Tesis de Maestría

# Ejemplos Establemente Ergódicos [1]

Lic. Gabriel Núñez

Orientadora: Dra. María Alejandra Rodriguez Hertz

26 de abril de 2013

Maestría en Matemática
PEDECIBA
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

[1]Trabajo financiado por la ANII

Dedicado a Melanie Rodríguez.

# Abstract

In general it is not easy to find stably ergodic diffeomorphisms and at present there are a few known (non-trivial) examples of this kind.
This work will present new techniques to test the Ergodic stability of a diffeomorphism under certain assumptions. Such techniques will also allow to prove the previously established fact in the easiest way known to date. Finally, we will apply it to already known examples.

**Key Words:** Stably Ergodic.

# Resumen

En general no es sencillo encontrar difeomorfismos Establemente Ergódicos y actualmente se conocen pocos ejemplos (no triviales) de este tipo.
En este trabajo se presentará nuevas técnicas para probar la Estabilidad Ergódica de un difeomorfismo bajo ciertas hipótesis. Además dichas técnicas permitirá probar lo establecido anteriormente de una manera más simple de la que se conoce hasta hoy. Por último se aplicará a ejemplos ya conocidos.

**Palabras Claves:** Estabilidad Ergódica.

# Índice general

# Introducción

Una transformación $f : M \to M$ es **ergódica** si los límites de Birkhoff $\tilde{\varphi}(x) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi \circ f^j(x)$ son todos iguales a una constante para $ctx \in M$ para toda $\varphi$ continua.

En 1995, Pugh y Shub [PS] conjeturaron que los difeomorfismos parcialmente hiperbólicos son genéricamente establemente ergódicos.
Los difeomorfismos parcialmente hiperbólicos son aquellos en que su fibrado tangete se descompone en tres subfibrados $TM = E^u \oplus E^c \oplus E^s$, cada uno de ellos $Df$-invariante, donde $E^u$ expande, $E^s$ contrae y $E^c$ es intermedio.
Por otro lado un difeomorfismo $f \in C^2$ es establemente ergódico si existe $\mathcal{U}(f) \in Diff^1(M)$ tal que para todo difeomorfismo $g \in \mathcal{U}(f) \cap C^2$ es ergódico.
La conjetura anterior fue probada para central de dimensión uno en 2008 [HHU] por Rodriguez Hertz, Rodriguez Hertz y Ures y en 2010 [HHTU] para central de dimensión 2 por los mismos autores y Tahzibi. Era natural en este contexto plantearse si la estabilidad ergódica implica hiperbolicidad parcial, o si es posible encontrar ejemplos aún más débiles. En su tesis de doctorado, A. Tahzibi mostró un ejemplo de un establemente ergódico no parcialmente hiperbólico [T]. El difeomorfismo del ejemplo tiene descomposición dominada, es decir, su fibrado tangente se descompone en dos subfibrados, de modo que la expansión en uno de ellos domina la expansión en el otro, sin que necesariamente ninguno de ellos tenga que ser expansor o contractivo. Esta es la hipótesis más débil que se le puede pedir a un difeomorfimo establemente ergódico, debido a lo demostrado por Arbieto y Matheus [AM]. Últimamente la conjetura de Pugh-Shub ha sido anunciada en la topología $C^1$ para cualquier dimensión del espacio central por Avila, Crovisier y Wilkinson

El objetivo central de esta tesis será probar el siguiente teorema, el cual trabajaremos en el siguiente contexto:

Sea $M$ una variedad compacta Riemmaniana, $f : M \to M$ difeomorfismo $C^2$ que preserva una medida suave $m$. Para los resultados aquí presentados supondremos que $f$ posee un spliting dominado $TM = E^{uu} \oplus E^{cs}$, donde $E^{uu}$ y $E^{cs}$ son subespacios $Df$-invariantes tales que:

$$\|Df(x)v^c\| < \|Df(x)v^u\| \quad \text{y} \quad \|Df(x)v^u\| > 1$$

Donde $v^c \in E^{cs}$ y $v^u \in E^{uu}$ son vectores unitarios.
Denotaremos mediante $\mathcal{F}^{uu}$ a la foliación tangente al fibrado $E^{uu}$.

Dado $p \in Per_H(f)$ llamaremos clase homoclínica estable asociada al punto $p$ al conjunto:

$$Phc^s(p) := \{x \in \mathcal{R} : W^s(x) \pitchfork W^u(o(p)) \neq \phi\}$$

Análogamente se define la clase heteroclínica inestable como:

$$Phc^u(p) := \{x \in \mathcal{R} : W^u(x) \pitchfork W^s(o(p)) \neq \phi\}$$

Y por último definimos

$$Phc(p) := Phc^s(p) \cap Phc^u(p)$$

**Teorema** 1 *Sea $\mathcal{F}^{uu}$ foliación minimal de dimensión $u$, $p \in Per_H(f)$ de índice inestable $u$. Entonces $\exists\ \mathcal{U}(f)$ $C^1$-entorno tal que $\forall g \in \mathcal{U}(f)$ vale que $\exists\ p_g \in Per_H(g)$ donde $Phc^u(p_g) = M$*

Para obtener un resultado sobre la Estabilidad Ergódica usaremos el siguiente resultado demostrado por F. Rodriguez Hertz, J. Rodriguez Hertz, R. Ures y A. Tahzibi.

**Teorema** 2 (Criterio de Ergodicidad) *[HHTU] Sea $M$ una variedad compacta, $f : M \to M$ un difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ y $m$ una medida suave e invariante para $f$. Si $m(Phc^s(p)) > 0$ y $m(Phc^u(p)) > 0$ entonces:*

1. *$Phc(p) \overset{\circ}{=} Phc^s(p) \overset{\circ}{=} Phc^u(p)$*

2. *$f$ es ergódica en $Phc(p)$. Además, $f$ es no-uniformemente hiperbólica en $Phc(p)$.*

De estos dos teoremas se desprende inmediatamente el siguiente resultado:

**Teorema** 3 *Si* $m(Phc^s(p)) > 0$ *establemente entonces* $f$ *es establemente ergódica.*

Por último con esta técnica se probará la estabilidad ergódica del ejemplo de Bonatti-Viana [BV].

# Capítulo 1

# Conceptos Preliminares

En este capítulo comenzaremos dando una exposición de los conceptos y teoremas que se usarán a lo largo de esta tesis. Al final de este capítulo se expondrá el Criterio de Ergodicidad de [HHTU] el cual usaremos fuertemente en el segundo capítulo.

## 1.1. Exponentes de Lyapunov. Teoría de Pesin

Sea $f : M \to M$ difeomorfismo $C^1$ de una variedad compacta Riemaniana de dimensión n. Dado un vector $v \in T_xM$ definimos el exponente de Lyapunov de $v$ (en caso de estar bien definido) como:

$$\lambda(x, v) = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \| Df^n(x)v \|$$

Definimos $E_\lambda(x)$ como el subespacio de $T_xM$ formado por todos los vectores $v \in T_xM$ tales que su exponente de Lyapunov es $\lambda$.
De la definición se desprenden las siguientes propiedades:

1. $\lambda(x, \alpha v) = \lambda(x, v)$
2. $\lambda(x, u + v) \leq \max \{\lambda(x, u), \lambda(x, v)\}$
3. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $\lambda(x, u + v) = \max \{\lambda(x, u), \lambda(x, v)\}$

Observar que en la segunda propiedad se puede dar la desigualdad estricta

**Teorema** 1.1 (Teorema de Oseledec) *Sea $M$ una variedad compacta, $f : M \to M$ un difeomorfismo $C^1$. Entonces existe un conjunto $\mathcal{R}$ invariante de medida total (es decir $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$, $\mu(\mathcal{R}) = 1$ $\forall \mu$ medida invariante) y para cada $\epsilon > 0$ existe una función $C_\epsilon : \mathcal{R} \to (1, +\infty)$ medible Borel tal que $\forall x \in \mathcal{R}$, $v \in T_xM$ y $n \in \mathbb{Z}$ vale que:*

1. *$T_xM = \bigoplus_\lambda E_\lambda(x)$, esto es llamado Splitting de Oseledec.*
2. *$\frac{1}{C_\epsilon(x)} e^{(\lambda-\epsilon)n} \parallel v \parallel \leq \parallel Df^n(x)v \parallel \leq C_\epsilon(x) e^{(\lambda+\epsilon)n} \parallel v \parallel$, $\forall v \in E_\lambda(x)$.*
3. *$C_\epsilon(f(x)) \leq e^\epsilon C_\epsilon(x)$.*
4. *$\angle(E_\lambda(x), E_\gamma(x)) \geq \frac{1}{C_\epsilon(x)}$, $\forall \lambda \neq \gamma$.*

Obsérvese que el conjunto $\mathcal{R}$ del teorema de Oseledec es el conjunto de puntos regulares, por tanto Oseledec nos dice que el conjunto de todos los puntos regulares tiene medida total. Para ver una prueba detallada de dicho teorema el lector puede consultar [M, Teorema 10.1]

**Definición** 1.2 (Bloques de Pesin) *Dado $\epsilon > 0$, $L > 0$, definimos los bloques de Pesin como:*

$$\mathcal{R}_{\epsilon,L} = \{x \in \mathcal{R} : C_\epsilon(x) \leq L\}$$

*donde $\mathcal{R}$ es el conjunto de puntos regulares y $C_\epsilon$ es la función del Teorema de Oseledec.*

**Propiedades** 1.3 *En el contexto de la definición anterior se tiene que:*

1. *$\mathcal{R} = \bigcup_{\epsilon,L} \mathcal{R}_{\epsilon,L}$*
2. *$f(\mathcal{R}_{\epsilon,L}) \subseteq \mathcal{R}_{\epsilon,e^\epsilon L}$*
3. *Los bloques de Pesin no son necesariamente invariantes*

Sin perdida de generalidad nosotros podemos asumir que $\mathcal{R}_{\epsilon,L}$ son compactos, pues siempre podemos encontrar un compacto $K$ dentro del bloque de Pesin tal que la medida de la diferencia simétrica sea tan chica como uno desee.
Sean $E^-(x) = \bigoplus_{\lambda<0} E_\lambda(x)$ y $E^+(x) = \bigoplus_{\lambda>0} E_\lambda(x)$.
Por el Teorema de Oseledec tenemos que para casi todo $x \in M$ vale que

$$T_xM = E^-(x) \oplus E^0(x) \oplus E^+(x)$$

donde $E^0(x)$ es el subespacio generado por los vectores que poseen exponente de Lyapunov igual a cero.

**Definición** 1.4 *Sea $\mu$ una medida invariante. Cuando $E^0(x) = 0$ para $\mu - ctx$ en un conjunto $N$, entonces decimos que $f$ es* ***no-uniformemente hiperbólica*** *en $N$ y que $\mu$ es una medida* ***hiperbólica*** *en $N$.*

Ahora vamos a enunciar el Teorema de la Variedad Estable de Pesin, el lector interesado podrá ver una prueba de este teorema en el Capítulo 3 de esta tesis.

**Teorema** 1.5 (Teorema de la variedad Estable de Pesin [Pe]) *Para cada $L > 1$ y $\epsilon > 0$, si $x \in \mathcal{R}_{\epsilon,L}$, entonces:*

1. *$\widetilde{W}^s_{loc}(x)$ es un disco de dimensión igual a $dim E^-(x)$ tal que $T_x\widetilde{W}^s_{loc}(x) = E^-(x)$*

2. *El mapa $x \longmapsto \widetilde{W}^s_{loc}(x)$ es continuo en $\mathcal{R}_{\epsilon,L}$ con la topología $C^1$*

## 1.2. Laminaciones, Foliaciones

Una laminación $L$ es un conjunto compacto $\Lambda \subseteq M$ que puede ser cubierto por abiertos $U \subseteq \Lambda$ que poseen una estructura producto local $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \times T$, donde $T$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^k$ localmente compacto. En la intersección $U_\alpha \cap U_\beta$, la función $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \times T \longrightarrow \mathbb{R}^n \times T$ es un homeomorfismo y tiene la forma:

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(u, v) = (l_{\alpha\beta}(u, v), t_{\alpha\beta}(v))$$

donde $l_{\alpha\beta} \in C^1$ respecto a la variable u.
Los conjuntos $\phi^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{t\})$ son llamados placas. Cada punto $x$ de una laminación pertenece a un conexo maximal inmerso inyectivamente en una variedad de dimensión $n$, llamado la hoja de $x$ en $L$. Las hojas son uniones de placas. Obsérvese que las hojas son $C^1$, pero solo varían continuamente.
Decimos que $L$ es una laminación $f - invariante$ sii $L$ es una laminación y $f$ lleva hojas en hojas.
Llamaremos foliación a una laminación cuando $\Lambda = M$ y en este caso denotaremos mediante $\mathcal{F}$ el conjunto de las hojas. A grosso modo una foliación de dimensión n de una variedad de dimensión m, es una descomposición de M en subvariedades conexas de dimensión n (hojas). Un ejemplo sumamente elemental de foliación de dimensión n es una foliación de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ donde las hojas son planos $n$-dimensionales de la forma $\mathbb{R}^n \times \{c\}$, donde $c \in \mathbb{R}^{m-n}$.
Ahora sea $\mathcal{F} = \{W(x)\}$ una foliación decimos que una subvariedad $N \subseteq M$ es transversal a $\mathcal{F}$ y lo denotamos mediante $N \pitchfork \mathcal{F}$ sii $T_xN + E_x = T_xM$, donde $E_x = T_xW(x)$

## 1.3. El Criterio de Ergodicidad

En esta sección presentaremos el Criterio de Ergodicidad de [HHTU] el cual usaremos más adelante para obtener un resultado sobre la Estabilidad Ergódica de un difeomorfismo.
Diremos que una transformación $f : M \to M$ es **ergódica** si los límites de Birkhoff $\tilde{\varphi}(x) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi \circ f^j(x)$ son todos iguales a una constante para $ctx \in M$ para toda $\varphi$ continua.
Diremos que $f \in C^2$ es **establente ergódica** si $\exists\, \mathcal{U}(f)$ $C^1$-entorno de $f$ tal que $\forall g \in \mathcal{U}(f) \cap Diff^2_m(M)$ vale que $g : M \to M$ es Ergódica.

**Definición** 3.1 (Clase Heteroclínica) *Dado $p \in Per_H(f)$ llamaremos clase heteroclínica estable asociada a $p$ al conjunto:*

$$Phc^s(p) := \{x \in \mathcal{R} : W^s(x) \pitchfork W^u(o(p)) \neq \phi\}$$

*Análogamente se define la clase heteroclínica inestable como:*

$$Phc^u(p) := \{x \in \mathcal{R} : W^u(x) \pitchfork W^s(o(p)) \neq \phi\}$$

*Y en este contexto definimos*

$$Phc(p) := Phc^s(p) \cap Phc^u(p)$$

**Teorema** 3.2 (Criterio de Ergodicidad) *[HHTU] Sea $M$ una variedad compacta, $f : M \to M$ un difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ y $m$ una medida suave e invariante para $f$. Si $m(Phc^s(p)) > 0$ y $m(Phc^u(p)) > 0$ entonces:*

1. $Phc(p) \overset{\circ}{=} Phc^s(p) \overset{\circ}{=} Phc^u(p)$

2. *$f$ es ergódica en $Phc(p)$. Además, $f$ es no-uniformemente hiperbólica en $Phc(p)$.*

# Capítulo 2

# El Teorema Principal

Ahora estamos en condiciones de presentar el Teorema Principal el cual usaremos fuertemente en el próximo capítulo para probar la Estabilidad Ergódica de los ejemplos de Bonatti-Viana.

Sea $M$ una variedad compacta Riemmaniana, $f : M \to M$ difeomorfismo $C^2$ que preserva una medida suave $m$. Para los resultados aquí presentados supondremos que $f$ posee un spliting dominado $TM = E^{uu} \oplus E^{cs}$, donde $E^{uu}$ y $E^{cs}$ son subespacios $Df$-invariantes tales que:

$$\|Df(x)v^c\| < \|Df(x)v^u\| \quad \text{y} \quad \|Df(x)v^u\| > 1$$

Donde $v^c \in E^{cs}$ y $v^u \in E^{uu}$ son vectores unitarios.
Denotaremos mediante $\mathcal{F}^{uu}$ a la foliación tangente al fibrado $E^{uu}$.

**Teorema** 1.3 *Sea $\mathcal{F}^{uu}$ foliación minimal de dimensión $u$, $p \in Per_H(f)$ de índice inestable $u$. Entonces $\exists$ $\mathcal{U}(f)$ $C^1$-entorno tal que $\forall g \in \mathcal{U}(f)$ vale que $\exists$ $p_g \in Per_H(g)$ donde $Phc^u(p_g) = M$*

Del teorema anterior y del Criterio de Ergodicidad 3.2 se desprende el siguiente teorema:

**Teorema** 1.4 *Si $m(Phc^s(p)) > 0$ establemente entonces $f$ es establemente ergódica.*

Para demostrar el teorema anterior enunciaremos los siguientes lemas

**Lema** 1.5 *Para todo $\delta > 0$ y todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeï¿½o existe $\mathcal{U}$ un entorno $C^1$ de $f$ tal que:*

1. $\angle(W^s_{\epsilon/4,f}(p), W^s_{\epsilon/4,g}(p_g)) < \delta$

2. *El radio interno de* $W^s_{loc}(p_g) > \epsilon/2$

***Dem.*** Dado $f : M \to M$ difeomorfismo $C^1$ y $p$ un punto periódico hiperbólico de $f$, consideremos $\mathcal{U}(f)$ entorno $C^1$ de $f$ y $U_p$ entorno de $p$ dados por la continuación analítica de $p$. Tomando los entornos $\mathcal{U}(f)$ y $U_p$ suficientemente pequeï¿½os se obtiene que dado cualquier $\tilde{\epsilon} > 0$ vale que $d(W^s_{loc,f}(p), W^s_{loc,g}(p_g)) < \tilde{\epsilon}$ y por lo cual se obtiene que $\angle(W^s_{\epsilon/4,f}(p), W^s_{\epsilon/4,g}(p_g)) < \delta$. Por último del teorema de la variedad estable se obtiene que el radio interno de $W^s_{loc}(p_g) > \epsilon/2$ $\square$

**Lema** 1.6 *Dado $\epsilon > 0$, $\exists L > 0$ y $\mathcal{U}(f)$ tal que toda hoja $W^u_{f,L}(x)$ de diámetro interno $L$ $W^u_{f,L}(x)$ cumple que: $W^u_{f,L}(x) \pitchfork W^s_{g,\epsilon}(p_g) \neq \phi$*

***Dem.*** Tomemos los entornos $\mathcal{U}(f)$ y $U_p$ del lema anterior. Sea $\mathcal{F}^{uu}_f$ foliación inestable fuerte minimal de dimensión $u$, donde $u = indice_u(p) = \dim(T_p W^u_f(p))$. Sea $x \in M$, como $\mathcal{F}^{uu}_f$ es minimal tenemos que $W^u_f(x)$ es densa entonces dado $U_p \subset M$ entorno del lema anterior vale que $\exists L > 0$ tal que $W^u_{L,f}(x) \cap U_p \neq \phi$. Sea $z \in W^u_{L,f}(x) \cap U_p$. Afirmamos que $W^u_{loc,f}(z) \pitchfork W^s_{loc,f}(p) \neq \phi$ (ajustando $U_p$ en caso de ser necesario), dado que $W^u_{loc,f}(p) \pitchfork W^s_{loc,f}(p) \neq \phi$ y la continuidad del mapa $z \mapsto W^u_{loc,f}(.)$. De aquí se obtiene que $W^u_{L,f}(x) \pitchfork W^s_{loc,f}(p) \neq \phi$, por último como $\angle(W^s_{\epsilon/4,f}(p), W^s_{\epsilon/4,g}(p_g)) < \delta$ se tiene que $W^u_{f,L}(x) \pitchfork W^s_{g,\epsilon}(p_g) \neq \phi$. $\square$

Para concluir la prueba del teorema debemos probar que

$$Phc^u(p_g) = \left\{x \in M : W^u_g(x) \pitchfork W^s_g(p_g) \neq \phi\right\} = M$$

Dado $x \in M$ por el lema anterior sabemos que $W^u_f(x) \pitchfork D \neq \phi$, donde $D$ es un disco suficientemente pequeï¿½o en $W^s_g(p_g)$ de modo que $W^u_g(x) \pitchfork W^s_{g,\epsilon}(p_g) \neq \phi$ (pues $f$ y $g$ están $C^1$ cerca), por lo tanto se cumple que $Phc^u(p_g) = M$, lo cual concluye la prueba del teorema.

# Capítulo 3

# El Ejemplo de Bonatti-Viana

### Difeomorfismos transitivos cuya dirección central es en su mayoría contractiva [BV]

En esta sección vamos a estudiar un abierto $C^1$ de difeomorfismos transitivos en $\mathbb{T}^3$ que no admiten subespacio invariante estable fuerte $E^{ss}$. Es decir tenemos un splitting dominado Df-invariante $TM = E^{uu} \oplus E^c$, donde el subespacio inestable fuerte $E^{uu}$ es 1-dimensional y el subespacio central $E^c$ es 2-dimensional (en otras palabras $E^c$ no es uniformemente hiperbólico y no admite un subespacio invariante).
Una familia continua de conos $C = (C_x)$ definidos en un subconjunto $V \subset M$ son llamados **centro-inestables** si:

$$Df(x) \cdot C_x \subset C_{f(x)}, \quad \text{para todo} \quad x \in V \cap f^{-1}(V)$$

Llamaremos a la familia de conos como **inestable-fuerte** cuando $Df(x) \cdot C_x$ este contenido en $Int(C_{f(x)}) \cup \{0\}$, y todo vector de estos conos es expandido uniformemente: es decir existe $\sigma > 1$ tal que:

$$\| Df(x) \cdot v \| \geq \sigma \| v \|, \quad \text{para todo} \quad v \in C_x \quad y \quad x \in V \cap f^{-1}(V)$$

.

Finalmente, una familia continua de conos es **centro-estable** para $f$ si es **centro-inestable** para $f^{-1}$.
Antes de comenzar con el ejemplo vamos a enunciar un lema que haremos uso más adelante:

**Lema** 1.7 (Lema de Distorsión) *Dado $L > 0$ existe $K > 0$ tal que dado cualquier disco $C^2$ $\gamma \subset V$ tangente a la familia de conos inestable-fuerte con curvatura menor que $L$, y dado cualquier $n \geq 1$ tal que $diam(f^n(\gamma)) < 2L$, entonces:*

$$\frac{1}{K} \leq \frac{(J_\gamma f^n)(x)}{(J_\gamma f^n)(y)} \leq K$$

*para cualquier par de puntos $x, y \in \gamma$, donde $J_\gamma f(z) = |detDf|_{T_z\gamma}|$ es el Jacobiano de $f$ sobre $\gamma$.*

Ahora estamos en condiciones de comenzar con el ejemplo de esta seción.
Sea $f_0 : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ un difeomorfismo de Anosov con una dirección que expande y dos que contraen, $p$ un punto fijo de $f_0$. Pasaremos a deformar $f_0$ mediante una isotopía en un entorno $V_2 = B(p, \delta/2)$ de $p$ de manera tal que el mapa $f$ obtenido satisface que:

1. $f$ satisface las siguientes propiedades globales:

   *a*) Siempre existe un cono inestable-fuerte $C^{uu}$ y un cono centro-estable $C^{cs}$ definidos en todo punto tal que $C^{cs}$ contiene la dirección estable del mapa inicial $f_0$.

   *b*) La amplitud de los conos $C^{uu}$ y $C^{cs}$ está acotada en todos lados por una pequeï¿½a constante $\alpha > 0$.

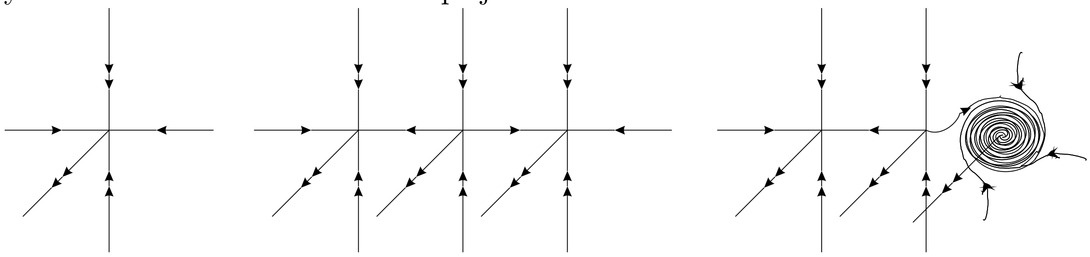
   *c*) El mapa $f^{-1}$ es $\delta - C^0$ cercano a $f_0^{-1}$ en todas partes y es $C^1$ cercano a $f_0^{-1}$ fuera de $V_2$ tal que $\| \left(Df^{-1}|_{T\mathcal{F}^c}\right)^{-1} \| \leq \lambda \leq 1/3$ fuera de $V_2$

   En particular $f$ posee una foliación inestable fuerte $\mathcal{F}^{uu}$ y una foliación central $\mathcal{F}^c$ como antes.

2. $f$ posee tres puntos fijos hiperbólicos (sillas) sobre $V_2$, contenidos en una misma hoja central $F^c$: un punto fijo con índice estable 1 y los otros dos puntos sillas poseen indice estable 2, por lo menos uno de los puntos de indice 2 posee un valor propio complejo.

3. Existe $\sigma > 1$ tal que $J^c = |\det Df^{-1}|_{T\mathcal{F}^c}| \geq \sigma$ en todos los puntos.

Una forma de obtener la seguna condición es tener $p$ pasando por una bifurcación transversal, como uno de sus valores propios se convierte en 1 entonces el índice estable cambia de 2 a 1 y los otros dos puntos sillas de índice 2. Entonces es suficiente tomar el valor propio contractivo de uno de los nuevos puntos sillas y convertirlo en un número complejo.



Supondremos que $\alpha > 0$ y $\delta > 0$ son suficientemente pequeï¿$\frac{1}{2}$os.

**Teorema** 1.8 *Para cada $f \in \mathcal{U}$ como antes, cada hoja inestable fuerte es densa en $T^3$.*

***Dem.*** Para demostrar este teorema veremos antes los lemas siguientes:

**Lema** 1.9 *Cualquier disco $D$ en una hoja central posee un iterado negativo $f^{-n}(D)$ con diámetro más grande que $100\delta$.*

***Dem.*** Sea $D$ un disco en una hoja central, sabemos que existe $\sigma > 1$ tal que $J^c = |\det Df^{-1}|_{T\mathcal{F}^c}| \geq \sigma$ en todos sus puntos, entonces:

$$Leb(f^{-n}(D)) = \int_D (J^c)^n dleb \geq \sigma^n Leb(D)$$

por lo cual $Leb(f^{-n}(D)) \to \infty$ lo que implica que el diámetro central de $f^{-n}(D)$ tiende a $\infty$, luego basta tomar $n$ suficientemente grande tal que $diam^c(f^{-n}(D)) > 100\delta$. $\square$

**Lema** 1.10 *Existe $x \in f^{-n}(D)$ tal que todos sus iterados negativos caen fuera de $V_3 = B(p, 3\delta)$*

***Dem.*** Tomemos $\delta > 0$ suficientemente pequeï¿$\frac{1}{2}$o tal que la mínima distancia central entre 2 componentes conexas de $V_3$ con cualquier hoja central es más grande que $100\delta$. Por la elección de $\delta$, los entornos centrales de radio $40\delta$ alrededor de las componentes conexas de $V_3 \cap F^c$ son dos a dos disjuntos. Por la afirmación anterior podemos suponer sin pérdida de generalidad que $diam^c(D) > 100\delta$. Denotemos $\Gamma_0 = D$, aquí $\Gamma_0$ no puede estar contenido en ninguno de los entornos anteriores, por conexión $\exists x_0 \in \Gamma_0$ tal que cuya bola central $B_0$ de radio $35\delta$ es disjunta de $V_3$.
Aquí $\Gamma_0$ es demasiado grande para estar contenido en $B_0$, por lo tanto tomaremos

un subconjunto compacto y conexo $\Gamma_0' \subset \Gamma_0$ que una $x_0$ con el borde de $B_0$. Por la tercer propiedad global se sabe que $f^{-1}(B_0)$ contiene una bola central de radio $\frac{1}{\lambda}35\delta > 100\delta$ alrededor de $f^{-1}(x_0)$. En particular el diámetro de $\Gamma_1 = f^{-1}(\Gamma_0)$ es mayor a $100\delta$.
Repitiendo el procedimiento, construimos una sucesión $\{\Gamma_n\}_{n\geq 0}$ de compactos conexos no vacíos tales que

$$f^n(\Gamma_n) \subset f^{n-1}(\Gamma_{n-1} - V_3), \quad \forall n \geq 1$$

Esto implica que $K_n = f^n(\Gamma_n - V_3)$ es una familia decreciente de compactos y cualquier punto $x \in \cap_{n\geq 0} K_n$ satisface la tesis de este lema. $\square$
Por el lema 1.9 sabemos que cualquier disco $D$ en una hoja central posee un iterado negativo $f^{-n_0}(D)$ cuyo diámetro central es mayor a $100\delta$. Por el lema 1.10 sabemos que existe $x \in f^{-n_0}(D)$ que posee todos sus iterados negativos fuera de $V_3 = B(p, 3\delta)$, en particular todo disco de radio central $2\delta$ alrededor de un iterado $f^{-n_0}(x)$ es disjunto de $V_2 = B(p, \delta/2)$.
Sea $D_\epsilon$ un pequeï¿$\frac{1}{2}$o disco alrededor de $x$ contenido en $f^{-n_0}(D)$. Por la tercer propiedad global tenemos que los iterados $f^{-n}(D_\epsilon)$ aumentan exponencialmente su radio interno, siempre y cuando este radio interno es menor que $2\delta$. Por lo tanto, debe haber algún $N \geq 1$ tal que el radio interno de $f^{-N}(D_\epsilon)$ es al menos $2\delta$. Entonces $f^{-N}(D_\epsilon)$ intersecta a cualquier segmento de longitud $L$ de cualquier hoja inestable fuerte, por lo tanto $D_\epsilon \subset f^{-n_0}(D)$ intersecta toda hoja inestable fuerte. Esto prueba que toda hoja inestable fuerte es densa. $\square$
Llamaremos **uu-segmento** a la imagen de cualquier encaje en una hoja inestable fuerte de un disco euclideo de dimensión uno.
Ahora supongamos que los difeomorfismo anteriores satisfacen las siguientes condiciones:

1. Existe una descomposición continua del tangente $TM = E^{uu} \oplus E^c$ y $0 < \lambda < 1$ tal que:
   a) La descomposición es invariante bajo $Df$.
   b) $\left\| \left(Df|_{E_x^{uu}}\right)^{-1} \right\| \leq \lambda$ y $\left\| \left(Df|_{E_x^c}\right) \right\| \left\| \left(Df|_{E_x^{uu}}\right)^{-1} \right\| \leq \lambda$ para todo $x \in \mathbb{T}^3$. Los subespacios $E^{uu}$ y $E^c$ son Hï¿$\frac{1}{2}$lder continuos y el subespacio inestable fuerte es únicamente integrable.
2. $\dim(E^{uu}) = 1$
3. Además, existe un dominio $V \subset M = \mathbb{T}^3$ tal que:

*a*) Existen $E > 0$, $c_0 \in (0,1)$ tal que, dado cualquier uu-segmento $\gamma$ cuya longitud $long(\gamma) \geq E$, podemos particionar $f(\gamma)$ en segmentos $\gamma(1), \ldots, \gamma(k)$ tal que $E \leq long(\gamma(i)) \leq 2E$, para todo $i = 1, \ldots, k$, y la longitud total de aquellos $\gamma(i)$ que intersectan $V$ es menor que $c_0 long(f(\gamma))$.

*b*) Existe $\lambda < 1$ y $\beta > 0$ tal que:

$$\left\| DF|_{E^c_x} \right\| \leq (1+\beta), \forall x \in V \quad y \quad \left\| DF|_{E^c_x} \right\| \leq \lambda, \forall x \in M - V$$

y para algún $k$ suficientemente grande vale que,

$$\lambda_1 := \lambda(1+\beta)^k < 1$$

**Proposición** 1.11 *Bajo lo asumido anteriormente vale que* $\lambda^c_+(x) < 0$ *para Lebesgue casi todo punto en cualquier uu-segmento.*

***Dem.*** Primero usaremos la condición 3 parte *a*) para mostrar que la órbita de casi todo punto en cualquier uu-segmento $\gamma$ pasa una fracción de tiempo positivo fuera de $V$. Por último la segunda condición del punto 3 implica la conclusión. Supongamos sin pérdida de generalidad que $long(\gamma) \geq E$. Sea

$$f^n(\gamma) = \bigcup_{i_1,\ldots,i_j} \gamma(i_1, \ldots, i_j)$$

que los construimos inductivamente de la siguiente forma:

- Escribimos $f(\gamma) = \gamma(1) \cup \ldots \cup \gamma(k)$ usando la primer condición del punto 3, es decir: $E \leq long(\gamma(i)) \leq 2E$.
- Supongamos que $\gamma(i_1, \ldots, i_{n-1})$ está definido con longitud entre $E$ y $2E$, nuevamente usamos la primer condición del punto 3 para escribir

$$f(\gamma(i_1, \ldots, i_{n-1})) = \gamma(i_1, \ldots, i_{n-1}, 1) \cup \ldots \cup \gamma(i_1, \ldots, i_{n-1}, k')$$

  donde $k'$ depende de $i_1, \ldots, i_{n-1}$.

Dado $n \geq r \geq 1$ y $1 \leq t_1 < \ldots < t_r < n$. Denotaremos $M(t_1, \ldots, t_r)$ al siguiente subconjunto de $\gamma$:
Primero definimos $M(t_1)$ como el conjunto de los $x \in \gamma$ tal que el segmento $\gamma(i_1, \ldots, i_{t_1})$ que contiene a $f^{t_1}(x)$ intersecta a $V$. Observar que $f^t(M(t_1))$ es la

unión de segmentos $\gamma(i_1,\ldots,i_t)$. Luego se procede por recurrencia, es decir para $r \geq 2$ el conjunto $M(t_1,\ldots,t_{r-1},t_r)$ consiste de los puntos $x \in M(t_1,\ldots,t_{r-1})$ tal que $f^{t_r}(x)$ está en cualquiera de los segmentos $\gamma(i_1,\ldots,i_{r-1},\ldots,i_r)$ que cortan a $V$.

**Lema** 1.12 *La medida de Lebesgue de $M(t_1,\ldots,t_r)$ está acotado por $c^r long(\gamma)$*

***Dem.*** Por la forma que hemos definido estos conjuntos tenemos que $f^t(M(t_1,\ldots,t_{r-1}))$ es una unión de segmentos $\gamma(i_1,\ldots,t)$ para cada $t \geq t_{r-1}$ y en particular para $t = t_r - 1$. Para simplificar un poco la notación denotemos mediante $\iota_r = (i_1,\ldots,i_{r-1})$. Para cada uno de los segmentos la primer condición del punto 3 nos da:

$$Leb(f^{t_r}(M(t_1,\ldots,t_{r-1},t_r)) \cap f(\gamma(\iota_r))) \leq c_0 long(f(\gamma(\iota_r)))$$

Por otro lado la longitud de $f(\gamma(\iota_r))$ está acotada por $2E \parallel Df \parallel$.

Luego usando el lema de distorsión 1.7 con $L = 2E \parallel Df \parallel$, $K > 0$ y $c = \frac{Kc_0}{1+(K-1)c_0} < 1$ se obtiene que:

$$Leb(M(t_1,\ldots,t_{r-1},t_r) \cap f^{-t_r+1}(\gamma(\iota_r))) \leq c long(f^{-t_r+1}(\gamma(\iota_r)))$$

Sumando sobre todos los $\gamma(\iota_r)$ contenidos en $f^{t_r-1}(M(t_1,\ldots,t_{r-1}))$ obtenemos que

$$Leb(M(t_1,\ldots,t_{r-1},t_r)) \leq c Leb(M(t_1,\ldots,t_{r-1}))$$

El lema se concluye por recurrencia. □

**Corolario** 1.13 *Existe $B > 0$ constante universal tal que $\forall n \geq 1$ el subconjunto medible Lebesgue*

$$M_n = \left\{ x \in \gamma / f^j(x) \in V \textit{para al menos } \frac{kn}{k+1} \textit{ valores de } j \in \{0,\ldots,n-1\} \right\}$$

*tiene medida acotada por $Bnc_1^{kn/(k+1)} long(\gamma)$.*

***Dem.*** $M_n \subset \bigcup_{t_1,\ldots,t_r} M(t_1,\ldots,t_r)$, $\forall n \geq r \geq \frac{kn}{(k+1)}$ entonces

$$Leb(M_n) \leq \sum_{r \geq \frac{kn}{(k+1)}} C_r^n c^r$$

Debido a la fórmula de Stirling's tenemos que

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} \leq B\frac{n^n}{r^r(n-r)^{n-r}}$$

para alguna constante universal $B$. Este último término lo podemos escribir como:

$$\left(\frac{n}{r}\right)^r \left(\frac{n}{n-r}\right)^{n-r} = \left[\left(1+\frac{n-r}{r}\right)\left(1+\frac{r}{n-r}\right)^{\frac{n-r}{r}}\right]^r$$

Observar que $r \geq \frac{kn}{k+1} \Leftrightarrow \frac{r}{n-r} \geq k$ y que la función $g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)(1+x)^{\frac{1}{x}}$ es decreciente cuando $x > 0$. De aquí se obtiene que:

$$C_r^n \leq B\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)(1+k)^{\frac{1}{k}}\right]^r$$

Tomando $c_1 = c\left(1+\frac{1}{k}\right)(1+k)^{\frac{1}{k}} < 1$ y sumando sobre todos los $r$ se obtiene lo deseado. $\square$

Como $\sum Leb(M_n) < \infty$ entonces por el lema de Borel-Cantelli se deduce que $Leb\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{j\geq n} M_j\right) = 0$. Notar que la órbita de cualquier punto en el complemento pasa al menos una fracción $\frac{1}{k+1}$ de tiempo fuera de $V$. Luego la primer etapa de la prueba está terminada.

Sea $K = \left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{j\geq n} M_j\right)^c$, tomemos $x \in K$ entonces existe un $n_0$ tal que $x \notin M_n$, $\forall n \geq n_0$. Si $x \notin M_n$ entonces $f^j(x) \in V$ a lo sumo $\frac{kn}{k+1}$ valores de $j \in \{0,\ldots,n-1\}$. Sea $J = Card\{j : f^j(x) \in V\} \leq \frac{kn}{k+1}$, debido a la condición 2 tenemos que $\left\|Df^n|_{E_x^c}\right\| = (1+\beta)^J\lambda^{n-J}$ y por lo tanto:

$$\left\|Df^n|_{E_x^c}\right\| \leq (1+\beta)^{\frac{kn}{k+1}}\lambda^{\frac{n}{k+1}} = \left[\lambda(1+\beta)^k\right]^{\frac{n}{k+1}}$$

y por lo tanto:

$$\lambda_+^c(x) = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left\|Df^n|_{E_x^c}\right\| \leq \frac{\log(\lambda_1)}{k+1} < 0$$

Lo cual concluye la tesis de la proposición. $\square$

Por último por la minimalidad de la foliación inestable fuerte $\mathcal{F}^{uu}$, la proposición 1.11, el teorema de la variedad estable y el teorema 1.4 se obtiene que esta familia de difeomorfismos son establemente ergódicos.

# Capítulo 4

# Demostración de Tahzibi

En esta capítulo vamos a exponer un esquema de la demostración de A. Tahzibi en el contexto de Bonatti-Viana [BV] en $\mathbb{T}^3$.
Sea $M$ una variedad compacta y $f : M \to M$ un difeomorfismo $C^1$. Decimos que el splitting $TM = E^{cs} \oplus E^{cu}$ es dominado si es Df-invariante y existe $C > 0$ y $\lambda < 1$ tal que

$$\left\| Df|_{E_x^{cs}} \right\| \left\| Df^{-1}|_{E_{f(x)}^{cu}} \right\| \leq C\lambda, \quad \forall x \in M$$

Denotaremos mediante $E^{cs} \prec E^{cu}$ para indicar que $E^{cu}$ está dominando a $E^{cs}$.
Cuando tenemos un spliting dominado como antes se tiene dos conos invariantes $C^{cu}$ y $C^{cs}$ (cono centro inestable y centro estable respectivamente) con las siguientes propiedades:

$$C_a^{cu} = \{v_1 + v_2 \in E^{cs} \oplus E^{cu} : \| v_1 \| \leq a \| v_2 \|\}, \quad Df(C_a^{cu}(x)) \subset C_{\lambda a}^{cu}(f(x))$$

$$C_a^{cs} = \{v_1 + v_2 \in E^{cs} \oplus E^{cu} : \| v_2 \| \leq a \| v_1 \|\}, \quad Df^{-1}(C_a^{cs}(x)) \subset C_{\lambda a}^{cs}(f^{-1}(x))$$

Sea $f_0 : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ difeomorfismo lineal de Anosov, denotamos mediante $TM = E_0^u \oplus E_0^s$ el splitting hiperbólico para $f_0$ donde $\dim(E_0^s) = s$ y $\dim(E_0^u) = u$. Sea $V = \cup V_i$ la unión finita disjunta de bolas en $\mathbb{T}^3$. Supondremos que $f_0$ poseen un punto fijo fuera de $V$.
Decimos que $f \in \mathcal{V}$, $\mathcal{V} \subset Diff^1(\mathbb{T}^3)$ si este satisface las siguientes condiciones $C^1$-abiertas:

1. El fibrado tangente $TM$ admite una descomposición dominada y existen pequeños conos continuos $C^u$ y $C^{cs}$ invariantes por $Df$ y $Df^{-1}$ conteniendo a $E_0^u$ y $E_0^s$.

2. $f$ es $C^1$-cercano a $f_0$ en $V^c$, luego para cualquier $x \notin V$ existe $\sigma < 1$ tal que:
$$\left\|(Df|_{T_xD^u})^{-1}\right\| < \sigma \quad y \quad \|(Df|_{T_xD^{cs}})\| < \sigma$$
3. Existe alguna constante $\delta_0 > 0$ tal que si $x \in V$
$$\left\|(Df|_{T_xD^u})^{-1}\right\| < 1+\delta_0 \quad y \quad \|(Df|_{T_xD^{cs}})\| < 1+\delta_0$$
4. $\mathcal{F}^{uu}$ de $f$ es minimal.

De la continuidad de $\det Df$ se concluye lo siguiente:

**Proposición** 1.14 *Para toda $f \in \mathcal{V} \cap Diff^2_w(\mathbb{T}^3)$, existe $\sigma_1 > 1$, $C > 0$ tal que:*
$$\left|\det\left(Df^n(x)|_{T_x(D^{cs})}\right)\right| \leq C\sigma_1^{-n}$$
$$\left|\det\left(Df^{-n}(x)|_{T_x(D^{cu})}\right)\right| \leq C\sigma_1^{-n}$$
*donde $D^{cs}$ y $D^{cu}$ son discos tangentes a $C^{cs}$ y $C^{cu}$*

Sea $W \subset \mathbb{T}^3$ una subvariedad $u$-dimensional y $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{T}^3$ la proyección, decimos que $W$ es dinámicamente flat si para $\widetilde{W}_n$ (cualquier levantado de $f^n(W)$ a $\mathbb{R}^3$) se cumple que $leb(\widetilde{W}_n \cap K) \leq C$, donde $K$ es cualquier cubo unitario en $\mathbb{R}^3$ y $C$ es una constante que depende sólo de $f$.
Dada $f \in \mathcal{V} \cap Diff^2(\mathbb{T}^3)$, decimos que su fibrado tangente $TM = E^{cs} \oplus E^u$ es volumétricamente hiperbólico si $\exists C > 0$ y $\lambda < 1$ tales que $|\det(Df^n(x)|_{E^{cs}})| \leq C\lambda^n$ y $|\det(Df^{-n}(x)|_{E^u})| \leq C\lambda^n$

**Lema** 1.15 *$W^u(q)$ es dinámicamente flat.*

***Dem.*** Sea $\mathcal{F}_0(q)$ la hoja de la foliación inestable de $f_0$ que pasa a través de $q$. Como $\mathcal{F}_0$ es una hoja de un difeomorfismo lineal de Anosov, cualquier levantado de esta hoja a $\mathbb{R}^3$ será un subespacio u-afín que es la imagen de un mapa propio de $\mathbb{R}^u$ a $\mathbb{R}^3$. Por la invariancia de los conos $C^{cu}$ se concluye que el espacio tangente de cualquier levantado $\widetilde{\mathcal{F}_n}$ de $\mathcal{F}_n = f^n(\mathcal{F}_0(q))$ cumple que cada punto de $\widetilde{\mathcal{F}_n}$ está en $C^{cu}$ y este también es la imagen propia de $\mathbb{R}^u$. De este modo para cualquier cubo unitario $K$ se obtiene que $\widetilde{\mathcal{F}_n} \cap K$ puede ser visto como el gráfico de una función $C^1$ cuyo dominio es la base u-dimensional del cubo.
Esta función posee norma pequeï¿$\frac{1}{2}$a de la derivada que es independiente de $K$ y $n$ dado que este gráfico es tangente a $C^{cu}$. Luego $\widetilde{\mathcal{F}_n} \cap K$ posee área uniformemente acotada (respecto a $Leb_{\widetilde{\mathcal{F}_n}}$), por último como $W^u(q) \cap K$ está contenida en el límite de $\widetilde{\mathcal{F}_n} \cap K$ se obtiene que $W^u(q)$ es dinámicamente flat. $\square$

**Proposición** 1.16 *Sea $W$ una subvariedad dinámicamente flat y $f \in \mathcal{V} \cap Diff^2(\mathbb{T}^3)$ cuyo fibrado tangente $TM = E^{cs} \oplus E^u$ es volumétricamente hiperbólico. Entonces todo disco pequeño en $W$ contiene un subconjunto de medida total respecto a $leb_W$ para el cual:*

$$\limsup \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left\| Df|_{E^{cs}_{f^j(x)}} \right\| \leq -c_0$$

$$\limsup \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left\| \left( Df|_{E^{u}_{f^j(x)}} \right)^{-1} \right\| \leq -c_0$$

*donde $c_0 > 0$.*

***Dem.***

**Lema** 1.17 *Existe $\epsilon > 0$ y un subconjunto de medida total respecto a Lebesgue de cualquier disco pequeño $D$ en $W$ tal que $|\{0 \leq j < n : f^j(x) \notin V\}| \geq \epsilon n$, para $n$ suficientemente grande.*

***Dem.*** Elegimos una partición en dominios $B_1, B_2, ..., B_{p+1} = V$ en $\mathbb{T}^3$ tales que existen $K_i$, $L_i$ cubos abiertos en $\mathbb{R}^3$ / $B_i \in \Pi(K_i)$, $f(B_i) \in \Pi(L_i)$.

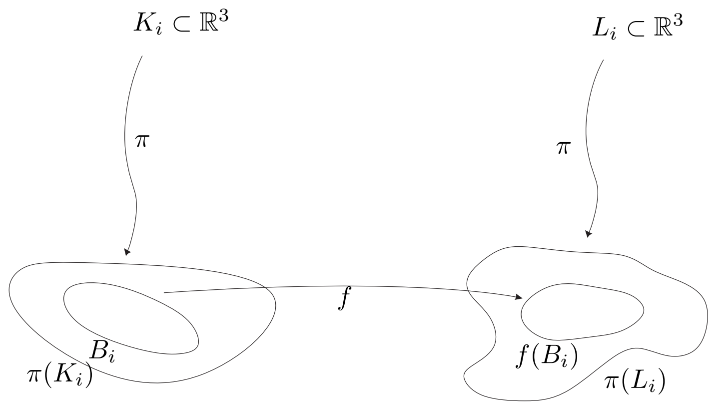



Figura 4.1:

Dado $i$ un arreglo de la forma $(i_0, i_1, ..., i_{n-1})$ definimos el conjunto

$$[i] = \left\{ x \in D / x \in B_{i_0}, f(x) \in B_{i_1}, ..., f^{n-1}(x) \in B_{i_{n-1}} \right\}$$

Sea $\sigma_1$ como en la proposición 1.14

**Lema** 1.18 *$Leb([i]) \leq C\sigma_1^{-n}$, donde $C$ es una constante que sólo depende de $f$.*

***Dem.*** Usando inducción completa se obtiene que $f^j([i]) \in \Pi(\widetilde{W_n} \cap L_{i_{j-1}})$ donde $\widetilde{W_n}$ es un levantado de $f^n(W)$ a $\mathbb{R}^3$. Por otro lado observemos que

$$Leb([i]) \leq \sigma_1^{-n} Leb(f^n([i])) \leq \sigma_1^{-n} Leb(\widetilde{W} \cap L_{i_{n-1}}) \leq C\sigma_1^{-n}$$

Pues la segunda desigualdad es inmediata por la afirmación anterior, la tercer desigualdad también es inmediata dado que $W$ es dinámicamente flat. Por último la primer desigualdad es válida por la proposición 1.14, pues:

$$Leb([i]) = \int_{[i]} dleb = \int_{f^n([i])} \det(Df^{-n}(x)) dleb \leq C\sigma_1^{-n} leb(f^n([i]))$$

Luego esto prueba que $Leb([i]) \leq C\sigma_1^{-n}$ $\square$

Volviendo a la prueba del lema 1.17 sea $g(i)$ el número de los valores $0 \leq j \leq n-1$ tales que $i_j \leq p$. Es decir dado un cilindro $(i_0, i_1, ..., i_{n-1})$ a cada $i_l$ se le asocia $x_l$ que toma el valor 1 si $i_l \leq p$ y 0 en caso contrario, por lo tanto $g(i) = x_0 + x_1 + ... + x_{n-1}$, luego el número total de arreglos $g(i) \leq \epsilon n$ está acotado por $\sum_{k \leq \epsilon n} C_k^n p^k \leq \sum_{k \leq \epsilon n} C_k^n p^{\epsilon n}$, de la fórmula de Stirling se obtiene que $\sum_{k \leq \epsilon n} C_k^n p^{\epsilon n} \leq e^{\beta_0 n} p^{\epsilon n}$ donde $\beta_0 \to 0$ cuando $\epsilon \to 0 \Rightarrow |\{g(i) \leq \epsilon n\}| \leq e^{\beta_0 n} p^{\epsilon n}$. Como $Leb([i]) \leq C\sigma_1^{-n}$ obtenemos que la unión de los conjuntos $[i]$ para el cual $g(i) \leq \epsilon n$ posee medida de Lebesgue menor que $C\sigma_1^{-n} e^{\beta_0 n} p^{\epsilon n}$. Elegimos $\epsilon$ suficientemente pequeño tal que $e^{\beta_0} p^{\epsilon} < \sigma_1 \Rightarrow C\sigma_1^{-n} e^{\beta_0 n} p^{\epsilon n} < C \Rightarrow$ por el lema de Borel Cantelli se obtiene que existe un conjunto de medida total tal que $|\{0 \leq j < n : f^j(x) \notin V\}| \geq \epsilon n$ y esto concluye el lema 1.17.

$\square$

Para probar la proposición 1.16 tomemos $c_0 = -\log(\sigma^{\epsilon}(1+\delta_0)^{1-\epsilon})$, con $\delta_0$ suficientemente pequeño tal que $c_0 > 0$. $\square$

**Proposición** 1.19 *Casi todos los puntos de la variedad inestable local de $q$ satisface la propiedad de no-uniformemente hiperbólico.*

***Dem.*** Por el lema 1.15 sabemos que $W^u(q)$ es dinámicamente flat, como $W^u_{loc}(q)$ es un disco pequeño en $W^u(q)$ se obtiene por la proposición 1.16 que $W^u_{loc}(q)$ contiene un subconjunto de medida total para el cual sus exponentes de Lyapunov son todos distintos de cero y por lo tanto se obtiene lo deseado. $\square$

Hasta ahora tenemos que existe un conjunto $K$ de medida positiva en $W^u_{loc}(q)$ donde cada punto posee exponentes de Lyapunov negativos, por el teorema de la variedad estable se obtiene que $W^s_\epsilon(x)$ es un disco de dimensión $s$ $\forall x \in K$ de aquí se obtiene que $m(Phc^s_f(q)) > 0$ $\forall f \in \mathcal{V}$, luego usando el teorema 1.4 se obtiene que esta familia de difeomorfismos son establemente ergódicos.

# Capítulo 5

# El Teorema de la Variedad Estable de Pesin

En este capítulo daremos una prueba del Teorema de la Variedad Estable de Pesin y veremos algunas propiedades de la Teoría de Pesin.

Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo de una variedad compacta Riemanniana $M$. Un subconjunto $\mathcal{R} \subset M$ $f$-invariante es llamado no-uniformemente hiperbólico si existen:

1. $\lambda$ y $\mu$ reales tales que $0 < \lambda < 1 < \mu$
2. Un número $\epsilon$ y funciones $C, K : \mathcal{R} \to (0, \infty)$
3. Subespacios $E^s(x)$ y $E^u(x)$ para cada $x \in \mathcal{R}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

    *a*) Los subespacios $E^s(x)$ y $E^u(x)$ dependen mediblemente de $x$ y forman un splitting invariante del tangente, es decir: $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$, $D_xf(E^s(x)) = E^s(f(x))$ y $D_xf(E^u(x)) = E^u(f(x))$.

    *b*) El subespacio $E^s(x)$ es **estable**, es decir si $v \in E^s(x)$, $m \in \mathbb{Z}$, y $n > 0$ se tiene:
    $$\|D_{f^m(x)}f^n v\| \leq C(f^m(x))\lambda^n e^{\epsilon n}\|v\|$$

    *c*) El subespacio $E^u(x)$ es **inestable**, es decir si $v \in E^u(x)$, $m \in \mathbb{Z}$, y $n < 0$ se tiene:
    $$\|D_{f^m(x)}f^n v\| \leq C(f^m(x))\mu^n e^{\epsilon|n|}\|v\|$$

*d)* $\angle(E^s(f^n(x)), E^u(f^n(x))) \geq K(f^n(x)), \forall n \in \mathbb{Z}$

*e)* Para $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$C(f^{m+n}(x)) \leq C(f^m(x))e^{\epsilon|n|}, \quad K(f^{m+n}(x)) \geq K(f^m(x))e^{-\epsilon|n|}$$

Dado $\epsilon > 0$ fijo y $l > 0$ definimos el bloque de Pesin de nivel $l$ mediante:

$$\mathcal{R}_{\epsilon,l} = \left\{ x \in \mathcal{R} : C(x,\epsilon) \leq l, K(x,\epsilon) \geq \frac{1}{l} \right\}$$

Los bloques de Pesin poseen las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{R}_{\epsilon,l} \subset \mathcal{R}_{\epsilon,l+1}$
2. $\mathcal{R} = \cup_{\epsilon,l}\mathcal{R}_{\epsilon,l}$
3. Los bloques de Pesin no son necesariamente invariantes, además $f(\mathcal{R}_{\epsilon,l}) \subset \mathcal{R}_{\epsilon,le^{\epsilon}}$
4. Los subespacios $E^s(x)$ y $E^u(x)$ dependen continuamente en $x \in \mathcal{R}_{\epsilon,l}$

Las primeras tres propiedades son inmediatas, para la cuarta consideremos $\mathcal{Q}_{\epsilon,l} = \overline{\mathcal{R}_{\epsilon,l}}$ las clausuras de los bloques de Pesin.
Sea $\mathcal{Q} = \cup_{\epsilon,l}\mathcal{Q}_{\epsilon,l}$, aquí $\mathcal{Q}_{\epsilon,l} \subset \mathcal{Q}_{\epsilon,l+1}$ y $\mathcal{Q}$ es $f$-invariante.
Dado un punto $x \in \mathcal{Q}_{\epsilon,l}$ elegimos una sucesión de puntos $x_n \in \mathcal{R}_{\epsilon,l}$ que converja a $x$. Pasando a una subsucesión convergente podemos asumir que las sucesiones de subespacios $E^s(x_n)$ $E^u(x_n)$ convergen a algún subespacio en $x$ el cual denotamos mediante $E^s(x)$ y $E^u(x)$ respectivamente. Se puede ver que cumplen las siguientes propiedades:

1. $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$
2. si $v \in E^s(x)$ y $n > 0$ entonces:
$$\| d_xf^nv \| \leq l\lambda^n e^{\epsilon n} \| v \|$$
3. si $v \in E^u(x)$ y $n < 0$ entonces:
$$\| d_xf^nv \| \leq l\mu^n e^{\epsilon|n|} \| v \|$$
4. $\angle(E^s(x), E^u(x)) \geq \frac{1}{l}$

Esto implica que los subespacios $E^s(x)$ y $E^u(x)$ están únicamente definidos y en particular no depende de la elección de la sucesión $x_n \to x$. De aquí se obtiene también que los subespacios dependen continuamente en $x$.

## 5.1. Existencia de la Variedad Estable Local

Sea $f$ un difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ de una variedad compacta Riemanniana $M$. Consideremos un conjunto $\mathcal{R}$ $f$-invariante no-uniformemente hiperbólico y $\mathcal{R}_{\epsilon,l}$ los bloques de Pesin asociados. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que los bloques de Pesin son compactos.
Se dará una prueba del teorema de la variedad estable debida a Pesin [Pe] usando el método de Hadarmard-Perron.
Vale la pena mencionar que Pugh [Pu] construye explícitamente un ejemplo de un difeomorfismo $C^1$ (que no es $C^{1+\alpha}$ para cualquier $\alpha$) el cual no cumple la tesis del Teorema de la Variedad Estable, de aquí se observa que la hipótesis $C^{1+\alpha}$ es necesaria en dicho teorema. A continuación enunciaremos el Teorema de Hadamard-Perron el cual usaremos más adelante.

**Teorema** 1.1 (Hadamard-Perron) *Sea $\lambda < \mu$ y elejimos*
$0 < \gamma < \text{mín}\left\{1, \sqrt{\mu/\lambda} - 1\right\}$ *y* $0 < \delta < \text{mín}\left\{\frac{\mu-\lambda}{\gamma+2+1/\gamma}, \frac{\mu-(1+\gamma)^2\lambda}{(1+\gamma)(\gamma^2+2\gamma+2)}\right\}$.
*Para $r \geq 1$ y para cada $m \in \mathbb{Z}$ sea $f_m : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ un difeomorfismo $C^r$ tal que:*

$$f_m(v, w) = (A_m v + g_m(v, w), B_m w + h_m(v, w))$$

*para $(v, w) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{p-k}$, donde $A_m : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ y $B_m : \mathbb{R}^{p-k} \to \mathbb{R}^{p-k}$ son mapas lineales donde $\| A_m \| \leq \lambda$, $\| B_m^{-1} \|^{-1} \geq \mu$ y $g_m(0) = h_m(0) = 0$, $\| g_m \|_{C^1} < \delta$, $\| h_m \|_{C^1} < \delta$. Entonces se cumple que:*

1. *Existe una única familia $\{W_m^+\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de variedades $C^1$ $k$-dimensionales tales que:*

$$W_m^+ = \left\{(v, \varphi_m^+(v)) : v \in \mathbb{R}^k\right\} = Graf\,\varphi_m^+$$

2. *Existe una única familia $\{W_m^-\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de variedades $C^1$ $(p-k)$-dimensionales tales que:*

$$W_m^- = \left\{(\varphi_m^-(w), w) : w \in \mathbb{R}^{p-k}\right\} = Graf\,\varphi_m^-$$

*Donde $\varphi_m^+ : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{p-k}$, $\varphi_m^- : \mathbb{R}^{p-k} \to \mathbb{R}^k$, $sup_{m\in\mathbb{Z}} \| d\varphi_m^\pm \| < \gamma$, y se cumplen las siguientes propiedades:*

a) $f_m(W_m^-) = W_{m+1}^-$, $f_m(W_m^+) = W_{m+1}^+$.

b) $\| f_m(z) \| < \tilde{\lambda} \| z \|$, $\forall z \in W_m^-$, $\| f_{m-1}^{-1}(z) \| < \tilde{\mu}^{-1} \| z \|$, $\forall z \in W_m^+$, *donde* $\tilde{\lambda} := (1+\gamma)(\lambda + \delta(1+\gamma)) < \frac{\mu}{1+\gamma} - \delta =: \tilde{\mu}$

c) *Sea* $\tilde{\lambda} < \nu < \tilde{\mu}$. *Si* $\| f_{m+L-1} \circ \ldots \circ f_m(z) \| < C\nu^L \| z \|$, *para todo* $L \geq 0$ *y algún* $C > 0$ *entonces* $z \in W_m^-$. *Similarmente, si* $\| f_{m-L}^{-1} \circ \ldots \circ f_{m-1}^{-1}(z) \| < C\nu^{-L} \| z \|$, *para todo* $L \geq 0$ *y algún* $C > 0$ *entonces* $z \in W_m^+$.

**Teorema** 1.2 (Teorema de la Variedad Estable) *Para cada* $x \in \mathcal{R}$ *existe una variedad estable local* $W^s(x)$ *tal que* $x \in W^s(x)$, $T_x W^s(x) = E^s(x)$ *y si* $y \in W^s(x)$ *entonces* $\rho(f^n(x), f^n(y)) \leq T(x)\lambda^n e^{\epsilon n}\rho(x,y)$, $n \geq 0$. *Donde* $\rho$ *es la distancia en* $M$ *inducida por la métrica Riemanniana y* $T : \mathcal{R} \to (0, +\infty)$ *es una función Borel medible que satisface* $T(f^m(x)) \leq T(x)e^{10\epsilon|m|}$, $m \in \mathbb{Z}$

***Dem.*** Fijemos $x \in M$ y consideremos el mapa

$$\tilde{f}_x = exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ exp_x : B^s(r) \times B^u(r) \subset T_x M \to T_{f(x)} M$$

$$\begin{tikzcd}
B^s(r) \times B^u(r) \arrow[r, "\tilde{f}_x"] \arrow[d, "exp_x"] & T_{f(x)}M \arrow[d, "exp_{f(x)}"] \\
M \arrow[r, "f"] & M
\end{tikzcd}$$

Donde $B^s(r)$ es la bola de radio $r$ en $E^s(x)$ centrada en el origen (Análogamente $B^u(r)$ respecto a $E^u(x)$), aquí $r = r(x)$ es llamado el tamaï¿½o de la variedad estable. Observar que el mapa $\tilde{f}_x$ esta bien definido para $r$ suficientemente chico. Como $\mathcal{R}$ es no-uniformemente hiperbólico tenemos que el mapa $\tilde{f}_x$ se puede escribir como:

$$\tilde{f}_x(v,w) = (A_x v + g_x(v,w), B_x w + h_x(v,w))$$

donde $v \in E^s(x)$, $w \in E^u(x)$. Además $A_x : E^s(x) \to E^s(f(x))$ y $B_x : E^u(x) \to E^u(f(x))$ son mapas lineales donde $A_x$ es una contracción y $B_x$ una expasión. Aquí $f \in C^{1+\alpha}$ también tenemos:

$$\| g_x(v,w)) \| \leq C_1(\| v \| + \| w \|)^{1+\alpha}, \| h_x(v,w)) \| \leq C_2(\| v \| + \| w \|)^{1+\alpha}$$

$$\| dg_x(v_1,w_1) - dg_x(v_2,w_2)) \| \leq C_1(\| v_1 - v_2 \| + \| w_1 - w_2 \|)^{\alpha}$$

$$\| dh_x(v_1,w_1) - dh_x(v_2,w_2)) \| \leq C_2(\| v_1 - v_2 \| + \| w_1 - w_2 \|)^{\alpha}$$

En otras palabras el mapa $\tilde{f}_x$ se puede ver como una pequeï¿½a perturbación del mapa lineal $(v,w) \to (A_x v, B_x w)$ por los mapas $(g_x(v,w), h_x(v,w))$ que cumplen las condiciones anteriores.

Antes de continuar vamos a introducir un producto interno en el tangente el cual es conocido como producto interno de Lyapunov. Este proporciona una herramienta técnica conveniente en el estudio de la hiperbolicidad no uniforme y sustancialmente simplifica la construcción de la variedad estable local.

Elejimos dos números $0 < \lambda' < \mu' < \infty$ tales que:

$$\lambda e^{\epsilon} < \lambda', \quad \mu' < \mu e^{-\epsilon}$$

Definimos el producto interno de Lyapunov $\langle \cdot, \cdot \rangle'_x$ de la siguiente forma:

$$\langle v, w \rangle'_x = \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle df^k v, df^k w \right\rangle_{f^k(x)} (\lambda')^{-2k}, \quad si \quad v, w \in E^s(x)$$

$$\langle v, w \rangle'_x = \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle df^{-k} v, df^{-k} w \right\rangle_{f^{-k}(x)} (\mu')^{2k}, \quad si \quad v, w \in E^u(x)$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la hiperbolicidad no uniforme de $\mathcal{R}$ y la forma en que elejimos $\lambda'$ y $\mu'$ se obtiene que cada serie es convergente. Veamos la primera:

$$\left|\langle v, w \rangle'_x\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left|\left\langle df^k v, df^k w \right\rangle_{f^k(x)}\right| (\lambda')^{-2k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \| df^k v \|_{f^k(x)} \| df^k w \|_{f^k(x)} (\lambda')^{-2k}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} C(x)^2 \left[\left(\frac{\lambda e^{\epsilon}}{\lambda'}\right)^2\right]^k \| v \|_x \| w \|_x \leq \sum_{k=0}^{\infty} C(x)^2 \left(\frac{\lambda e^{\epsilon}}{\lambda'}\right)^k \| v \|_x \| w \|_x$$

$$= C(x)^2 \left(1 - \frac{\lambda e^{\epsilon}}{\lambda'}\right)^{-1} \| v \|_x \| w \|_x < \infty$$

Entonces:

$$\left|\langle v, w \rangle'_x\right| \leq C(x)^2 \left(1 - \frac{\lambda e^{\epsilon}}{\lambda'}\right)^{-1} \| v \|_x \| w \|_x < \infty, \quad \forall v, w \in E^s(x)$$

Análogamente

$$\left|\langle v,w\rangle'_x\right| \leq C(x)^2\left(1-\frac{\mu'}{\mu e^{-\epsilon}}\right)^{-1} \| v \|_x \| w \|_x < \infty, \quad \forall v,w \in E^u(x)$$

Ahora extendemos $\langle\cdot,\cdot\rangle'_x$ a todos los vectores de $T_xM$ haciendo que los subespacios $E^s(x)$ y $E^u(x)$ sean mutuamente ortogonales respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle'_x$, es decir si $v = v^s + v^u$ y $w = w^s + w^u$ entonces: $\langle v,w\rangle'_x = \langle v^s,w^s\rangle'_x + \langle v^u,w^u\rangle'_x$.
La norma inducida por el producto interno de Lyapunov es llamada norma de Lyapunov y la denotaremos mediante $\|\cdot\|'_x$. A continuación veamos unas propiedades del producto y la norma de Lyapunov

**Propiedades** 1.3 *1. El ángulo entre los subespacios $E^s(x)$ y $E^u(x)$ con el producto interno de Lyapunov es $\frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathcal{R}$.*

*2. $\| A_x \|' \leq \lambda'$ y $\| B_x^{-1} \|' \leq \frac{1}{\mu'}$.*

*3. La relación entre el producto interno de Lyapunov y el producto interno de la estructura Riemanniana está dado por:*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \| w \|_x \leq \| w \|'_x \leq D(x) \| w \|_x$$

*donde $w \in T_xM$ y $D(x) = C(x)K(x)^{-1}\left[\left(1-\frac{\lambda e^{\epsilon}}{\lambda'}\right)^{-1} + \left(1-\frac{\mu'}{\mu e^{-\epsilon}}\right)^{-1}\right]^{1/2}$ es una función medible que satisface $D(f^m(x))) \leq D(x)e^{2\epsilon|m|}, \quad m \in \mathbb{Z}$*

***Dem.*** La primer afirmación claramente es cierta por como construimos el producto de Lyapunov.
Veamos la segunda; sea $v \in E^s(x)$

$$\| A_xv \|'^2 = \langle dfv, dfv\rangle' = \sum_{k=0}^{\infty}\left\langle df^k dfv, df^k dfv\right\rangle(\lambda')^{-2k}$$

$$= (\lambda')^2\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle df^k v, df^k v\right\rangle(\lambda')^{-2k} = (\lambda')^2\left(\| v \|'^2 - \| v \|^2\right) \leq (\lambda')^2 \| v \|'^2$$

Luego $\| A_xv \|' \leq \lambda' \| v \|'$ lo cual implica lo deseado.
La otra desigualdad es análoga.
Veamos la primer desigualdad de la tercer afirmación. Tomemos $w \in TxM$, $w =$

$w^s + w^u$ y supongamos que $\| w^s \| \geq \| w^s \|$ (si fuese al revés hacemos lo mismo). Primero observemos que de la definición de la norma de Lyapunov se obtiene que $\| w^s \|_x' \geq \| w^s \|_x$ y $\| w^u \|_x' \geq \| w^u \|_x$ y por lo tanto:

$$\| w \|_x' = \sqrt{\langle w^s, w^s \rangle_x' + \langle w^u, w^u \rangle_x'} = \sqrt{\| w^s \|_x'^2 + \| w^u \|_x'^2}$$
$$\geq \sqrt{\| w^s \|_x^2 + \| w^u \|_x^2} \geq \sqrt{2} \| w^s \|_x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \| w \|_x$$

Para probar la otra desigualdad hay que usar que los ángulos entre el estable e inestables están acotados por la función $K$ (Ver definición de no-uniformemente hiperbólico al principio de este capítulo) y las cotas de los productos internos de Lyapunov que surgen de analizar la convergencia de cada serie. $\square$

Ahora pasaremos a construir la variedad estable local. Fijemos $x \in \mathcal{R}$ y consideremos la familia de mapas $F_m = \tilde{f}_{f^m(x)}$ (extendiéndolos a un difeomorfismo en todo el tangente de forma tal que en el entorno de 0 estén $C^1$ cerca y fuera del entorno coincidan). Identificamos los planos tangentes $T_{f^m(x)}M$ con $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{p-k}$ ($p = \dim M$, $1 \leq k < p$) vía los isomorfismos $\tau_m$ tales que:

$$\tau_m(E^s(x)) = \mathbb{R}^k, \quad \tau_m(E^u(x)) = \mathbb{R}^{p-k}$$

Sea $\tilde{F}_m = \tau_{m+1} \circ F_m \circ \tau_m^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
T_{f^m(x)} \arrow[rr, "\tilde{f}_{f^m(x)} = F_m"] \arrow[d, "\tau_m"'] & & T_{f^{m+1}(x)} = M \arrow[d, "\tau_{m+1}"] \\
\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{p-k} \arrow[rr, "\tilde{F}_m"'] & & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{p-k}
\end{tikzcd}$$

Aquí $\tilde{F}_m$ es de la forma:

$$\tilde{F}_m(v, w) = (A_m v + g_m(v, w), B_m v + h_m(v, w))$$

donde $A_m : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ y $B_m : \mathbb{R}^{p-k} \to \mathbb{R}^{p-k}$ son mapas lineales, $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^k$ y $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p-k}$ son mapas no lineales definidos para cada $v \in B^s(r_0) \subset \mathbb{R}^k$ y $w \in B^u(r_0) \subset \mathbb{R}^{p-k}$.

Con respecto a la métrica de Lyapunov estos mapas satisfacen: $\| A_m \|' \leq \lambda'$, $(\| B_m^{-1} \|')^{-1} \geq \mu'$ donde $0 < \lambda' < \text{mín}\{1, \mu\}$ y

$$g_m(0,0)=0, \quad dg_m(0,0)=0, \quad h_m(0,0)=0, \quad dh_m(0,0)=0$$
$$\| dg_m(v_1,w_1)-dg_m(v_2,w_2) \|' \leq C\gamma^{-m} (\| v_1-v_2 \|' + \| w_1-w_2 \|')^{\alpha}$$
$$\| dh_m(v_1,w_1)-dh_m(v_2,w_2) \|' \leq C\gamma^{-m} (\| v_1-v_2 \|' + \| w_1-w_2 \|')^{\alpha}$$

donde $(\lambda')^{\alpha} < \gamma < 1$, $0 < \alpha \leq 1$, $C > 0$. Luego aplicando Teorema de Hadamard-Perron se obtiene la existencia de la variedad estable local.

□

## 5.2. Propiedades básicas de las Variedades Estables e Inestables

En esta sección daremos algunas propiedades de las Variedades Estables e Inestables locales. En cada caso se trabajará con la variedad estable local, donde el mismo argumento será válido para la variedad inestable trabajando para el pasado.

1. **Tamaï¿½o de las Variedades Locales**
   Dado $x \in \mathcal{R}$ consideremos $W^s(x) = exp_x \{(v, \psi^s(v)) : v \in B^s(r)\}$ dada por el teorema de la variedad estable local, donde $\psi^s : B^s(r) \to E^u(x)$ es un mapa diferenciable que satisface: $\phi^s(0) = 0$ y $d\phi^s(0) = 0$, $B^s(r)$ es la bola de radio $r$ en $E^s(x)$ centrada en el origen. Aquí $r = r(x)$ es conocido como el tamaï¿½o de la variedad estable local.
   Los tamaï¿½os de las variedades estables locales a lo largo de la trayectoria $\{f^m(x)\}$,$m \in \mathbb{Z}$ están relacionados mediante:
   $$r(f^m(x)) \geq Ke^{-\epsilon|m|}r(x)$$
   donde $K > 0$ es una constante.
   Veamos la prueba de esto último: Sabemos que por las primeras dos propiedades del producto interno de Lyapunov y su respectiva norma que la acción del diferencial en $T\mathcal{R}$ es uniformemente hiperbólico, es decir respecto a la norma de Lyapunov las funciones $C$ y $K$ son constantes. Recordemos que cuando construimos aquella familia de funciones para aplicar el teorema de Hadamard-Perron construimos unos mapas $\tilde{f}_x$ en un entorno $U_x$ que depende de $x$ respecto a la norma $\| \, . \, \|$, en realidad vamos a usar el hecho técnico de que el radio $r(x)$ depende sólo de $D(x)$ y las constantes $\lambda'$, $\mu'$,

$\gamma$, $\alpha$, etc (Ver [BP]). Por otro lado podemos encontrar un radio uniforme para todos estos entornos cuando trabajamos respecto a la norma de Lyapunov $\| \, . \, \|'$. Por la tercer propiedad de la norma de Lyapunov sabemos que $\| \, w \, \|'_x \leq D(x) \, \| \, w \, \|_x$, entonces si $\| \, . \, \|'_x = r, \forall x \in M$ vale que $\| \, . \, \|_x \geq \frac{r}{D(x)}$, luego:

$$r(f^m(x)) \geq \frac{r}{D(f^m(x))} \geq \frac{r}{D(x)} e^{-2\epsilon|m|} \geq K r(x) e^{\epsilon|m|}$$

donde $K > 0$ es una constante (que depende de $x$), lo cual concluye lo que queríamos.

También podemos ver que sobre los bloques de Pesin los radios están acotados, es decir existe $r_l > 0$ que depende sólo de $l$ tal que:

$$r(x) \geq r_l, \quad x \in \mathcal{R}_{\epsilon,l}$$

Pues si $x \in \mathcal{R}_{\epsilon,l}$ entonces $C(x,\epsilon) \leq l$ y $K(x,\epsilon) \geq \frac{1}{l}$. Aquí $r(x) = K\frac{r}{D(x)}$ donde $D(x) = J\frac{C(x)}{K(x)}$, con $J = \left[ \left(1 - \frac{\lambda e^{\epsilon}}{\lambda'}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{\mu'}{\mu e^{-\epsilon}}\right)^{-1} \right]^{1/2}$
$\Rightarrow D(x) \leq l^2 J$, $\forall x \in \mathcal{R}_{\epsilon,l}$ y por lo tanto $r(x) \geq \frac{Kr}{l^2 J} =: r_l$.
Sea $\nu$ una medida de Borel $f$-invariante tal que $\nu(\mathcal{R}) = 1$. Para $l$ suficientemente grande, el bloque de Pesin $\mathcal{R}_{\epsilon,l}$ posee medida positiva. De aquí las trayectorias de casi todo punto visitan este conjunto infinitas veces y por lo tanto para estos puntos típicos la función $r(f^m(x))$ es oscilante en $m$ y excede $r_l$ para infinitos valores de $m$. Por otro lado para algunos enteros $m$ el valor de $r(f^m(x))$ podría ser muy pequeï¿$\frac{1}{2}$o (esto último es debido a la inecuación que relaciona los radios de los iterados). Los radio de las variedades estables $W^s(f^m(x))$ decrecen cuando $m \to \infty$.

Por último vale destacar que si $f$ es un difeomorfismo de Anosov entonces tomando $\epsilon = 0$, $C = cte$ y $K = C^{-1}$ se obtiene que $\mathcal{R}_{\epsilon,l} = M$ para algún $l$ y por lo tanto

$$r(x) \geq r_l, \quad \forall x \in M$$

2. **Dependencia Continua de las Variedades Estables Locales**
Sean $V_1$ y $V_2$ dos subvariedades locales diferenciables en $M$ con el mismo

radio, se tiene que:

$$d_{C^1}(V_1, V_2) = \sup_{x \in B^s(r)} \| \psi_1(x) - \psi_2(x) \| + \sup_{x \in B^s(r)} \| d_x\psi_1 - d_x\psi_2 \|$$

Las variedades estables locales dependen continuamente en $x \in \mathcal{R}_{\epsilon,l}$ con la topología $C^1$. Esto significa que, si $x_n \in \mathcal{R}_{\epsilon,l}$ es una secuencia de puntos que convergen a $x$ entonces

$$d_{C^1}(W^s(x_m), W^s(x)) \to 0$$

cuando $m \to \infty$. Daremos una idea de lo anterior: Usando la dependencia continua de los subespacios estables en conjuntos regulares y el teorema de la variedad estable, obtenemos para $m$ suficientemente grande que las variedades estables locales $W^s(x_m)$ se pueden ver como el gráfico de una función $\psi_m : B^s(r) \to E^u(x)$, donde $B^s(r)$ es la bola en $E^s(x)$ centrada en cero para algun radio $r$ suficientemente pequeï¿½o. Se puede probar que la secuencia de funciones $\psi_m$ es compacto con la topología $C^1$, de aquí consideramos $\tilde{\phi}$ un punto de acumulación y definimos $\tilde{W}$ como la imagen de $\tilde{\phi}$ bajo el mapa exponencial en $x$. Luego probando que $\tilde{W}$ es la variedad estable local de $x$ obtenemos lo deseado.

3. **Dependencia Hï¿½lder**
   Se puede ver (No daremos la prueba) que las variedades estables locales dependen Hï¿½lder continuamente en $x \in \mathcal{R}_{\epsilon,l}$ con la topología $C^1$, es decir existe $c > 0$ y $\beta \in (0, 1]$ tal que para todo $x, y \in \mathcal{R}_{\epsilon,l}$ se tiene:

$$d_{C^1}(W^s(x), W^s(y)) \leq cd(x, y)^\beta$$

4. **Intersección entre Variedades Locales**
   Sabemos que en cada bloque de Pesin las variedades estables e inestables varían continuamente, por lo tanto para cada $x \in \mathcal{R}_{\epsilon,l}$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in \mathcal{R}_{\epsilon,l} \cap B(x, \delta)$ se tiene la intersección $W^s(x) \cap W^u(y)$ es no vacía y consiste de un único punto. (Obviamente lo mismo vale intercambiando $s$ y $u$).

5. **Continuidad Absoluta del Mapa de Holonomía**
   Fijemos $x \in \mathcal{R}_{\epsilon,l}$ y un número $r$ tal que $0 < r \leq r_l$, consideremos el conjunto

$$\mathcal{Q}_l(x) = \bigcup_{w \in \mathcal{R}_{\epsilon,l} \cap B(x,r)} W^s(w)$$

Y la familia de variedades estables locales

$$\mathcal{L}(x) = \{W^s(w) : w \in \mathcal{R}_{\epsilon,l} \cap B(x,r)\}$$

Sean $T_1$ y $T_2$ dos subvariedades locales transversales a $\mathcal{L}(x)$.

Definimos el mapa de Holonomía $\pi : \mathcal{Q}_l(x) \cap T_1 \to \mathcal{Q}_l(x) \cap T_2$ dado por:

$$\pi(y) = T_2 \cap W^s(w) \Leftrightarrow y = T_1 \cap W^s(w), \quad w \in \mathcal{Q}_l(x) \cap B(x,r)$$

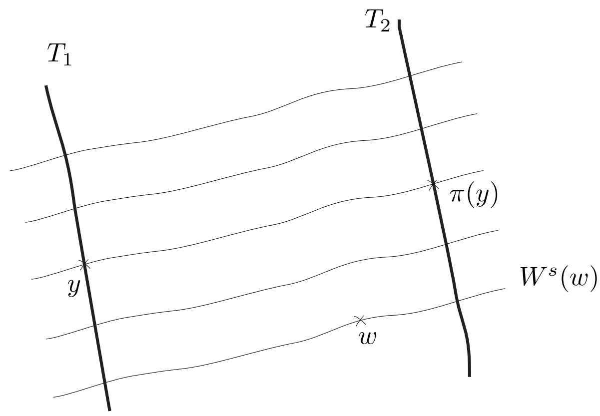



Figura 5.1:

El mapa de holonomía es un homeomorfismo sobre su imagen, el mismo depende de $x$, $l$, $T_1$ y $T_2$.
Sea $\Delta = \Delta(T_1, T_2) = \| \psi_1 - \psi_2 \|_{C^1}$ donde $\psi_1$ y $\psi_2$ son los representantes de $T_1$ y $T_2$.
Decimos que $\nu$ es absolutamente continua respecto a $\mu$ y denotamos mediante $\nu << \mu$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $\nu(E) < \epsilon$ para todo conjunto $E$ medible tal que $\mu(E) < \delta$, en otras palabras si $\mu(E) = 0$ entonces $\nu(E) = 0$.
Una transformación invertible $T : (X, \nu) \to (Y, \mu)$ se dice absolutamente continua si $\mu$ es absolutamente continua respecto a $T_*\nu$. En este caso uno define el Jacobiano de $T$ en el punto $x \in X$ como la derivada de Radon-Nikodym $J(T)(x) = \frac{d\mu}{d(T_*\nu)}$. Si $X$ es un espacio métrico entonces:

$$J(T)(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu(T(B(x,r)))}{\nu(B(x,r))}$$

Dada cualquier subvariedad $W \subset M$, denotaremos mediante $\nu_W$ la medida inducida por la restricción de la métrica Riemanniana en $W$.

**Teorema** 2.1 (Continuidad Absoluta) *Dado $l \geq 1$, $x \in \mathcal{R}_{\epsilon,l}$, y dos subvariedades transversales $T_1$ y $T_2$ a la familia $\mathcal{L}(x)$, entonces el mapa de holonomía $\pi$ es absolutamente continuo (respecto a las medidas $\nu_{T_1}$ y $\nu_{T_2}$) y el Jacobiano $J^s(\pi)$ esta acotado por arriba y abajo lejos de cero.*

# Bibliografía


[AM] A. Arbieto, C. Matheus, A pasting lemma and some applications for conservative systems, ERGOD THEOR DYN SYST,vol.27, no. 05, 2007.

[ABV] J. F. Alves, C. Bonatti, M. Viana, SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding, Inventiones Math. 140 (2000), no. 2, 351-298.

[BP] Luis Barreira and Yakov B. Pesin, Lyapunov exponents and smooth ergodic theory, University Lecture Series, vol. 23, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. MR 1862379 (2003a:37040).

[BV] C. Bonatti and M. Viana. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting. ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS 115 (2000), 157-193.

[HHU] F. Rodriguez Hertz, M. Rodriguez Hertz, R. Ures, Accessibility and stable ergodicity for partially hyperbolic diffeomorphisms with 1d-center bundle, Inventiones Mathematicae 172 (2008) no2, 353-381

[HHTU] F. Rodriguez Hertz, M. Rodriguez Hertz, A. Tahzibi, R. Ures, New criteria for ergodicity and non-uniform hyperbolicity. Duke Mathematical Journal, v.: 160 3, p.: 599 - 629, 2011.

[HK] B. Hasselblatt and A. Katok, Handbook of dynamical systems. Vol. 1A. North-Holland, Amsterdam, 2002. xii+1220 pp. ISBN: 0-444-82669-6 37-06.

[M] R. Mañé, Contributions to the stability conjecture, Topology 17 (1978)

[P] Ya. Pesin, Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory, Uspekhi mat. Nauk 32, (1977) 55-112; English transl., Russian Math. Surveys 32 (1977), 55-114.

[Pe] Ya. Pesin, Families of invariant manifolds corresponding to nonzero characteristic exponents, Math. USSR-Izv. 40 (1976), no. 6, 1261-1305.

[Pu] C. Pugh, The $C^{1+\alpha}$ hypothesis in Pesin theory, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 59 (1984), 143-161.

[PS] C. Pugh, M. Shub, Stably ergodic dynamical systems and partial hyperbolicity. J. Complexity 13(1), 125?179 (1997)

[T] Tahzibi, A.: Stably ergodic diffeomorphisms which are not partially hyperbolic. Isr. J. Math. 142, 315?344 (2004)