H fue absorbida por h .

Dadas las posiciones en tiempo $n - 1$, las variables aleatorias $a_{ij}[n]$ son mutuamente independientes.

En las próximas secciones analizamos cada uno de estos casos.

4.1.1. Interacciones independientes de la posición

Las conectividades son para $p \in (0, 1)$ y para cada $0 < j < i$

$$a_{ij}[n] = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p, \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p. \end{cases} \quad (4.1)$$

Las variables $a_{ij}[n]$ son mutuamente independientes.

Este es el modelo más sencillo posible con interacciones aleatorias pues, las variables $a_{ij}[n]$ son independientes e idénticamente distribuidas con distribución de Bernoulli. Es más, en este caso las ecuaciones de la dinámica no están acopladas, pues, las velocidades no dependen de las posiciones.

Este modelo corresponde a la situación en que cada agente, i , ‘elige’ en cada instante con qué otros agentes j ($j < i$) interactúa. La interacción del agente i con el agente j en el instante n es independiente de la interacción en tiempo n del agente i con los demás agentes y es, a su vez, independiente de la interacción del agente i en otro instante con cualquier agente.

Por otro lado, en caso de estar presente, la interacción entre dos pájaros ‘vecinos’ tiene la misma intensidad que la interacción entre dos pájaros situados en ‘extremos opuestos’ de la bandada.

En este caso, el grafo asociado es un grafo aleatorio de Erdos Renyi dirigido, [8].

Abordamos el estudio de este modelo a través de los argumentos de dominación desarrollados por Shen, [13], para tiempo discreto.

Siguiendo el análisis hecho en [5] y [13], tenemos las siguientes desigualdades

$$\|v[n+1]\| \leq \|S[n]\| \|v[n]\|,$$

iterando obtenemos

$$\|v[n+1]\| \leq \|S[n] \dots S[0]\| \|v[0]\|, \quad (4.2)$$

y luego, sumando y restando $\|x[i]\|$, $i < n$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|x[n+1]\| &\leq \|x[0]\| + \sum_{i=0}^{n-1} \|x[i+1] - x[i]\|, \\ &\leq \|x[0]\| + h \sum_{i=0}^{n-1} \|v[i]\|, \\ &\leq \|x[0]\| + h \sum_{i=0}^{n-1} \|S[i] \dots S[0]\| \|v[0]\|. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por lo tanto, el problema es el de dominar el comportamiento asintótico de las normas $\|S[i] \dots S[0]\|$.

Para ello recordemos que la matriz S que describe la dinámica está definida como $S[n] = Id - hL_n$.

Como mencionamos más arriba, procedemos de la misma forma que Shen, [13], esto es, buscamos una matriz que domine a $S[n]$ acotando superiormente cada una de sus entradas. Se deduce, en lo que sigue, que la clave está en hallar una constante $\rho < 1$ tal que $\max_{ij} S_{ij}[n] < \rho$.

Esto se realiza en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1. *Si $h < \frac{1}{2k}$ se verifica que $S_{ij}[n] \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y*

$$\max_{ij} S_{ij}[n] \leq (1-h)^\alpha = \rho_h^\alpha$$

donde α es una variable aleatoria con distribución de Bernoulli con parámetro

$$p_0 = P(\text{El grafo asociado es conexo}).$$

Observación 9. El grafo (no dirigido) asociado a la bandada es conexo si y sólo si cada agente se conecta con alguno de los agentes que le preceden en el orden subyacente, esto es, si y sólo si cada fila de la matriz de adyacencia A tiene alguna entrada no nula.

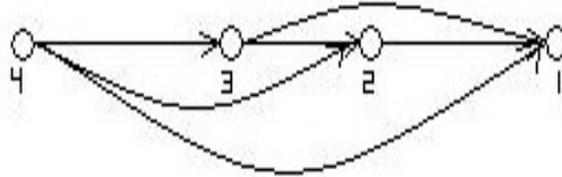


Figura 4.1: Conexión y estructura jerárquica

Demostración. Miremos los elementos $S_{ij}[n]$.

Los elementos fuera de la diagonal pueden ser h o 0 , luego, en este caso es $S_{ij}[n] \leq h$.

Por otro lado, los elementos de la diagonal son de la forma $1 - hd_i[n]$ con $d_i[n] = \sum_{j < i} a_{ij}[n]$. Como $a_{ij} \leq 1$, se tiene $d_i[n] \leq k$.

Por lo tanto, tomando $h < 1/2k$, es

$$S_{i \neq j} [n] \leq h < \frac{1}{2},$$

y además

$$\begin{aligned} S_{ii} [n] &= 1 - h d_i [n], \\ &\geq 1 - (k/2k) = 1/2. \end{aligned}$$

En consecuencia se tiene

$$\max_{ij} S_{ij} [n] = \max_i S_{ii} [n].$$

Entonces, basta acotar $\max_i S_{ii} [n]$. Tenemos

$$\begin{aligned} \max_i S_{ii} [n] &= \max_i \{1 - h d_i [n]\}, \\ &= 1 - h \min_i d_i [n]. \end{aligned}$$

Distinguiamos dos casos. El primero, al que llamaremos ' $\alpha = 0$ ' y $1 - p_0$ a su probabilidad, es el caso en que exista algún $d_i [n] = 0$. Por la observación anterior, en este caso el grafo asociado no es conexo. Aquí se verifica $\min_i d_i [n] = 0$ y luego $\max_{ij} S_{ij} [n] = 1$ y por lo tanto no hay contracción. En este caso tenemos

$$S [n] \prec T,$$

donde T es la matriz triangular inferior cuyas entradas no nulas son iguales a uno, i.e: $T = (T_{ij})$ con $T_{ij} = \mathbb{I}_{\{j \leq i\}}$.

Esta dominación no es suficiente para la convergencia a una velocidad común de los agentes de la bandada, ésta depende del otro caso.

El segundo caso, que llamaremos ' $\alpha = 1$ ' y que tiene probabilidad p_0 , ocurre cuando todos los $d_i [n] \neq 0$. Nuevamente por la observación anterior, en este

caso el grafo asociado es conexo. Aquí se verifica $\min_i d_i [n] \geq 1$ y

$$\max_i S_{ii} [n] \leq 1 - h =: \rho_h < 1.$$

Es decir, si todos los $d_i [n] \neq 0$ entonces

$$S [n] \prec \rho_h T.$$

Esto concluye la demostración. \square

Observación 10. Es muy importante observar que $\rho = 1 - h$ es independiente de n . Esto nos permitirá evitar las desigualdades de la forma $F(z) \leq 0$ que han aparecido en [5, 13] y en los casos de conectividades exponenciales y de interacciones dependientes de la posición.

Corolario 4.1.2. *En las condiciones de la proposición anterior se tiene, para todo n*

$$S [n] \prec \rho_h^\alpha T,$$

y en consecuencia

$$S [n] \dots S [0] \prec \rho_h^{\alpha(n)} T^n,$$

donde $\alpha(n)$ es la variable aleatoria que cuenta el número de veces en que el grafo asociado es conexo en los pasos anteriores a n .

Observación 11. En los pasos en que el grafo asociado no es conexo, no aparece el factor ρ_h que es el factor importante, el que da el decrecimiento de la velocidad.

En principio, si los pasos en que no se da la conexión ‘son demasiados’, los pájaros podrían distanciarse lo suficiente de modo que, aunque luego el grafo asociado fuera conexo, las interacciones no fueran lo suficientemente fuertes como para reunirlos nuevamente, luego, podría no darse la convergencia que queremos establecer.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el evento A_n como el evento de que el grafo asociado en tiempo n sea conexo, es decir, $A_n = \{d_i[n] \neq 0, 1 < i \leq k\}$. Entonces

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(d_i[n] \neq 0, 1 < i \leq k), \\ &= P(\exists j < i \text{ tal que } a_{ij} \neq 0, 1 < i \leq k), \\ &\geq P(a_{i1} \neq 0, 1 < i \leq k), \\ &= p^{k-1} > 0. \end{aligned}$$

Como $P(A_n) \geq p^{k-1} > 0$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = \infty$, además los A_n son independientes, entonces, por Borel-Cantelli,

$$P(A_n \text{ ocurra infinitas veces}) = 1.$$

Esto nos dice que aunque no en todos los pasos tengamos una contracción, de factor ρ , en la velocidad, la tendremos por lo menos un número infinito de veces.

A continuación veremos, que en este caso, esto es suficiente.

Teorema 4.1.3. *En el modelo de flocking con liderazgo jerárquico con las interacciones aleatorias independientes de la posición propuestas en (4.1), i.e.: a_{ij} independientes con distribución de Bernoulli de parámetro p , se verifica, con probabilidad uno, que la posición está acotada y la velocidad decrece a cero con velocidad exponencial.*

Demostración.

Recordemos que hemos llamado $\alpha(n)$ al número de veces en que ocurre el evento A_m con $m \leq n$, tenemos por el corolario (4.1.2) y por la proposición (2.2.1) y el lema (2.2.4), que existe una constante A tal que, para todo n se verifica, con probabilidad uno, que

$$\|S[n] \dots S[0]\| \leq A \rho_h^{\alpha(n)} n^{k-1}, \quad (4.4)$$

donde $\alpha(n) \rightarrow \infty$ casi seguramente por la observación anterior.

Sustituyendo en (4.3), y usando (4.4) obtenemos, con probabilidad uno

$$\begin{aligned} \|x[n+1]\| &\leq \|x[0]\| + h \sum_{m=0}^{n-1} A \rho_h^{\alpha(m)} m^{k-1} \|v[0]\|, \\ &\leq \|x[0]\| + Ah \sum_{m=0}^{\infty} \rho_h^{\alpha(m)} m^{k-1} \|v[0]\|. \end{aligned}$$

Es clave que esta relación es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vemos ahora la convergencia de la serie $\sum_{m=0}^{\infty} \rho_h^{\alpha(m)} m^{k-1}$ por el criterio de la raíz de Cauchy. Luego, observamos que

$$\sqrt[m]{\rho_h^{\alpha(m)} m^{k-1}} = \rho_h^{\frac{\alpha(m)}{m}} m^{\frac{k-1}{m}},$$

es claro que si $m \rightarrow \infty$ se tiene que

$$m^{\frac{k-1}{m}} \rightarrow 1.$$

Para ver el otro factor, notamos que $\alpha(m)$ tiene distribución Binomial de parámetros $(p_0 = P(A_1), m)$. Entonces, por la Ley fuerte de los grandes números, con probabilidad uno, tenemos

$$\frac{\alpha(m)}{m} \rightarrow p_0.$$

En definitiva, se tiene que con probabilidad uno

$$\sqrt[m]{\rho_h^{\alpha(m)} m^{k-1}} \rightarrow \rho_h^{p_0} < 1.$$

cuando $m \rightarrow \infty$, entonces la serie es convergente (digamos a $K = K(\omega)$), luego, con probabilidad uno y para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\|x[n]\|$ está acotado por

$$\|x[n]\| \leq \|x[0]\| + AhK \|v[0]\|.$$

Probamos ahora que $\|v[n]\| \rightarrow 0$.

Nos basamos en la prueba del criterio de Cauchy para series. Llamamos $a_n = \rho_h^{\alpha(n)} n^{k-1}$, y eligiendo $\epsilon > 0$ tal que $\rho_h^{p_0} + \epsilon < 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\|v[n+1]\| &\leq \|S[n] \dots S[0]\| \|v[0]\| \\ &\leq A a_n \|v[0]\| \\ &\leq A (\rho_h^{p_0} + \epsilon)^n \|v[0]\| \rightarrow 0.\end{aligned}$$

donde la primer desigualdad es (4.2) y la segunda desigualdad es (4.4).

Por lo tanto, la velocidad tiende a cero con la velocidad de $(\rho_h^{p_0} + \epsilon)^n$.

Esto concluye la demostración.

□

4.1.2. Interacciones dependientes de la posición

Las conectividades son, para $p \in (0, 1)$ y para cada $1 < j < i$

$$a_{ij}[n] = \begin{cases} a_{ij}^S[n] & \text{con probabilidad } p, \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p, \end{cases} \quad (4.5)$$

donde

$$a_{ij}^S[n] = \frac{H}{\left(1 + \|x_i - x_j\|^2\right)^\beta}$$

es la conectividad del modelo de [13].

Las variables $a_{ij}[n]$ son mutuamente independientes.

Es conveniente escribir estas conectividades de la forma

$$a_{ij}[n] = X_{ij,n} \frac{H}{\left(1 + \|x_i - x_j\|^2\right)^\beta}, \quad (4.6)$$

donde las variables aleatorias $X_{ij,n}$ son independientes e idénticamente distribuidas con distribución de Bernoulli de parámetro p .

Observación 12. Este modelo complementa el anterior pues permite la dependencia de las interacciones respecto de la distancia entre los agentes. Ya no asumimos que todas las interacciones presentes tienen la misma magnitud.

Por otro lado, este modelo generaliza al modelo de Shen, [13], pues, en caso de estar presentes las interacciones tienen la misma magnitud que en el modelo de Shen, [13], pero ahora, en cada instante, puede haber pares de pájaros que no interactúan entre sí.

Observación 13. En este caso, por ser los coeficientes de conectividad iguales a los de Shen, [13], valen las mismas acotaciones. El problema radica en la posibilidad de ausencia de las interacciones, en particular, en la no conexión del grafo asociado.

El grafo no coloreado asociado es, como en el caso anterior, un grafo aleatorio de Erdos Renyi dirigido. Por lo tanto valen las observaciones hechas al respecto en la sección anterior.

Por lo visto en el caso anterior y en [1], no es necesario que el grafo sea conexo en cada uno de los pasos, por el contrario, es suficiente que el grafo asociado sea, para cada n , conexo una proporción fija de los pasos $0, 1, \dots, n$.

A partir de esta observación buscamos comparar la variable aleatoria $\alpha(n)$, definida más adelante y que cuenta la cantidad de pasos anteriores al n -ésimo, en los cuales se da la conexión del grafo asociado, con las funciones lineales $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = an$, $a \in \mathbb{R}$.

Antes de pasar al resultado principal veamos algunos resultados auxiliares.

Teorema 4.1.4 (Ley del Logaritmo Iterado). *Si las variables X_1, X_2, \dots tienen distribución común con tercer momento finito, entonces*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n X_m - np_0}{\sqrt{2np_0q_0} \log \log n} = -1$$

y

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n X_m - np_0}{\sqrt{2np_0q_0} \log \log n} = 1,$$

donde $q_0 = 1 - p_0$.

La prueba de este conocido teorema se puede ver en [12].

Lema 4.1.5. *Para todo $0 < a < 1$ y para todo $0 \leq x \leq 1$ se verifica*

$$1 - (1 - x)^a \geq ax.$$

Queremos establecer un resultado de la forma:

Teorema: *En el modelo de flocking con liderazgo jerárquico regido por las interacciones aleatorias dependientes de la posición, 4.5, existe $\beta_0 > 0$ tal que si $\beta < \beta_0$ se tiene que la velocidad relativa de los agentes de la bandada, con probabilidad uno, satisface*

$$\|v_i[n] - v_j[n]\| \leq P e^{-Qn},$$

para algunas constantes $P(\omega), Q(\omega)$ independientes de n .

Para esto se puede proceder usando los argumentos de dominación de [13] con lo cual se obtiene un resultado como el buscado con

$$\beta_0 = \frac{1}{2k}.$$

Sin embargo, ya fue notado por el propio Shen, [13], que este valor de β_0 se puede mejorar. En [3] se lleva a cabo esta tarea adaptando el método inductivo, también introducido por Shen, [13], pero para el caso de tiempo continuo.

Luego, seguimos los argumentos de [3].

La observación clave es que el subconjunto de pájaros $\{1, 2, \dots, \ell\} \subset \{1, \dots, k\}$ es también una HL-bandada. Esto es debido a la estructura jerárquica de la bandada, donde ninguno de los agentes de $\{1, 2, \dots, \ell\}$ observa a los agentes fuera de este conjunto.

Entonces, en vez de trabajar en forma matricial e intentar acotar la norma de la matriz de la dinámica, vamos a trabajar por inducción sobre las sub-bandadas $\{1, 2, \dots, \ell\}, \ell = 2, \dots, k$.

En primer lugar, se prueba la importante propiedad de que en una HL-bandada, la norma de la velocidad de la bandada es no creciente en el tiempo.

Esto mejora la situación respecto de los argumentos de dominación de Shen, [13], pues aquí estas normas eran acotadas por $O(\rho^n n^k)$.

Lema 4.1.6. *Si $h < \frac{1}{(k-1)H}$, toda bandada con liderazgo jerárquico verifica las siguientes propiedades con probabilidad uno:*

1. Si $V_0^k := \max_{1 \leq i \leq k} \|v_i[0]\|$ entonces $\|v_i[n]\| \leq V_0^k$ para todo $n \geq 1$.
2. Si $2 \leq \ell \leq k$ y ponemos $W_0^\ell := \max_{i \leq \ell} \|v_i[0] - v_1[0]\|$ entonces para todo $n \geq 0$ y para todo $j \leq \ell$ se tiene $\|v_i[n] - v_1[n]\| \leq W_0^\ell$.

Demostración.

1. Lo probamos por inducción en n .

Es claro que se verifica para $n = 0$. Luego, suponemos que es válido para n , por la segunda ecuación de la dinámica tenemos

$$\begin{aligned} \|v_i[n+1]\| &= \left\| \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} ha_{ij}(x) (v_j[n] - v_i[n]) + v_i[n] \right\|, \\ &= \left\| \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} ha_{ij}(x) v_j[n] + \left(1 - \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} ha_{ij}(x)\right) v_i[n] \right\|, \\ &\leq \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} ha_{ij}(x) \|v_j[n]\| + \left|1 - \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} ha_{ij}(x)\right| \|v_i[n]\|, \end{aligned}$$

donde hemos reagrupado y aplicado la desigualdad triangular. Finalmente quitamos el valor absoluto, pues, por la elección de h , tenemos que $ha_{ij} < \frac{1}{(k-1)H} H$ y luego la suma es menor a uno. Luego

$$\begin{aligned} \|v_i[n+1]\| &\leq \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} ha_{ij}(x) \underbrace{\|v_j[n]\|}_{\leq V_0^k} + \left(1 - \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} ha_{ij}(x)\right) \underbrace{\|v_i[n]\|}_{\leq V_0^k}, \\ &\leq V_0^k. \end{aligned}$$

2. Para $i \leq \ell$, definiendo $w_i = v_i - v_1$ y $y_i = x_i - x_1$ tenemos que w_i, y_i

verifican, para $n \geq 0$, la dinámica

$$\begin{cases} y_i[n+1] &= y_i[n] + hw_i[n], \\ w_i[n+1] &= w_i[n] + \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} ha_{ij} (w_j[n] - w_i[n]). \end{cases}$$

Por lo tanto, podemos aplicar la parte 1 a esta HL-bandada, entonces si $2 \leq \ell, j \leq \ell$ y $n \geq 0$ vale la tesis.

□

Observación 14. En la prueba de este lema sólo hemos usado la cota superior de los coeficientes de interacción, por lo tanto no hay problema con que éstos se anulen. En consecuencia, el lema es válido siempre y cuando los coeficientes a_{ij} estén uniformemente acotados superiormente.

Observación 15. Los parámetros h, H siempre aparecen multiplicados entre sí, por lo tanto se pueden pensar como un único parámetro.

La prueba de la convergencia hacia una velocidad común se hará en varias etapas.

En cada paso de la inducción, al agregar un nuevo pájaro a la sub-bandada ya ‘formada’, se pensará a esta última como ‘un sólo agente’, por lo tanto, se introducirá una perturbación en el sistema. En la siguiente proposición se toma en cuenta esto.

Proposición 4.1.7 (Sistema perturbado).

Si $x[n], v[n] \in \mathbb{R}^3$ verifican las ecuaciones

$$\begin{cases} x[n+1] &= x[n] + hv[n], \\ v[n+1] &= (1 - ha(x, n))v[n] + \varepsilon[n], \end{cases}$$

con las siguientes condiciones

1. Los coeficientes $a(x, n)$ se pueden expresar como $a(x, n) = X_n \bar{a}(x, n)$ de modo que las variables aleatorias X_n son mutuamente independientes

con distribución de Bernoulli de parámetro p_0 y además existen K, R y $M = M(\omega)$ tales que, con probabilidad uno, se verifica la desigualdad $K \geq \bar{a}(x, n) \geq \frac{R}{(M + \|x[n]\|^2)^\beta}$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Existe D_0 determinístico tal que $\|v[n]\| \leq D_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Existen $p = p(\omega), q = q(\omega)$ positivos, tales que $\|\varepsilon(n)\| \leq qe^{-pn}$, con probabilidad uno, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. $\beta < \frac{1}{2}$,
2. $\beta = \frac{1}{2}$ y $\|v_i[0]\| \leq \frac{p_0 R}{4}$ para $i = 1, 2, \dots, k$,

existen $P = P(\omega) > 0, Q = Q(\omega) > 0$ independientes de n tales que para $n \geq 0$ se tiene

$$\|v[n]\| \leq Qe^{-Pn}$$

con probabilidad uno.

Observación 16. En esta proposición, x, v representan la posición y la velocidad relativas de los agentes en una HL-bandada con dos agentes.

Observación 17. La segunda condición se vuelve natural después del lema (4.1.6).

Para demostrar esta proposición, que establece la convergencia a una velocidad común en una HL-bandada con dos agentes y con perturbación, procedemos en forma análoga a los casos anteriores.

Proposición 4.1.8. *En las condiciones de la proposición (4.1.7), para $n \in \mathbb{N}$ existen variables aleatorias $\rho_n < 1$ y $\alpha(n/2)$ binomial tales que, con probabi-*

lidad uno, vale

$$\|v[n]\| \leq \rho_n^{\alpha(n/2)} D_0 + \frac{qe^{-p\lfloor n/2 \rfloor}}{1 - e^{-p}}.$$

Además, existe $m_0 = m_0(\omega)$ tal que, con probabilidad uno, se verifica

$$\|x[n]\| \leq \|x[0]\| + 2hD_0m_0(\omega) + \frac{4D_0}{p_0R} \left(M + \|x\|_*^2 \right)^\beta + \frac{2hq}{(1 - e^{-p})^2}.$$

Demostración. Llamamos $\|x\|_* = \max_{0 \leq m \leq n} \|x[m]\|$ y $\rho_n = 1 - \frac{hR}{(M + \|x\|_*^2)^\beta}$.

Probamos primero la desigualdad para la velocidad.

De la segunda ecuación de la dinámica tenemos

$$\begin{aligned} \|v[n]\| &\leq (1 - ha(x, n-1)) \|v[n-1]\| + \|\varepsilon[n-1]\|, \\ &\leq \rho_n^{X_{n-1}} \|v[n-1]\| + \|\varepsilon[n-1]\|, \end{aligned}$$

donde usamos que si $X_{n-1} \neq 0$ entonces aparece el factor $\rho_n < 1$ y si $X_{n-1} = 0$ entonces aparece el factor 1; resumimos esto en la expresión $\rho_n^{X_{n-1}}$.

Iteramos este procedimiento, entonces

$$\begin{aligned} \|v[n]\| &\leq \rho_n^{X_{n-1}} (1 - ha(x, n-2)) \|v[n-2]\| + \underbrace{\rho_n^{X_{n-1}}}_{\leq 1} \|\varepsilon[n-2]\| + \|\varepsilon[n-1]\|, \\ &\leq \rho_n^{X_{n-1} + X_{n-2}} \|v[n-2]\| + \|\varepsilon[n-2]\| + \|\varepsilon[n-1]\|, \\ &\leq \rho_n^{X_{n-1} + X_{n-2} + \dots + X_{\lfloor n/2 \rfloor}} \|v[\lfloor n/2 \rfloor]\| + \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \|\varepsilon[n-m]\|. \end{aligned}$$

Finalmente, llamando $\alpha(n/2) = X_{n-1} + X_{n-2} + \dots + X_{\lfloor n/2 \rfloor}$, que claramente es binomial, y usando las hipótesis sobre v, ε hemos probado que

$$\begin{aligned} \|v[n]\| &\leq \rho_n^{\alpha(n/2)} D_0 + \sum_{m=\lfloor n/2 \rfloor}^{\infty} qe^{-pm}, \\ &\leq \rho_n^{\alpha(n/2)} D_0 + \frac{qe^{-p\lfloor n/2 \rfloor}}{1 - e^{-p}}. \end{aligned}$$

Vamos a necesitar sumar nuevamente, por lo cual es importante que ambos términos decrezcan rápidamente con n .

Usamos ahora esta desigualdad para establecer la correspondiente a la posición. Sumando y restando $\|x[m]\|$ para $m < n$ y usando la desigualdad triangular, tenemos

$$\begin{aligned} \|x[n]\| &\leq \|x[0]\| + \sum_{m=0}^{n-1} \|x[m+1] - x[m]\|, \\ &\leq \|x[0]\| + h \sum_{m=0}^{n-1} \|v[m]\|, \\ &\leq \|x[0]\| + h \sum_{m=0}^{n-1} \left(\rho_n^{\alpha(m/2)} D_0 + \frac{qe^{-p\lfloor m/2 \rfloor}}{1 - e^{-p}} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para el primer término en la suma usamos la Ley del logaritmo iterado (Teorema 4.1.4) para acotar el exponente $\alpha(m/2)$. En efecto, como la variable $\alpha(m)$ tiene distribución Binomial se puede escribir de la forma

$$\alpha(m) = \sum_{j=1}^m X_j,$$

con X_j variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución de Bernoulli de parámetro p_0 . Luego, tenemos, con probabilidad uno, que

$$\liminf_m \frac{\sum_{j=1}^m X_j - mp_0}{\sqrt{2p_0q_0m \log \log m}} = -1.$$

Es decir, dado $\varepsilon > 0$, para casi todo ω existe $m_1(\omega)$ tal que si $m > m_1(\omega)$ se tiene

$$\frac{\sum_{j=1}^m X_j - mp_0}{\sqrt{2p_0q_0m \log \log m}} > -(1 + \varepsilon),$$

o sea

$$\sum_{j=1}^m X_j > mp_0 - (1 + \varepsilon) \sqrt{2p_0q_0m \log \log m}$$

y eventualmente tomando $m_0(\omega) > m_1(\omega)$ se verifica para $m > m_0(\omega)$

$$\alpha(m) = \sum_{j=1}^m X_j > m \frac{p_0}{2}.$$

Esto implica que $\rho^{\alpha(m)} < \rho^{\frac{p_0 m}{2}}$.

Luego, con probabilidad uno tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \rho_h^{\alpha(\frac{m}{2})} &\leq 2 \sum_{m=1}^{m_0(\omega)} \underbrace{\rho_h^{\alpha(m)}}_{\leq 1} + 2 \sum_{m=m_0(\omega)+1}^{\infty} \rho_h^{\alpha(m)}, \\
&\leq 2 \sum_{m=1}^{m_0(\omega)} 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \rho_h^{\frac{p_0}{2}m}, \\
&\leq 2m_0(\omega) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\rho_h^{\frac{p_0}{2}}\right)^m, \\
&\leq 2m_0(\omega) + 2 \left(1 - \rho_h^{\frac{p_0}{2}}\right)^{-1}, \\
&\leq 2m_0(\omega) + 2 \left(\frac{p_0}{2}hR\right)^{-1} \left(M + \|x\|_*^2\right)^\beta,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia del lema (4.1.5).

Miramos ahora el segundo término. En este caso tenemos una serie geométrica de razón e^{-p} , $p > 0$, por lo tanto

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{qe^{-p\lfloor n/2 \rfloor}}{1 - e^{-p}} \leq \frac{2q}{(1 - e^{-p})^2}.$$

Sustituyendo estas dos desigualdades en (4.7), obtenemos

$$\|x[n]\| \leq \|x[0]\| + 2hD_0m_0(\omega) + \frac{4D_0}{p_0R} \left(M + \|x\|_*^2\right)^\beta + \frac{2hq}{(1 - e^{-p})^2}. \quad (4.8)$$

con probabilidad uno. \square

Usamos esta proposición para probar la proposición (4.1.7).

Demostración. Sistema perturbado

De la ecuación (4.8), observando que $\|x\|_* \geq \|x[m]\|$ para todo $m \leq n$ tenemos

$$\|x\|_* \leq \|x[0]\| + 2hD_0m_0(\omega) + \frac{2hq}{(1 - e^{-p})^2} + \frac{4D_0}{p_0R} \left(M + \|x\|_*^2\right)^\beta$$

con probabilidad uno.

Luego, llamando para cada ω

$$\begin{aligned} \cdot a &= \frac{4D_0}{p_0R}, \\ \cdot b(\omega) &= M + \|x[0]\| + 2hD_0m_0(\omega) + \frac{2hq}{(1-e^{-p})^2}, \\ \cdot z(\omega) &= \left(M + \|x\|_*^2\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

llegamos a que con probabilidad uno se verifica la desigualdad

$$z \leq b + az^{2\beta}. \quad (4.9)$$

Transcribimos a continuación el lema (2) de Cucker y Smale, [5].

Lema 4.1.9. *Sean $c_1, c_2 > 0$ y $s > q > 0$. Entonces la ecuación*

$$F(z) = z^s - c_1z^q - c_2 = 0$$

tiene una única raíz positiva z_ . Además*

$$z_* \leq \max \left\{ (2c_1)^{\frac{1}{s-q}}, (2c_2)^{\frac{1}{s}} \right\}$$

y $F(z) \leq 0$ para $0 \leq z \leq z_$.*

A partir de este lema aplicado a $s = 1, q = 2\beta, c_1 = a$ y $c_2 = b$ sabemos que si $\beta < \frac{1}{2}$ se verifica $\left(M + \|x\|_*^2\right)^{1/2} \leq U_0$ donde

$$U_0 = \max \left\{ (2a)^{\frac{1}{1-2\beta}}, 2b \right\}.$$

Como U_0 es independiente de n deducimos que, para todo $n \geq 0$ se tiene

$$\|x[n]\|^2 \leq U_0^2 - M$$

con probabilidad uno.

En definitiva, tenemos que la posición de la bandada está uniformemente acotada en n para casi todo ω .

Habiendo acotado la posición volvemos la atención a la velocidad. Usando la cota anterior tenemos

$$\rho_n \leq 1 - \frac{hR}{U_0^{2\beta}} =: r,$$

y por lo tanto, para todo n

$$\|v[n]\| \leq r^{\alpha(n/2)} D_0 + \frac{qe^{-p\lfloor n/2 \rfloor}}{1 - e^{-p}}.$$

De nuevo por la ley del logaritmo iterado, tenemos para $n > m_0$ que $\alpha(n/2) > \frac{p_0 n}{4}$ y luego

$$\|v[n]\| \leq r^{\frac{p_0 n}{4}} D_0 + \frac{qe^{-p\lfloor n/2 \rfloor}}{1 - e^{-p}}.$$

De aquí, se deduce la existencia de variables aleatorias $P, Q > 0$, independientes de n tales que, para $n > m_0$, se verifica

$$\|v[n]\| \leq Qe^{-Pn}$$

con probabilidad uno. Es claro que ajustando las constantes se puede asumir que la desigualdad anterior es válida para $n \geq 0$.

Por otro lado, si $\beta = \frac{1}{2}$ tenemos de (4.9) que si $1 - a > 0$, es decir, si $D_0 < \frac{p_0 R}{4}$, tenemos

$$z \leq \frac{b}{1 - a}$$

y se puede proceder como en el análisis anterior.

□

Enunciamos y probamos ahora el resultado central de esta sección.

Teorema 4.1.10. *Sea $\{1, 2, \dots, k\}$ una HL-bandada con coeficientes aleatorios definidos en (4.5), i.e:*

$$a_{ij}[n] = \begin{cases} \frac{H}{(1 + \|x_i[n] - x_j[n]\|^2)^\beta} & \text{con probabilidad } p, \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p. \end{cases}$$

Supongamos que $h < \frac{1}{(k-1)H}$ y que se cumple alguna de las condiciones siguientes

1. $\beta < \frac{1}{2}$,
2. $\beta = \frac{1}{2}$ y $\|v_i[0]\| \leq \frac{p_0 R}{4}$ para $i = 1, 2, \dots, k$.

Entonces las velocidades relativas de los agentes decrecen exponencialmente a cero.

Es decir, existen variables aleatorias $P, Q > 0$ casi seguramente, independientes de n , tales que

$$\max_{ij} \|v_i[n] - v_j[n]\| \leq Qe^{-Pn},$$

para todo $n \geq 0$ con probabilidad uno.

Seguimos los argumentos de Cucker y Dong, [3], con las modificaciones necesarias.

Demostración. La prueba, como ya hemos dicho, se hace por inducción en las sub-bandadas $\{1, 2, \dots, \ell\}$ con $\ell = 2, \dots, k$.

Comenzamos entonces por la sub-bandada $\{1, 2\}$. Tenemos, por definición de HL-bandada, que $\mathcal{L}(2) = \{1\}$ y también que $\mathcal{L}(1) = \emptyset$, es decir, el primer agente, es el líder global y no es influenciado por los demás, entonces se mueve a velocidad constante, o sea, $v_1[n] = v_1[0]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definimos entonces, $x = x_2 - x_1$ y $v = v_2 - v_1$, se tiene para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x[n+1] &= x[n] + hv[n], \\ v[n+1] &= (1 - ha_{21})v[n], \end{cases} \quad (4.10)$$

donde $a_{21} = \frac{H}{(1+\|x\|^2)^\beta}$. Entonces, del lema (4.1.6), tenemos que para $n \in \mathbb{N}$

$$\|v[n]\| \leq W_0^2 = \|v_2[0] - v_1[0]\|.$$

Luego, el sistema (4.10) corresponde al sistema de la proposición (4.1.7) sin la perturbación, i.e.: $\varepsilon = 0$. Por lo tanto, podemos aplicar la proposición (4.1.7)

para establecer la existencia de $P(\omega), Q(\omega) > 0$ tales que para $n \in \mathbb{N}$ casi seguramente se tiene $\|v[n]\| \leq Qe^{-Pn}$.

Pasemos ahora al paso de inducción. Asumamos que el resultado vale para $n \in \mathbb{N}$ y para la sub-bandada $\{1, 2, \dots, \ell - 1\}$. Queremos probar que vale también para la sub-bandada $\{1, 2, \dots, \ell\}$.

Estamos asumiendo que existen $p(\omega), q(\omega)$ tales que para $n \geq 0$ tales que casi seguramente

$$\max_{1 \leq i, j \leq \ell - 1} \|v_i[n] - v_j[n]\| \leq qe^{-pn}. \quad (4.11)$$

Para incorporar al ℓ -ésimo agente al grupo $\{1, 2, \dots, \ell - 1\}$, miramos este último grupo como un único agente situado en el centro de masa y moviéndose a la velocidad media de grupo.

En consecuencia, consideramos la velocidad media de los líderes del agente ℓ

$$\bar{v}_\ell[n] = \frac{1}{d_\ell} \sum_{i \in \mathcal{L}(\ell)} v_i[n] \quad (4.12)$$

donde $d_\ell = \#(\mathcal{L}(\ell))$.

Para cada $1 \leq j \leq \ell - 1$ y cada $n \geq 0$, por la hipótesis de inducción, (4.11), y la definición anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \|v_j[n] - \bar{v}_\ell[n]\| &= \frac{1}{d_\ell} \left\| \sum_{i \in \mathcal{L}(\ell)} (v_j[n] - v_i[n]) \right\|, \\ &\leq \frac{1}{d_\ell} \sum_{i \in \mathcal{L}(\ell)} \underbrace{\|v_j[n] - v_i[n]\|}_{\leq qe^{-pn} \text{ por hip. ind.}}, \\ &\leq qe^{-pn}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ahora, como en el paso base, pongamos

$$v[n] = v_\ell[n] - \bar{v}_\ell[n].$$

También definimos

$$\bar{x}_\ell[n] = \frac{1}{d_\ell} \sum_{i \in \mathcal{L}(\ell)} x_i[n] \quad (4.14)$$

y

$$x[n] = x_\ell[n] - \bar{x}_\ell[n].$$

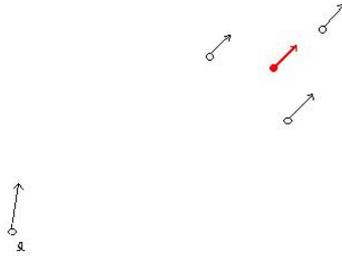


Figura 4.2: Inducción: en rojo se representa un ‘agente’ en la posición media y con la velocidad media de la sub-bandada $\{1, 2, \dots, \ell - 1\}$.

Entonces, veamos la dinámica a la que responden x y v :

$$x[n + 1] = x[n] + hv[n],$$

y

$$\begin{aligned} v[n + 1] &= v_\ell[n + 1] - \bar{v}_\ell[n + 1], \\ &= v_\ell[n] + \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} ha_{ij} (v_j[n] - v_\ell[n]) - \frac{1}{d_\ell} \sum_{i \in \mathcal{L}(\ell)} v_i[n + 1]. \end{aligned}$$

Para escribir el miembro de la derecha en términos de $v[n]$, sumamos y restamos $\bar{v}_\ell[n]$ en cada sumando de la primer suma y usamos la definición de $v_i[n + 1]$ en

la segunda suma, con ello obtenemos

$$\begin{aligned}
v[n+1] &= v_\ell[n] + \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} ha_{ij} (\bar{v}_\ell[n] - v_\ell[n]) + \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} ha_{ij} (v_j[n] - \bar{v}_\ell[n]) \\
&\quad - \frac{1}{d_\ell} \sum_{i \in \mathcal{L}(\ell)} \left(\sum_{j \in \mathcal{L}(i)} ha_{ij} (v_j[n] - v_i[n]) + v_i[n] \right), \\
&= \left(1 - \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} ha_{ij} \right) v[n] \\
&\quad + \left[\sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} ha_{ij} (v_j[n] - \bar{v}_\ell[n]) - \frac{1}{d_\ell} \sum_{i \in \mathcal{L}(\ell)} \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} ha_{ij} (v_j[n] - v_i[n]) \right], \\
&:= (1 - ha(x, n))v[n] + \varepsilon[n]. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Todas estas igualdades son con probabilidad uno.

En definitiva hemos llegado a la dinámica

$$\begin{cases} x[n+1] = x[n] + hv[n], \\ v[n+1] = (1 - ha(x, n))v[n] + \varepsilon[n]. \end{cases} \tag{4.16}$$

Por lo tanto, con estas definiciones para x, v llegamos a un sistema perturbado con dos agentes, $\{1, \dots, \ell - 1\}$ y ℓ . Pasamos entonces a verificar las hipótesis de la proposición (4.1.7) para poder aplicarla.

En primer lugar, miramos la acotación para ε .

Usando que $a_{ij} \leq H$ y la hipótesis de inducción (4.11) tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{d_\ell} \sum_{i \in \mathcal{L}(\ell)} \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} ha_{ij} (v_j[n] - v_i[n]) \right\| &\leq \frac{1}{d_\ell} \sum_{i \in \mathcal{L}(\ell)} \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} ha_{ij} \|v_j[n] - v_i[n]\|, \\
&\leq \frac{hH}{d_\ell} \sum_{i \in \mathcal{L}(\ell)} \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} \|v_j[n] - v_i[n]\|, \\
&\leq (\ell - 2)hHqe^{-pn}.
\end{aligned}$$

Análogamente, usando que $a_{ij} \leq H$ y (4.13) se tiene

$$\left\| \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} ha_{ij} (v_j[n] - \bar{v}_\ell[n]) \right\| \leq d_\ell hHqe^{-pn}.$$

Con las dos desigualdades anteriores, concluimos que para $n \geq 0$ vale

$$\begin{aligned} \|\varepsilon[n]\| &\leq (\ell - 2)hHqe^{-pn} + d_\ell hHqe^{-pn}, \\ &\leq 2\ell hHqe^{-pn}, \end{aligned}$$

para lo cual hemos usado que $d_\ell < \ell$.

Pasamos a estudiar la acotación para los coeficientes $a(x, n)$.

Tenemos por (4.15) que

$$a(x, n) = \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} a_{\ell j} = \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} X_{\ell j, n} \frac{H}{\left(1 + \|x_\ell[n] - x_j[n]\|^2\right)^\beta},$$

donde $X_{\ell j, n}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución de Bernulli de parámetro p .

Por un lado, como $a_{ij} \leq H$, tenemos $a(x, n) \leq d_\ell H \leq (k - 1)H$ para todos $x \in \mathbb{R}^3$ y $n \geq 0$.

Vemos ahora la cota inferior.

El coeficiente $a(x, n)$ se anula sólomente si $X_{\ell j, n} = 0$ para todo $j \in \mathcal{L}(\ell)$, luego, la probabilidad de que $a(x, n) = 0$ es $p^{d_\ell} =: p_0$.

Si $a(x, n) \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{d_\ell} \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} X_{\ell j, n} \|x_j[n] - \bar{x}_\ell[n]\|^2 \leq \frac{1}{d_\ell} \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} \|x_j[n] - \bar{x}_\ell[n]\|^2 \\ &\leq \frac{1}{d_\ell} \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} \left(\|x_j[0] - \bar{x}_\ell[0]\| + \sum_{m=0}^{n-1} \|(x_j[m+1] - \bar{x}_\ell[m+1]) - (x_j[m] - \bar{x}_\ell[m])\| \right)^2, \\ &= \frac{1}{d_\ell} \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} \left(\|x_j[0] - \bar{x}_\ell[0]\| + h \sum_{m=0}^{n-1} \|v_j[m] - \bar{v}_\ell[m]\| \right)^2, \end{aligned}$$

y usando la desigualdad (4.13), se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d_\ell} \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} X_{\ell j, n} \|x_j[n] - \bar{x}_\ell[n]\|^2 &\leq \frac{1}{d_\ell} \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} \left(\|x_j[0] - \bar{x}_\ell[0]\| + h \sum_{m=0}^{n-1} q e^{-pm} \right)^2, \\
&= \frac{1}{d_\ell} \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} \left(\|x_j[0] - \bar{x}_\ell[0]\| + \frac{hq}{1-e^{-p}} \right)^2, \\
&=: M_\ell^2 - 1.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Definimos $g(s) = \frac{H}{(1+s)^\beta}$ para $s \geq 0$. Como g es convexa tenemos

$$\frac{1}{d_\ell} \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} g(s_j) \geq g\left(\frac{1}{d_\ell} \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} s_j\right).$$

Entonces, poniendo $s_j = \|x_j - x_\ell\|^2$ tenemos por definición, (4.15), de $a(x, n)$ que

$$\begin{aligned}
a(x, n) &= \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} X_{\ell j, m} \frac{H}{\left(1 + \|x_j - x_\ell\|^2\right)^\beta}, \\
&\geq \frac{d_\ell H}{\left(1 + \frac{1}{d_\ell} \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} X_{\ell j, m} \|x_j - x_\ell\|^2\right)^\beta},
\end{aligned}$$

y sumando y restando \bar{x}_ℓ en la desigualdad (4.17) llegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d_\ell} \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} X_{\ell j, m} \|x_j - x_\ell\|^2 &\leq \|x_\ell - \bar{x}_\ell\|^2 + \frac{1}{d_\ell} \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} \|x_j - \bar{x}_\ell\|^2, \\
&\leq \|x\|^2 + M_\ell^2 - 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que si $a(x, n) \neq 0$ entonces

$$a(x, n) \geq \frac{d_\ell H}{\left(M_\ell^2 + \|x\|^2\right)^\beta}.$$

En definitiva hemos verificado que $a(x, n)$ cumple las hipótesis de la proposición (4.1.7) con

$$\begin{aligned}
R &= d_\ell H, \\
M^2 &= 1 + \frac{1}{d_\ell} \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} \left(\|x_j[0] - \bar{x}_\ell[0]\| + \frac{hq}{1-e^{-p}} \right)^2, \\
K &= (k-1)H, \\
p_0 &= p^{d_\ell}.
\end{aligned}$$

Observar que el único coeficiente aleatorio es M .

Finalmente, resta verificar que la velocidad está uniformemente acotada en n . Tenemos

$$\begin{aligned} \|v[n]\| &= \|v_\ell[n] - \bar{v}_\ell[n]\|, \\ &= \frac{1}{d_\ell} \left\| \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} (v_\ell[n] - v_j[n]) \right\|, \\ &\leq \frac{1}{d_\ell} \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} \|v_\ell[n] - v_j[n]\|, \end{aligned}$$

sumando y restando $v_1[n]$ en cada término obtenemos

$$\|v[n]\| \leq \frac{1}{d_\ell} \sum_{j \in \mathcal{L}(\ell)} (\|v_\ell[n] - v_1[n]\| + \|v_j[n] - v_1[n]\|),$$

y ahora usando el lema (4.1.6)

$$\begin{aligned} \|v[n]\| &\leq \max_{j \leq \ell} \|v_j[0] - v_1[0]\| + \max_{j \leq \ell-1} \|v_j[0] - v_1[0]\|, \\ &= W_0^\ell + W^{\ell-1}. \end{aligned}$$

Hemos verificado todas las hipótesis de la proposición (4.1.7), aplicándola deducimos la existencia de $\bar{P}, \bar{Q} > 0$ tales que

$$\|v_\ell[n] - \bar{v}_\ell[n]\| \leq \bar{Q}e^{-\bar{P}n}.$$

Con esta cota y con (4.13) concluimos

$$\begin{aligned} \|v_\ell[n] - v_j[n]\| &\leq \|\bar{v}_\ell[n] - v_j[n]\| + \|\bar{v}_\ell[n] - v_\ell[n]\|, \\ &\leq qe^{-pn} + \bar{Q}e^{-\bar{P}n}, \\ &\leq Qe^{-Pn}, \end{aligned}$$

siendo $Q = q + \bar{Q}$ y $P = p + \bar{P}$. En definitiva, uniendo con (4.11), tenemos para $n \geq 0$

$$\max_{1 \leq i, j \leq \ell} \|v_i[n] - v_j[n]\| \leq Qe^{-Pn}.$$

□

Observación 18. El caso $\beta > 1/2$ no se puede abordar a partir de la desigualdad (4.9) pues las condiciones involucran el parámetro b que es aleatorio. Entonces las condiciones de convergencia no son verificables.

4.1.3. Medio aleatorio

En esta sección seguimos los argumentos expuestos en los artículos de [13] y de [4].

Las conectividades son para cada $i > 0, j < i$

$$a_{ij}[n] = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p_{ij}[n], \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p_{ij}[n], \end{cases} \quad (4.18)$$

donde

$$p_{ij}[n] = \frac{1}{(1 + \|x_i[n] - x_j[n]\|)^\alpha},$$

y $a_{ij}[n] = 0$ si $j \geq i$.

Dadas las posiciones en tiempo $n - 1$, las variables aleatorias $a_{ij}[n]$ son mutuamente independientes.

Este problema es en cierta forma dual del anterior, ahora la probabilidad de interacción entre los agentes depende de la distancia entre éstos, pero, cuando hay interacción entre dos agentes ésta es total.

Como en casos anteriores, buscamos acotar uniformemente la posición en el tiempo. Observemos, que como tenemos $a_{ij} \leq 1$, se verifica el lema (4.1.6) con $H = 1$.

Observación 19. La velocidad de la bandada verifica para $n \geq 0$

$$\|v[n]\| \leq D_0,$$

donde $\frac{D_0}{\sqrt{k}}$ es cota de las velocidades en tiempo inicial¹, o usando la notación

¹Observar que $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^k \|v_i\|^2$.

del lema (4.1.6): $\frac{D_0}{\sqrt{k}} = V_0^k$. Entonces, por la primer ecuación de la dinámica, tenemos que para todo $n \geq 0$

$$\|x[n]\| \leq \|x[0]\| + hD_0n. \quad (4.19)$$

Es decir, tenemos una cota inicial para el crecimiento de la posición de la bandada en tiempo $n \geq 0$.

El siguiente lema se encuentra en [4].

Lema 4.1.11. *Para todo $x \in \mathbb{R}^{3k}$ se verifica $\max_{i \neq j} \|x_i - x_j\| \leq \sqrt{2} \|x_\perp\|$, donde x_\perp denota la componente de la velocidad de la bandada en el espacio cociente $\frac{\mathbb{R}^{3k}}{\Delta} \cong \Delta^\perp$.*

Observación 20. Recordar que en este capítulo estamos trabajando siempre con posiciones y velocidades en el espacio cociente.

Demostración. Pongamos $x = x_\delta + x_{\delta^\perp} = (\bar{u}, \dots, \bar{u}) + ((x_\perp)_1, \dots, (x_\perp)_k)$. Entonces para todo $i \neq j$ se tiene $x_i - x_j = (x_\perp)_i - (x_\perp)_j$ y

$$\|x_i - x_j\|_{\mathbb{R}^3} = \|(x_\perp)_i - (x_\perp)_j\|_{\mathbb{R}^3} \leq \|(x_\perp)_i\|_{\mathbb{R}^3} + \|(x_\perp)_j\|_{\mathbb{R}^3} \leq \sqrt{2} \|(x_\perp)\|_{\mathbb{R}^3}.$$

□

En consecuencia tenemos, para todo $n \geq 0$

$$\max_{i \neq j} \|x_i[n] - x_j[n]\| \leq \sqrt{2} \|x[0]\| + h\sqrt{2}D_0n. \quad (4.20)$$

Teorema 4.1.12. *En el modelo de flocking con liderazgo jerárquico y coeficientes aleatorios dados por (4.18) si $\alpha < \frac{1}{k}$ se tiene que las velocidades relativas tienden a cero cuando $n \rightarrow \infty$.*

Demostración. En primer lugar observamos que valen las mismas cotas que en el caso de conectividades independientes de la posición, pues las conectividades son iguales a las de ese caso, entonces

$$\max S_{ij}[n] \leq 1 - hX_n,$$

donde X_n es la variable que indica si en el paso n el grafo asociado es conexo. Por lo tanto, por el lema (2.2.1) tenemos que

$$S[n] \prec (1 - hX_n)T,$$

y en consecuencia

$$\prod_{m=1}^n S[m] \prec \left(\prod_{m=1}^n (1 - hX_m) \right) T^n.$$

Pongamos $p_n = P(X_n \neq 0)$.

Repitiendo el análisis de [1] tenemos

$$\begin{aligned} \|x[n]\| &\leq \|x[0]\| + h \sum_{m=0}^{n-1} \|v[m]\|, \\ &\leq \|x[0]\| + h \|v[0]\| + h \|v[0]\| \sum_{m=1}^{n-1} \|S[m-1] \cdots S[0]\|, \\ &\leq \|x[0]\| + h \|v[0]\| + h \|v[0]\| \sum_{m=1}^{n-1} Om^{k-1} \prod_{j=1}^m (1 - hX_j). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Por lo tanto, basta probar la convergencia de la suma

$$S(n) = \sum_{m=1}^{n-1} m^{k-1} \prod_{j=1}^m (1 - hX_j),$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Tomando esperanza tenemos, por la independencia de las variables X_n

$$ES(n) = \sum_{m=1}^{n-1} m^{k-1} \prod_{j=1}^m (1 - hp_j). \quad (4.22)$$

Pasamos ahora a la tarea de acotar inferiormente las probabilidades p_n ,

$$\begin{aligned} p_n &\geq \min_{i \neq j} \frac{1}{(1 + \|x_i[n] - x_j[n]\|)^\alpha}, \\ &= \frac{1}{(1 + \max_{i \neq j} \|x_i[n] - x_j[n]\|)^\alpha}, \\ &\geq \frac{1}{(1 + \sqrt{2} \|x[n]\|)^\alpha}, \end{aligned}$$

y usando la desigualdad (4.19) se tiene

$$p_n \geq \frac{1}{(1 + \sqrt{2} \|x[0]\| + \sqrt{2}hD_0n)^\alpha}.$$

Sacando de factor común $\sqrt{2}hD_0$, en el denominador, para $n \geq \frac{1+\sqrt{2}\|x[0]\|}{\sqrt{2}hD_0}$ obtenemos

$$\begin{aligned} p_n &\geq \frac{1}{(\sqrt{2}hD_0)^\alpha \left(\frac{1+\sqrt{2}\|x[0]\|}{\sqrt{2}hD_0} + n\right)^\alpha}, \\ &\geq \frac{1}{(2^{3/2}hD_0)^\alpha n^\alpha}, \\ &\geq \frac{A}{1 + n^\alpha}, \end{aligned}$$

donde $A = \frac{1}{(2^{3/2}hD_0)^\alpha}$.

Por lo tanto, sustituyendo en (4.22), obtenemos

$$\begin{aligned} ES(n) &\leq \sum_{m=1}^n Om^{k-1} \prod_{j=0}^{m-1} \left(1 - h \frac{A}{1 + j^\alpha}\right), \\ &\leq \sum_{m=1}^n Om^{k-1} \exp \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \log \left(1 - h \frac{A}{1 + j^\alpha}\right) \right\}, \end{aligned}$$

y como $\log(1 - x) \leq -x$, obtenemos

$$\begin{aligned} ES(n) &\leq \sum_{m=1}^n Om^{k-1} \exp \left\{ - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{hA}{1 + j^\alpha} \right\}, \\ &\leq \sum_{m=1}^n Om^{k-1} \exp \left\{ -hA \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{1 + m^\alpha} \right\}, \\ &\leq \sum_{m=1}^n Om^{k-1} \exp \left\{ -\gamma \frac{m}{1 + m^\alpha} \right\}, \end{aligned}$$

donde $\gamma = hA$.

Finalmente, observamos que, por el criterio de Cauchy, la serie anterior es convergente. Por lo tanto $\lim_n ES(n) < \infty$, luego, como $S(n)$ es creciente con n , por el teorema de convergencia monótona, con probabilidad uno, tenemos

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) < \infty.$$

Esto prueba que la posición está uniformemente acotada en n casi seguramente.

Mirando con un poco más de detalle esta prueba obtenemos que la velocidad relativa de la bandada tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ con probabilidad uno. Para ser más precisos, de las desigualdades (4.21), tenemos que

$$\begin{aligned} \|v[n]\| &\leq \|S[n-1] \cdots S[0]\| \|v[0]\|, \\ &= O\left(n^{k-1} \prod_{j=0}^{n-1} (1 - hX_j)\right), \\ &=: a_n. \end{aligned}$$

Pero, acabamos de probar que la serie con término general a_n es convergente, esto implica que $a_n \rightarrow 0$ y por lo tanto que $\|v_n\| \rightarrow 0$.

Esto concluye la demostración.

□

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo hemos propuesto algunas variantes al modelo de flocking con liderazgo jerárquico. Nuestro interés se centra en el caso en que las interacciones entre cada par de pájaros está sujeta de alguna forma al azar.

Con tal propósito, planteamos tres modelos con coeficientes de interacción aleatorios. El primero con interacciones cero-uno independientes y con probabilidades constantes, El segundo y principal, con los mismos coeficientes de conectividad que el modelo de Shen, [13], pero con la posibilidad de ausencia de interacción entre los agentes. El tercero es en cierta forma dual del segundo, las interacciones promedio son proporcionales pero la dependencia respecto de la distancia entre los agentes está en las probabilidades de interacción y no en los coeficientes de interacción.

Hemos adaptado los métodos de Shen, [13], de Canale-Mordecki-Souza, [1], y de Cucker-Dong, [3], a estos casos aleatorios. A partir de esto, se han establecido condiciones suficientes para la convergencia a una velocidad común de los agentes de la bandada. Estas condiciones son similares a las condiciones de [13, 1, 3].

Para futuros trabajos queda la tarea de obtener para el tercer modelo el punto crítico $\beta = \frac{1}{2}$ en vez del obtenido, $\beta = \frac{1}{2k}$.

Asimismo, queda para próximos trabajos, la tarea de estudiar modelos que incluyan alguna especie de dependencia entre las interacciones de los agentes, así como otras características que permitan modelos más realistas.

También, estudiar el comportamiento del sistema para valores de β cercanos al punto crítico $\beta = \frac{1}{2}$.

Bibliografía

- [1] Canale E, Mordecki E, Souza M. Flocking under random connectivity. Preprint.
- [2] Y.L. Chuang, Y.R. Huang, M.R. D'Orsogna, and A.L. Bertozzi. Multi-vehicle flocking: Scalability of cooperative control algorithms using pairwise potentials. Preprint, 2006.
- [3] Cucker F, Dong J G. On the critical exponent for flocks under hierarchical leadership. Preprint.
- [4] Cucker F, Mordecki E. Flocking in noisy environments. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2007.
- [5] Cucker F, Smale S. Emergent behaviour on flocks. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 52:852-862, 2007.
- [6] Cucker F, Smale S. The mathematics of emergence. *Japan J. Math.*, 2:197-227, 2007.
- [7] Cucker F, Smale F, and Zhou F.X. Modeling language evolution. *Found. Comput. Math.*, 4:315-343, 2004.
- [8] Durrett R. *Random graphs dynamics*. Cambridge U Press, 2006.
- [9] Flierl G, Grünbaum D, Levin S, and Olson D. From individuals to aggregations: the interplay between behavior and physics. *J. Theor. Biol.*, 196:397-454, 1999.

- [10] Ke J, Minett J, Au C.P, and Wang W.S.Y. Self-organization and selection in the emergence of vocabulary. *Complexity*, 7:41?54, 2002.
- [11] Niyogi P. *The Computational Nature of Language Learning and Evolution*. The MIT Press, 2006.
- [12] Petrov V. *Sums of independent random variables*. Springer-Verlag, 1975.
- [13] Shen J. Flocking under hierarchical leadership. *SIAM J. Appl. Math.*, 68:694-719, 2007. 2007.
- [14] Tanner H.G, Jadbabaie A, and Pappas G.J. Stable flocking of mobile agents, Part I: Fixed topology, and Part II: Dynamic topology. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2010?2021, 2003.
- [15] Topaz C.M, Bertozzi A.L, and Lewis M.A. A nonlocal continuum model for biological aggregation. *Bulletin of Mathematical Biology*, 68:1601?1623, 2006.
- [16] Tsitsiklis J.N. *Problems in Decentralized Decision Making and Computation*. PhD thesis, Department of EECS, MIT, 1984.
- [17] Tsitsiklis J.N, Bertsekas D.P, and Athans M. Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31:803?812, 1986.
- [18] Vicsek T, Czirók A, Ben-Jacob E, and Shochet O, Novel type of phase transition in a system of self-driven particles, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, pp. 1226?1229, 1995.