

TESIS DE MAESTRÍA

**Componentes conexas de los espacios de
representaciones de grupos de superficie a
 $PSL(2, \mathbb{R})$**

Por: León Carvajales ¹
Orientador: Dr. Rafael Potrie

Maestría en matemática
PEDECIBA - UDELAR
Montevideo, Uruguay
Febrero de 2017

¹Becario de la Comisión Académica de Posgrados (UDELAR), Mayo de 2015.

Resumen

Se define la clase de Euler de una representación de un grupo de superficie a $PSL(2, \mathbb{R})$ y se presenta un teorema debido a W. Goldman ([15]) que establece que este invariante caracteriza las componentes conexas del espacio de tales representaciones.

Abstract

The Euler class of a surface group representation into $PSL(2, \mathbb{R})$ is defined and we present a theorem due to W. Goldman ([15]) which states that this invariant characterize the connected components of the space of all such representations.

Agradecimientos

Al Gordo (Rafael) por su amistad, compromiso y dedicación. Por toda la matemática que me enseñó/a. Por proponerme estudiar estos temas que están buenísimos. Podría seguir enumerando cosas.

Al Frodo, a Gonzalo y al Samba (y al Gordo nuevamente) por insistir en que me anotara en la maestría.

Quiero agradecer especialmente al Frodo, al Lessa, a Matilde, al Rambo, a Seba Álvarez, al Sambita y a M. Wolff por escucharme y contarme pila de cosas, muchas de ellas relacionadas con este trabajo.

A mis compañeros (profesores, estudiantes y administrativos) del CMAT e IMERL.

A Françoise Dal'Bo, Pablo Lessa y Matilde Martínez por haberme concedido el honor de estar en el tribunal.

Por último lo más especial. A Inés, por acompañarme y apoyarme todos estos años. Por fumarse todas mis frustraciones y siempre darme para adelante. Por todo. A Mamá, Papá, Anchi, Pato, Alex, Tito y Pauli por su sostén y cariño permanente.

Contenidos

| | Página |
|---|-----------|
| Introducción | 9 |
| 1. Preliminares topológicos | 15 |
| 1.1. Superficies compactas orientables | 15 |
| 1.1.1. Clasificación de superficies | 15 |
| 1.1.2. Descomposición árbol-dual | 18 |
| 1.2. Levantamiento de caminos | 19 |
| 1.3. Fibraciones | 20 |
| 2. Generalidades sobre $PSL(2, \mathbb{R})$ y $PSL(\widetilde{2}, \mathbb{R})$ | 23 |
| 2.1. Clases de conjugación en $PSL(2, \mathbb{R})$ | 24 |
| 2.1.1. Un lema técnico: caminos de conjugaciones | 29 |
| 2.2. Una partición de $PSL(\widetilde{2}, \mathbb{R})$ | 34 |
| 2.3. Acción de $GL(2, \mathbb{R})$ en $PSL(\widetilde{2}, \mathbb{R})$ | 36 |
| 3. Clase de Euler | 39 |
| 3.1. Definición | 39 |
| 3.2. Fibrados planos | 42 |
| 3.3. Clase de Euler de una representación | 45 |

| | |
|---|-----------|
| 3.3.1. El caso cerrado | 46 |
| 3.3.2. El caso con borde | 46 |
| 3.4. Primeras propiedades | 49 |
| 4. Enunciado del teorema | 55 |
| 4.1. El caso cerrado | 55 |
| 4.2. El caso con borde | 56 |
| 5. Representaciones de \mathbb{F}_2 | 59 |
| 5.1. Caracteres complejos | 59 |
| 5.2. Caracteres reales | 63 |
| 5.2.1. Imagen de χ | 64 |
| 5.2.2. Propiedad de levantamiento de caminos de χ | 72 |
| 6. El teorema para un par de pantalones | 81 |
| 6.1. El producto en $SL(2, \mathbb{R})$ | 81 |
| 6.1.1. Definición de \tilde{M} | 82 |
| 6.1.2. Imagen de \tilde{M} | 84 |
| 6.1.3. Fibras de \tilde{M} | 90 |
| 6.1.4. Propiedad de levantamiento de caminos de \tilde{M} | 95 |
| 6.2. El caso $\Sigma_{0,3}$ | 95 |
| 7. El teorema para un toro perforado | 99 |
| 7.1. El conmutador en $SL(2, \mathbb{R})$ | 99 |
| 7.1.1. Definición de \tilde{R} | 99 |
| 7.1.2. Imagen de \tilde{R} | 101 |
| 7.1.3. Fibras de \tilde{R} | 103 |
| 7.1.4. Propiedad de levantamiento de caminos de \tilde{R} | 109 |

| | |
|--|------------|
| 7.2. El caso $\Sigma_{1,1}$ | 111 |
| 8. El teorema para un bitoro | 113 |
| 9. Componentes conexas de $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ | 115 |
| 9.1. Primeras deformaciones | 115 |
| 9.1.1. Una propiedad genérica en $W(\Sigma_{g,b})$ | 116 |
| 9.1.2. Deformaciones a $\bigcap_i W(\Sigma^{(i)})$ | 116 |
| 9.2. El caso $\chi(\Sigma_{g,b}) = -2$ | 125 |
| 9.3. El caso general | 129 |
| 9.3.1. Desigualdad de Milnor-Wood | 129 |
| 9.3.2. Prueba del teorema | 130 |
| A. Conjuntos de nivel de κ | 133 |
| B. La forma de Killing en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ | 137 |
| C. $W'(\Sigma_{g,b})$ es abierto y denso en $W(\Sigma_{g,b})$ | 141 |
| C.1. Una prueba elemental en el caso Σ_2 | 141 |
| C.1.1. Preliminares | 141 |
| C.1.2. Prueba de la proposición 9.1.1 en el caso Σ_2 | 144 |
| C.2. Una prueba para el caso general | 150 |
| C.2.1. Preliminares | 150 |
| C.2.2. Prueba de la proposición 9.1.1 en el caso $\Sigma_{g,b}$ | 153 |
| Referencias | 158 |

Introducción

Sea Σ_g la superficie cerrada orientable de género $g \geq 2$ y $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ el espacio de homomorfismos (o *representaciones*) del grupo fundamental $\pi_1(\Sigma_g)$ en $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. En este trabajo se presenta de manera autocontenida la demostración original del siguiente:

Teorema A (Goldman, [15]). *Las componentes conexas de $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ son los conjuntos*

$$eu^{-1}(k), \quad k = \chi(\Sigma_g), \dots, -\chi(\Sigma_g)$$

donde $eu : \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{Z}$ es la clase de Euler.

El estudio de representaciones $\pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ es natural en geometría y topología. Por una parte, una cierta clase de estas representaciones parametriza las estructuras hiperbólicas en Σ_g . En efecto fijemos $g > 1$ y consideremos en Σ_g una métrica hiperbólica h , i.e, una métrica riemanniana de curvatura constante igual a -1 . Entonces h se levanta a una métrica \tilde{h} en el cubrimiento universal $\tilde{\Sigma}_g$, que resulta ser localmente isométrico a Σ_g . En particular tiene curvatura constante igual a -1 y un teorema de geometría riemanniana establece que $(\tilde{\Sigma}_g, \tilde{h})$ puede ser *uniformizada* por el plano hiperbólico. Más precisamente, existe una isometría

$$\eta : (\tilde{\Sigma}_g, \tilde{h}) \rightarrow (\mathbb{H}^2, ds^2)$$

donde ds^2 es la métrica de Poincaré (ver por ejemplo [7], capítulo 8).

Ahora bien, el grupo fundamental $\pi_1(\Sigma_g)$ actúa por isometrías y preservando orientación en $\tilde{\Sigma}_g$ de modo que conjugando por η obtenemos una representación

$$\phi : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{R})$$

Puede probarse que ϕ es *fuchsiana*, i.e, inyectiva y con imagen discreta. Recíprocamente, toda representación fuchsiana determina una métrica hiperbólica en Σ_g . Si denotamos $\text{Hom}^F(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ al conjunto de estas representaciones, obtenemos que este espacio parametriza el espacio de métricas hiperbólicas en Σ_g (c.f. [8], capítulo 10).

Por otra parte, cada representación $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ es un objeto topológico. En efecto, el grupo $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ actúa en S^1 por transformaciones de Möbius así que ϕ induce una acción de $\pi_1(\Sigma_g)$ en $\tilde{\Sigma}_g \times S^1$ dada por

$$\gamma.(\tilde{x}, z) := (\gamma.\tilde{x}, \phi(\gamma)(z))$$

donde la acción en la primer coordenada es por transformaciones de cubrimiento. Podemos definir entonces la *suspensión* de ϕ

$$S_\phi^1 := \frac{\widetilde{\Sigma}_g \times S^1}{\pi_1(\Sigma_g)}$$

que es un fibrado en círculos sobre Σ_g .

Ahora bien, la foliación horizontal $\{\widetilde{\Sigma}_g \times \{z\}\}_{z \in S^1}$ de $\widetilde{\Sigma}_g \times S^1$ pasa al cociente definiendo una foliación en S_ϕ^1 que es transversa a las fibras. Puede probarse que existen fibrados por círculos sobre Σ_g que no admiten foliaciones transversas y de hecho esta estructura existe para un fibrado E si y sólo si E es la suspensión de una representación. En este sentido, la variedad de representaciones puede ser pensada como el espacio de fibrados en círculos sobre Σ_g que admiten foliaciones transversas (ver la sección 3.2 por precisiones sobre este punto).

Resulta entonces interesante estudiar el espacio $Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{R}))$. Una manera natural de definir una topología en este espacio es la siguiente (ver sección 4):

$$Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{R})) \cong \{(A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) \in PSL(2, \mathbb{R})^{2g}, [A_1, B_1] \dots [A_g, B_g] = I\}$$

Consideremos el mapa diferenciable

$$R_g : (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) \mapsto [A_1, B_1] \dots [A_g, B_g]$$

Entonces $Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{R})) = R_g^{-1}(I)$ y es natural preguntarse si I es un valor regular de R_g . La respuesta es que no, pero existe un subconjunto abierto y denso de puntos regulares y por lo tanto estos puntos tienen entornos difeomorfos a \mathbb{R}^{6g-3} (ver apéndice C).

Otra pregunta que uno puede hacerse es si este espacio es conexo y, si no lo es, cuántas componentes tiene y cómo distinguirlas.

No es difícil ver que $Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{R}))$ tiene estructura de variedad algebraica (ver apéndice C) y un teorema de Whitney ([30]) garantiza entonces que tiene finitas componentes conexas. El teorema A nos dice que tiene $-2(2-2g) + 1 = 4g - 3$ componentes y un único invariante las clasifica.

Sea $\phi \in Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{R}))$ y el fibrado S_ϕ^1 . Entonces S_ϕ^1 es orientable y por lo tanto tiene definida su *clase de Euler*. Es decir que existe un mapa

$$eu : Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{R})) \longrightarrow H^2(\Sigma_g, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

Como veremos en este trabajo, la representación trivial $\phi \equiv I$ tiene clase de Euler nula y una representación fuchsiana tiene clase $\pm\chi(\Sigma_g)$. Como eu es una función continua uno deduce que $Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{R}))$ no es conexo.

Ahora bien, gracias a trabajos de Milnor ([22]) y Wood ([31]) se sabe que un fibrado en círculos sobre Σ_g admite una foliación transversa si y sólo si su número de Euler pertenece al intervalo $[\chi(\Sigma_g), -\chi(\Sigma_g)]$. Se deduce que

$$\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) = \bigcup_{k=\chi(\Sigma_g)}^{-\chi(\Sigma_g)} eu^{-1}(k)$$

El teorema A establece que dos representaciones con la misma clase pueden conectarse por un camino de representaciones, o *deformación*.

Consideremos $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ actuando en $\text{Hom}^F(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ por conjugación. En su tesis doctoral ([12]), Goldman probó que el conjunto de representaciones fuchsianas coincide con $eu^{-1}(\pm\chi(\Sigma_g))$ y en ese momento era conocida la identificación

$$\text{Hom}^F(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) / \text{PGL}(2, \mathbb{R}) \cong \mathcal{T}(\Sigma_g) \cong \mathbb{R}^{6g-6}$$

donde $\mathcal{T}(\Sigma_g)$ es el *espacio de Teichmüller* de Σ_g (ver [8], capítulo 10). Como veremos, la acción de $\text{PGL}^-(2, \mathbb{R})$ intercambia los conjuntos $eu^{-1}(2g-2)$ y $eu^{-1}(2-2g)$ así que

$$eu^{-1}(2g-2) / \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{6g-6}$$

y en particular este conjunto es conexo. Se puede concluir que $eu^{-1}(2g-2)$ es conexo, y por lo tanto una componente de $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$. En [12] se conjetura que las fibras del mapa de Euler deberían ser las componentes conexas de $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ y en [15] Goldman lo demuestra.

Cuando el grupo de llegada G es diferente de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, se conocen resultados sobre la cantidad de componentes de la variedad de representaciones. Por ejemplo para $G \in \{\text{PSL}(2, \mathbb{C}), \text{SL}(2, \mathbb{C}), \text{SU}(2), \text{SO}(3), \text{PSL}^{(k)}(2, \mathbb{R})\}$, ver [15]. Para $G = \text{PSL}(d, \mathbb{R})$ con $d \geq 3$, ver [19].

Estrategia de la demostración

Demos algunas ideas de la prueba en el caso de la superficie base Σ_2 .

Sea $\phi = (A_1, B_1, A_2, B_2) \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_2), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$. Un algoritmo debido a Milnor ([22]) nos dice que la clase de Euler de ϕ puede computarse de la siguiente manera: pensamos $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \text{Homeo}^+(S^1)$ y consideramos levantados $\tilde{A}_1, \tilde{B}_1, \tilde{A}_2, \tilde{B}_2$ a homeomorfismos de \mathbb{R} que conmutan con las traslaciones de vector entero. Entonces $[\tilde{A}_1, \tilde{B}_1][\tilde{A}_2, \tilde{B}_2]$ es un levantado bien definido de la identidad, y por lo tanto una traslación entera. El vector de dicha traslación es la clase de Euler de ϕ .

Una deformación es una asignación continua $t \mapsto (A_1^t, B_1^t, A_2^t, B_2^t) \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})^4$ tal que

$$[A_1^t, B_1^t][A_2^t, B_2^t] = I$$

para todo $t \in [0, 1]$. Equivalentemente, corresponde a tomar cuatro caminos de matrices $A_1^t, B_1^t, A_2^t, B_2^t \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ verificando la ecuación

$$[A_1^t, B_1^t] = [B_2^t, A_2^t] \tag{1}$$

El teorema de Goldman establece que si ϕ y ϕ' son tales que

$$[\tilde{A}_1, \tilde{B}_1][\tilde{A}_2, \tilde{B}_2] = [\tilde{A}'_1, \tilde{B}'_1][\tilde{A}'_2, \tilde{B}'_2]$$

entonces existe un camino $(A_1^t, B_1^t, A_2^t, B_2^t)$ verificando (1), que comienza en (A_1, B_1, A_2, B_2) y termina en (A'_1, B'_1, A'_2, B'_2) .

Denotemos $R : PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ al conmutador, i.e, $R(A, B) := [A, B]$ y supongamos que ϕ y ϕ' son dos representaciones con la misma clase de Euler. Como $PSL(2, \mathbb{R})$ es conexo, siempre podemos encontrar $(A_1^t, B_1^t) \in PSL(2, \mathbb{R})^2$ conectando (A_1, B_1) con (A'_1, B'_1) . Si tomamos

$$\gamma(t) := R(A_1^t, B_1^t)$$

queremos ver si podemos *levantar* este camino por R , es decir, encontrar $(A_2^t, B_2^t) \in PSL(2, \mathbb{R})^2$ tales que

$$R(B_2^t, A_2^t) = \gamma(t) \tag{2}$$

En tal caso, el mapa $t \mapsto \phi_t := (A_1^t, B_1^t, A_2^t, B_2^t)$ define una deformación. Más aún, necesitamos ver que (A_2^t, B_2^t) puede elegirse conectando (A_2, B_2) con (A'_2, B'_2) por que sólo así habremos deformado ϕ en ϕ' .

Con este nivel de generalidad, no hay esperanza de que lo anterior ocurra. En efecto, si esto ocurriera uno deduciría que $Hom(\pi_1(\Sigma_2), PSL(2, \mathbb{R}))$ es conexo, y ya hemos comentado por qué no lo es.

Ahora bien, a lo largo del trabajo veremos que el razonamiento anterior falla esencialmente por dos cuestiones. En primer lugar, el mapa R no verifica la propiedad de levantamiento de caminos. Sin embargo es posible probar que ciertas restricciones sí la verifican: por ejemplo los caminos de matrices *hiperbólicas* sí pueden ser levantados. En la sección 9.1 veremos que toda representación $\pi_1(\Sigma_2) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ se deforma a una tal que $[A_1, B_1]$ es hiperbólica así que este problema no es crucial.

El segundo problema que uno encuentra es el siguiente: si suponemos que $\gamma(t)$ es hiperbólica para todo $t \in [0, 1]$, entonces existe $(A_2^t, B_2^t) \in PSL(2, \mathbb{R})^2$ como en (2) comenzando en (A_1, B_1) pero no podremos asegurar en general que la deformación termine en (A'_2, B'_2) . Esto nos dice que no habremos conectado ϕ con ϕ' , sino que la habremos conectado con una representación $\phi_1 = (A'_1, B'_1, A_2^1, B_2^1)$ que verifica

$$[A_2^1, B_2^1] = [A'_2, B'_2]$$

Como veremos en el capítulo 7, el mapa R no tiene fibras conexas y esta es la razón por la cual $Hom(\pi_1(\Sigma_2), PSL(2, \mathbb{R}))$ no es conexo.

Para resolver la situación, se considera el levantado \tilde{R} del conmutador, i.e,

$$\tilde{R}(A, B) := [\tilde{A}, \tilde{B}]$$

donde \tilde{A} y \tilde{B} son levantados de A y B a homeomorfismos de \mathbb{R} . Probaremos que \tilde{R} verifica la propiedad de levantamiento de caminos y no sólo eso, tiene fibras conexas, de modo que

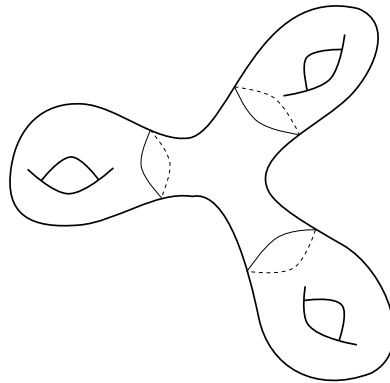


Figura 1: Descomposición de Σ_3 .

evita el fenómeno anterior. Esto es razonable porque al tratarse del levantado detecta la clase de Euler de la representación.

En el caso Σ_3 se siguen las mismas ideas. Ahora tenemos tres conmutadores pero podemos descomponer la superficie como en la figura 1, de modo que una de las subsuperficies que aparece es un *par de pantalones*. Como el grupo fundamental de esta subsuperficie admite la presentación

$$\langle c_1, c_2, c_3 \mid c_1 c_2 = c_3 \rangle$$

nos veremos conducidos a estudiar el mapa

$$M(C_1, C_2) := C_1 C_2$$

Nuevamente, si tenemos alguna esperanza de detectar la clase de Euler debemos estudiar su levantado al cubrimiento universal.

Organización de la tesis

La tesis contiene en el capítulo 8 una prueba del teorema A en el caso particular en que la superficie base es Σ_2 , pero algunos capítulos previos no son necesarios para la lectura del mismo. Las técnicas e ideas centrales de la demostración del caso general están concentradas en ese caso.

En el capítulo 1 se establecen resultados topológicos generales. De particular importancia es el contenido de la subsección 1.1.2 (que sólo será utilizado en el capítulo 9 y no es necesario para la lectura del capítulo 8).

En el capítulo 2 estudiamos el grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ y su cubrimiento universal. En la sección 2.1 clasificamos los elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ en hiperbólicos, elípticos y parabólicos. En la sección 2.2 levantamos esta partición al cubrimiento universal $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$. Esto es importante porque nos permitirá caracterizar la clase de Euler de una representación.

En el capítulo 3 se define la clase de Euler. A los efectos prácticos, los contenidos de las secciones 3.1 y 3.2 pueden ser omitidos y tomar el teorema 3.3.2 y la observación 3.3.7 como definición de la clase de Euler de una representación.

En el capítulo 4 enunciamos formalmente el teorema A y desarrollamos los ingredientes necesarios para la comprensión del mismo.

Los capítulos 5, 6 y 7 constituyen el “corazón” de la prueba.

En el capítulo 5 se estudian representaciones del grupo libre en dos generadores. Se define el mapa de caracteres y se prueba que verifica la propiedad de levantamiento de caminos (proposición 5.2.12). Esta propiedad es fundamental porque permite estudiar el producto y el conmutador.

En el capítulo 6 se estudia el producto de dos matrices y se prueba una propiedad de levantamiento de caminos de este mapa (corolario 6.2.1). Estos contenidos no se utilizan en el capítulo 8.

En el capítulo 7 estudiamos el conmutador de dos matrices y se prueba una propiedad de levantamiento de caminos de este mapa: corolario 7.2.1. Este corolario es todo lo que se necesita para la correcta lectura del capítulo 8.

Por último es importante destacar que los capítulos 6 y 7 no contienen técnicas diferentes, sino que son las mismas herramientas adaptadas respectivamente al caso “producto” y al caso “conmutador”.

En el capítulo 9 se trata el caso general, que depende de todos los capítulos anteriores.

El apéndice A contiene un análisis de los conjuntos de nivel de un cierto polinomio utilizado para estudiar la traza del conmutador de dos matrices. En el apéndice B se define la forma de Killing de $PSL(2, \mathbb{R})$ y se establecen algunas de sus propiedades. Finalmente, el apéndice C trata sobre una cierta propiedad genérica en la variedad de representaciones. En el mismo hemos incluido una prueba elemental del caso Σ_2 .

Capítulo 1

Preliminares topológicos

Comenzamos por brindar un breve panorama de algunas propiedades topológicas generales que utilizaremos durante el resto del trabajo.

En la sección 1.1 trabajamos con topología de superficies. El único contenido “no estándar” de la misma es el de la subsección 1.1.2. En la sección 1.2 tratamos dos resultados de *levantamiento de caminos* y en 1.3 introducimos el concepto de *fibración* y probamos una proposición que será de utilidad en los capítulos 6 y 7.

1.1. Superficies compactas orientables

Establecemos aquí algunos resultados básicos de topología de superficies compactas. En la subsección 1.1.1 enunciamos el teorema de clasificación de superficies, definimos su *característica de Euler* y presentamos sus grupos fundamentales. En la subsección 1.1.2 introducimos la *descomposición árbol-dual* de una tal superficie, que será utilizada en el capítulo 9.

1.1.1. Clasificación de superficies

La prueba del siguiente teorema puede encontrarse por ejemplo en [27], capítulo 12.

Teorema 1.1.1 (Clasificación de superficies cerradas). *Sea Σ una superficie orientable y cerrada, i.e., compacta y sin borde. Entonces Σ es homeomorfa a la suma conexas de una 2-esfera con $g \geq 0$ toros. Además, para distintos valores de g se obtienen superficies no homeomorfas dos a dos.*

□

Así, un único invariante $g \geq 0$ determina la clase de homeomorfismo de superficies cerradas y orientables. Decimos que g es el *género* de la superficie y denotamos Σ_g a la clase de todas estas superficies.

Consideremos ahora una superficie compacta con borde Σ , entonces tiene finitas componentes de borde todas homeomorfas a círculos. De este modo, agregando un disco por cada una de dichas componentes uno obtiene el siguiente:

Teorema 1.1.2 (Clasificación de superficies con borde). *Sea Σ una superficie orientable y con borde. Entonces existe $g \geq 0$ tal que Σ es homeomorfa al resultado de quitar a Σ_g una cantidad $b > 0$ de discos abiertos de clausura disjunta. Además, para distintos valores de (g, b) se obtienen superficies no homeomorfas dos a dos.*

□

Denotaremos $\Sigma_{g,b}$ a la clase de homeomorfismo de la superficie Σ obtenida de quitar b discos de clausura disjunta a Σ_g . En esta notación incluimos la posibilidad $b = 0$, que implica $\Sigma_{g,b} = \Sigma_g$.

Definición 1.1.3. Sean $g \geq 0$ y $b \geq 0$. La *característica de Euler* de $\Sigma_{g,b}$ es

$$\chi(\Sigma_{g,b}) := 2 - 2g - b$$

Por ejemplo, las únicas superficies con característica igual a -1 son $\Sigma_{0,3}$ y $\Sigma_{1,1}$, mientras que las de característica -2 son $\Sigma_{1,2}$, el bitoro Σ_2 y $\Sigma_{0,4}$.

Observación 1.1.4. La característica de Euler es aditiva. Más precisamente, consideremos la superficie Σ orientable que resulta de pegar $\Sigma_{g,b}$ con $\Sigma_{g',b'}$ por una componente de borde. Entonces

$$\Sigma = \Sigma_{g+g',b+b'-2} \implies \chi(\Sigma) = \chi(\Sigma_{g,b}) + \chi(\Sigma_{g',b'})$$

Esta observación será utilizada en el futuro, pues en muchos argumentos se razonará por inducción en la característica de Euler.

Para finalizar esta subsección, establecemos lo que denominaremos *presentación estándar* del grupo fundamental de $\Sigma_{g,b}$. Sugerimos al lector consultar [17] (capítulo 1) por información adicional.

Comenzamos por el caso cerrado. El teorema de Van Kampen nos dice que el grupo fundamental de Σ_g admite la presentación

$$\pi_1(\Sigma_g) = \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \left| \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \right. \right\rangle$$

Observar que el abelianizado del grupo anterior es \mathbb{Z}^{2g} . Esto implica que $\pi_1(\Sigma_g) \not\cong \pi_1(\Sigma_{g'})$ si $g \neq g'$ y uno deduce la siguiente:

Proposición 1.1.5. *Sean Σ y Σ' dos superficies cerradas y orientables. Entonces Σ es homeomorfa a Σ' si y sólo si sus grupos fundamentales son isomorfos.*

□

En el caso con borde la situación es diferente. En efecto, la superficie $\Sigma_{g,b}$ retrae por deformación a una suma cuña de círculos así que tiene grupo fundamental libre en $2g + b - 1$ generadores. Esto implica que, por ejemplo

1.1. Superficies compactas orientables

$$\pi_1(\Sigma_{0,3}) \cong \mathbb{F}_2 \cong \pi_1(\Sigma_{1,1})$$

pero $\Sigma_{0,3} \neq \Sigma_{1,1}$.

En lo que sigue será conveniente trabajar con una presentación particular de $\pi_1(\Sigma_{g,b})$ que describimos a continuación.

Consideremos en $\Sigma_{g,b}$ la estructura celular dada por un vértice x_0 , $2g + b$ aristas y un disco. Más precisamente, para $i = 1, \dots, b$ sean c_i loops simples (que corresponden a las componentes de borde) y γ_i caminos de x_0 a un punto de c_i . Entonces el 1-esqueleto de $\Sigma_{g,b}$ consiste de las aristas

$$a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, \gamma_1 c_1 \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_b c_b \gamma_b^{-1}$$

A este grafo se le agrega un disco pegado por la palabra

$$[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \gamma_1 c_1 \gamma_1^{-1} \dots \gamma_b c_b \gamma_b^{-1}$$

y se obtiene la superficie $\Sigma_{g,b}$.

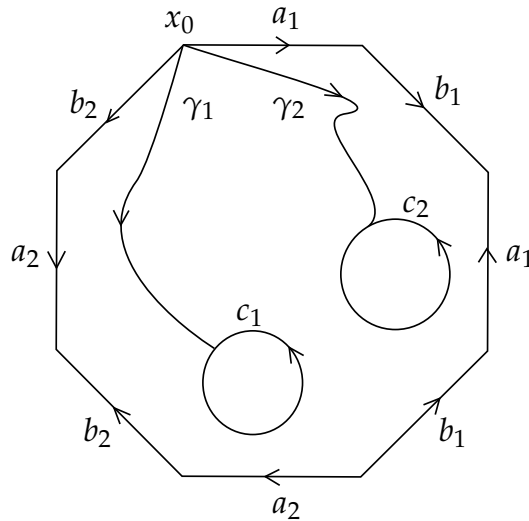


Figura 1.1: Estructura celular de $\Sigma_{2,2}$.

Una aplicación directa del teorema de Van Kampen implica que $\pi_1(\Sigma_{g,b}) = \pi_1(\Sigma_{g,b}, x_0)$ admite la presentación

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, \gamma_1 c_1 \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_b c_b \gamma_b^{-1} \mid \left(\prod_{j=1}^g [a_j, b_j] \right) \gamma_1 c_1 \gamma_1^{-1} \dots \gamma_b c_b \gamma_b^{-1} = 1 \rangle$$

y esta es la presentación que utilizaremos en este trabajo.

1.1.2. Descomposición árbol-dual

Queremos introducir aquí una descomposición de $\Sigma_{g,b}$ en subsuperficies $\Sigma^{(i)}$ de característica de Euler igual a -1 y de modo que el *grafo dual* asociado a esa descomposición sea un árbol (definición 1.1.6). La misma permitirá utilizar argumentos combinatorios y la observación 1.1.4 para reducir los resultados generales de este trabajo al estudio de superficies de característica -1 .

Procedemos a definir tal descomposición y ver que siempre existe.

Consideremos $\Sigma_{g,b}$ la superficie compacta y orientable de género g con b componentes de borde y supongamos que existen $\Sigma^{(1)}, \dots, \Sigma^{(p)} \subset \Sigma_{g,b}$ subsuperficies compactas tales que:

- $\Sigma_{g,b} = \bigcup_{i=1}^p \Sigma^{(i)}$
- Para todo $i \neq j$, o bien $\Sigma^{(i)} \cap \Sigma^{(j)} = \emptyset$ o bien es una única componente de borde común a $\Sigma^{(i)}$ y $\Sigma^{(j)}$.
- $\chi(\Sigma^{(i)}) = -1$ para todo $i = 1, \dots, p$, es decir que $\Sigma^{(i)} \cong \Sigma_{0,3}$ o $\Sigma^{(i)} \cong \Sigma_{1,1}$.

Definición 1.1.6. El *grafo dual* asociado a una descomposición como la anterior es el grafo \mathcal{T} cuyos vértices son las subsuperficies $\Sigma^{(i)}$ y con una arista por cada borde común a dos subsuperficies. Si \mathcal{T} es un árbol, decimos que la descomposición es *árbol-dual*.

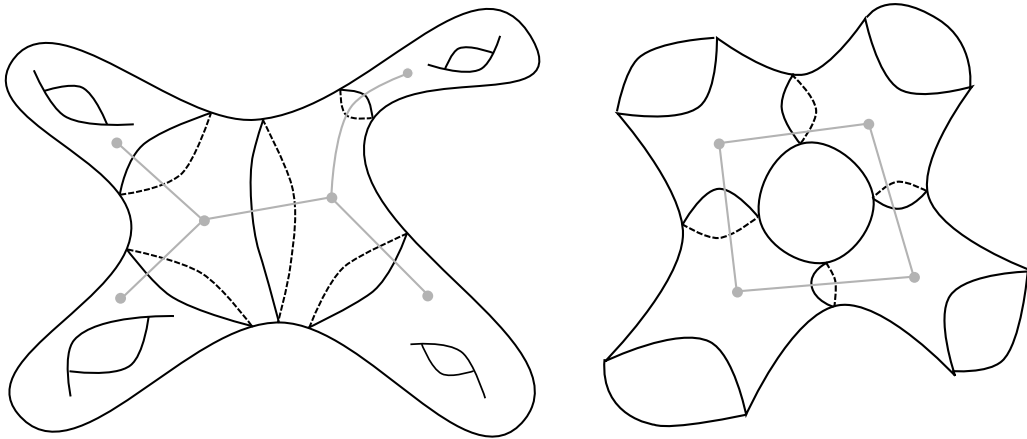


Figura 1.2: A la izquierda, una descomposición árbol-dual de Σ_4 .
A la derecha, una descomposición de $\Sigma_{1,4}$ que no es árbol-dual.

1.2. Levantamiento de caminos

Proposición 1.1.7. Sean g y b tales que $\chi(\Sigma_{g,b}) \leq -1$, entonces $\Sigma_{g,b}$ admite una descomposición árbol-dual con $2g - 2 + b = -\chi(\Sigma_{g,b})$ subsuperficies.

Demostración. Supongamos primero que $g = 0$, de modo que $\Sigma_{g,b}$ es una 2-esfera con $b > 2$ perforaciones. Por inducción en b se deduce la tesis en este caso.

Por otra parte, si $g > 0$ entonces por cada "asa" de $\Sigma_{g,b}$ podemos considerar un toro perforado $\Sigma_{1,1}^{(j)}$ de modo que $\Sigma_{g,b} \setminus (\Sigma_{1,1}^{(1)} \cup \dots \cup \Sigma_{1,1}^{(g)})$ es difeomorfa a una esfera menos $b + g$ discos abiertos disjuntos. Para ser más preciso, si

$$\pi_1(\Sigma_{g,b}) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_b \mid \left(\prod_{j=1}^g [a_j, b_j] \right) c_1 \dots c_b = 1 \rangle$$

entonces $\Sigma_{1,1}^{(j)}$ puede elegirse como el toro con borde $[a_j, b_j]$ y de modo que estas curvas sean dos a dos disjuntas.

Pero entonces $\Sigma_{g,b} \setminus (\Sigma_{1,1}^{(1)} \cup \dots \cup \Sigma_{1,1}^{(g)}) \cong \Sigma_{0,b+g}$ y hemos terminado (c.f. [15], sección 3.8). \square

1.2. Levantamiento de caminos

El propósito de esta sección es introducir dos resultados generales de *levantamiento de caminos* que serán utilizados en lo que sigue.

Definición 1.2.1. Sea $f : M \rightarrow N$ continua. Decimos que f tiene la *propiedad de levantamiento de caminos* si dados un camino $\alpha : [0, 1] \rightarrow N$ y $x \in f^{-1}(\alpha(0))$ existe $\tilde{\alpha}$ camino en M comenzando en x y tal que $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ tienen la misma imagen.

Lema 1.2.2. Sean M, N variedades diferenciables, Γ un grupo actuando en M por difeomorfismos y $f : M \rightarrow N$ un mapa diferenciable y Γ -invariante. Supongamos que:

- Para todo $y \in N$ existe $x \in f^{-1}(y)$ con $d_x f$ sobreyectivo.
- Para todo $y \in N$, Γ actúa transitivamente en las componentes conexas de $f^{-1}(y)$, i.e, si C_1 y C_2 son dos componentes de $f^{-1}(y)$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma.C_1 = C_2$.

Entonces f verifica la propiedad de levantamiento de caminos.

Demostración. Sea α un camino en N y $f(x) = \alpha(0)$. Como todas las fibras tienen puntos regulares, por el teorema de la función inversa podemos cubrir α con finitos levantados locales $\tilde{\alpha}_i$, $i = 1, \dots, n$ y tomar puntos t_i tales que $\alpha(t_i) \in f(\tilde{\alpha}_i) \cap f(\widetilde{\alpha_{i+1}})$ para todo i . A partir de ahí se obtienen puntos $x_i^i \in \tilde{\alpha}_i$ y $x_i^{i+1} \in \widetilde{\alpha_{i+1}}$ levantados de $\alpha(t_i)$. El camino $\tilde{\alpha}$ puede ahora construirse así: tomamos primero $\gamma_1 \in \Gamma$ tal que $\gamma_1.x_0^1$ y x estén en la misma componente. Notar que $\gamma_1.\tilde{\alpha}_1$ es un levantado de $\alpha|_{[0,t_1]}$, porque f es Γ -invariante. Ahora conectamos x con $\gamma_1.x_0^1$ dentro de $f^{-1}(\alpha(0))$ y luego nos movemos hasta $\gamma_1.x_1^1$ por $\gamma_1.\tilde{\alpha}_1$. Esto nos da un levantado de (una reparametrización de) $\alpha|_{[0,t_1]}$. Extendemos este camino actuando con $\gamma_2 \in \Gamma$ tal que $\gamma_2.x_1^1$ esté en la misma componente de $f^{-1}(\alpha(t_1))$ que $\gamma_1.x_1^1$ y procedemos análogamente hasta terminar. \square

Definición 1.2.3. Sea $f : M \rightarrow N$ continua. Decimos que f tiene la *propiedad de levantamiento de caminos a extremos fijos* si para todo camino $\alpha : [0, 1] \rightarrow N$ y todos $x, x' \in M$ tales que $f(x) = \alpha(0)$ y $f(x') = \alpha(1)$, existe un camino $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow M$ conectando x con x' y tal que $f \circ \tilde{\alpha}$ y α tienen la misma imagen.

Evidentemente un mapa puede tener la propiedad de levantamiento de caminos pero no tenerla a extremos fijos. Esta diferencia será relevante en el futuro, por ejemplo, en las secciones 6.2 y 7.2.

Corolario 1.2.4. Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \rightarrow N$ un mapa diferenciable tal que para todo $y \in N$ existe $x \in f^{-1}(y)$ con $d_x f$ sobreyectivo. Si $f^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in N$, entonces f verifica la propiedad de levantamiento de caminos a extremos fijos. Si además N es conexa, entonces M también lo es.

Demostración. Tomando $\Gamma = \{id_M\}$ y aplicando el lema anterior, f levanta caminos. Sea entonces $\alpha \subset N$ y $f(x) = \alpha(0)$, $f(x') = \alpha(1)$. Existe $\tilde{\alpha} \subset M$ desde x y tal que $f \circ \tilde{\alpha}$ es una reparametrización positiva de α . En particular, $x' \in f^{-1}(\alpha(1))$ que es conexo, así que basta extender $\tilde{\alpha}$ conectando $\tilde{\alpha}(1)$ con x' dentro de $f^{-1}(\alpha(1))$. Reparametrizando α para que sea constante durante este tiempo, se sigue el corolario.

Finalmente, la propiedad de levantamiento de caminos a extremos fijos implica que si N es conexa entonces M también lo es. \square

1.3. Fibraciones

El lema 1.2.2 y el corolario 1.2.4 nos dicen que si uno quiere probar una propiedad de levantamiento de caminos de un mapa se verá conducido a estudiar sus fibras. Más aún, la diferencia sustancial entre la propiedad de levantamiento de caminos y la de levantamiento a extremos fijos radica en que un mapa puede levantar caminos sin tener fibras conexas. Es por esto que introducimos una herramienta general que facilita el estudio de las fibras de un mapa.

Definición 1.3.1. Decimos que un mapa continuo y sobreyectivo $p : E \rightarrow B$ es una *fibración* si para todo espacio X , toda homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow B$ y todo mapa $g : X \rightarrow E$ tal que $p(g(x)) = H(x, 0)$ existe $\tilde{H} : X \times [0, 1] \rightarrow E$ con $\tilde{H}(x, 0) = g(x)$ y tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

El objetivo de esta sección es probar que, sobre ciertas hipótesis en una fibración $p : E \rightarrow B$ la cantidad de componentes de E coincide con la cantidad de componentes de las fibras $p^{-1}(b)$ (ver proposición 1.3.3 más adelante). El lector es referido al capítulo 4 de [17] por información adicional.

1.3. Fibraciones

Si $p : E \rightarrow B$ es un mapa y $b \in B$, denotaremos $\pi_0(p^{-1}(b))$ al conjunto de componentes arcoconexas de $p^{-1}(b)$.

Lema 1.3.2. *Una fibración $p : E \rightarrow B$ induce un mapa*

$$\partial : \pi_1(B, b) \rightarrow \pi_0(p^{-1}(b))$$

para todo $b \in B$.

Demostración. Sea $b \in B$. Fijemos $(p^{-1}(b))_0 \in \pi_0(p^{-1}(b))$ una componente distinguida y para $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ tomemos $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow E$ un levantado de γ comenzando en $(p^{-1}(b))_0$ (la existencia de tal levantado está garantizada por la propiedad de levantamiento de homotopías).

Definimos

$$\partial[\gamma] := \text{componente de } p^{-1}(b) \text{ que contiene a } \tilde{\gamma}(1)$$

Este mapa está bien definido: si γ' es otro representante de $[\gamma]$ entonces existe $H \subset B$ tal que

$$H(t, 0) = \gamma(t), \quad H(t, 1) = \gamma'(t), \quad H(0, s) = H(1, s) = b$$

para todo $t, s \in [0, 1]$.

Sea \tilde{H} levantada tal que $\tilde{H}(0, 0) \in (p^{-1}(b))_0$. Como $\{\tilde{H}(0, s)\}_{s \in [0, 1]} \subset p^{-1}(b)$ es arcoconexo, se deduce que $\tilde{H}(0, 1) \in (p^{-1}(b))_0$ y por lo tanto si usamos γ' para calcular ∂ tenemos que su imagen es la componente $\tilde{H}(1, 1) \in \pi_0(p^{-1}(b))$. Pero nuevamente $\{\tilde{H}(1, s)\}_{s \in [0, 1]} \subset p^{-1}(b)$ es arcoconexo así que en $\pi_0(p^{-1}(b))$ tenemos $\tilde{H}(1, 1) = \tilde{H}(1, 0)$ y este último es la imagen cuando usamos el representante γ .

Por otra parte, hay que mostrar $\partial[\gamma]$ que no depende del levantado elegido, es decir que si $\tilde{\gamma}'$ levanta γ y comienza en $(p^{-1}(b))_0$ entonces $\tilde{\gamma}(1)$ y $\tilde{\gamma}'(1)$ pertenecen a la misma componente conexas de $p^{-1}(b)$.

En efecto, si γ es constante es claro: cualquier levantado del camino constante está contenido en una única componente conexas de $p^{-1}(b)$, así que $\partial[\gamma] = (p^{-1}(b))_0$ independientemente de cual sea el levantado elegido.

En general podemos tomar $\tilde{\alpha} \subset (p^{-1}(b))_0$ conectando $\tilde{\gamma}(0)$ con $\tilde{\gamma}'(0)$. Si α es su proyectado por p y $\bar{\gamma}$ es el camino γ recorrido en sentido inverso, uno deduce que $\bar{\gamma}\alpha\gamma$ es homotópico al camino constante. Sea H una homotopía y \tilde{H} una levantada comenzando en $\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}'$. Lo ya probado nos dice que $\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}'(1) = \tilde{\gamma}'(1)$ pertenece a la misma componente de $p^{-1}(b)$ que un levantado del camino constante comenzando en la componente de $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$. Pero ya vimos que dicha componente es la de $\tilde{\gamma}(1)$, así que $\tilde{\gamma}'(1) = \tilde{\gamma}(1)$ en $\pi_0(p^{-1}(b))$. □

La siguiente proposición será utilizada en las secciones 6.1 y 7.1.

Proposición 1.3.3. *Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración y $b \in B$. Supongamos que para toda componente arcoconexa $E_\alpha \subset E$ existe $e \in E_\alpha$ con $p(e) = b$ y tal que $p_* : \pi_1(E, e) \rightarrow \pi_1(B, b)$ es sobreyectiva. Entonces $\#\pi_0(E) = \#\pi_0(p^{-1}(b))$.*

Demostración. Como la restricción a cada componente es sobreyectiva se tiene obviamente que $\#\pi_0(E) \leq \#\pi_0(p^{-1}(b))$. Esto implica que alcanza probar que si E es arcoconexo entonces $p^{-1}(b)$ también lo es, pues basta razonar en cada componente.

Sean $e_1, e_2 \in p^{-1}(b)$, puedo tomar $\tilde{\gamma} \subset E$ conectando e_1 con e_2 así que $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$ es un lazo basado en b . Por el lema previo, si definimos la componente distinguida $(p^{-1}(b))_0$ como aquella que contiene a e_1 y tomamos el mapa ∂ asociado, deducimos que

$$\partial[\gamma] = \text{componente de } p^{-1}(b) \text{ que contiene a } e_2 \quad (1.1)$$

Por otra parte, por hipótesis podemos suponer $p_* : \pi_1(E, e_1) \rightarrow \pi_1(B, b)$ sobreyectiva. Como $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$, existe $[\tilde{\gamma}'] \in \pi_1(E, e_1)$ tal que

$$[p \circ \tilde{\gamma}'] = [\gamma]$$

Pero entonces

$$\partial[\gamma] = \partial[p \circ \tilde{\gamma}'] = \text{componente de } p^{-1}(b) \text{ que contiene a } \tilde{\gamma}'(1)$$

Siendo $\tilde{\gamma}'$ un lazo basado en e_1 deducimos que

$$\partial[\gamma] = \text{componente de } p^{-1}(b) \text{ que contiene a } e_1$$

y para terminar basta combinar esto con (1.1). □

En las secciones 6.1 y 7.1 introduciremos un par de mapas cruciales para la demostración del resultado central de este trabajo. Para dichos mapas, veremos que es fácil mostrar que admiten ciertas restricciones que son fibraciones y utilizaremos los resultados aquí probados para deducir propiedades de sus fibras.

Capítulo 2

Generalidades sobre $PSL(2, \mathbb{R})$ y $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$

Comenzamos por dar una descripción general del grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ y su cubrimiento universal $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$. Nos interesa particularmente entender cómo actúa el primero en $\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup S^1$ y el segundo en \mathbb{R} . Además, estudiamos las clases de conjugación en $PSL(2, \mathbb{R})$ y en $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$.

Describimos a continuación algunos aspectos de la geometría del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 (ver [7] por más información).

Consideremos en el semiplano superior $\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$ la métrica

$$ds^2(z) := \frac{dx^2 + dy^2}{\text{Im}(z)^2}$$

Esta métrica es completa, de curvatura constante igual a -1. Además, puede probarse (ver [20], teorema 1.3.1) que el grupo de isometrías positivas de esta métrica es

$$\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1 \right\}$$

Este grupo actúa además en $\mathbb{R} \cup \infty \cong S^1 \subset \mathbb{C} \cup \infty$ (por extensión de la acción en \mathbb{H}^2).

Por otro lado, notemos $M(2, \mathbb{R})$ al conjunto de matrices 2×2 de entradas reales y consideremos el grupo multiplicativo

$$SL(2, \mathbb{R}) := \{X \in M(2, \mathbb{R}), \det(X) = 1\}$$

El mapa que asigna a $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ la transformación $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ es un homomorfismo sobreyectivo de grupos, con núcleo $\{\pm I\}$. Definamos

$$PSL(2, \mathbb{R}) := \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\pm I}$$

Entonces $PSL(2, \mathbb{R}) \cong Isom^+(\mathbb{H}^2)$ y resulta que $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa en $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{R} \cup \infty$ por transformaciones de Möbius. Notar que $PSL(2, \mathbb{R})$ también actúa en $\mathbb{RP}^1 := \{\text{rectas de } \mathbb{R}^2\}$ linealmente. Bajo una identificación adecuada $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{R} \cup \infty$, se tiene que ambas acciones coinciden (ver por ejemplo [11], página 5).

La función $det : M(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y 1 es un valor regular, entonces $SL(2, \mathbb{R})$ es una variedad diferenciable de dimensión $4 - 1 = 3$. La multiplicación e inversión de matrices son operaciones diferenciables, de modo que $SL(2, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie real. Es fácil ver que

$$T_1 SL(2, \mathbb{R}) = Ker(d_1 det) = \{\dot{E} \in M(2, \mathbb{R}), \text{tr}(\dot{E}) = 0\}$$

Notaremos $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ a este espacio vectorial. Si $X \in SL(2, \mathbb{R})$, resulta que

$$T_X SL(2, \mathbb{R}) = \{X\dot{E} \in M(2, \mathbb{R}), \dot{E} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})\} = \{\dot{E}X \in M(2, \mathbb{R}), \dot{E} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})\}$$

El grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ hereda la topología de $SL(2, \mathbb{R})$ y resulta que $SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ es un cubrimiento doble, así que $PSL(2, \mathbb{R})$ es también un grupo de Lie real de dimensión 3. Topológicamente es un toro sólido abierto pues actúa libre y transitivamente en el fibrado unitario $T^1\mathbb{H}^2 = \{(z, v), z \in \mathbb{H}^2, \|v\|_z = 1\}$:

$$X.(z, v) := (X(z), d_z X(v))$$

Así $PSL(2, \mathbb{R}) \cong T^1\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{H}^2 \times S^1$ y como $SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ es un cubrimiento doble y es conexo, se tiene también que $SL(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{H}^2 \times S^1$.

2.1. Clases de conjugación en $PSL(2, \mathbb{R})$

En esta sección establecemos una clasificación de elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ de acuerdo a su dinámica en $\overline{\mathbb{H}^2}$. Además, probamos que la traza es un invariante que detecta de manera precisa la clase de conjugación de un elemento de $SL(2, \mathbb{R})$ (proposición 2.1.2). Finalmente demostramos un lema técnico que utilizaremos recién en el capítulo 9, pero que por ser elemental establecemos aquí (lema 2.1.8).

Como veremos a continuación, además de la identidad existen en $PSL(2, \mathbb{R})$ tres tipos de elementos caracterizados por la cantidad de puntos que fijan en $\overline{\mathbb{H}^2}$:

- Si fijan un único punto en \mathbb{H}^2 se denominan *elípticos*.
- Si fijan un único punto en $S^1 = \partial\mathbb{H}^2$ se dicen *parabólicos*.
- Si fijan dos puntos distintos de S^1 se llaman *hiperbólicos*.

Los levantados a $SL(2, \mathbb{R})$ de estos elementos serán llamados de la misma manera. Si pensamos $SL(2, \mathbb{R})$ actuando en \mathbb{RP}^1 , un elíptico está representado por una matriz que no tiene valores propios reales, un parabólico por una matriz que tiene un único valor propio

2.1. Clases de conjugación en $PSL(2, \mathbb{R})$

real (de multiplicidad dos), mientras que los hiperbólicos tienen dos valores propios reales distintos (uno inverso del otro).

Cuando no haya riesgo de confusión, si un elemento $X \in PSL(2, \mathbb{R})$ está representado por una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notaremos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (es decir que esta igualdad debe entenderse módulo $\pm I$). Notar que en $PSL(2, \mathbb{R})$ la función traza no está bien definida, mientras que su valor absoluto sí lo está.

Proposición 2.1.1. *Sea $I \neq X \in PSL(2, \mathbb{R})$. Entonces:*

- X es elíptico si y sólo si $|trX| < 2$.
- X es parabólico si y sólo si $|trX| = 2$.
- X es hiperbólico si y sólo si $|trX| > 2$.

Demostración. Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, basta discutir según $|a + d|$ las soluciones de $z = \frac{az+b}{cz+d}$. □

Notaremos

$$Ell := |tr|^{-1}[0, 2) \quad Par := |tr|^{-1}\{2\} \setminus I \quad Hyp := |tr|^{-1}(2, \infty) \quad (2.1)$$

En $SL(2, \mathbb{R})$, se tiene que

$$Ell = tr^{-1}(-2, 2) \quad Par = tr^{-1}\{\pm 2\} \setminus \{\pm I\} \quad Hyp = tr^{-1}(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

Sea $GL(2, \mathbb{R})$ el conjunto de matrices 2×2 reales e invertibles. Es claro que actúa por conjugación en $SL(2, \mathbb{R})$ y en $PSL(2, \mathbb{R})$ y que la partición anterior es invariante por esta acción. Del mismo modo, $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa por conjugación.

Sea $X \in PSL(2, \mathbb{R})$ elíptico y $z_0 \in \mathbb{H}^2$ su punto fijo, existe $Y \in PSL(2, \mathbb{R})$ que lleva z_0 en i de modo que $YXY^{-1} \in Ell$ fija i . Entonces $YXY^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, con $a^2 + b^2 = 1$ y resulta que existe un único $\theta \in (0, \pi)$ tal que

$$YXY^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sen\theta \\ -\sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

No es difícil ver que esta matriz actúa como una rotación (en la métrica hiperbólica) de ángulo 2θ alrededor de i , de modo que X es una rotación del mismo ángulo alrededor de x_0 .

Si $X \in Par$, tomando una $Y \in PSL(2, \mathbb{R})$ que lleve el punto fijo en ∞ se tiene que

$$YXY^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

para un único $\zeta \in \mathbb{R}^*$. Así, X actúa como una traslación.

Finalmente para $X \in Hyp$ se puede tomar $Y \in PSL(2, \mathbb{R})$ que lleve los fijos de X en ∞ y 0 . Entonces existe un único $0 < \lambda \neq 1$ tal que

$$YXY^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Tenemos que X actúa como una homotecia, dejando invariante la geodésica γ determinada por los puntos fijos, uno de los cuales es atractor y el otro repulsor (ver figura 2.1). Notar que $d_{\mathbb{H}^2}(i, YXY^{-1}i) = |\ln(\lambda^2)|$ (ver [20], teorema 1.2.6), de modo que la distancia de traslación a través de γ es $d := 2|\ln\lambda| > 0$. Resulta que $\lambda = e^{\pm d/2}$ y por tanto $|\operatorname{tr}X| = |2\cosh(\pm d/2)| = 2\cosh(d/2)$. Si consideramos ahora $\tilde{Y} \in PSL(2, \mathbb{R})$ que lleve los fijos de X en 1 y -1 , se tiene que $\tilde{Y}X\tilde{Y}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, con $a^2 - b^2 = 1$. Así que existe un único $d \in \mathbb{R}^*$ tal que

$$\tilde{Y}X\tilde{Y}^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh(d/2) & \pm \sinh(d/2) \\ \pm \sinh(d/2) & \cosh(d/2) \end{pmatrix}$$

Conjugando por $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$ (que corresponde a un intercambio atractor/repulsor, y que lleva $\begin{pmatrix} \cosh(d/2) & -\sinh(d/2) \\ -\sinh(d/2) & \cosh(d/2) \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \cosh(d/2) & \sinh(d/2) \\ \sinh(d/2) & \cosh(d/2) \end{pmatrix}$ que es su inversa), podemos suponer

$$\tilde{Y}X\tilde{Y}^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh(d/2) & \sinh(d/2) \\ \sinh(d/2) & \cosh(d/2) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Las expresiones (2.2), (2.3), (2.4) y (2.5) serán denominadas *formas normales en $PSL(2, \mathbb{R})$* .

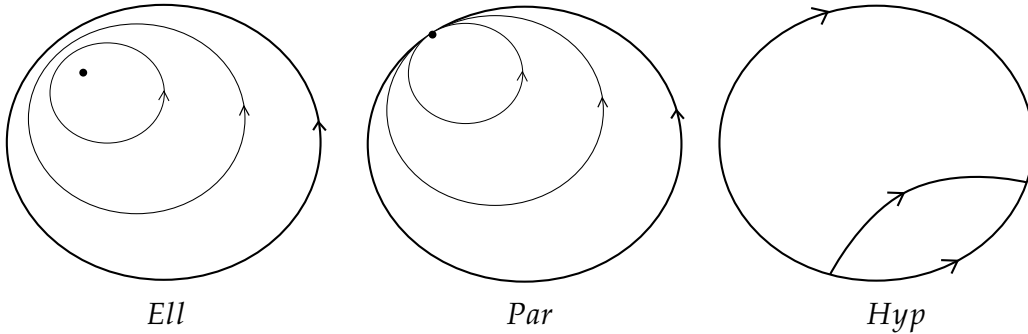


Figura 2.1: Dinámica en $\overline{\mathbb{H}^2}$ de elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Proposición 2.1.2. Sean $I \neq X, Z \in SL(2, \mathbb{R})$. Entonces son $GL(2, \mathbb{R})$ -conjugados si y sólo si $\operatorname{tr}X = \operatorname{tr}Z$. Para $I \neq X, Z \in PSL(2, \mathbb{R})$ se tiene que son $GL(2, \mathbb{R})$ -conjugados si y sólo si $|\operatorname{tr}X| = |\operatorname{tr}Z|$.

Demostración. Supongamos que $X, Z \in SL(2, \mathbb{R})$ son elípticos tales que $\operatorname{tr}X = \operatorname{tr}Z$. Por (2.2) podemos suponer

2.1. Clases de conjugación en $PSL(2, \mathbb{R})$

$$X = \pm \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad Z = \pm \begin{pmatrix} \cos\Theta & \operatorname{sen}\Theta \\ -\operatorname{sen}\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

para $\theta, \Theta \in (0, \pi)$.

Digamos primero que

$$X = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \operatorname{sen}\Theta \\ -\operatorname{sen}\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Como $\operatorname{tr}X = \operatorname{tr}Z$, entonces $\cos\theta = \cos\Theta$ y dado que $\theta, \Theta \in (0, \pi)$ se tiene que $X = Z$.

En el caso

$$X = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} -\cos\Theta & -\operatorname{sen}\Theta \\ \operatorname{sen}\Theta & -\cos\Theta \end{pmatrix}$$

se tiene que $\cos\theta = -\cos\Theta$ y como $\theta, \Theta \in (0, \pi)$ podemos suponer $\Theta = \pi - \theta$. Entonces

$$X = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y basta conjugar por $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$. El caso restante es análogo.

Cuando X, Z son hiperbólicos se aplican razonamientos similares. En el caso parabólico sólo hay que notar que dos matrices triangulares superiores de traza igual a 2 (o de traza igual a -2) son $GL(2, \mathbb{R})$ -conjugadas.

A partir de esto, la afirmación en $PSL(2, \mathbb{R})$ es inmediata. □

Observación 2.1.3. No es difícil ver que en los casos elíptico y parabólico, la $GL(2, \mathbb{R})$ -clase de conjugación de un elemento se divide en dos $SL(2, \mathbb{R})$ -clases de conjugación (una inversa de la otra). En el caso hiperbólico se prueba que dos elementos son $GL(2, \mathbb{R})$ -conjugados si y sólo si son $SL(2, \mathbb{R})$ -conjugados.

Establecemos ahora una condición necesaria y suficiente para que dos elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ conmuten.

Definición 2.1.4. Sea G un grupo de Lie. Un subgrupo a un parámetro en G es un homomorfismo suave

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

Ejemplo 2.1.5. Los siguientes son subgrupos a un parámetro en $PSL(2, \mathbb{R})$:

- $\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
- $\zeta \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $d \mapsto \begin{pmatrix} \cosh(d/2) & \operatorname{senh}(d/2) \\ \operatorname{senh}(d/2) & \cosh(d/2) \end{pmatrix}$

Es sabido que dos elementos distintos de la identidad en $PSL(2, \mathbb{R})$ conmutan si y sólo si tienen los mismos puntos fijos en $\overline{\mathbb{H}^2}$ (ver por ejemplo [20], teorema 2.3.2). Como las expresiones (2.2),(2.3) y (2.5) se obtienen conjugando un elemento genérico $I \neq X \in PSL(2, \mathbb{R})$ por una matriz $Y \in PSL(2, \mathbb{R})$ que sólo depende de los puntos fijos de X , y como evidentemente todos los elementos de un subgrupo a un parámetro conmutan, obtenemos la siguiente

Proposición 2.1.6. *Dos elementos $X, Z \in PSL(2, \mathbb{R})$ conmutan si y sólo si existe un subgrupo a un parámetro φ tal que $X, Z \in \varphi(\mathbb{R})$.*

□

Observación 2.1.7. Los conjuntos Ell e Hyp son conexos (y abiertos): basta notar que $PSL(2, \mathbb{R})$ lo es y utilizar las formas (2.2) y (2.5). Además, es imposible conectarlos entre sí sin pasar por $Par \cup I$. Observar que Par no es conexo: no es posible conectar $\begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si $\zeta < 0 < \eta$. Notaremos Par^- a los $PSL(2, \mathbb{R})$ -conjugados a los primeros y Par^+ a los otros (estos conjuntos sí son conexos).

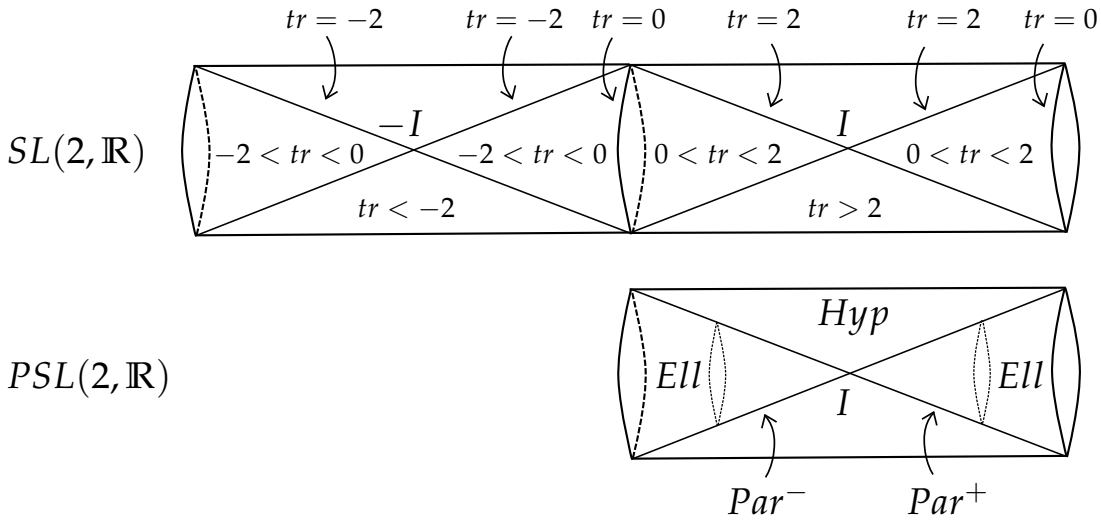


Figura 2.2: Abajo, la partición (2.1) de $PSL(2, \mathbb{R})$. Arriba, la partición levantada al cubrimiento doble $SL(2, \mathbb{R})$.

Un posible modo de entender la figura anterior es el siguiente: la *forma de Killing* en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ tiene signatura $(1, 2)$. Se puede probar que el *cono de luz* en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^3$ se proyecta por el *mapa exponencial* en $Par \cup I$ mientras que los vectores *espaciales* (respectivamente *temporales*) se proyectan en $Hyp \cup I$ (respectivamente $Ell \cup I$). Para el lector no habituado con esta terminología se sugiere consultar los apéndices B y C (sección C.1), así como [1].

2.1. Clases de conjugación en $PSL(2, \mathbb{R})$

De cualquier modo esto sólo constituye una motivación para la figura y no es formalmente necesario para la correcta lectura de lo que sigue.

2.1.1. Un lema técnico: caminos de conjugaciones

En el capítulo 9 necesitaremos de un lema técnico que expresa que si dos caminos en $SL(2, \mathbb{R})$ son todo el tiempo conjugados entonces la conjugación en cada instante puede elegirse de manera continua.

Lema 2.1.8. Sean $C_t, C'_t \in SL(2, \mathbb{R}) \setminus \{\pm I\}$ caminos continuos y tales que para todo $t \in [0, 1]$ C_t es $SL(2, \mathbb{R})$ -conjugado a C'_t . Si C_t pasa sólo finitas veces por Par , entonces después quizá de reparametrizar C_t y C'_t existe un camino $X_t \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que

$$C_t = X_t C'_t X_t^{-1}$$

para todo $t \in [0, 1]$. Más aún, si $C_0 = C'_0$ puede suponerse $X_0 = I$.

Demostración. Podemos descomponer el intervalo $[0, 1]$ en subintervalos $[a, b]$ tales que, a lo sumo, existe un único $t \in [a, b]$ tal que $C_t \in Par$ (y por lo tanto $C'_t \in Par$).

Fijemos $[a, b]$ uno de dichos subintervalos. Dividiremos la demostración en varias etapas.

1. Existencia de X_t cuando $C_t, C'_t \in Ell$ para todo $t \in [a, b]$.

Denotemos $w(t), w'(t) \in \mathbb{H}^2$ a los respectivos puntos fijos de C_t y C'_t . Es fácil ver que esto define funciones continuas $[a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$.

Tomemos $U_t, U'_t \in SL(2, \mathbb{R})$ que lleven dichos puntos en $i \in \mathbb{H}^2$, de modo que hay dos posibilidades

$$U_t C_t U_t^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta_t & \sen\theta_t \\ -\sen\theta_t & \cos\theta_t \end{pmatrix} = U'_t C'_t U'^{-1}_t$$

o

$$U_t C_t U_t^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta_t & \sen\theta_t \\ -\sen\theta_t & \cos\theta_t \end{pmatrix} \text{ y } U'_t C'_t U'^{-1}_t = \begin{pmatrix} \cos\theta_t & -\sen\theta_t \\ \sen\theta_t & \cos\theta_t \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

El segundo caso no puede ocurrir porque $C_t, C'_t \neq \pm I$ así que $\begin{pmatrix} \cos\theta_t & \sen\theta_t \\ -\sen\theta_t & \cos\theta_t \end{pmatrix}$ no es $SL(2, \mathbb{R})$ -conjugada a $\begin{pmatrix} \cos\theta_t & -\sen\theta_t \\ \sen\theta_t & \cos\theta_t \end{pmatrix}$. Es decir que ocurre lo primero y basta tomar $X_t := U_t U'^{-1}_t$. Notar que en el caso $C_0 = C'_0$ podemos suponer $U_0 = U'_0$ de modo que $X_0 = I$.

2. Existencia de X_t cuando $C_t, C'_t \in Hyp$ para todo $t \in [a, b]$.

Existen caminos $w^1_{C_t}, w^2_{C_t}, w^1_{C'_t}, w^1_{C'_t} \in \mathbb{RP}^1$ dados por los subespacios propios respectivos de C_t y C'_t . Como $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ es un cubrimiento, podemos levantar esto a caminos de vectores que diagonalizan C_t y C'_t y que por abuso denotaremos

$$w_{C_t}^1, w_{C_t}^2, w_{C'_t}^1, w_{C'_t}^2 \in \mathbb{R}^2$$

Consideremos las matrices

$$U_t := (w_{C_t}^1 | w_{C_t}^2) \quad U'_t := (w_{C'_t}^1 | w_{C'_t}^2)$$

Cambiando $w_{C_t}^1$ y $w_{C_t}^2$ por sus opuestos si fuera necesario y normalizando podemos suponer que $U_t, U'_t \in SL(2, \mathbb{R})$.

Es claro entonces que $U_t C_t U_t^{-1}$ y $U'_t C'_t U_t'^{-1}$ son matrices diagonales, de modo que

$$U_t C_t U_t^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_t & 0 \\ 0 & 1/\lambda_t \end{pmatrix} = U'_t C'_t U_t'^{-1}$$

o

$$U_t C_t U_t^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_t & 0 \\ 0 & 1/\lambda_t \end{pmatrix} \text{ y } U'_t C'_t U_t'^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_t & 0 \\ 0 & \lambda_t \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Si ocurre lo segundo podemos cambiar U'_t por $U'_t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$.

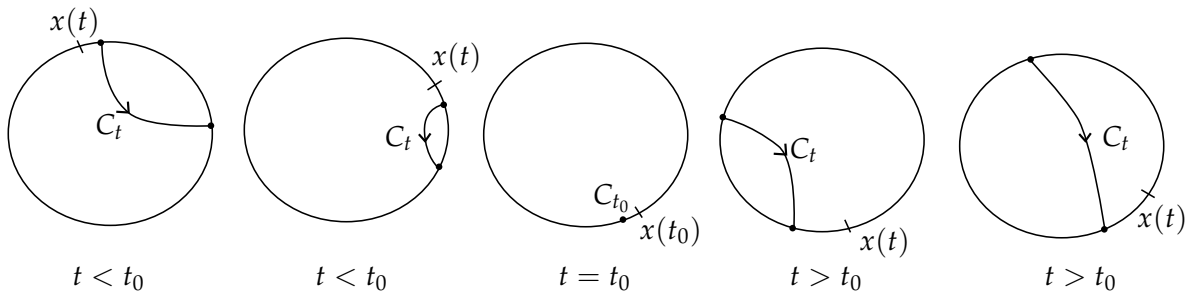
Nuevamente observar que si $C_0 = C'_0$ entonces por continuidad lo segundo no ocurre, dado que los caminos no pasan por $\pm I$. Como podemos suponer $U_0 = U'_0$, deducimos que $X_0 = I$.

3. Si existe $t_0 \in [a, b]$ único instante tal que $C_{t_0}, C'_{t_0} \in Par$.

En este caso existen caminos $x(t) \neq y(t) \in \mathbb{R}P^1$ tales que

$$C_t(x(t)) = y(t)$$

para todo $t \in [a, b]$. En efecto, digamos por ejemplo que $C_t \in Hyp$ para todo $t \in [a, b] \setminus \{t_0\}$ (los restantes casos son análogos), entonces $x(t)$ puede elegirse "acompañando" uno de los puntos fijos de C_t y se toma $y(t) := C_t(x(t)) \neq x(t)$:



2.1. Clases de conjugación en $PSL(2, \mathbb{R})$

Observar que estos caminos pueden no existir si no suponemos que existe un sólo instante en donde C_t es parabólico.

Levantemos a vectores $x(t), y(t) \in \mathbb{R}^2$ y en particular $\{x(t), y(t)\}$ es una base de \mathbb{R}^2 para todo $t \in [a, b]$. Más aún podemos suponer que

$$U_t := (x(t)|y(t)) \in SL(2, \mathbb{R})$$

En particular, $U_t^{-1}C_tU_t$ aplica $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ en $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ así que tiene entrada 1 – 1 nula y por lo tanto

$$U_t^{-1}C_tU_t = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(t) \\ -1/\alpha(t) & tr(C_t) \end{pmatrix}$$

Conjugando la igualdad anterior por $\begin{pmatrix} \sqrt{|\alpha(t)|} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{|\alpha(t)|} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ podemos suponer que

$$U_t^{-1}C_tU_t = \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & tr(C_t) \end{pmatrix}$$

Análogamente,

$$U_t'^{-1}C_t'U_t' = \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & tr(C_t') \end{pmatrix}$$

Como $tr(C_t) = tr(C_t')$, si fuera $U_t^{-1}C_tU_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & tr(C_t) \end{pmatrix}$ y $U_t'^{-1}C_t'U_t' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & tr(C_t) \end{pmatrix}$ no serían $SL(2, \mathbb{R})$ –conjugadas y se concluye igual que en 1. y 2.

4. Los caminos X_t construídos en 1., 2. y 3. pueden pegarse continuamente cuando nos movemos de un intervalo $[a, b]$ a otro.

Cubrimos $[0, 1]$ con finitos intervalos como los anteriores de modo que si $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$ entonces $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$ y son tales que C_t no es parabólico en $[a_2, b_1]$. Tenemos $X_t^1, X_t^2 \in SL(2, \mathbb{R})$ tales que

$$C_t = X_t^1 C_t' (X_t^1)^{-1} \text{ para todo } t \in [a_1, b_1]$$

$$C_t = X_t^2 C_t' (X_t^2)^{-1} \text{ para todo } t \in [a_2, b_2]$$

Para cada $t \in [a_2, b_1]$ definamos

$$F_t := \{X \in SL(2, \mathbb{R}), C_t = XC_t'X^{-1}\}$$

Afirmamos que F_t es conexo. En efecto, supongamos primero que $C_t, C_t \in Ell$ y sean $X^1, X^2 \in F_t$, entonces $X := X^1 (X^2)^{-1}$ es tal que $XC_tX^{-1} = C_t$. Si $w(t) \in \mathbb{H}^2$ es el punto fijo de C_t , se deduce que $X(w(t))$ es fijo por C_t y por lo tanto $X(w(t)) = w(t)$.

Sea $Y \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que $Y(w(t)) = i$, entonces $YXY^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sen\theta \\ -\sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Definamos

$$s \mapsto Z_s := Y^{-1} \begin{pmatrix} \cos((1-s)\theta) & \sen((1-s)\theta) \\ -\sen((1-s)\theta) & \cos((1-s)\theta) \end{pmatrix} Y$$

que es un camino en $SL(2, \mathbb{R})$ desde X hasta I y tal que $Z_s(w(t)) = w(t)$ para todo $s \in [0, 1]$. En particular, $Z_s C_t Z_s^{-1}$ fija $w(t)$ y tiene la misma traza que C_t , así que

$$Z_s C_t Z_s^{-1} = C_t \text{ o } Z_s C_t Z_s^{-1} = C_t^{-1}$$

Como $C_t \neq \pm I$ y $Z_s \in SL(2, \mathbb{R})$ es fácil ver que lo segundo no puede ocurrir, así que $Z_s C_t Z_s^{-1} = C_t$ para todo $s \in [0, 1]$ y por lo tanto $Z_s X^2 \in F_t$ conecta $XX^2 = X^1$ con $IX^2 = X^2$.

El caso $C_t \in Hyp$ es completamente análogo y ahora la prueba finaliza de la siguiente manera: fijemos $t \in (a_2, b_1)$ y conectemos X_t^1 con X_t^2 dentro de F_t . Si reparametrizamos los caminos C y C' de modo que queden fijos durante este tiempo, hemos encontrado un camino camino de conjugaciones definido en el intervalo $[a_1, b_2]$.

□

Ejemplo 2.1.9. Discutimos aquí algunas situaciones en las que podemos o no aplicar el lema anterior:

- Supongamos que $C_t, C'_t \neq \pm I$ en $SL(2, \mathbb{R})$ tales que $tr(C_t) = tr(C'_t)$ es estrictamente monótona y $C_0, C'_0 \in Ell \cup Par$ son $SL(2, \mathbb{R})$ -conjugados. Entonces C_t y C'_t son $SL(2, \mathbb{R})$ -conjugados para todo $t \in [0, 1]$:

Para fijar ideas supongamos que $C_0, C'_0 \in Par$. Al comenzar son $SL(2, \mathbb{R})$ -conjugados así que ambos pertenecen a Par^+ o ambos pertenecen a Par^- (observación 2.1.7). Si de ahí en más son hiperbólicos, son $SL(2, \mathbb{R})$ -conjugados por la observación 2.1.3 y no hay más nada que probar.

De lo contrario pasan a ser elípticos y como vimos en la demostración del lema anterior para un t suficientemente pequeño siguen siendo $SL(2, \mathbb{R})$ -conjugados. En particular siguen siendo $SL(2, \mathbb{R})$ -conjugados durante todo el tiempo en que son elípticos: existen $U_t, U'_t \in SL(2, \mathbb{R})$ definidas durante todo el tiempo en que $C_t, C'_t \in Ell$ y tales que al conjugar obtenemos formas normales. Pero (2.6) no puede ocurrir pues al inicio las formas normales son iguales y para que ocurra (2.6) deberíamos pasar por $\pm I$, contradicción.

Si vuelven a pasar por Par tienen que pasar ambos por Par^+ o ambos por Par^- porque sino las trazas serían opuestas.

2.2. Una partición de $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$

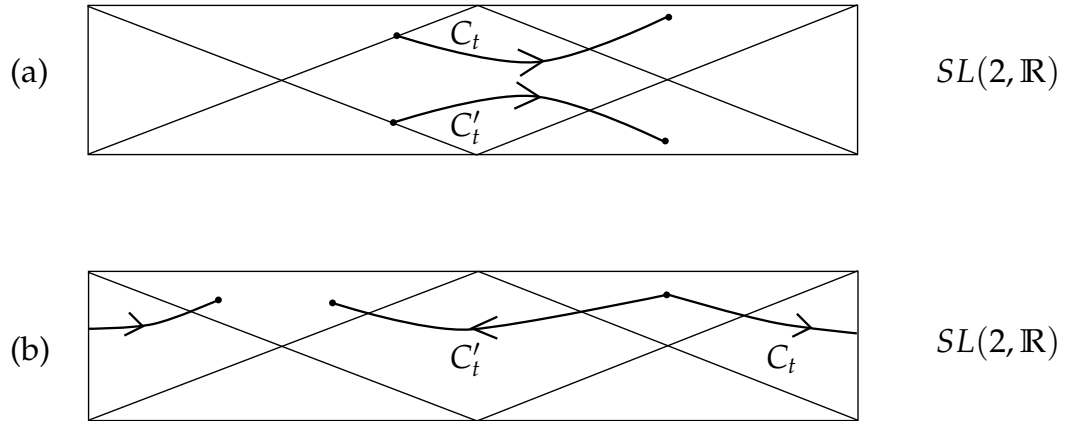


Figura 2.3: Ejemplo 2.1.9.

Si pasan a *Hyp* ya terminamos pues ahí son $SL(2, \mathbb{R})$ -conjugados y por la hipótesis de monotonía en la traza se quedan en *Hyp* de ahí en más (ver figura 2.3 (a)).

- El ítem anterior es falso si $C_0, C'_0 \in Hyp$. Tomemos por ejemplo

$$C_t := \begin{pmatrix} \lambda_t & \zeta_t \\ 0 & 1/\lambda_t \end{pmatrix} \quad C'_t := \begin{pmatrix} \lambda_t & \zeta'_t \\ 0 & 1/\lambda_t \end{pmatrix}$$

donde λ_t es estrictamente decreciente, $\lambda_0 > 1$ y $\zeta_0 = \zeta'_0 = 0$.

Si suponemos que $\lambda_{1/2} = 1$, $\zeta_{1/2} > 0$ y $\zeta'_{1/2} < 0$ obtenemos que $C_{1/2}$ y $C'_{1/2}$ no son conjugados en $SL(2, \mathbb{R})$ (ver figura 2.3 (b)).

Notar que en este caso podríamos tomar $g \in GL(2, \mathbb{R})^-$ que estabilice C_0 y definir $\hat{C}_t := gC_tg^{-1}$. Por el ítem anterior, \hat{C}_t es $SL(2, \mathbb{R})$ -conjugado a C'_t así que existe $g_t \in GL(2, \mathbb{R})^-$ tal que $C_t = g_tC'_tg_t^{-1}$. Más aún, en el caso $C_0 = C'_0$ puede suponerse $g_0 = g$.

- Si $C_t \neq \pm I$ y $tr(C_t)$ es constante, existe $X_t \in SL(2, \mathbb{R})$ comenzando en I y tal que

$$C_t = X_t C_0 X_t^{-1}$$

En efecto, tomemos $C'_t := C_0$. Si $C_t \in Hyp$ se aplica la observación 2.1.3 y el lema 2.1.8. Si $C_t \in Ell$ se razona como en el lema observando que (2.6) no puede ocurrir. Si $C_t \in Par$, como $C_t \neq \pm I$ entonces siempre está en Par^+ o siempre está en Par^- y el argumento dentro de la demostración del lema anterior se aplica.

2.2. Una partición de $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$

La partición de $PSL(2, \mathbb{R})$ en elípticos, parabólicos e hiperbólicos definida por (2.1) induce una partición en el cubrimiento universal $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ que describimos a continuación.

Consideremos $p : \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ el cubrimiento universal. Topológicamente es $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y como $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ es el cubrimiento doble conexo, se tiene también que $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ es el cubrimiento universal de $SL(2, \mathbb{R})$. Fijemos \tilde{I} un levantado de $I \in SL(2, \mathbb{R})$ y tomemos los levantados de la multiplicación y de la inversión que cumplen $\tilde{I}\tilde{I} = \tilde{I}$ y $\tilde{I}^{-1} = \tilde{I}$. Resulta que $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie y que $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ es un homomorfismo. Esta estructura es compatible con el cubrimiento $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow SL(2, \mathbb{R})$, i.e, este mapa es también un homomorfismo.

Observación 2.2.1. Como $p^{-1}(I) = Ker(p)$ es discreto es fácil ver que sus elementos son centrales (de hecho puede probarse que $\mathcal{Z}(\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})) = Ker(p)$) y que el grupo $\Gamma(p, \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}))$ de transformaciones de cubrimiento consiste de los mapas $X \mapsto wX$ donde $w \in Ker(p)$. En particular

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(PSL(2, \mathbb{R})) \cong \Gamma(p, \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})) \cong Ker(p)$$

Escribimos entonces $Ker(p) = \{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{Z}(\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}))$ y elegimos el generador z de un modo natural: hemos visto que $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset Homeo^+(S^1)$ así que

$$\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \widetilde{Homeo}^+(S^1) := \{f \in Homeo(\mathbb{R}), f(x+1) = f(x) + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Siendo z un levantado de la transformación identidad, actúa en \mathbb{R} como una traslación entera y dado que genera el grupo de transformaciones de cubrimiento puede elegirse de modo que corresponda a la traslación $x \mapsto x + 1$. Más precisamente, el cubrimiento universal $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$ induce

$$\widetilde{Homeo}^+(S^1) \longrightarrow Homeo^+(S^1)$$

Este mapa es un cubrimiento convexo (ver por ejemplo [11], proposición 4.2) de modo que es el cubrimiento universal de $Homeo^+(S^1)$ y en particular la inclusión $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow \widetilde{Homeo}^+(S^1)$ se levanta a

$$\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \widetilde{Homeo}^+(S^1)$$

La proposición 4.2 de [11] nos permite considerar el generador de $\pi_1(Homeo^+(S^1), id_{S^1})$ dado por el camino

$$\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & \sen(2\pi t) \\ -\sen(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix}$$

2.3. Acción de $GL(2, \mathbb{R})$ en $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$

Claramente γ se levanta al camino de mapas $x \mapsto x + t$.

Por la misma razón, $\gamma(t) \in PSL(2, \mathbb{R})$ genera $\pi_1(PSL(2, \mathbb{R}), I)$ y por tanto su levantado a $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ comenzando en \tilde{I} termina en un generador de $\text{Ker}(p) = \{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Declaramos entonces que z es tal generador.

Lo anterior implica también que $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \widetilde{\text{Homeo}}^+(S^1)$ es un homomorfismo inyectivo. A partir de estas consideraciones uno obtiene que si $X \in \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ entonces $z^k X = X z^k$ es el homomorfismo de \mathbb{R} obtenido de trasladar $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por el vector $k \in \mathbb{Z}$.

Cada elemento $X \in \text{Hyp}$ fija dos puntos distintos en S^1 de modo que existe un levantado preferido (o canónico) $\tilde{X} \in \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ que es el único que fija dos puntos de \mathbb{R} . Notaremos Hyp_0 al conjunto de estos levantados y para cada $k \in \mathbb{Z}$ consideramos el conjunto de trasladados

$$\text{Hyp}_k := z^k \text{Hyp}_0$$

De modo completamente análogo podemos definir los conjuntos $\text{Par}_k, \text{Par}_k^+$ y Par_k^- .

El caso elíptico es diferente pues no existe un levantado canónico: si $X \in \text{Ell}$ existe un único levantado que lleva 0 en un punto de $(0, 1)$ y otro que lo lleva en un punto de $(-1, 0)$ y no hay razón para preferir uno sobre otro. Notaremos Ell_1 a los primeros y Ell_{-1} a los segundos. Para $k > 0$ (respectivamente < 0) definimos $\text{Ell}_k := z^{k-1} \text{Ell}_1$ (respectivamente $\text{Ell}_k := z^{k+1} \text{Ell}_{-1}$).

Hemos obtenido la partición

$$\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}) = \{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}} \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hyp}_k \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \text{Par}_k \bigsqcup_{k \neq 0} \text{Ell}_k \quad (2.8)$$

La figura 2.4 nos muestra un esquema de esta partición.

Observemos que los levantados de I por el mapa $SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ son I y $-I$, así que sus levantados por $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ dan lugar al conjunto $\{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Es fácil ver que los levantados de $I \in SL(2, \mathbb{R})$ son los elementos de la forma z^{2k} mientras que los de $-I$ son los z^{2k+1} .

Definición 2.2.2. Sea $X \in \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$. Definimos la *traza* de X como la traza de su proyección a $SL(2, \mathbb{R})$. La denotamos $\text{tr}X$.

Corolario 2.2.3. Sea $X \in \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$.

- Si $X = z^k$, entonces $\text{tr}X = 2$ si y sólo si k es par y $\text{tr}X = -2$ si y sólo si k es impar.
- Si $X \in \text{Hyp}_k$, entonces $\text{tr}X > 2$ si y sólo si k es par y $\text{tr}X < -2$ si y sólo si k es impar.
- Si $X \in \text{Par}_k$, entonces $\text{tr}X = 2$ si y sólo si k es par y $\text{tr}X = -2$ si y sólo si k es impar.

□

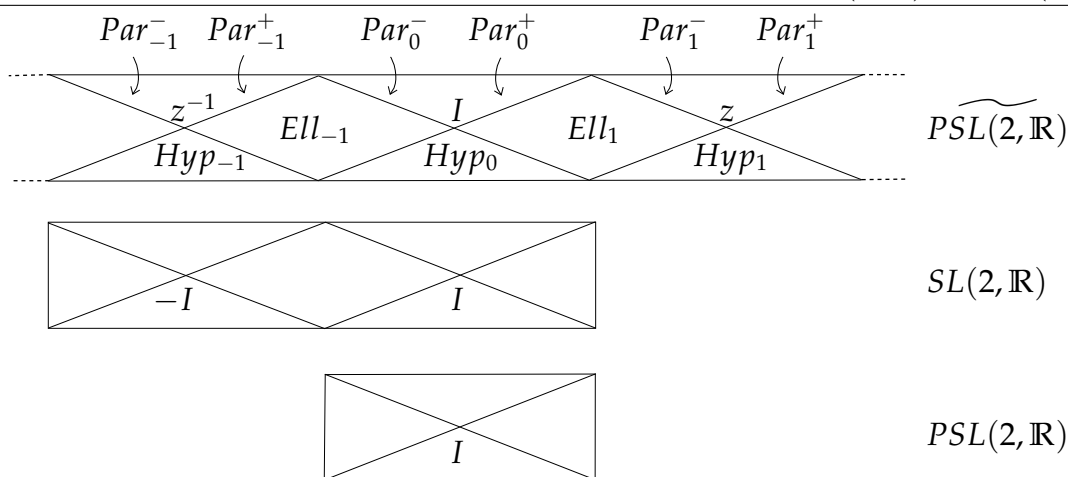


Figura 2.4: $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$

2.3. Acción de $GL(2, \mathbb{R})$ en $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$

Para finalizar este capítulo definimos una acción de $GL(2, \mathbb{R})$ en $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ que será utilizada en el futuro y estudiamos la dinámica de la partición (2.8) por esta acción. Notaremos $GL(2, \mathbb{R}) = GL(2, \mathbb{R})^+ \sqcup GL(2, \mathbb{R})^-$ a las dos componentes de este grupo, distinguidas por el signo del determinante.

Observación 2.3.1. Sean $X, X' \in PSL(2, \mathbb{R})$. Entonces X y X' son $GL(2, \mathbb{R})^+$ -conjugadas si y sólo si son $PSL(2, \mathbb{R})$ -conjugadas. En efecto, si existe $g \in GL(2, \mathbb{R})^+$ tal que $gXg^{-1} = X'$, entonces $Y := \frac{1}{\sqrt{\det(g)}}g \in PSL(2, \mathbb{R})$ y se tiene

$$YXY^{-1} = X'$$

El recíproco es obvio.

Ahora definimos una acción de $GL(2, \mathbb{R})$ en $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$: la levantada de la acción por conjugación en $PSL(2, \mathbb{R})$.

Más precisamente, fijemos $g \in GL(2, \mathbb{R})$. Entonces g puede pensarse como un difeomorfismo $PSL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ dado por

$$X \mapsto gXg^{-1}$$

Como en I vale I , podemos elegir el levantado $\tilde{g} : \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ que en \tilde{I} vale \tilde{I} y definir

$$g.\tilde{X} := \tilde{g}(\tilde{X})$$

2.3. Acción de $GL(2, \mathbb{R})$ en $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$

Es claro que si \widetilde{X} levanta X entonces $g.\widetilde{X}$ levanta gXg^{-1} . En particular, $GL(2, \mathbb{R})$ actúa en $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ por difeomorfismos y homomorfismos.

Además, no es difícil ver que $g.\widetilde{X}$ puede obtenerse de la siguiente manera: sea $\tilde{\gamma}$ un camino desde \tilde{I} hasta \widetilde{X} y su proyectado $\gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$. Entonces $g\gamma g^{-1}$ se levanta desde \tilde{I} a un camino con punto final $g.\widetilde{X}$.

Finalmente si $g \in GL(2, \mathbb{R})^+$ y consideramos $\tilde{Y}_g \in \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ un levantado cualquiera de $Y_g := \frac{1}{\sqrt{\det(g)}}g$, no es difícil ver que para todo $\widetilde{X} \in \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ se cumple

$$g.\widetilde{X} = \tilde{Y}_g \widetilde{X} \tilde{Y}_g^{-1}$$

Proposición 2.3.2. *La acción de $GL(2, \mathbb{R})$ en $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ verifica las siguientes propiedades:*

1. Si $g \in GL(2, \mathbb{R})^+$, entonces para todo $k \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$g.z^k = z^k \quad g.Hyp_k = Hyp_k \quad g.Par_k = Par_k \quad g.Ell_k = Ell_k$$

2. Si $g \in GL(2, \mathbb{R})^-$, entonces para todo $k \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$g.z^k = z^{-k} \quad g.Hyp_k = Hyp_{-k} \quad g.Par_k = Par_{-k} \quad g.Ell_k = Ell_{-k}$$

Demostración. 1. Fijemos $g \in GL(2, \mathbb{R})^+$. Como z^k es central para todo $k \in \mathbb{Z}$, obtenemos

$$g.z^k = \tilde{Y}_g z^k \tilde{Y}_g^{-1} = z^k$$

Ahora bien, sea $k \in \mathbb{Z}^*$ y $\widetilde{X} \in Ell_k$. Sea $g_t \in GL(2, \mathbb{R})^+$ un camino desde I hasta g y $\tilde{g}_t \in \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ su levantado comenzando en I . Entonces para todo $t \in [0, 1]$ se tiene

$$\tilde{g}_t \widetilde{X} \tilde{g}_t^{-1} \in \widetilde{Ell}$$

Es claro que I estabiliza Ell_k , así que punto final de dicho camino pertenece a Ell_k . Es decir que $g.\widetilde{X} \in Ell_k$. Análogamente se tratan los casos parabólico e hiperbólico.

2. Sea $g \in GL(2, \mathbb{R})^-$. Como la acción es por homomorfismos, gracias a la parte 1. podemos suponer

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, sea el camino

$$\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & \operatorname{sen}(2\pi t) \\ -\operatorname{sen}(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$$

Su levantado comenzando en \tilde{I} termina en z (observación 2.2.1). Pero entonces

$$g\gamma(t)g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & \operatorname{sen}(2\pi t) \\ -\operatorname{sen}(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\operatorname{sen}(2\pi t) \\ \operatorname{sen}(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix} = \gamma(1-t)$$

Así que $g\gamma g^{-1}$ es el camino inverso de γ y por lo tanto su levantado desde \tilde{I} termina en z^{-1} . En conclusión, $g.z = z^{-1}$ y análogamente se prueba que para todo $k \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$g.z^k = z^{-k} \tag{2.9}$$

Razonamientos similares permiten concluir que $g.Ell_1 = Ell_{-1}$. En efecto, sólo hay que notar que el camino $\gamma(t)$ se levanta a Ell_1 desde \tilde{I} , mientras que $\gamma(1-t)$ se levanta a Ell_{-1} . Por (2.9) se concluye el caso elíptico.

Si $\tilde{X} \in Hyp_0$ entonces $g.\tilde{X} \in Hyp_0$. En efecto, podemos tomar $\tilde{\gamma} \subset \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ un camino desde \tilde{I} hasta \tilde{X} y tal que $\tilde{\gamma}(t) \in Hyp_0$ para todo $t > 0$. Su proyectado γ es tal que

$$g\gamma(t)g^{-1} \in Hyp$$

para todo $t > 0$. Su levantado desde \tilde{I} es $g.\tilde{\gamma}(t)$ y por lo tanto

$$g.\tilde{\gamma}(t) \in \widetilde{Hyp}$$

para todo $t > 0$. Sólo puede ser $g.\tilde{\gamma}(t) \in Hyp_0$ y en particular

$$g.\tilde{X} = g.\tilde{\gamma}(1) \in Hyp_0$$

Por (2.9) hemos concluído el caso hiperbólico y el caso parabólico es completamente análogo. □

Observación 2.3.3. Recordar que Par^\pm son las dos $PSL(2, \mathbb{R})$ -clases de conjugación de elementos parabólicos, intercambiadas por la acción de $GL(2, \mathbb{R})^-$ (observación 2.1.3). Esto se refleja en la acción levantada. Más precisamente, si $g^\pm \in GL(2, \mathbb{R})^\pm$ entonces

$$g^+.Par_k^\pm = Par_k^\pm \quad g^-.Par_k^\pm = Par_{-k}^\mp$$

Capítulo 3

Clase de Euler

La clase de Euler es un invariante de la topología de fibrados por círculos que cuantifica “cuán lejos está” el fibrado de ser trivial. Comenzaremos por dar la definición de esta clase característica en este contexto general y aunque esto no es estrictamente necesario para la demostración del teorema de Goldman, permite tener una intuición geométrica del objeto.

En la sección 3.2 trabajamos con fibrados determinados por una representación y en 3.3 se brinda el algoritmo de Milnor para el cálculo de la clase de Euler de estos fibrados, que es la única caracterización del objeto que necesitaremos en el trabajo. A los efectos prácticos, el teorema 3.3.2 (respectivamente la observación 3.3.7) puede ser adoptado como definición de la clase de Euler de una representación $\pi_1(\Sigma_g) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ (respectivamente $\pi_1(\Sigma_{g,b}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$).

En la sección 3.4 discutimos algunas propiedades generales que serán utilizadas más adelante.

3.1. Definición

Comenzamos por definir la clase de Euler de un fibrado en círculos orientable sobre un complejo celular. Como se ha mencionado, los contenidos de esta sección tienen carácter exclusivamente introductorio al concepto y no son formalmente necesarios para la demostración del teorema de Goldman. Por esta razón, hemos omitido la mayoría de las pruebas y definiciones necesarias para la construcción de la clase de Euler en este contexto general. El lector es referido al capítulo 4 de [2] por información complementaria.

Consideremos $S^1 \rightarrow E \rightarrow B$ un fibrado en círculos orientable y supongamos que admite una sección $s : B \rightarrow E$. Entonces es trivial (ver [26], proposiciones 6.7 y 6.15). De este modo, trivializar un fibrado en círculos orientable es lo mismo que encontrar una sección global.

Fijemos una orientación de E y supongamos que B es un complejo CW, entonces siempre existe una sección $B^0 \rightarrow E$ (donde B^0 es el 0–esqueleto). Supongamos por inducción que la sección s_{k-1} está definida sobre B^{k-1} y sea $g_\alpha : D_\alpha^k \rightarrow B$ el mapa de pegado de una de las k –células, de modo que su restricción al interior del disco es un encaje. Como D_α^k es contractible, $g_\alpha^*(E|_{D_\alpha^k}) \rightarrow D_\alpha^k$ es trivial (por una trivialización h_α que fibra a fibra preserva

orientación) y $g_\alpha^*(s_{k-1}) =: s_\alpha$ define una sección sobre ∂D_α^k que en las coordenadas h_α es de la forma

$$s_\alpha : \partial D_\alpha^k \longrightarrow D_\alpha^k \times S^1, \quad s_\alpha(x) = (x, \tilde{s}_\alpha(x))$$

Puede verse que la sección s_{k-1} se extiende a B^k si y sólo si cada $\tilde{s}_\alpha : \partial D_\alpha^k \longrightarrow S^1$ se extiende a D_α^k (ver [2], lema 4.3.1) y esto es equivalente a que \tilde{s}_α sea homotópica a una constante.

Si $k \neq 2$ lo anterior siempre ocurre (pues $\pi_{k-1}(S^1) = 0$) de modo que la única *obstrucción* para la existencia de una sección la encontramos al tratar de extender $s : B^1 \longrightarrow E$ a B^2 .

Un teorema de Höpf asegura que un mapa $S^1 \longrightarrow S^1$ es homotópicamente trivial si y sólo si tiene grado cero (ver [24], capítulo 7), de modo que s se extiende si y sólo si para todo α se tiene que $\deg(\tilde{s}_\alpha) = 0$ (estamos prefijando una orientación en cada 2-célula de B . La misma induce por el mapa g_α una orientación en D_α^2 dado que $g_\alpha|_{\text{int}D_\alpha^2}$ es un encaje y esta define una orientación en $\partial D_\alpha^2 = S^1$).

Para una sección $s : B^1 \longrightarrow E$ tiene sentido definir entonces el homomorfismo

$$c_s : C_2(B, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad c_s(D_\alpha^2) := \deg(\tilde{s}_\alpha) \quad \forall \alpha$$

Intuitivamente $c_s(D_\alpha^2)$ mide “cuántas vueltas a las fibras da” la sección s a medida que se recorre el borde de la α -ésima 2-célula.

Algunas observaciones son pertinentes en este punto (ver [2], capítulo 4):

- $S^1 \longrightarrow E|_{B^1} \longrightarrow B^1$ es trivial, de modo que siempre existe una sección $s : B^1 \longrightarrow E$. Además la cocadena c_s sólo depende de la elección de s , no de las trivializaciones h_α . Por lo ya discutido, $c_s = 0$ si y sólo si s se extiende a una sección global (comparar con la proposición 3.1.3 más adelante).
- c_s es un cociclo, o sea que define un elemento en el segundo grupo de cohomología $H^2(B, \mathbb{Z})$. Además si $s' : B^1 \longrightarrow E$ es otra sección, entonces $c_s - c_{s'}$ es un coborde. De este modo, $eu(E) := [c_s] \in H^2(B, \mathbb{Z})$ está bien definida.
- $eu(E)$ no depende de la estructura celular elegida en B y es una clase característica de fibrados en círculos orientados, i.e, si $f^*(E) = E'$ como fibrados orientados entonces $eu(E') = f^*(eu(E))$. En particular, $eu(E)$ es un invariante de la clase de isomorfismo de fibrados orientados (de hecho es un invariante completo, en el sentido que determina la clase de isomorfismo del fibrado).
- Revertir la orientación de las 2-células sustituye $eu(E)$ por $-eu(E)$. Análogamente si reversionamos la orientación del fibrado (pues ahora las h_α reversionan la orientación).

Definición 3.1.1. $eu(E)$ es la *clase de Euler* del fibrado $S^1 \longrightarrow E \longrightarrow B$.

La prueba del teorema de Goldman incluye el tratamiento de fibrados por círculos sobre superficies con borde, para lo cual conviene tener una generalización del concepto anterior.

Consideremos $A \subset B$ un subcomplejo y supongamos $r : A \longrightarrow E$ una sección. Podemos definir $s : B^1 \longrightarrow E$ que sea una extensión de $r|_{A^1}$ (pues el 1-esqueleto es un grafo) y tomar

3.1. Definición

el cociclo $c_{r,s}$ asociado a la sección s como arriba. Notar que para un elemento $\sigma \in C_2(A, \mathbb{Z})$ se tiene que $c_{r,s}(\sigma) = 0$, pues el fibrado $S^1 \rightarrow E|_A \rightarrow A$ es trivial (admite la sección global r). De este modo se vé que $c_{r,s}$ define un elemento de la cohomología relativa $H^2(B, A, \mathbb{Z})$. Puede verse que sólo depende de la sección r y no de la extensión s . Similares observaciones valen a las hechas en el caso absoluto.

Definición 3.1.2. En las notaciones anteriores, $eu(E, r) := [c_{r,s}]$ es la *clase de Euler relativa a r* del fibrado $S^1 \rightarrow E \rightarrow B$.

Proposición 3.1.3. Sea $S^1 \rightarrow E \rightarrow B$ un fibrado en círculos orientado. Entonces:

1. $eu(E) = 0$ si y sólo si E es trivial.
2. Si $A \subset B$ es un subcomplejo y $r : A \rightarrow E$ es una sección, entonces $eu(E, r) = 0$ si y sólo si r se extiende a una sección global $B \rightarrow E$.

Demostración. Ver [2], teorema 4.4.2. □

En el primer caso la sección s inicialmente elegida para computar $eu(E)$ bien puede no extenderse, o sea, puede ser que $[c_s] = 0$ pero $c_s \neq 0$. Así, la sección s puede ser “muy mal elegida” pero independientemente de esto la clase de Euler detectará si el fibrado es o no trivial. En el segundo caso se vé que la clase de Euler relativa mide “cuán difícil” es extender la sección r a una sección global $B \rightarrow E$ y depende fuertemente de la elección r : en un fibrado trivial, puede elegirse una sección r en un subcomplejo que no pueda ser extendida de modo que será $eu(B \times S^1, r) \neq 0$.

Un ejemplo importante es el siguiente

Ejemplo 3.1.4. ■ Sea Σ_g la superficie cerrada y orientable de género $g \geq 0$ con una métrica riemanniana cualquiera. Su característica de Euler es $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$. La fórmula de Poincaré-Höpf permite probar que $eu(T^1(\Sigma_g)) = \pm\chi(\Sigma_g)$ (donde $T^1(\Sigma_g)$ es el tangente unitario).

En efecto, tomemos en Σ_g un campo X con singularidades p_1, \dots, p_m y fijemos una orientación en Σ_g (induce una orientación en $S^1 \rightarrow T^1(\Sigma_g) \rightarrow \Sigma_g$). Definamos en Σ_g una estructura celular con un vértice, $2g + m - 1$ ejes y m discos D_1, \dots, D_m , de modo que cada uno de ellos contenga una y sólo una singularidad en su interior (ver figura 3.1). Podemos suponer que $\mathbb{Z} \cong H_2(\Sigma_g, \mathbb{Z}) = \langle D_1 + \dots + D_m \rangle$ (los discos están orientados por la orientación de Σ_g).

El campo X puede ser normalizado de modo que en el borde de los discos (que es el 1-esqueleto de Σ_g) dé lugar a una sección de $T^1(\Sigma_g)$. El grado de dicha sección en cada círculo ∂D_i es (por definición) el índice del campo en la singularidad p_i .

De este modo, bajo la identificación $H^2(\Sigma_g, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ dada por $[d] \mapsto d(D_1 + \dots + D_m)$ se tiene que como número entero la clase de Euler de $T^1(\Sigma_g)$ es

$$c_X(D_1 + \dots + D_m) = \sum_{i=1}^m c_X(D_i) = \sum_{i=1}^m \deg(X|_{\partial D_i}) = \sum_{i=1}^m \text{ind}_{p_i}(X) = \pm\chi(\Sigma_g)$$

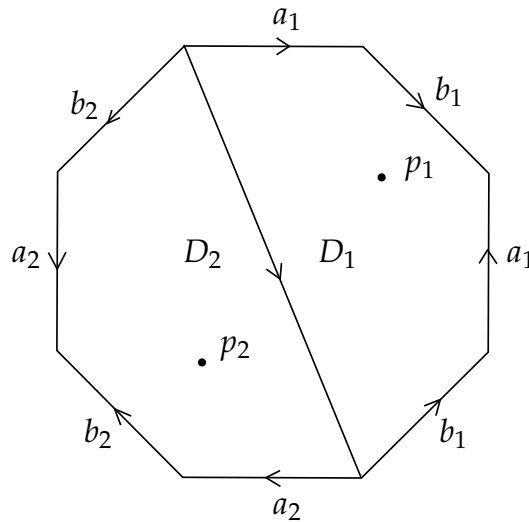


Figura 3.1: Clase de Euler de $T^1(\Sigma_2)$

- El caso con borde puede ser tratado de manera similar. Sea $\Sigma_{g,b}$ la superficie obtenida de quitar a la superficie cerrada $b > 0$ discos abiertos de clausura disjunta, entonces $\chi(\Sigma_{g,b}) = 2 - 2g - b$. Como $\Sigma_{g,b}$ retrae por deformación a una suma cuña de círculos tenemos que $H^2(\Sigma_{g,b}, \mathbb{Z}) = 0$, de modo que no hay obstrucciones a la existencia de una sección.

Técnicas similares a las del ítem anterior pueden aplicarse para ver que si $r : \partial\Sigma_{g,b} \rightarrow T^1(\Sigma_{g,b})$ es una sección, entonces $eu(T^1(\Sigma_{g,b}), r) = \pm\chi(\Sigma_{g,b})$ (ver [2], ejemplo 4.4.10). En particular se obtiene que la clase de Euler relativa del fibrado unitario no depende de la sección elegida.

3.2. Fibrados planos

Una representación del grupo fundamental de una variedad M a un grupo de homeomorfismos de un espacio X se *suspende* a un X -fibrado sobre M . Más aún, los fibrados que provienen de representaciones vienen con una estructura adicional: una foliación transversa a las fibras. En esta sección discutimos esta construcción, brindando una interpretación topológica del objeto y sirviendo de motivación para el teorema de Goldman.

Definición 3.2.1. Sean H y G grupos. Una *representación* de H en G es un homomorfismo $H \rightarrow G$. Una tal representación se dice *fiel* si es inyectiva. Notaremos $Hom(H, G)$ al conjunto de las representaciones de H en G .

Consideremos M una variedad, $m_0 \in M$ y $\pi := \pi_1(M, m_0)$. Denotemos \tilde{M} al cubrimiento universal de M . Entonces π actúa en \tilde{M} por transformaciones de cubrimiento y el cociente por esta acción es difeomorfo a M .

3.2. Fibrados planos

Tomemos X una variedad conexa y G un grupo de homeomorfismos de X . Una representación $\phi \in \text{Hom}(\pi, G)$ define un X -fibrado X_ϕ sobre M de la siguiente manera: consideramos la acción de π en $\tilde{M} \times X$ dada por

$$\gamma \cdot (\tilde{m}, x) := (\gamma \cdot \tilde{m}, \phi(\gamma)(x))$$

Esta acción es propiamente discontinua (todo elemento de $\tilde{M} \times X$ tiene un entorno que es disjunto de sus trasladados) y el cociente $X_\phi := \frac{\tilde{M} \times X}{\pi}$ es un X -fibrado sobre M con la proyección

$$[\tilde{m}, x] \mapsto [\tilde{m}] \in \frac{\tilde{M}}{\pi} \cong M$$

Las trivializaciones locales pueden construirse así: sea U abierto de \tilde{M} disjunto de sus π -trasladados, entonces $[U]$ es un abierto de M . Sea ahora el homomorfismo (que preserva fibras)

$$\bigsqcup_{\gamma \in \pi} (\gamma \cdot U \times \phi(\gamma)(X)) \longrightarrow \bigsqcup_{\gamma \in \pi} (\gamma \cdot U \times X), \quad (\gamma \cdot \tilde{m}, \phi(\gamma)(x)) \mapsto (\gamma \cdot \tilde{m}, x), \text{ si } \tilde{m} \in U$$

Este mapa pasa al cociente definiendo la trivialización local de X_ϕ :

$$h_U : \frac{\bigsqcup_{\gamma \in \pi} (\gamma \cdot U \times \phi(\gamma)(X))}{\pi} = [U \times X] \longrightarrow [U] \times X, \quad h_U[\gamma \cdot \tilde{m}, \phi(\gamma)(x)] = ([\tilde{m}], x), \text{ si } \tilde{m} \in U$$

Definición 3.2.2. X_ϕ es la *suspensión* de ϕ .

Si tomamos ahora $V \subset \tilde{M}$ disjunto de sus trasladados y $\tilde{m} \in U$ tal que $[\tilde{m}] \in [U] \cap [V]$, entonces existe $\gamma \in \pi$ tal que $\gamma \cdot \tilde{m} \in V$ y achicando U podemos suponer que es único. Calculando $h_V h_U^{-1}$ se ve que su segunda coordenada es igual a

$$\phi(\gamma) =: g_{VU} \in G$$

o sea que no depende del punto base. En esta situación se dice que el *grupo estructural* del fibrado es G con la topología discreta, en el sentido que los mapas de transición son (localmente) constantes a G .

Por otra parte, consideremos la *foliación horizontal* de $\tilde{M} \times X$ por hojas $\{\tilde{M} \times x\}_{x \in X}$. La acción de π preserva esta estructura, i.e, lleva hojas en hojas y por tanto define una foliación \mathcal{F}_ϕ en X_ϕ con hojas $\{[\tilde{M} \times x]\}_{x \in X}$. Más aún, las trivializaciones h_U mapean esta foliación en la foliación horizontal de $[U] \times X$. Esto motiva la siguiente:

Definición 3.2.3. Sea $X \longrightarrow E \longrightarrow M$ un fibrado y \mathcal{F} una foliación en E . Decimos que \mathcal{F} es *transversa a las fibras* si existe una familia $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_\alpha$ tal que:

- $\{U_\alpha\}_\alpha$ es un cubrimiento abierto de M y h_α es una trivialización local de E sobre U_α .
- Para todo α , h_α lleva las hojas de \mathcal{F}_α en las hojas de la foliación horizontal de $U_\alpha \times X$ (donde \mathcal{F}_α es la restricción de \mathcal{F} a la preimagen de U_α).

Si existe una tal \mathcal{F} , se dice que E es *plano*.

Hemos probado que toda representación $\pi \rightarrow G$ induce un fibrado plano $(E_\phi, \mathcal{F}_\phi)$, de modo que el grupo estructural del fibrado tiene la topología discreta. El lector no encontrará problemas en demostrar que de hecho estas condiciones son equivalentes: si $X \rightarrow E \rightarrow M$ es un fibrado, entonces E admite una foliación transversal a las fibras si y sólo si existe una familia $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_\alpha$ tal que $\{U_\alpha\}_\alpha$ es un cubrimiento abierto de M , h_α es una trivialización local de E sobre U_α y si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces para cada componente C de $U_\alpha \cap U_\beta$ existe $g_{\alpha\beta}^C \in \text{Homeo}(X)$ tal que

$$h_\alpha h_\beta^{-1}(m, x) = (m, g_{\alpha\beta}^C(x))$$

para todo $(m, x) \in C \times X$.

Es de nuestro interés trabajar sobre el subgrupo $PSL(2, \mathbb{R}) \subset \text{Homeo}(S^1)$ y no sobre todo el grupo de homeomorfismos, por esta razón generalizamos la definición de fibrado plano a este contexto.

Definición 3.2.4. Sea X una variedad y $G \subset \text{Homeo}(X)$ un subgrupo. Un (G, X) -fibrado plano sobre M es un fibrado $X \rightarrow E \rightarrow M$ que admite una familia (maximal) $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_\alpha$ tal que:

- $\{U_\alpha\}_\alpha$ es un cubrimiento abierto de M y h_α es una trivialización local de E sobre U_α .
- Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces para cada componente C de $U_\alpha \cap U_\beta$ existe $g_{\alpha\beta}^C \in G$ tal que

$$h_\alpha h_\beta^{-1}(m, x) = (m, g_{\alpha\beta}^C(x))$$

para todo $(m, x) \in C \times X$.

Dos (G, X) -fibrados planos son *isomorfos* si existe un isomorfismo de fibrados que en las coordenadas de las trivializaciones está dado por un mapa de la forma $(id, g_{\alpha\beta}^C)$, con $g_{\alpha\beta}^C \in G$.

Todo (G, X) -fibrado plano induce una foliación transversal a las fibras, pero no recíprocamente: estamos pidiendo que el cambio de una caja de foliación a otra se dé por un elemento de G , no por un homeomorfismo cualquiera de X . En ocasiones a una foliación así se le dice (G, X) -*transversa* (comparar con [12], sección 1.4). Puede verse que un isomorfismo de fibrados planos es lo mismo que un isomorfismo que preserve las foliaciones transversas.

3.3. Clase de Euler de una representación

Observación 3.2.5. Sea E un (G, X) –fibrado plano sobre M y L una hoja de la foliación transversa inducida. Entonces la restricción $L \rightarrow M$ es un cubrimiento:

La hoja L corta a todas las fibras (pues L se obtiene pegando las piezas $\{h_\alpha^{-1}(m, x)\}_{m \in U_\alpha}$ para x fijo) de modo que $L \rightarrow M$ es sobreyectiva. Además localmente se ve como la proyección del producto, que es evidentemente un cubrimiento (estamos suponiendo la topología de L como variedad, no la heredada de E).

En particular, si $\gamma \subset M$ es un camino y $e_0 \in L$ es un levantado de $\gamma(0) = m_0$, existe un único levantado *horizontal*, i.e, un único levantado de γ contenido en la hoja L que comienza en e_0 .

Toda esta discusión permite pensar $Hom(\pi, G)$ como “el espacio de (G, X) –fibrados planos sobre M ”. Más precisamente, hemos visto que si $\phi : \pi = \pi_1(M, m_0) \rightarrow G$ es una representación, entonces define un (G, X) –fibrado plano $(X_\phi, \mathcal{F}_\phi)$. Notemos que G actúa en $Hom(\pi, G)$ por conjugación

$$(g \cdot \phi)(\gamma) := g \circ \phi(\gamma) \circ g^{-1}$$

No es difícil ver que la clase de isomorfismo de (G, X) –fibrados planos asociados a representaciones es invariante por conjugación, así que existe una función

$$[\phi] \mapsto [(E_\phi, \mathcal{F}_\phi)]$$

y puede verse que es biyectiva.

Nos interesa particularmente ver cómo recuperar la representación $\pi \rightarrow G$ a partir del fibrado. Para ello, consideremos (E, \mathcal{F}) un (G, X) –fibrado plano, E_{m_0} la fibra sobre m_0 y $\eta : E_{m_0} \rightarrow X$ un homeomorfismo cualquiera. Dado $\gamma \in \pi$ podemos asignar a cada $e_0 \in E_{m_0}$ el punto final del levantado horizontal desde e_0 de modo que tenemos un homomorfismo $\pi \rightarrow Homeo(E_{m_0})$ y tal que su valor en cada γ puede tomarse de la forma $\eta^{-1}g_1 \dots g_s \eta$, donde $g_i \in G$. Luego conjugando por η queda definida $\phi \in Hom(\pi, G)$ y se prueba que $(E, \mathcal{F}) \cong (E_\phi, \mathcal{F}_\phi)$ (ver [13], sección 2).

Técnicamente, nuestra variedad fué marcada inicialmente por un punto $m_0 \in M$ y en esta hipótesis nos situaremos de aquí en más (por un análisis del efecto de cambiar la marca ver [12], teorema 1.7).

3.3. Clase de Euler de una representación

Consideremos $M = \Sigma_g$ (o $\Sigma_{g,b}$), $\pi = \pi_1(M, m_0)$, $G = PSL(2, \mathbb{R})$ y $X = S^1$, entonces $\phi \in Hom(\pi, PSL(2, \mathbb{R}))$ define un $(PSL(2, \mathbb{R}), S^1)$ –fibrado plano $S_\phi^1 \rightarrow \Sigma_g$ (respectivamente $\Sigma_{g,b}$). Definimos aquí la clase de Euler de estas representaciones, además de dar un algoritmo de cálculo de la misma debido a Milnor. Esta caracterización será la que utilizaremos durante todo el trabajo, salvo contadas excepciones que serán debidamente mencionadas. Los casos “sin borde” y “con borde” son diferentes y por eso se tratan separadamente.

3.3.1. El caso cerrado

Sea $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ y S_ϕ^1 la suspensión. Como los elementos de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ preservan la orientación de S^1 , puede verse que S_ϕ^1 es orientable y podemos fijar la orientación inducida por la orientación estándar de S^1 . En Σ_g tomamos la estructura celular usual con un vértice, $2g$ aristas $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ y un disco. Orientamos el disco de modo que ∂D sea homólogo a $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i]$ (donde $[a_i, b_i] := a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ es el conmutador). Con estas convenciones tenemos la siguiente

Definición 3.3.1. Sea $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$. La *clase de Euler* de ϕ es

$$eu(\phi) := eu(S_\phi^1)$$

Considemos la presentación estándar del grupo fundamental de Σ_g introducida en la subsección 1.1.1:

$$\pi_1(\Sigma_g) = \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \right\rangle \quad (3.1)$$

Sea $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ y para cada $i = 1, \dots, g$ notemos $A_i := \phi(a_i)$ y $B_i := \phi(b_i)$, entonces $\prod_{i=1}^g [A_i, B_i] = I \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Fijemos $\widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i$ levantandos de estos elementos a $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Se deduce que

$$\prod_{i=1}^g [\widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i] = z^k$$

para un cierto $k \in \mathbb{Z}$ (observación 2.2.1). Como dos levantados de un mismo elemento de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ difieren por un z^p y estos elementos son centrales, uno obtiene que el entero k no depende de la elección de los $\widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i$.

Teorema 3.3.2 (Milnor, [22]). *En las notaciones anteriores, $eu(\phi) = k$.*

De este modo, la clase de Euler puede pensarse como la *obstrucción* de levantar ϕ a una representación $\widetilde{\phi} : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, en el sentido de que ϕ se levanta a una representación si y sólo si $eu(\phi) = 0$.

Demostración de 3.3.2. Ver [2], teorema 4.5.4. □

3.3.2. El caso con borde

Cuando la superficie base tiene borde debe realizarse un tratamiento distinto porque el fibrado $S_\phi^1 \rightarrow \Sigma_{g,b}$ es siempre trivial. Por este motivo la clase de Euler de ϕ será definida a partir de la clase de Euler relativa del fibrado, de modo que precisamos asignar “canónicamente” a cada representación una sección sobre un subcomplejo de $\Sigma_{g,b}$. Naturalmente, este

3.3. Clase de Euler de una representación

subcomplejo será $\partial\Sigma_{g,b}$. En el lema 3.3.4 damos una condición suficiente para la existencia de una sección de S_ϕ^1 sobre las componentes de borde de $\Sigma_{g,b}$. En la observación 3.3.5 discutimos cuándo esa condición es satisfecha y esto nos permitirá definir la clase de Euler de ϕ .

Para comenzar, traducimos la definición de sección en el contexto de fibrados inducidos por representaciones.

Observación 3.3.3. Sea $X_\phi \rightarrow M$ el fibrado asociado a una representación ϕ . Si $q : \tilde{M} \rightarrow M$ es el cubrimiento universal entonces $q^*(X_\phi) = \tilde{M} \times X$. Más precisamente, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} \times X & \xrightarrow{q'} & X_\phi \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{M} & \xrightarrow{q} & M \end{array}$$

donde $q'(\tilde{m}, x) := [\tilde{m}, x]$.

A partir de esto es fácil ver que dar una sección $r : M \rightarrow X_\phi$ es lo mismo que dar un mapa $\hat{r} : \tilde{M} \rightarrow X$ que sea π -equivariante, i.e, tal que para todo $\gamma \in \pi$ y todo $\tilde{m} \in \tilde{M}$ cumpla

$$\hat{r}(\gamma.\tilde{m}) = \phi(\gamma)(\hat{r}(\tilde{m}))$$

Dada $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$, utilizaremos la observación 3.3.3 para asignarle a S_ϕ^1 una sección sobre $\partial\Sigma_{g,b}$ y definir la clase de Euler de ϕ como la clase de Euler relativa a esta sección.

Consideremos como en la subsección 1.1.1 la presentación de $\pi_1(\Sigma_{g,b})$ dada por

$$\left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, \gamma_1 c_1 \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_b c_b \gamma_b^{-1} \mid \left(\prod_{j=1}^g [a_j, b_j] \right) \gamma_1 c_1 \gamma_1^{-1} \dots \gamma_b c_b \gamma_b^{-1} = 1 \right\rangle \quad (3.2)$$

donde los c_i son loops simples que corresponden a las componentes de borde y los γ_i son caminos conectando el punto base x_0 con c_i .

Para cada $i = 1, \dots, b$ podemos considerar la representación

$$\phi^{c_i} : \pi_1(c_i) \cong \mathbb{Z} \hookrightarrow \pi_1(\Sigma_{g,b}) \xrightarrow{\phi} \text{PSL}(2, \mathbb{R})$$

donde la inclusión está dada por $c_i \mapsto \gamma_i c_i \gamma_i^{-1}$ y tomar el fibrado $S_{\phi^{c_i}}^1 = \frac{\mathbb{R} \times S^1}{\pi_1(c_i)}$ sobre c_i que es claramente isomorfo a la restricción $S_\phi^1|_{c_i}$. La observación 3.3.3 nos dice entonces que encontrar una sección de $S_\phi^1|_{c_i}$ es lo mismo que definir un mapa $\hat{r}_i : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ que sea \mathbb{Z} -equivariante. La prueba del siguiente lema es directa.

Lema 3.3.4. En las notaciones anteriores, sea $C_i := \phi(c_i) \in PSL(2, \mathbb{R})$ y $\varphi_i : \mathbb{R} \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ un subgrupo a un parámetro tal que $\varphi_i(1) = C_i$. Definamos $\hat{r}_i : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\hat{r}_i(t) := \varphi(t)(1)$ (donde $1 \in S^1$). Entonces para todos $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$ se verifica

$$\hat{r}_i(t+n) = C_i^n(\hat{r}_i(t))$$

En particular, el subgrupo φ_i induce una sección $c_i \rightarrow S_\phi^1$.

□

Para construir una sección de S_ϕ^1 sobre $\partial\Sigma_{g,b}$ alcanza entonces con determinar unívocamente un subgrupo a un parámetro $\varphi_i : \mathbb{R} \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $\varphi_i(1) = \phi(c_i) = C_i$ para cada $i = 1, \dots, b$.

Observación 3.3.5. Utilizando las formas normales (2.3) y (2.5) no es difícil ver que si $C_i \notin Ell$ entonces existe un único subgrupo a un parámetro φ_i que en tiempo 1 vale C_i . Esto corresponde al hecho de que existen levantados preferidos de C_i a $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ (sección 2.2). En efecto, si $\tilde{C}_i \in \{I\} \cup Par_0 \cup Hyp_0$ es tal levantado y $\tilde{\varphi}_i : \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ es el levantado de φ_i que en 0 vale $I \in PSL(2, \mathbb{R})$, entonces $\tilde{\varphi}_i(1) = \tilde{C}_i$.

El caso elíptico es diferente: si $C_i = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, entonces los siguientes son subgrupos a un parámetro (distintos) que valen C_i en $t = 1$:

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t\theta) & \text{sen}(t\theta) \\ -\text{sen}(t\theta) & \cos(t\theta) \end{pmatrix}$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t(\theta + \pi)) & \text{sen}(t(\theta + \pi)) \\ -\text{sen}(t(\theta + \pi)) & \cos(t(\theta + \pi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t\theta) & \text{sen}(t\theta) \\ -\text{sen}(t\theta) & \cos(t\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t\pi) & \text{sen}(t\pi) \\ -\text{sen}(t\pi) & \cos(t\pi) \end{pmatrix}$$

Podemos concluir que si suponemos que cada componente de borde c_i tiene imagen no elíptica por ϕ , entonces una sección $r : \partial\Sigma_{g,b} \rightarrow S_\phi^1$ queda unívocamente determinada por el lema 3.3.4.

De aquí en más, por abuso anotaremos c_i a loop $\gamma_i c_i \gamma_i^{-1}$ y con el mismo símbolo denotaremos a la correspondiente componente de borde.

Definición 3.3.6. Sea $\phi \in Hom(\pi_1(\Sigma_{g,b}), PSL(2, \mathbb{R}))$ tal que para toda componente de borde $c_i \subset \Sigma_{g,b}$ se cumple $\phi(c_i) \notin Ell$ y sea $r : \partial\Sigma_{g,b} \rightarrow S_\phi^1$ la sección definida como arriba. Con las orientaciones obvias de S_ϕ^1 y de la 2-célula, definimos la *clase de Euler* de ϕ como

$$eu(\phi) := eu(S_\phi^1, r) \in H^2(\Sigma_{g,b}, \partial\Sigma_{g,b}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

Observación 3.3.7. El algoritmo de Milnor funciona igual en este contexto. Más precisamente, introduciendo la nueva notación en (3.2) se tiene que

$$\pi_1(\Sigma_{g,b}) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_b \mid \left(\prod_{j=1}^g [a_j, b_j] \right) c_1 \dots c_b = 1 \rangle$$

3.4. Primeras propiedades

Tomemos entonces $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ tal que $\phi(c_i) \notin \text{Ell}$ para todo $i = 1, \dots, b$. Escribamos

$$A_j := \phi(a_j) \quad B_j := \phi(b_j) \quad C_i := \phi(c_i)$$

entonces

$$\left(\prod_{j=1}^g [A_j, B_j] \right) C_1 \dots C_b = I$$

Sean \widetilde{A}_j y $\widetilde{B}_j \in \widetilde{\text{PSL}(2, \mathbb{R})}$ levantados cualesquiera de A_j y B_j y tomemos $\widetilde{C}_i \in \{I\} \cup \text{Par}_0 \cup \text{Hyp}_0$ el levantado canónico de C_i , i.e, el único que fija puntos de \mathbb{R} (ver sección 2.2). Entonces

$$\left(\prod_{j=1}^g [\widetilde{A}_j, \widetilde{B}_j] \right) \widetilde{C}_1 \dots \widetilde{C}_b = z^{eu(\phi)}$$

3.4. Primeras propiedades

Probamos aquí algunas propiedades elementales de la clase de Euler de una representación que serán utilizadas más adelante.

Proposición 3.4.1 (Aditividad). *Consideremos $\Sigma_{g,b}$ (donde quizá $b = 0$) y supongamos que existen dos subsuperficies Σ y Σ' tales que $\Sigma_{g,b} = \Sigma \cup_c \Sigma'$, donde c es un borde común a ambas. Sea $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ y notemos*

$$\begin{aligned} \phi^\Sigma : \pi_1(\Sigma) &\hookrightarrow \pi_1(\Sigma_{g,b}) \xrightarrow{\phi} \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \\ \phi^{\Sigma'} : \pi_1(\Sigma') &\hookrightarrow \pi_1(\Sigma_{g,b}) \xrightarrow{\phi} \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

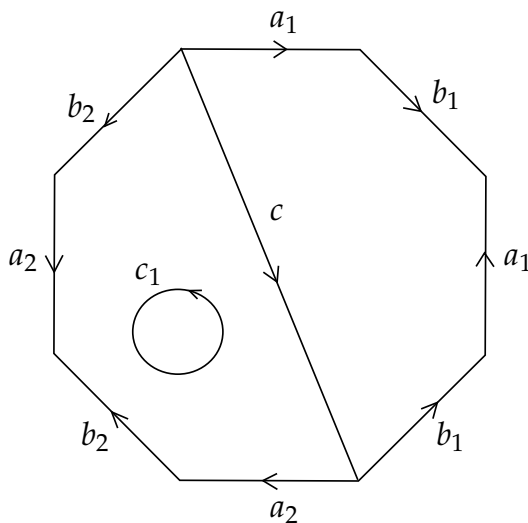
a las restricciones. Si ϕ^Σ y $\phi^{\Sigma'}$ no mapean ningún borde en elementos elípticos, entonces

$$eu(\phi) = eu(\phi^\Sigma) + eu(\phi^{\Sigma'})$$

Demostración. Para fijar ideas, haremos la demostración en el caso

$$g = 2, \quad b = 1, \quad \Sigma = \Sigma_{1,2}, \quad \Sigma' = \Sigma_{1,1}$$

aunque debe notarse que el argumento es general.


 Figura 3.2: $\Sigma_{2,1} = \Sigma_{1,2} \cup_c \Sigma_{1,1}$

Entonces tenemos las siguientes presentaciones para los grupos fundamentales

$$\pi_1(\Sigma_{2,1}) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, c_1 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2]c_1 = 1 \rangle$$

$$\pi_1(\Sigma) = \langle a_2, b_2, c, c_1 \mid [a_2, b_2]cc_1 = 1 \rangle$$

$$\pi_1(\Sigma') = \langle a_1, b_1, c \mid [a_1, b_1]c^{-1} = 1 \rangle$$

No es difícil ver que en $\pi_1(\Sigma_{2,1})$ vale la igualdad $c^{-1}c_1c = c_1$. Entonces si \tilde{C} y \tilde{C}_1 son los levantados canónicos de $\phi(c)$ y $\phi(c_1)$ respectivamente, se deduce que $\tilde{C}^{-1}\tilde{C}_1\tilde{C} = \tilde{C}_1$ (pues basta notar que el miembro izquierdo levanta $\phi(c_1)$ y fija puntos, entonces es el levantado canónico). Así que \tilde{C} y \tilde{C}_1 conmutan y aplicando la observación 3.3.7 con las notaciones ahí introducidas se tiene que

$$z^{eu(\phi)} = [\tilde{A}_1, \tilde{B}_1][\tilde{A}_2, \tilde{B}_2]\tilde{C}_1 = z^{eu(\phi^{\Sigma'})}\tilde{C}z^{eu(\phi^{\Sigma})}\tilde{C}_1^{-1}\tilde{C}^{-1}\tilde{C}_1 = z^{eu(\phi^{\Sigma'})}z^{eu(\phi^{\Sigma})}\tilde{C}\tilde{C}^{-1}\tilde{C}_1^{-1}\tilde{C}_1$$

Resulta entonces que $z^{eu(\phi)} = z^{eu(\phi^{\Sigma'}) + eu(\phi^{\Sigma})}$. □

Otra propiedad importante de la clase de Euler es la “invariancia por conjugación”.

Intuitivamente, si escribimos $GL(2, \mathbb{R}) = GL(2, \mathbb{R})^+ \sqcup GL(2, \mathbb{R})^-$ a las dos componentes distinguidas por el signo del determinante, entonces la componente “positiva” actúa en el espacio de representaciones preservando la orientación del fibrado inducido mientras que la otra la revierte. Es natural entonces que en el primer caso la clase de Euler no cambie y es de esperar que en el segundo caso cambie por su opuesta. Formalmente tenemos la siguiente:

Proposición 3.4.2. *Sea $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), PSL(2, \mathbb{R}))$ (donde quizá $b = 0$) y tal que $eu(\phi)$ está definida. Si $g \in GL(2, \mathbb{R})$, entonces*

3.4. Primeras propiedades

$$eu(g\phi g^{-1}) = \begin{cases} eu(\phi) & \text{si } g \in GL(2, \mathbb{R})^+ \\ -eu(\phi) & \text{si } g \in GL(2, \mathbb{R})^- \end{cases}$$

Demostración. Hacemos la prueba en el caso con borde. En primer lugar, al conjugar por un elemento de $GL(2, \mathbb{R})$ la clase de Euler sigue estando definida: si ϕ no lleva ningún borde en elípticos, una conjugada tampoco.

Ahora bien, sea $g \in GL(2, \mathbb{R})$. Por la proposición 2.3.2, si \tilde{C}_i es el levantado canónico de $\phi(c_i)$, entonces $g.\tilde{C}_i$ es el levantado canónico de $g\phi(c_i)g^{-1}$. En las notaciones usuales,

$$z^{eu(g\phi g^{-1})} = \left(\prod_j [g.\tilde{A}_j, g.\tilde{B}_j] \right) g.\tilde{C}_1 \dots g.\tilde{C}_b$$

Pero la acción de $GL(2, \mathbb{R})$ es por homomorfismos, de modo que

$$z^{eu(g\phi g^{-1})} = g. \left(\left(\prod_j [\tilde{A}_j, \tilde{B}_j] \right) \tilde{C}_1 \dots \tilde{C}_b \right) = g.z^{eu(\phi)}$$

Aplicando la proposición 2.3.2 se concluye la demostración. □

Definición 3.4.3. Una representación $\phi \in Hom(\pi_1(\Sigma_{g,b}), PSL(2, \mathbb{R}))$ es *reducible* si existe $v \in \mathbb{C}^2$ vector propio común a todos los elementos de $\phi(\pi_1(\Sigma_{g,b}))$, en caso contrario se dice *irreducible*. Si existe una base $\{v, w\}$ de \mathbb{C}^2 que simultáneamente diagonaliza a todos los elementos de $\phi(\pi_1(\Sigma_{g,b}))$, se dice que la representación ϕ es *completamente reducible*.

Observación 3.4.4. ■ Como la acción lineal de $PSL(2, \mathbb{R})$ en \mathbb{RP}^1 coincide con la acción en S^1 por transformaciones de Möbius, se tiene que ϕ es reducible si y sólo si existe un $z_0 \in S^1$ fijo por todos los elementos de ϕ y completamente reducible si y sólo si dos puntos distintos de S^1 son fijados por ϕ .

- Notar que ϕ es reducible si y sólo si todos los elementos de $\phi(\pi_1(\Sigma_{g,b}))$ se conjugan a matrices triangulares superiores por una misma matriz $g \in GL(2, \mathbb{R})$ (que aplique el punto fijo común en ∞) y que es completamente reducible si y sólo si se conjugan a matrices diagonales por una misma matriz $g \in GL(2, \mathbb{R})$ (que aplique los fijos comunes en ∞ y 0).

Proposición 3.4.5. Sea $\phi \in Hom(\pi_1(\Sigma_{g,b}), PSL(2, \mathbb{R}))$ (donde quizá $b = 0$). Si ϕ es reducible, entonces $eu(\phi) = 0$.

La demostración es simple: si $z_0 \in S^1$ es un punto globalmente fijo por ϕ , la sección $x \mapsto (x, z_0)$ de $\widetilde{\Sigma_{g,b}} \times S^1$ pasa al cociente como una sección de S^1_ϕ , así que este fibrado es trivial. Sin embargo, con el propósito de introducir ciertas técnicas de trabajo que utilizaremos más adelante brindaremos otra demostración.

Demostración de 3.4.5. Notemos en primer lugar que para todo γ se tiene que $\phi(\gamma) \notin Ell$ pues fija un punto de S^1 . En particular, la clase de Euler de ϕ está definida.

Sea $z_0 \in S^1$ un punto fijado por todos los elementos de ϕ e $Y \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $Y(z_0) = \infty$. Si $A \in \phi(\pi_1(\Sigma_{g,b}))$, entonces $YAY^{-1}(\infty) = \infty$ y por tanto es una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Por la proposición anterior podemos suponer entonces que $\phi : \pi_1(\Sigma_{g,b}) \rightarrow P$, donde P es un subgrupo de matrices triangulares superiores.

Consideremos el camino $X_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$. Entonces

$$X_t \begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} X_t^{-1} = \begin{pmatrix} a & \frac{\zeta}{t^2} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \notin Ell$$

Definamos $\phi_t := X_t \phi X_t^{-1}$, para $t \in [1, \infty)$.

Notar que si $\phi(\gamma) = \begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$, entonces

$$\hat{\phi}(\gamma) := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \notin Ell$$

define una representación que es el punto final de la extensión continua de ϕ_t a $t = \infty$. Como eu es constante en caminos, alcanza mostrar que $eu(\hat{\phi}) = 0$.

Ahora bien, si $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$ y $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})^-$, es fácil ver las siguientes igualdades

$$X \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} g^{-1}$$

Pero entonces $eu(\hat{\phi}) = eu(X\hat{\phi}X^{-1}) = eu(g\hat{\phi}g^{-1}) = -eu(\hat{\phi})$. □

Para finalizar este capítulo, calculamos la clase de Euler de una representación *fuchsiana*. Por simplicidad nos concentramos aquí en el caso cerrado.

Definición 3.4.6. Una representación $\phi \in Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{R}))$ se dice *fuchsiana* si es fiel y $\phi(\pi_1(\Sigma_g))$ es discreto.

Observación 3.4.7. Si ϕ es fuchsiana y $\Gamma := \phi(\pi_1(\Sigma_g))$, entonces $\Sigma_g \cong \mathbb{H}^2/\Gamma$:

El grupo $\pi_1(\Sigma_g)$ es libre de torsión, luego $\Gamma \cong \pi_1(\Sigma_g)$ lo es. Esto implica que Γ no contiene rotaciones racionales. Además, no contiene rotaciones irracionales: por el corolario 2.2.7 de [20] las órbitas de la acción de Γ en \mathbb{H}^2 son discretas. Así que Γ no contiene elementos elípticos y por lo tanto todos sus elementos actúan sin puntos fijos \mathbb{H}^2 .

Lo anterior implica que $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$ es un cubrimiento: por los teoremas 2.2.1 y 2.2.6 de [20], todo punto $z \in \mathbb{H}^2$ tienen un entorno que es cortado sólo por finitos de sus trasladados.

3.4. Primeras propiedades

Como la acción de Γ es sin puntos fijos, dicho entorno puede achicarse de modo que sea disjunto de sus trasladados.

Resulta que \mathbb{H}^2/Γ es una superficie y $\pi_1(\mathbb{H}^2/\Gamma) \cong \Gamma \cong \pi_1(\Sigma_g)$ que no es libre, entonces \mathbb{H}^2/Γ es una superficie cerrada y como tiene el mismo grupo fundamental que Σ_g , son difeomorfas (proposición 1.1.5).

Podemos entonces tomar un difeomorfismo $\tilde{f} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \tilde{\Sigma}_g$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{\Sigma}_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}^2/\Gamma & \xrightarrow{f} & \Sigma_g \end{array} \quad (3.3)$$

Puede verse que para todo $\gamma \in \pi_1(\Sigma_g)$ existe un único $\eta_\gamma \in \pi_1(\tilde{\Sigma}_g)$ tal que

$$\gamma \cdot \tilde{f} = \tilde{f} \circ \phi(\eta_\gamma)$$

y que la asignación $\gamma \mapsto \eta_\gamma$ es un automorfismo de $\pi_1(\tilde{\Sigma}_g)$. En particular, $\hat{\phi}(\gamma) := \phi(\eta_\gamma)$ define una representación fuchsiana tal que $\gamma \cdot \tilde{f} = \tilde{f} \circ \hat{\phi}(\gamma)$ para todo γ . Notar que $eu(\phi) = eu(\hat{\phi})$ pues componer con η corresponde a un cambio de presentación de $\pi_1(\Sigma_g)$, pero la clase de Euler no depende de la presentación elegida.

Proposición 3.4.8. Si $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ es fuchsiana, entonces $eu(\phi) = \pm\chi(\Sigma_g)$.

Demostración. Cambiando ϕ por $\hat{\phi}$ si fuera necesario, podemos suponer que existe un difeomorfismo como en (3.3) y tal que $\gamma \cdot \tilde{f} = \tilde{f} \circ \phi(\gamma)$ para todo γ .

Como $\phi(\gamma)$ es una isometría de \mathbb{H}^2 para todo γ , la métrica hiperbólica cociente a una métrica en \mathbb{H}^2/Γ que se copia por f a Σ_g . Es claro entonces que $T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma) \cong T^1(\Sigma_g)$.

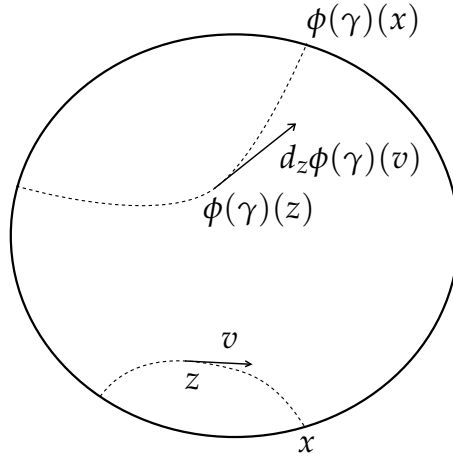
Por otra parte, la acción de Γ en $T^1\mathbb{H}^2$ dada por $\phi(\gamma) \cdot (z, v) = (\phi(\gamma)(z), d_z\phi(\gamma)(v))$ nos da

$$\frac{T^1\mathbb{H}^2}{\Gamma} \cong T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma)$$

En efecto, si $q : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$ es la proyección (notar que es una isometría local), basta pasar al cociente el mapa

$$T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma), \quad (z, v) \mapsto (q(z), d_zq(v))$$

Concluimos entonces que $\frac{T^1\mathbb{H}^2}{\Gamma} \cong T^1(\Sigma_g)$. La prueba termina mostrando que $S^1_\phi \cong \frac{T^1\mathbb{H}^2}{\Gamma}$, pues esto implica $eu(\phi) = eu(S^1_\phi) = eu(T^1(\Sigma_g)) = \pm\chi(\Sigma_g)$ (ver ejemplo 3.1.4). Para ello, definimos el mapa $T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2 \times S^1$ dado por $(z, v) \mapsto (z, \alpha_{z,v}(\infty))$, donde $\alpha_{z,v}$ es la geodésica de condiciones iniciales (z, v) y $\alpha_{z,v}(\infty) \in \partial\mathbb{H}^2 = S^1$ es su punto al infinito.


 Figura 3.3: Acción de Γ en $T^1\mathbb{H}^2$.

Este mapa es un difeomorfismo fibra a fibra y es equivariante respecto de la acción de Γ (en $T^1\mathbb{H}^2$ la acción es la dada arriba y en $\mathbb{H}^2 \times S^1$ actúa por transformaciones del cubrimiento q en la primera coordenada y como transformación de Möbius en la segunda). Más precisamente,

$$\phi(\gamma).(z, v) = (\phi(\gamma)(z), d_z\phi(\gamma)(v)) \mapsto (\phi(\gamma)(z), \alpha_{(\phi(\gamma)(z), d_z\phi(\gamma)(v))}(\infty))$$

Pero siendo $\phi(\gamma)$ una isometría, se tiene que $\phi(\gamma) \circ \alpha_{z,v} = \alpha_{(\phi(\gamma)(z), d_z\phi(\gamma)(v))}$. Así que

$$\phi(\gamma).(z, v) \mapsto (\phi(\gamma)(z), (\phi(\gamma) \circ \alpha_{z,v})(\infty)) = (\phi(\gamma)(z), \phi(\gamma)(\alpha_{z,v}(\infty))) = \phi(\gamma).(z, \alpha_{z,v}(\infty))$$

donde la última igualdad es cierta pues la acción de $\phi(\gamma)$ en S^1 es la extensión de la acción en \mathbb{H}^2 como transformación de Möbius.

Pasando al cociente este mapa y el dado por (3.3) obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} T^1\mathbb{H}^2 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{H}^2 \times S^1 & \xrightarrow{\cong} & \widetilde{\Sigma}_g \times S^1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{T^1\mathbb{H}^2}{\Gamma} & \xrightarrow{\cong} & \frac{\mathbb{H}^2 \times S^1}{\Gamma} & \xrightarrow{\cong} & \frac{\widetilde{\Sigma}_g \times S^1}{\pi_1(\Sigma_g)} \end{array}$$

$$\text{Entonces } S_\phi^1 = \frac{\widetilde{\Sigma}_g \times S^1}{\pi_1(\Sigma_g)} \cong \frac{T^1\mathbb{H}^2}{\Gamma}. \quad \square$$

Observación 3.4.9. La misma prueba aplica al caso con borde si existe un mapa $\mathbb{H}^2 \rightarrow \widetilde{\Sigma}_{g,b}$ como en (3.3).

Capítulo 4

Enunciado del teorema

Enunciamos aquí el resultado principal sobre el que trata este trabajo (teorema 4.1.1) y formalizamos los ingredientes necesarios para la comprensión del enunciado. Como la prueba del mismo incluye el tratamiento de superficies con borde, incluimos un enunciado auxiliar para ese caso.

4.1. El caso cerrado

El objetivo de este trabajo es presentar la prueba del siguiente:

Teorema 4.1.1 (Goldman, [15]). *Sea Σ_g la superficie cerrada orientable de género $g \geq 2$. Entonces las componentes conexas de $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ son los conjuntos*

$$eu^{-1}(k), \quad k = \chi(\Sigma_g), \dots, -\chi(\Sigma_g)$$

Será observado más adelante (observación 9.1.2 de la sección 9.1) que el espacio de representaciones es localmente arco-conexo de modo que en el enunciado las componentes conexas y arco-conexas coinciden.

Heurísticamente, el contenido del teorema puede resumirse de la siguiente manera: dos representaciones con la misma clase de Euler determinan el mismo fibrado $S^1 \rightarrow E \rightarrow \Sigma_g$ y (a priori) distintas foliaciones transversas. Un camino conectándolas puede pensarse entonces como una *deformación* de una foliación en la otra.

Es necesario explicitar qué topología estamos considerando en el espacio de representaciones. Consideremos la presentación estándar de $\pi_1(\Sigma_g)$ (ecuación (3.1)) y la función

$$\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})^{2g}, \quad \phi \mapsto (\phi(a_1), \phi(b_1), \dots, \phi(a_g), \phi(b_g)) \quad (4.1)$$

Este mapa es inyectivo, de modo que $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ admite una única topología según la cual es un encaje. Fijamos dicha topología de aquí en más. En este sentido, podemos pensar que una representación es sencillamente una $2g$ -upla de elementos de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ con la condición de que el producto de los conmutadores sea la identidad.

Cuando no haya riesgo de confusión anotaremos

$$\phi = (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) \in PSL(2, \mathbb{R})^{2g}$$

donde $A_i := \phi(a_i)$ y $B_i := \phi(b_i)$ para todo $i = 1, \dots, g$.

Observar que la topología de $Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{R}))$ no depende de la presentación de $\pi_1(\Sigma_g)$ elegida, porque es la topología de la convergencia puntual:

$$\lim_n \phi_n = \phi \iff \lim_n \phi_n(\gamma) = \phi(\gamma), \quad \forall \gamma \in \pi_1(\Sigma_g)$$

Observación 4.1.2. La función $eu : Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{Z}$ es continua. En efecto, si $\phi_n \rightarrow \phi$ entonces $\phi_n(a_i) \rightarrow \phi(a_i)$ y $\phi_n(b_i) \rightarrow \phi(b_i)$ para todo $i = 1, \dots, g$. Levantando al cubrimiento universal se puede suponer que convergen y como $\prod_{i=1}^g [',]$ es continuo, el teorema 3.3.2 nos dice que $z^{eu(\phi_n)} \rightarrow z^{eu(\phi)}$. Pero el conjunto $\{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es discreto, así que $eu(\phi_n) = eu(\phi)$ para d suficientemente grande.

En particular, la clase de Euler es un invariante de las componentes conexas del espacio $Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{R}))$. Así, la prueba del teorema 4.1.1 consiste de mostrar que:

- Toda representación $\phi \in Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{R}))$ verifica

$$eu(\phi) \in [\chi(\Sigma_g), -\chi(\Sigma_g)]$$

- Todos los valores en $[\chi(\Sigma_g), -\chi(\Sigma_g)]$ son clases de alguna representación.
- Dos representaciones con la misma clase de pueden ser conectadas por un camino de representaciones.

4.2. El caso con borde

Sin modificaciones el caso con borde del teorema 4.1.1 es trivial: como $\Sigma_{g,b}$ retrae por deformación a una suma cuña de $2g + b - 1$ círculos, se tiene que $\pi_1(\Sigma_{g,b}) \cong \mathbb{F}_{2g+b-1}$ (grupo libre) y por tanto la función (4.1) es biyectiva. De este modo, el espacio de representaciones tiene una única topología tal que este mapa es un homeomorfismo y resulta que

$$Hom(\pi_1(\Sigma_{g,b}), PSL(2, \mathbb{R})) \cong PSL(2, \mathbb{R})^{2g+b-1}$$

En particular, $Hom(\pi_1(\Sigma_{g,b}), PSL(2, \mathbb{R}))$ es conexo.

La prueba del teorema de Goldman pasa por tomar una descomposición árbol-dual de Σ_g (sección 1.1), analizar las representaciones en cada subsuperficie de dicha descomposición y aplicar la propiedad de aditividad (proposición 3.4.1). Por esto es conveniente tener un resultado auxiliar en el caso con borde que enunciamos a continuación.

Consideremos la presentación de $\pi_1(\Sigma_{g,b})$ de la observación 3.3.7 y definamos el conjunto

$$W(\Sigma_{g,b}) := \{ \phi \in Hom(\pi_1(\Sigma_{g,b}), PSL(2, \mathbb{R})) , \quad \phi(c_i) \in Hyp \quad \forall i = 1, \dots, b \}$$

4.2. El caso con borde

Cuando $b = 0$, este conjunto coincide con el espacio de representaciones. Notar además que los elementos de $W(\Sigma_{g,b})$ tienen definida su clase de Euler y esta es invariante en sus componentes.

Teorema 4.2.1 (Goldman, [15]). *Sea $\Sigma_{g,b}$ con g y b tales que $\chi(\Sigma_{g,b}) < 0$. Entonces las componentes conexas de $W(\Sigma_{g,b})$ son los conjuntos*

$$\left(eu|_{W(\Sigma_{g,b})} \right)^{-1}(k), \quad k = \chi(\Sigma_{g,b}), \dots, -\chi(\Sigma_{g,b})$$

Observación 4.2.2. ■ En el caso $\chi = 0$ los teoremas 4.1.1 y 4.2.1 también son ciertos, pero su demostración es más sencilla:

Las únicas superficies con característica de Euler igual a cero son el toro Σ_1 y el cilindro $\Sigma_{0,2}$. Supongamos primero el caso del toro. Su grupo fundamental es $\mathbb{Z}^2 = \langle a, b | [a, b] = 1 \rangle$ de modo que $Hom(\pi_1(\Sigma_1), PSL(2, \mathbb{R})) \cong \{(A, B) \in PSL(2, \mathbb{R})^2, AB = BA\}$. Así, si $\phi = (A, B), \phi' = (A', B') \in Hom(\pi_1(\Sigma_1), PSL(2, \mathbb{R}))$, existen φ y φ' subgrupos a un parámetro tales que $A, B \in \varphi(\mathbb{R})$ y $A', B' \in \varphi'(\mathbb{R})$ (proposición 2.1.6). Luego las primeras matrices pueden conectarse a I dentro de $\varphi(\mathbb{R})$ y las segundas en $\varphi'(\mathbb{R})$. Notar que estos caminos determinan caminos de representaciones, pues al pertenecer a un subgrupo a un parámetro conmutan. Es decir que $Hom(\pi_1(\Sigma_1), PSL(2, \mathbb{R}))$ es conexo. Por continuidad, sólo una clase de Euler puede realizarse y el teorema 3.3.2 implica que

$$eu(\phi \equiv I) = 0 \implies Hom(\pi_1(\Sigma_1), PSL(2, \mathbb{R})) = eu^{-1}(0)$$

El caso del cilindro es análogo, pues su grupo fundamental admite la presentación $\langle c_1, c_2 | c_1 c_2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}$, de modo que $W(\Sigma_{0,2}) \cong \{(C_1, C_2) \in Hyp^2, C_1 C_2 = I\} \cong Hyp$, que es conexo.

Resta ver que si $\phi \in W(\Sigma_{0,2})$ entonces $eu(\phi) = 0$. Pero esto es claro pues si \widetilde{C}_1 es el levantado canónico de C_1 , entonces \widetilde{C}_1^{-1} es el levantado canónico de $C_1^{-1} = C_2$, dado que fija puntos de \mathbb{R} . Por la observación 3.3.7 deducimos que

$$z^{eu(\phi)} = \widetilde{C}_1 \widetilde{C}_2 = \widetilde{C}_1 \widetilde{C}_1^{-1} = I = z^0$$

Por esta razón de aquí en más supondremos siempre que $\chi < 0$, a menos que se aclare lo contrario.

- Un ejemplo fácil de representaciones que están en la misma componente ocurre cuando éstas son conjugadas. Más precisamente, sean $\phi, \phi' \in W(\Sigma_{g,b})$ (donde quizá $b = 0$) tales que existe $X \in PSL(2, \mathbb{R})$ que cumple $\phi = X\phi'X^{-1}$. Entonces ϕ y ϕ' están en la misma componente conexas: basta tomar un camino $X_t \in PSL(2, \mathbb{R})$ desde I a X y definir

$$\phi_t := X_t \phi X_t^{-1} \in W(\Sigma_{g,b})$$

La dificultad del teorema radica en que existen representaciones con la misma clase de Euler que no son conjugadas por un elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Capítulo 5

Representaciones de \mathbb{F}_2

Como se ha mencionado, la prueba del teorema 4.1.1 consiste en descomponer Σ_g en subsuperficies de característica de Euler igual a -1 . Sólo hay dos tales superficies: $\Sigma_{0,3}$ y $\Sigma_{1,1}$, ambas con grupo fundamental libre en dos generadores y es por esto que en este capítulo estudiamos representaciones de este grupo.

El objetivo es definir el *mapa de caracteres* (definición 5.1.2) y probar que verifica la propiedad de levantamiento de caminos (proposición 5.2.12). La misma será utilizada en los capítulos 6 y 7 para estudiar respectivamente el producto y el conmutador de dos matrices.

En la observación 4.2.2 vimos que dos representaciones $PSL(2, \mathbb{R})$ –conjugadas pertenecen a la misma componente conexa del espacio de representaciones. Resulta razonable entonces estudiar invariantes por conjugación de representaciones y naturalmente la traza es uno de ellos. En un lenguaje un tanto impreciso, la traza nos permitirá obtener una “realización” del conjunto de clases de conjugación de representaciones en un espacio euclídeo (c.f. observación 5.1.3 más adelante).

5.1. Caracteres complejos

Comenzaremos estudiando representaciones a $SL(2, \mathbb{C})$ puesto que su tratamiento es más sencillo y sirve de base para el caso real.

Sea $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}\{x, y\}$ el grupo libre en los generadores x e y , entonces por lo visto en la sección 3.4 tenemos que $Hom(\mathbb{F}_2, SL(2, \mathbb{C})) \cong SL(2, \mathbb{C})^2$. Así, una representación $\phi : \mathbb{F}_2 \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ es lo mismo que un par $(\phi(x), \phi(y)) =: (X, Y) \in SL(2, \mathbb{C})^2$.

Si $\phi = (X, Y) \in SL(2, \mathbb{C})^2$ es una representación, entonces trX , trY y $tr(XY) = tr(YX)$ determinan “todas las trazas de la representación”. Más precisamente, fijemos $w \in \mathbb{F}_2$ y definamos

$$\tau_w : Hom(\mathbb{F}_2, SL(2, \mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tau_w(\phi) := tr(\phi(w))$$

Lema 5.1.1. 1. El conjunto $\{\tau_x, \tau_y, \tau_{xy}\}$ es un generador del anillo de funciones generado por la familia $\{\tau_w\}_{w \in \mathbb{F}_2}$.

2. Si $\phi = (X, Y)$ y $\phi' = (X', Y')$ son tales que $\text{tr}X = \text{tr}X'$, $\text{tr}Y = \text{tr}Y'$ y $\text{tr}(XY) = \text{tr}(X'Y')$, entonces $\text{tr}(\phi(w)) = \text{tr}(\phi'(w))$ para todo $w \in \mathbb{F}_2$.

Demostración. Una demostración elemental de 1. se encuentra en [5] (proposición 1.4.1).

Para 2., puede probarse que dada una palabra reducida $w(X, Y)$ en X e Y existe un algoritmo que permite calcular un polinomio $\kappa_w(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ tal que $\kappa_w(\text{tr}X, \text{tr}Y, \text{tr}(XY)) = \text{tr}(w(X, Y))$ (ver [16], sección 2.2).

Sólo a modo de ejemplo mostramos cómo calcular $\text{tr}(XY^{-1})$ a partir de $\text{tr}X$, $\text{tr}Y$ y $\text{tr}(XY)$: como $\det(Y) = 1$, el teorema de Cayley-Hamilton implica que

$$Y^2 - (\text{tr}Y)Y + I = 0 \implies Y + Y^{-1} = (\text{tr}Y)I \implies XY + XY^{-1} = (\text{tr}Y)X$$

y sólo resta tomar traza a ambos lados. □

El lema anterior motiva la siguiente:

Definición 5.1.2. La terna $(\text{tr}(\phi(x)), \text{tr}(\phi(y)), \text{tr}(\phi(xy)))$ es el *carácter* de la representación ϕ . La función

$$\chi : \text{Hom}(\mathbb{F}_2, SL(2, \mathbb{C})) \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad \chi(\phi = (X, Y)) := (\text{tr}X, \text{tr}Y, \text{tr}(XY))$$

es el *mapa de caracteres*.

Observación 5.1.3. La acción de $GL(2, \mathbb{C})$ por conjugación en $\text{Hom}(\mathbb{F}_2, SL(2, \mathbb{C})) \cong SL(2, \mathbb{C})^2$ es

$$g.(X, Y) := (gXg^{-1}, gYg^{-1})$$

y resulta entonces que χ es $GL(2, \mathbb{C})$ -invariante. Además, el argumento previo a la proposición 3.4.2 muestra que dos representaciones son $GL(2, \mathbb{C})$ -conjugadas si y sólo si son $SL(2, \mathbb{C})$ -conjugadas (pues $\sqrt{\det(g)}$ siempre existe).

Esto nos dice que χ induce una aplicación

$$\text{Hom}(\mathbb{F}_2, SL(2, \mathbb{C})) / SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^3 \tag{5.1}$$

La proposición a continuación dice que este mapa es sobreyectivo y establece de manera precisa el nivel en donde deja de ser inyectiva.

En lo que sigue, trabajaremos con el polinomio

$$\kappa : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \kappa(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2$$

Un cálculo directo permite verificar la siguiente igualdad

$$\kappa\chi(X, Y) = \text{tr}[X, Y] \quad \forall X, Y \in SL(2, \mathbb{C}) \tag{5.2}$$

Proposición 5.1.4. Sean χ y κ como antes. Entonces:

5.1. Caracteres complejos

1. χ es sobreyectiva.
2. (X, Y) es reducible si y sólo si $\kappa\chi(X, Y) = 2$ (ver definición 3.4.3).
3. Si $\kappa(x, y, z) \neq 2$, entonces $\chi^{-1}(x, y, z)$ es una $GL(2, \mathbb{C})$ -órbita.

Demostración. 1. Sea $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ y $\alpha := \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - 4})$, de modo que $\alpha + \alpha^{-1} = z$.
Entonces

$$\chi \left(\left(\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ -\alpha & y \end{pmatrix} \right) \right) = (x, y, z)$$

2. Supongamos que (X, Y) es reducible. Por la observación 3.4.4 existe $g \in GL(2, \mathbb{C})$ tal que

$$gXg^{-1} = \begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad gYg^{-1} = \begin{pmatrix} b & \eta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

Entonces $tr[X, Y] = tr(g[X, Y]g^{-1}) = tr[gXg^{-1}, gYg^{-1}] = tr \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$.

Recíprocamente, por la fórmula (5.2) sabemos que $tr[X, Y] = 2$. Como $X, Y \in SL(2, \mathbb{C})$ tienen vectores propios, conjugando el par (X, Y) por un elemento adecuado podemos suponer que

$$X = \begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} b & 0 \\ \eta & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

En efecto, basta conjuguar por una matriz $g \in SL(2, \mathbb{C})$ que lleve un vector propio de X en $(1, 0)$ y uno de Y en $(0, 1)$. El único caso en que esta matriz no existe es cuando X e Y tienen una única dirección propia coincidente, en cuyo caso (X, Y) es reducible y no hay más nada que probar.

Un cálculo directo en (5.3) muestra que

$$2 = tr[X, Y] = 2 + \zeta\eta \left(\zeta\eta + \frac{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}{ab} \right) \implies \zeta\eta \left(\zeta\eta + \frac{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}{ab} \right) = 0$$

Si $\zeta\eta = 0$ entonces (X, Y) es reducible. Sino, resulta que $(a\zeta, 1 - a^2)$ es un vector propio común a X e Y .

3. Sean $\phi = (X, Y), \phi' = (X', Y') \in \chi^{-1}(x, y, z)$. Como $\kappa(x, y, z) \neq 2$, se tiene que ϕ y ϕ' son irreducibles.

En primer lugar, observemos que existe una palabra W en X e Y con traza distinta de ± 2 y tal que el grupo Γ generado por X y W actúa irreduciblemente en \mathbb{C}^2 : si $trY \neq \pm 2$

no hay nada que probar así que supongamos que $\text{tr}Y = \pm 2$. Conjugando la representación podemos suponer que $Y = \pm \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ y existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tal que $W := XY^{2k}$ tiene traza distinta de ± 2 (c.f. [5], lema 1.5.1). Pero X y W no pueden tener vector propio común, porque tal dirección sería invariante por Y^{2k} . Entonces esa dirección es $(1, 0)$ y esto es absurdo porque (X, Y) es irreducible.

Ahora bien, W es una palabra en X e Y de modo que existe $w \in \mathbb{F}_2$ tal que

$$\phi(w) = W$$

Definamos $W' := \phi'(w)$ y Γ' el grupo generado por X' y W' , entonces Γ' actúa irreduciblemente en \mathbb{C}^2 : como $\chi(\phi) = \chi(\phi') = (x, y, z)$ gracias al lema 5.1.1 se tiene que $\text{tr}(\phi(z)) = \text{tr}(\phi'(z))$ para todo $z \in \mathbb{F}_2$ y en particular

$$\text{tr}[X, W] = \text{tr}[X', W']$$

Si Γ' fuera reducible, entonces por 2. obtenemos que $2 = \text{tr}[X', W'] = \text{tr}[X, W]$ y por lo tanto Γ es reducible y esto es una contradicción.

Como $\text{tr}W' = \text{tr}W \neq \pm 2$, entonces W y W' son diagonalizables y por lo tanto conjugando ϕ y ϕ' en $SL(2, \mathbb{C})$ podemos suponer que

$$W = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} = W' \quad (5.4)$$

donde $\lambda \neq \pm 1$.

Luego de esta conjugación, las matrices X y X' no pueden ser triangulares porque Γ y Γ' son irreducibles. No es difícil entonces ver que existen matrices diagonales D y D' adecuadas tales que

$$DXD^{-1} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & d \end{pmatrix} \quad D'X'D'^{-1} = \begin{pmatrix} a' & 1 \\ c' & d' \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

donde $cc' \neq 0$.

Sustituimos ϕ y ϕ' por estas conjugadas y por abuso de notación las denotaremos de la misma manera. Afirmamos que $\phi = \phi'$ y esto concluye la demostración.

En efecto, como sólo hemos modificado las representaciones en su clase de conjugación, entonces se sigue verificando

$$\chi(\phi) = \chi(\phi') \implies \text{tr}(\phi(z)) = \text{tr}(\phi'(z))$$

para todo $z \in \mathbb{F}_2$.

Ahora bien, para cada $z \in \mathbb{F}_2$ denotemos

5.2. Caracteres reales

$$\phi(z) := \begin{pmatrix} p_z & q_z \\ r_z & s_z \end{pmatrix} \quad \phi'(z) := \begin{pmatrix} p'_z & q'_z \\ r'_z & s'_z \end{pmatrix}$$

Entonces $p_z + s_z = p'_z + s'_z$ para todo $z \in \mathbb{F}_2$.

Dado $z \in \mathbb{F}_2$, tenemos que $p_{wz} + s_{wz} = p'_{wz} + s'_{wz}$. Aplicando (5.4) obtenemos

$$\lambda p_z + \lambda^{-1} s_z = \lambda p'_z + \lambda^{-1} s'_z \implies p_z = p'_z, \quad s'_z = s'_z$$

Razonamientos similares con la expresión (5.5) permiten concluir que $q_z = q'_z$ y $r'_z = r'_z$ para todo $z \in \mathbb{F}_2$ y esto termina la demostración (c.f. [5], proposición 1.5.2). \square

Ejemplo 5.1.5. El mapa (5.1) no es inyectivo. En efecto, las partes 2. y 3. de la proposición anterior nos dicen que restringido a las representaciones irreducibles sí lo es. Sin embargo, existen representaciones no conjugadas con el mismo carácter. Por ejemplo podemos considerar los pares

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Ambas representaciones pertenecen a $\chi^{-1}(2, 2, 2)$ pero no son conjugadas.

Otro ejemplo está dado por las representaciones:

$$\left(\begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \zeta' \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & \eta' \\ 0 & b \end{pmatrix} \right) \in \chi^{-1} \left(a + \frac{1}{a}, b + \frac{1}{b}, ab + \frac{1}{ab} \right)$$

que no son conjugadas si $a \neq \pm 1$ o $b \neq \pm 1$.

5.2. Caracteres reales

En esta sección probamos un análogo de la proposición 5.1.4 para el caso real. El enunciado es un poco más complicado esencialmente porque los polinomios en \mathbb{R} no se comportan como los polinomios en \mathbb{C} . Por ejemplo, el argumento de la sobreyectividad de χ no puede aplicarse en todos los casos. Además no es cierto que si un par tiene conmutador parabólico entonces actúa reduciblemente en \mathbb{R}^2 : basta considerar dos rotaciones que conmuten y sin valores propios (reales).

Por otra parte, se ve fácilmente que representaciones a

$$SU(2) := \{X \in SL(2, \mathbb{C}), \quad X^{-1} = \overline{X}^t\}$$

tienen carácter real, de modo que si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ entonces $\chi^{-1}(x, y, z)$ no contiene sólo representaciones a $SL(2, \mathbb{R})$. De hecho, en [25] (proposición III.1.1) se prueba que si una representación tiene carácter real entonces se conjuga en $GL(2, \mathbb{C})$ a una representación a $SL(2, \mathbb{R})$ o $SU(2)$. Como el teorema central de este trabajo estudia representaciones a $PSL(2, \mathbb{R})$, nos interesa descartar el segundo caso y entender qué ternas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ son el carácter de una representación a $SL(2, \mathbb{R})$.

De aquí en más, denotaremos χ y κ a las restricciones de los mapas construídos en la sección previa a $Hom(\mathbb{F}_2, SL(2, \mathbb{R}))$ y \mathbb{R}^3 respectivamente. El primer objetivo de esta sección es entonces calcular $\chi(SL(2, \mathbb{R})^2)$ (proposición 5.2.5) y estudiar propiedades de las fibras de este mapa (proposición 5.2.8). En particular, deduciremos una propiedad de levantamiento de caminos de χ (proposición 5.2.12). Esta propiedad es crucial para los contenidos de los capítulos que vienen.

La demostración de las mencionadas propiedades de χ es intrincada, y algunos prerrequisitos son necesarios. Por un lado, utilizaremos un cierto análisis de los conjuntos de nivel del polinomio κ (concretamente, la proposición A.0.1 del apéndice A). Por el otro, necesitaremos algunas propiedades elementales sobre la *forma de Killing* en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ y la *representación adjunta*, que el lector familiarizado con estos temas sin duda alguna conocerá (el lector no habituado puede consultar el apéndice B).

5.2.1. Imagen de χ

Para comenzar brindamos una manera alternativa de distinguir los distintos tipos de elementos de $SL(2, \mathbb{R})$. Sea $\gamma \subset \mathbb{H}^2$ una geodésica y R_γ la simetría axial respecto a esta geodésica, i.e, la única isometría de \mathbb{H}^2 que fija los puntos de γ y tal que si $z \notin \gamma$, entonces γ es la mediatriz del segmento de z a $R_\gamma(z)$. Notar que R_γ revierte la orientación y que $R_\gamma^2 = id_{\mathbb{H}^2}$.

Lema 5.2.1. *La composición de dos simetrías axiales es hiperbólica si los ejes son paralelos, parabólica si los ejes son secantes en $\partial\mathbb{H}^2$ o elíptica si los ejes son secantes en \mathbb{H}^2 . Recíprocamente, todo elemento de $SL(2, \mathbb{R})$ es composición de dos simetrías axiales.*

Demostración. Sean γ_1 y γ_2 dos geodésicas en \mathbb{H}^2 y R_1, R_2 las simetrías asociadas. Si γ_1 y γ_2 son paralelas, entonces puedo tomar γ la geodésica perpendicular a ambas. La misma es invariante por R_1R_2 , de modo que esta isometría es hiperbólica. Por otro lado si $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{z_0\} \subset \partial\mathbb{H}^2$, entonces z_0 es fijado por R_1R_2 y es claro que ningún otro punto del borde lo es. Finalmente, si los ejes se cortan en \mathbb{H}^2 , dicho punto es fijo y por tanto la composición es elíptica.

Como la afirmación recíproca es invariante por conjugación, basta estudiarlo para las formas normales:

- $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$: si γ es la geodésica invariante (la vertical por 0), basta elegir un eje γ_1 perpendicular a γ y luego tomar γ_2 también perpendicular, a distancia hiperbólica $d/2$ de γ_1 (donde d es la distancia de traslación a través de γ).

5.2. Caracteres reales

- $\begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: se elige γ_1 una geodésica vertical y γ_2 también vertical, a distancia euclídea $\zeta/2$ de la primera.
- $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sen\theta \\ -\sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$: conjugando podemos suponer que es una rotación de centro 0 en el modelo del disco y basta tomar dos ejes que se corten con ángulo θ (esto da lugar a una rotación de ángulo 2θ).

□

Observación 5.2.2. En el recíproco hay libertad para elegir el primer eje de simetría, quedando el segundo determinado por un parámetro real y “el sentido” en el que la isometría mueve los puntos.

Para el siguiente corolario observemos que si $X, Y \in SL(2, \mathbb{R})$ son tales que $[X, Y] = \pm I$, entonces $[X, Y] = I$. En efecto, proyectando a $PSL(2, \mathbb{R})$ tenemos que existe un subgrupo a un parámetro φ tal que $X, Y \in \varphi(\mathbb{R})$. Levantando por el cubrimiento $SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ podemos suponer $\pm \mathcal{S} \subset SL(2, \mathbb{R})$, donde \mathcal{S} es el levantado de $\varphi(\mathbb{R})$ pasando por I (que es un subgrupo a un parámetro) y $-\mathcal{S}$ es el levantado por $-I$. Luego $X, Y \in \pm \mathcal{S}$ y multiplicando X e Y por $-I$ si es necesario (lo cual no afecta el valor del conmutador) podemos suponer $X, Y \in \mathcal{S}$ de modo que $[X, Y] = I$.

Corolario 5.2.3. *Sea $X \in SL(2, \mathbb{R})$ elíptico. Entonces para todo $Y \in SL(2, \mathbb{R})$ se tiene*

$$[X, Y] \in Hyp \cup \{I\}$$

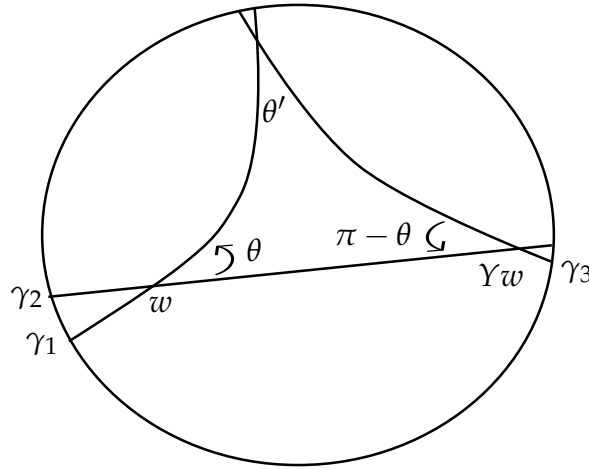
Otra manera de decir lo anterior es la siguiente: si $-2 < trX < 2$, entonces $|\kappa\chi(X, Y)| \geq 2$ para todo $Y \in SL(2, \mathbb{R})$ y $|\kappa\chi(X, Y)| = 2$ si y sólo si $[X, Y] = I$. La proposición 5.2.5 más adelante establece un enunciado significativamente más preciso en este sentido.

Demostración de 5.2.3. Sea $w \in \mathbb{H}^2$ el punto fijo de X y 2θ el ángulo de rotación, entonces $YX^{-1}Y^{-1}$ fija Yw y tiene ángulo de rotación $2\pi - 2\theta$. Si $Yw = w$ entonces $[X, Y] = \pm I$ porque en $PSL(2, \mathbb{R})$ uno tiene $[X, Y] = I$ y por el comentario previo no hay más nada que probar.

Si $Yw \neq w$ podemos tomar γ_2 la geodésica por w e Yw y escribir

$$X = R_1 R_2 \quad YX^{-1}Y^{-1} = R_2 R_3$$

donde R_2 es la simetría axial definida por γ_2 y R_1 y R_3 están determinadas a partir de la misma y las transformaciones X e $YX^{-1}Y^{-1}$ respectivamente, como lo muestra la figura a continuación:



Deducimos que $[X, Y] = R_1 R_3$ y por el lema anterior sólo hay que probar que R_1 y R_3 no se cortan en $\overline{\mathbb{H}^2}$. Pero si se cortaran tendríamos un triángulo geodésico con ángulos θ , $\pi - \theta$ y un tercer ángulo $\theta' \geq 0$. Esto es absurdo por el teorema de Gauss-Bonnet (ver [20], teorema 1.4.2). □

Observación 5.2.4. Las siguientes observaciones serán utilizadas en la demostración de la proposición 5.2.5.

- El polinomio κ puede escribirse

$$\kappa(x, y, z) = \left(\frac{2+z}{4}\right) (x-y)^2 + \left(\frac{2-z}{4}\right) (x+y)^2 + z^2 - 2 \quad (5.6)$$

Esto permite mostrar que si $-2 < z < 2$, entonces

$$\kappa(x, y, z) = -2 \iff x = y = z = 0.$$

Como κ es invariante por permutación de las variables, mismas conclusiones se obtienen para $-2 < x < 2$ o $-2 < y < 2$. Además, se deduce que $(-2, 2)^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2] = (-2, 2)^3 \cap \kappa^{-1}(-\infty, 2)$ pues $(-2, 2)^3 \cap \kappa^{-1}(-\infty, -2) = \emptyset$.

- Sea $K \in M(3, \mathbb{R})$ simétrica y tal que $\det(K) \neq 0$. Definamos

$$\mathbb{K}(u, v) := u^t K v$$

Entonces \mathbb{K} es una forma bilineal, simétrica y no degenerada en \mathbb{R}^3 .

Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^3 y $\mathbb{K}(e_i, e_i) \neq 0$ para todo $i = 1, 2, 3$, podemos definir

5.2. Caracteres reales

$$\hat{R}_i(v) := v - 2 \frac{\mathbb{K}(v, e_i)}{\mathbb{K}(e_i, e_i)} e_i$$

Entonces \hat{R}_i es la identidad en el complemento \mathbb{K} -perpendicular de $\text{span}\{e_i\}$ y $\hat{R}_i(e_i) = -e_i$, es decir que \hat{R}_i es una reflexión \mathbb{K} -ortogonal.

Si $i \neq j$ entonces

$$\text{tr}(\hat{R}_i \hat{R}_j) = \frac{4\mathbb{K}(e_i, e_j)^2}{\mathbb{K}(e_i, e_i)\mathbb{K}(e_j, e_j)} - 1$$

En efecto, basta tomar $v \in \mathbb{R}^3$ que sea \mathbb{K} -ortogonal a e_i y e_j y calcular la matriz asociada a $\hat{R}_i \hat{R}_j$ en la base $\{e_i, e_j, v\}$. Si en particular suponemos $\mathbb{K}(e_i, e_i) = 2$ para todo i entonces

$$\text{tr}(\hat{R}_i \hat{R}_j) = \mathbb{K}(e_i, e_j)^2 - 1 \quad (5.7)$$

Concluimos esta parte calculando la imagen de χ .

Proposición 5.2.5. $\chi(SL(2, \mathbb{R})^2) = \mathbb{R}^3 \setminus ((-2, 2)^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2])$.

Demostración. Sean $X, Y \in SL(2, \mathbb{R})$ y $\chi(X, Y) = (x, y, z)$. Si $(x, y, z) \notin (-2, 2)^3$, no hay nada que probar. Si por el contrario $(x, y, z) \in (-2, 2)^3$, el corolario 5.2.3 dice que $[X, Y] \in \text{Hyp} \cup \{I\}$, entonces $\text{tr}[X, Y] \in (-\infty, -2) \cup [2, \infty)$ de modo que $\kappa(x, y, z) \in (-\infty, -2) \cup [2, \infty)$ y hemos terminado.

Para probar la otra inclusión, la observación previa nos dice que alcanza mostrar

$$\mathbb{R}^3 \setminus ((-2, 2)^3 \cap \kappa^{-1}(-\infty, 2)) \subset \chi(SL(2, \mathbb{R})^2)$$

Sea entonces $(x, y, z) \notin (-2, 2)^3 \cap \kappa^{-1}(-\infty, 2)$, queremos encontrar matrices $X, Y \in SL(2, \mathbb{R})$ con carácter (x, y, z) .

Dividimos la prueba en tres etapas.

1. Si $(x, y, z) \notin (-2, 2)^3$.

Digamos por ejemplo que $|z| \geq 2$. Entonces el argumento que usamos en el ítem 1. de la proposición 5.1.4 se aplica, pues las matrices ahí construidas son reales.

Análogamente se razona si $|x| \geq 2$ o $|y| \geq 2$.

2. Si $(x, y, z) \in (-2, 2)^3$ y $\kappa(x, y, z) = 2$.

Observar que por el corolario 5.2.3 las preimágenes posibles corresponden a pares de elementos elípticos que conmutan.

Tomemos $\theta_x, \theta_y \in (0, \pi)$ los únicos elementos que verifican

$$x = 2\cos(\theta_x) \quad y = 2\cos(\theta_y)$$

Como $\kappa(x, y, z) = 2$, uno deduce fácilmente que $z = 2\cos(\theta_x \mp \theta_y)$ y basta tomar

$$X := \begin{pmatrix} \cos(\theta_x) & \text{sen}(\theta_x) \\ -\text{sen}(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} \cos(\theta_y) & \mp \text{sen}(\theta_y) \\ \pm \text{sen}(\theta_y) & \cos(\theta_y) \end{pmatrix}$$

3. Si $(x, y, z) \in (-2, 2)^3$ y $\kappa(x, y, z) > 2$.

Sea un tal (x, y, z) y notemos por comodidad $\kappa := \kappa(x, y, z)$. La idea consiste de obtener reflexiones de \mathbb{R}^3 respecto de una forma de signatura $(1, 2)$ y levantar esos elementos a $SL(2, \mathbb{R})$ por la representación adjunta, aplicando la proposición B.0.1 del apéndice B. Más aún, por el lema B.0.2 sabemos que $\text{tr}(Ad(X)) = \text{tr}(X)^2 - 1$, así que relacionaremos esta fórmula con (5.7).

Más precisamente, sea la matriz

$$K := \begin{pmatrix} 2 & z & y \\ z & 2 & x \\ y & x & 2 \end{pmatrix}$$

y la forma bilineal \mathbb{K} asociada. Como $\det(K) = 2(2 - \kappa) < 0$, \mathbb{K} es no degenerada. Además, el cálculo hecho en la observación previa nos dice que si \hat{R}_i es la reflexión \mathbb{K} -ortogonal respecto a $\text{span}\{e_i\}^\perp$, entonces

$$\begin{aligned} \text{tr}(\hat{R}_2\hat{R}_1) &= \text{tr}(\hat{R}_1\hat{R}_2) = z^2 - 1 \\ \text{tr}(\hat{R}_3\hat{R}_2) &= \text{tr}(\hat{R}_2\hat{R}_3) = x^2 - 1 \\ \text{tr}(\hat{R}_3\hat{R}_1) &= \text{tr}(\hat{R}_1\hat{R}_3) = y^2 - 1 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Esto sugiere que notemos

$$\hat{X} := \hat{R}_2\hat{R}_3 \quad \hat{Y} := \hat{R}_3\hat{R}_1 \quad \hat{Z} := \hat{R}_2\hat{R}_1$$

de modo que $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ son \mathbb{K} -isometrías, $\det(\hat{X}) = \det(\hat{Y}) = \det(\hat{Z}) = 1$ y $\hat{X}\hat{Y} = \hat{Z}$.

Por otra parte, la forma bilineal \mathbb{K} se diagonaliza en la base

$$\mathcal{C}_{(x,y,z)} := \{(1, 0, 0), (-z, 2, 0), (xz - 2y, yz - 2x, 4 - z^2)\}$$

y la forma diagonal en dicha base es

5.2. Caracteres reales

$$[\mathbb{K}]_{\mathcal{C}_{(x,y,z)}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(4-z^2) & 0 \\ 0 & 0 & (4-z^2)(-2\kappa+4) \end{pmatrix}$$

Las hipótesis sobre z y κ nos dicen que \mathbb{K} tiene signatura $(1,2)$ así que conjugando podemos suponer que $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z} \in SO(1,2)$. Más aún, el vector $\hat{X} \begin{pmatrix} xz-2y \\ yz-2x \\ 4-z^2 \end{pmatrix}$ tiene tercera coordenada positiva en la base $\mathcal{C}_{(x,y,z)}$, es decir que \hat{X} preserva la dirección negativa de \mathbb{K} y por lo tanto $\hat{X} \in SO(1,2)^0$. Análogamente, $\hat{Y}, \hat{Z} \in SO(1,2)^0$.

Aplicando la proposición B.0.1, encontramos $X, Y, Z \in SL(2, \mathbb{R})$, únicos módulo $\pm I$, tales que

$$Ad(X) = \hat{X}, \quad Ad(Y) = \hat{Y}, \quad Ad(Z) = \hat{Z}$$

Notar entonces que $Ad(XY) = Ad(X)Ad(Y) = \hat{X}\hat{Y} = \hat{Z} = Ad(Z)$ y por lo tanto $XY = \pm Z$. Más aún, por (5.8) y por el lema B.0.2 del apéndice B se obtiene

$$trX = \pm x, \quad trY = \pm y, \quad trZ = \pm z$$

Multiplicando por $\pm I$, podemos suponer

$$trX = x, \quad trY = y, \quad trZ = z \tag{5.9}$$

Supongamos primeramente que $x = 0, y \neq 0, z \neq 0$ entonces los dos levantados $\pm X$ verifican $trX = x$, mientras que Y y Z están determinados. Elijamos entonces X . Si $XY = Z$ ya terminamos pues entonces $\chi(X, Y) = (trX, trY, tr(XY)) = (x, y, trZ) = (x, y, z)$. Si por el contrario $XY = -Z$, entonces $\chi(-X, Y) = (x, y, z)$. Análogos razonamientos aplican en cualquier situación en que $xyz = 0$.

Sólo queda estudiar el caso $xyz \neq 0$, de modo que los levantados X, Y y Z son los únicos posibles que cumplen (5.9). Tenemos definida una función

$$\tau(x, y, z) := XYZ^{-1} = \pm I$$

Observar que τ es continua porque $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ lo son en x, y, z , el cambio de base $\mathcal{C}_{(x,y,z)}$ lo es, Ad es un cubrimiento y los levantados X, Y, Z están unívocamente determinados. Afirmamos que $\tau \equiv I$ y esto termina la prueba porque entonces $XY = Z$ y por (5.9) obtenemos $\chi(X, Y) = (x, y, z)$.

Ahora bien, siendo κ simétrico en x, y, z , sólo hay que discutir cuatro casos:

- i. $(x, y, z) \in (0, 2)^3$.

- ii. $(x, y, z) \in (-2, 0)^3$.
- iii. $(x, y, z) \in (0, 2) \times (-2, 0) \times (-2, 0)$.
- iv. $(x, y, z) \in (-2, 0) \times (0, 2) \times (0, 2)$.

Analicemos primero el caso *i*.

Sea

$$\Xi := \{(x, y, z) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, 2), \quad \kappa(x, y, z) > 2\}$$

Entonces Ξ es conexo (ver proposición A.0.1, apéndice A) y está bien definido el mapa $\tau : \Xi \rightarrow \{\pm I\}$, pues en la definición del mismo sólo usamos que $0 < |z| < 2$ y $\kappa(x, y, z) > 2$. En particular τ es constante, así que basta encontrar una terna $(x, y, z) \in \Xi$ tal que $XYZ^{-1} = I$.

Un cálculo explícito muestra que para $(2, 2, 1) \in \Xi$ uno obtiene el par

$$(X, Y) = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

que tiene carácter $(2, 2, 1)$ y no $(2, 2, -1)$, así que $\tau \equiv I$ y hemos terminado este caso.

En el caso *ii*. se razona igual con el mapa $\tau : \Xi' \rightarrow \{\pm I\}$ definido en el conjunto conexo

$$\Xi' := \{(x, y, z) \in (-\infty, 0) \times (-\infty, 0) \times (-2, 0), \quad \kappa(x, y, z) > 2\}$$

Para *iii*. y *iv*. aplicamos lo probado en *i*. y *ii*. Más precisamente, si $(x, y, z) \in (0, 2) \times (-2, 0) \times (-2, 0)$, como $\kappa(x, -y, -z) = \kappa(x, y, z) > 2$ por *i*. existen $X, Y \in SL(2, \mathbb{R})$ con $\chi(X, Y) = (x, -y, -z)$ así que $\chi(X, -Y) = (x, y, z)$.

Si $(x, y, z) \in (-2, 0) \times (0, 2) \times (0, 2)$, por *ii*. obtenemos $\chi(X, Y) = (x, -y, -z)$ y se concluye igual.

□

Comentarios sobre la demostración anterior

Realizamos un breve comentario sobre el ítem 3. de la demostración anterior, con la esperanza de motivar la construcción ahí realizada. Esto no es formalmente necesario y puede omitirse.

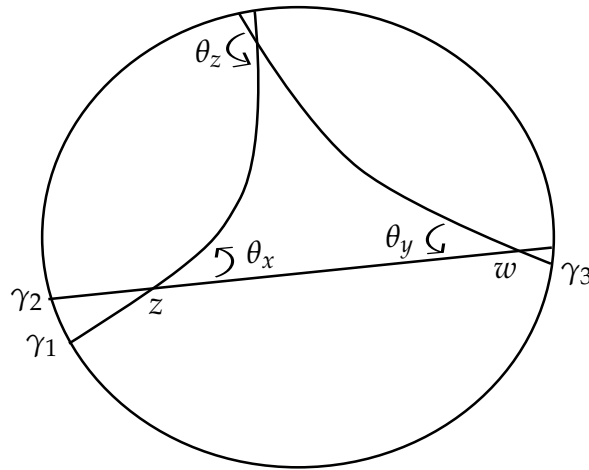
Sea $(x, y, z) \in (-2, 2)^3 \cap \kappa^{-1}(2, \infty)$. Vimos que existe $(X, Y) \in SL(2, \mathbb{R})^2$ tal que

$$\chi(X, Y) = (x, y, z) = (2\cos(\theta_x), 2\cos(\theta_y), 2\cos(\theta_z))$$

5.2. Caracteres reales

donde $\theta_x, \theta_y, \theta_z \in (0, \pi)$.

Es decir que X, Y y XY son elementos elípticos, con conmutador hiperbólico. Notemos z y w a los respectivos centros de X e Y . Entonces $z \neq w$ y existe un triángulo como en la siguiente figura:



Es razonable preguntarse si no puede hacerse el razonamiento anterior “en sentido inverso” para probar que X e Y existen. Más precisamente, fijemos $(x, y, z) \in (-2, 2)^3 \cap \kappa^{-1}(2, \infty)$ y escribamos

$$(x, y, z) = (2\cos(\theta_x), 2\cos(\theta_y), 2\cos(\theta_z))$$

Como $\kappa(x, y, z) > 2$, es posible deducir una relación entre los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que garantiza la existencia de un triángulo como en la figura anterior. Si para $i = 1, 2, 3$ denotamos R_i a la reflexión respecto a la geodésica γ_i , entonces

$$X := R_1R_2 \quad Y := R_2R_3$$

definen elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ que verifican

$$|trX| = |x| \quad |trY| = |y| \quad |tr(XY)| = |z|$$

Sin embargo, si suponemos $x \neq 0$ e $y \neq 0$ existen únicos levantados X e Y a $SL(2, \mathbb{R})$ que verifican

$$trX = x \quad trY = y$$

y, en principio, podría ser que $tr(XY) = -z$.

5.2.2. Propiedad de levantamiento de caminos de χ

Definamos el conjunto

$$\Omega := \{(X, Y) \in SL(2, \mathbb{R})^2, [X, Y] \neq I\}$$

El objetivo de esta parte es probar que la restricción de χ a Ω verifica la propiedad de levantamiento de caminos (proposición 5.2.12 más adelante). Para probarlo, debemos computar $\chi(\Omega)$ (lema 5.2.11) y realizar un análisis del diferencial y las fibras de χ , de modo de aplicar los resultados de la sección 1.2.

Comenzamos por el estudio del diferencial.

Lema 5.2.6. *Sea $(X, Y) \in \Omega$. Entonces*

$$d_{(X, Y)}\chi : T_X SL(2, \mathbb{R}) \times T_Y SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

es sobreyectivo.

Demostración. Como tr es lineal y $(X, Y) \mapsto XY$ es bilineal, entonces

$$\begin{aligned} d_{(X, Y)}\chi(X\dot{E}, Y\dot{F}) &= (tr(X\dot{E}), tr(Y\dot{F}), tr(XY\dot{F} + X\dot{E}Y)) = \\ &= (tr(X\dot{E}), tr(Y\dot{F}), tr(XY\dot{F}) + tr(YX\dot{E})) \end{aligned}$$

Como $X \neq \pm I$, es fácil ver que $T_X SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, X\dot{E} \mapsto tr(X\dot{E})$ es no nulo, así que su núcleo $X^\perp := \{X\dot{E} \in T_X SL(2, \mathbb{R}), tr(X\dot{E}) = 0\}$ tiene dimensión 2. Análogamente se define Y^\perp y resulta claro que $Ker(d_{(X, Y)}\chi) \subset X^\perp \times Y^\perp$, de modo que $dim(Ker(d_{(X, Y)}\chi)) \leq 4$. Como $3 \leq dim(Ker(d_{(X, Y)}\chi))$, hay que probar que

$$Ker(d_{(X, Y)}\chi) \neq X^\perp \times Y^\perp$$

Para ello, basta ver que existe $X\dot{E} \in X^\perp$ tal que $tr(YX\dot{E}) \neq 0$. Supongamos que no, hay tres casos que discutir:

- $X = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $X = \pm \begin{pmatrix} \cos\theta & \sen\theta \\ -\sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
- $X = \pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$

Digamos $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Una base de X^\perp es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

5.2. Caracteres reales

Escribamos $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces $\text{tr} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = 0$ y $\text{tr} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$ así que $a = d$ y $c = 0$. Pero esto implica $Y = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ y resulta que X e Y conmutan, contradicción. Razonamientos análogos aplican a los demás casos. \square

Observación 5.2.7. Puede verse que si $[X, Y] = I$ el diferencial anterior no es sobreyectivo.

A continuación establecemos un resultado sobre las fibras $\chi^{-1}(x, y, z)$ cuando $\kappa(x, y, z) \neq 2$.

Proposición 5.2.8. *Sea $(x, y, z) \in \chi(SL(2, \mathbb{R})^2)$ tal que $\kappa(x, y, z) \neq 2$, entonces $\chi^{-1}(x, y, z)$ es una $GL(2, \mathbb{R})$ -órbita y es unión disjunta de dos $SL(2, \mathbb{R})$ -órbitas.*

Demostración. Sean $(X, Y), (X', Y') \in \chi^{-1}(x, y, z)$. Por la proposición 5.1.4 sabemos que (X, Y) y (X', Y') son irreducibles y que existe $g \in GL(2, \mathbb{C})$ tal que $g \cdot (X, Y) = (X', Y')$. Afirmamos que $g \in GL(2, \mathbb{R})$.

Para verlo, consideremos $M \subset M(2, \mathbb{R})$ el submonoide multiplicativo generado por X e Y . Siendo (X, Y) irreducible, el subespacio generado sobre \mathbb{C} por M es $M(2, \mathbb{C})$ (ver [21], corolario 3.4). En particular M contiene una base de $M(2, \mathbb{C})$ que es necesariamente una base de $M(2, \mathbb{R})$. Así, el \mathbb{R} -álgebra generada por X e Y es $M(2, \mathbb{R})$, y lo mismo el \mathbb{R} -álgebra generada por X' e Y' . Obtenemos entonces que

$$gM(2, \mathbb{R})g^{-1} = M(2, \mathbb{R})$$

Esto implica que $g \in GL(2, \mathbb{R})$ concluyendo la primera parte.

Por otra parte, como $GL(2, \mathbb{R})$ tiene dos componentes y dos representaciones son conjugadas en $GL(2, \mathbb{R})$ si y sólo si lo son por una matriz de determinante ± 1 , sólo queda ver que si $\det(g) = -1$ entonces (X, Y) no es conjugada en $SL(2, \mathbb{R})$ a $g \cdot (X, Y)$.

Por absurdo, si existiera $h \in SL(2, \mathbb{R})$ que conjugue $g \cdot (X, Y)$ con (X, Y) entonces hg conjugue (X, Y) consigo misma, y en particular hg conmuta con X e Y , luego conmuta con el \mathbb{R} -álgebra generada $M(2, \mathbb{R})$. Entonces $hg = \pm I$ y es absurdo pues

$$\det(hg) = \det(h)\det(g) = -1$$

\square

La siguiente proposición será utilizada repetidas veces en el futuro. Recordar que si G es un grupo cualquiera, el *subgrupo conmutador* de G es el subgrupo $[G, G]$ generado por el conjunto

$$\{ghg^{-1}h^{-1}, \quad g, h \in G\}$$

No es difícil ver que $[G, G]$ es normal en G , i.e, $gxg^{-1} \in [G, G]$ para todo $g \in G$ y todo $x \in [G, G]$.

Proposición 5.2.9 (Culler-Shalen, [5]). *Sea $\phi = (X, Y) \in \text{Hom}(\mathbb{F}_2, SL(2, \mathbb{R}))$ y tal que $\text{Im}\phi$ es no abeliano. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. La representación ϕ es reducible sobre \mathbb{R} .
2. La representación ϕ es reducible sobre \mathbb{C} .
3. Para todo W en el subgrupo conmutador de $\text{Im}\phi$ se cumple $\text{tr}W = 2$.
4. $\kappa\chi(X, Y) = 2$.

Si lo anterior ocurre, entonces ϕ es $SL(2, \mathbb{R})$ -conjugada a una representación por matrices triangulares superiores.

Demostración. La equivalencia entre 2. y 4. fue establecida en la proposición 5.1.4. Además, es claro que 1. implica 2.

Ahora bien, supongamos que ϕ es reducible sobre \mathbb{C} . Por la observación 3.4.4 podemos conjugar ϕ y suponer que es una representación por matrices triangulares (observar que esto no altera las trazas). Es fácil ver que el conmutador de dos tales matrices tiene traza igual a dos y es triangular superior. Productos de finitos de estos conmutadores arrojan como resultado una matriz triangular superior de traza dos, y hemos probado 3.

Supongamos ahora que ocurre 3., queremos probar que ϕ es reducible sobre \mathbb{R} .

Alcanza con probar la siguiente afirmación: existe un único subespacio unidimensional $L \subset \mathbb{R}^2$ invariante por $\phi([\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2])$.

En efecto, si tenemos esto entonces dado $Z \in \text{Im}\phi$ elegimos $W \in \phi([\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2])$ cualquiera. Sabemos que $ZWZ^{-1} \in \phi([\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2])$ y por lo tanto

$$ZWZ^{-1}(L) = L$$

Pero entonces

$$WZ^{-1}(L) = Z^{-1}(L)$$

Esto implica que $Z^{-1}(L)$ es invariante por $\phi([\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2])$ y por unicidad concluimos que

$$Z^{-1}(L) = L$$

Como $Z \in \text{Im}\phi$ es arbitrario, se concluye que L es $\text{Im}\phi$ -invariante y de ahí la tesis.

Probemos entonces que existe un único subespacio unidimensional $L \subset \mathbb{R}^2$ invariante por $\phi([\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2])$.

Por hipótesis sabemos que existe $W \neq I$ tal que $W \in \phi([\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2])$. Como $\text{tr}W = 2$, concluimos que existe un único subespacio L unidimensional e invariante por W (proposición 2.1.1).

Sea $I \neq W' \in \phi([\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2])$. Razonando análogamente existe L' única recta W' -invariante. Supongamos que $L' \neq L$ y lleguemos a una contradicción.

Como $L' \neq L$ podemos elegir dos vectores no nulos $w' \in L'$ y $w \in L$ de modo que $\{w', w\}$ es una base de \mathbb{R}^2 , y w' y w son vectores propios de W' y W respectivamente.

Consideremos la matriz $g \in GL(2, \mathbb{R})$ cuyas columnas son w' y w . Entonces $g^{-1}W'g$ tiene vector propio $(1, 0)$ y $g^{-1}Wg$ tiene vector propio $(0, 1)$. Como ambas matrices tienen traza igual a dos, se deduce que

5.2. Caracteres reales

$$g^{-1}W'g = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g^{-1}Wg = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{pmatrix}$$

para ciertos $\zeta, \eta \in \mathbb{R}$.

Además $\zeta\eta \neq 0$ porque $W' \neq I$ y $W \neq I$. Entonces un cálculo directo muestra que

$$\text{tr}[W', W] = 2 + \zeta\eta \neq 2$$

Esto es una contradicción porque $[W', W] \in \phi([\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2])$ y esto completa la demostración de las cuatro equivalencias.

Por último, supongamos que se verifica 1. Podemos tomar $g \in SL(2, \mathbb{R})$ una matriz cuya primer columna es un vector propio común a todos los elementos de la representación. Entonces $g\phi g^{-1}$ es una representación por matrices triangulares superiores. □

Observación 5.2.10. En el caso en que $\text{Im}\phi$ es abeliana, la proposición anterior no es verdadera: basta tomar una representación por dos rotaciones del mismo centro y sin valores propios.

Concluimos ahora con esta parte del trabajo mostrando que χ verifica la propiedad de levantamiento de caminos. Previamente necesitamos el siguiente:

Lema 5.2.11. Sea $\Omega := \{(X, Y) \in SL(2, \mathbb{R})^2, [X, Y] \neq I\}$. Entonces

$$\chi(\Omega) = \mathbb{R}^3 \setminus ([-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2])$$

Demostración. Probemos las dos inclusiones.

1. $\chi(\Omega) \subset \mathbb{R}^3 \setminus ([-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2])$.

Sea $(X, Y) \in \Omega$. Por la proposición 5.2.5 sabemos que

$$\chi(X, Y) = (x, y, z) \notin (-2, 2)^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2]$$

Supongamos por absurdo que $(x, y, z) \in [-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2]$.

Si $(x, y, z) \in (-2, 2)^3$, entonces $\kappa(x, y, z) = 2$ y el corolario 5.2.3 nos dice que X e Y conmutan, contradicción.

Si por otra parte si fuera $(x, y, z) \notin (-2, 2)^3$, se deduce que $(x, y, z) \in [-2, 2]^3 \setminus (-2, 2)^3$ y sin pérdida de generalidad podemos suponer $x = \pm 2$. Como $X \neq \pm I$, entonces $X \in \text{Par}$ y notamos $w \in S^1$ a su punto fijo.

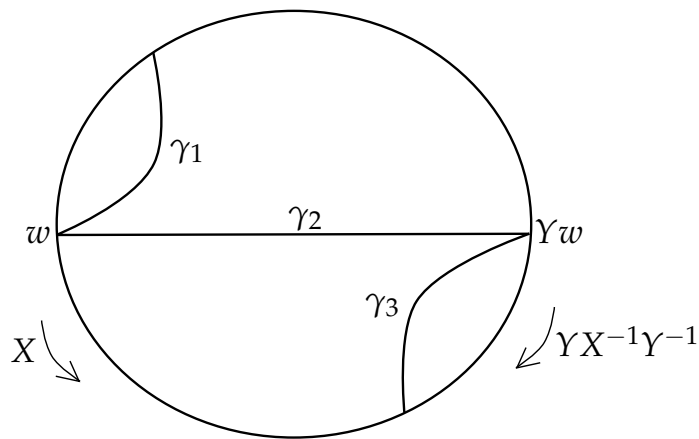
Ahora bien Y no es elíptico porque en tal caso el corolario 5.2.3 implicaría $[X, Y] \in \text{Hyp}$ y por lo tanto $|\kappa(x, y, z)| > 2$. Como $|y| \leq 2$, se deduce que $Y \in \text{Par}$ y por lo tanto fija un único punto de S^1 .

Tal punto no es w porque X e Y no conmutan así que $Yw \neq w$. Mostremos que esto implica que el conmutador $[X, Y]$ es hiperbólico, llegando así a una contradicción y esto termina la primera inclusión.

En efecto, la matriz $YX^{-1}Y^{-1}$ es parabólica con punto fijo Yw , trasladando en sentido inverso que X . Tomemos γ_2 la geodésica de extremos w e Yw y γ_1, γ_3 tales que si R_i denota la simetría respecto de γ_i , entonces

$$X = R_1R_2 \quad YX^{-1}Y^{-1} = R_2R_3$$

Entonces $[X, Y] = R_1R_3$ es hiperbólico, porque γ_1 y γ_3 son disjuntas:



2. $\mathbb{R}^3 \setminus ([-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2]) \subset \chi(\Omega)$.

Fijemos $(x, y, z) \notin [-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2]$ y tomemos $(X, Y) \in SL(2, \mathbb{R})^2$ con $\chi(X, Y) = (x, y, z)$ (proposición 5.2.5).

Supongamos primeramente que $\kappa(x, y, z) \neq 2$, entonces $tr[X, Y] \neq 2$ y por lo tanto $[X, Y] \neq I$. Esto muestra que $(X, Y) \in \Omega$ y no hay más nada que probar.

Si por el contrario $\kappa(x, y, z) = 2$, entonces $(x, y, z) \notin [-2, 2]^3$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que

$$|x| > 2$$

Si $[X, Y] \neq I$ no hay nada que probar, así que supongamos $[X, Y] = I$. Entonces $Y \in Hyp \cup \{\pm I\}$ y por lo tanto

$$|y| \geq 2$$

Como $\kappa(x, y, z) = 2$, aplicando la proposición 5.1.4 podemos conjugar en $SL(2, \mathbb{C})$ y representar X e Y por matrices triangulares superiores. Luego de esta conjugación podemos suponer entonces que

$$(X, Y) = \left(\begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right) \quad (5.10)$$

donde $a, b, \zeta, \eta \in \mathbb{C}$.

Sin embargo, como $|x| > 2$ y $|y| \geq 2$ se deduce fácilmente que

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq \pm 1 \quad (5.11)$$

Ahora bien, consideremos el polinomio

$$S(\zeta, \eta) := a(1 - b^2)\zeta - b(1 - a^2)\eta \quad (5.12)$$

Un cálculo directo en (5.10) muestra que

$$[X, Y] = \begin{pmatrix} 1 & S(\zeta, \eta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Observar que modificar los valores de ζ y η en una representación como en (5.10) no afecta el valor de χ . Esto implica que podemos elegir $\zeta_0, \eta_0 \in \mathbb{R}$ cualesquiera tales que $S(\zeta_0, \eta_0) \neq 0$ (gracias a (5.11), tales números reales existen).

Para concluir basta entonces tomar la representación

$$\left(\begin{pmatrix} a & \zeta_0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta_0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right) \in \Omega \cap \chi^{-1}(x, y, z)$$

□

Proposición 5.2.12. *La restricción*

$$\chi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus ([-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2])$$

verifica la propiedad de levantamiento de caminos.

Demostración. Aplicamos los resultados previos en conjunto con el lema 1.2.2.

Notar que Ω y $\mathbb{R}^3 \setminus ([-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2])$ son variedades diferenciables y que $\chi|_{\Omega}$ es submersiva por el lema 5.2.6.

Consideremos el grupo $\Gamma := \mathbb{Z}_2 \times GL(2, \mathbb{R})$ actuando en Ω por

$$(\bar{0}, g).(X, Y) := (gXg^{-1}, gYg^{-1}) \quad (\bar{1}, g).(X, Y) := (gX^{-1}g^{-1}, gY^{-1}g^{-1})$$

Como $\det(X) = \det(Y) = 1$, se deduce que χ es Γ -invariante (ver por ejemplo [16], sección 2.2), así que sólo queda mostrar que Γ actúa transitivamente en las componentes de $(\chi|_{\Omega})^{-1}(x, y, z)$.

Fijemos $(x, y, z) \notin [-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2]$, discutiremos dos casos.

1. $\kappa(x, y, z) \neq 2$.

En este caso, aplicando la proposición 5.2.8 sabemos que $\chi^{-1}(x, y, z) \subset \Omega$ es la unión disjunta de dos $SL(2, \mathbb{R})$ -órbitas. Más aún, dicha proposición establece que ambas órbitas son intercambiadas por la acción de $(\bar{0}, g)$, donde $\det(g) = -1$. Esto implica que Γ es transitivo en las componentes de $(\chi|_{\Omega})^{-1}(x, y, z)$.

2. $\kappa(x, y, z) = 2$.

Sea $(X, Y) \in \Omega$ tal que $\chi(X, Y) = (x, y, z)$. Como $SL(2, \mathbb{R})$ es conexo y χ es invariante por conjugación, aplicando la proposición 5.2.9 tenemos que (X, Y) se conecta en $(\chi|_{\Omega})^{-1}(x, y, z)$ a una representación por matrices triangulares superiores. Podemos entonces suponer (X, Y) como en (5.10).

Ahora bien, $(x, y, z) \notin [-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2]$ y $\kappa(x, y, z) = 2$ así que podemos asumir que $|x| \neq 2$.

Fijemos (a, b) una solución de

$$\begin{cases} a + \frac{1}{a} = x \\ b + \frac{1}{b} = y \\ ab + \frac{1}{ab} = z \end{cases}$$

Esto implica $|a| \neq 1$ y hemos conectado (X, Y) con alguna representación de las siguientes posibles formas:

- i. $\left(\begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right)$, con $S(\zeta, \eta) > 0$.
- ii. $\left(\begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right)$, con $S(\zeta, \eta) < 0$.
- iii. $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \zeta \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & \eta \\ 0 & b \end{pmatrix} \right)$, con $S'(\zeta, \eta) > 0$.
- iv. $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \zeta \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & \eta \\ 0 & b \end{pmatrix} \right)$, con $S'(\zeta, \eta) < 0$.

donde S es el polinomio (5.12) y S' es el polinomio que en los casos *iii.* y *iv.* hace que el conmutador sea $\begin{pmatrix} 1 & S'(\zeta, \eta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es decir que

$$S'(\zeta, \eta) := \frac{b^2-1}{ab^2}\zeta - \frac{a^2-1}{a^2b}\eta$$

Las familias *i.*, *ii.*, *iii.* y *iv.* son conexas. En efecto si por ejemplo tomamos dos pares $\left(\begin{pmatrix} a & \zeta_0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta_0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right)$ y $\left(\begin{pmatrix} a & \zeta_1 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta_1 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right)$ con $S(\zeta_0, \eta_0) > 0$ y $S(\zeta_1, \eta_1) > 0$, podemos encontrar (ζ_t, η_t) desde (ζ_0, η_0) hasta (ζ_1, η_1) con $S(\zeta_t, \eta_t) > 0$. Entonces

5.2. Caracteres reales

$$\left(\begin{pmatrix} a & \zeta_t \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta_t \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right) \in (\chi|_{\Omega})^{-1}(x, y, z)$$

conecta las representaciones dentro de i . Los casos $ii.$, $iii.$ y $iv.$ son análogos.

En conclusión, $\chi|_{\Omega}^{-1}(x, y, z)$ tiene (a lo más) cuatro componentes. Pero actuar con $(\bar{1}, I)$ lleva la familia i . en la $iii.$ y la $ii.$ en la $iv.$, mientras que actuar con $(\bar{0}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ lleva la i . en la $ii.$ y la $iii.$ en la $iv.$

□

Observación 5.2.13. La proposición anterior tiene pocas posibilidades de extenderse a

$$\chi : SL(2, \mathbb{R})^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus ((-2, 2)^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2])$$

En efecto, no es difícil ver que si $[X, Y] = I$ entonces $d_{(X, Y)}\chi$ no es sobreyectivo. Supongamos que χ tiene la propiedad de levantamiento de caminos y fijemos (X, Y) tales que $[X, Y] = I$. A partir del análisis de los conjuntos de nivel de κ del apéndice A puede verse que existen tres caminos $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \subset \mathbb{R}^3 \setminus ((-2, 2)^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2])$ comenzando en $\chi(X, Y)$ y tales que $\{\gamma_1'(0), \gamma_2'(0), \gamma_3'(0)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 . Obtenemos caminos $\tilde{\gamma}_i$ levantados desde (X, Y) y, si fueran diferenciables, entonces

$$\{d_{(X, Y)}\chi(\tilde{\gamma}_1'(0)), d_{(X, Y)}\chi(\tilde{\gamma}_2'(0)), d_{(X, Y)}\chi(\tilde{\gamma}_3'(0))\}$$

es una base de \mathbb{R}^3 y por lo tanto el diferencial en (X, Y) es sobreyectivo. Esto muestra que algún levantado no es diferenciable y más aún, no tiene derivada lateral en 0.

Este problema se resuelve mostrando que genéricamente las representaciones son no abelianas (ver apéndice C).

Capítulo 6

El teorema para un par de pantalones

En este capítulo probamos el teorema 4.2.1 para el caso en que la superficie base es el *par de pantalones* $\Sigma_{0,3}$ (teorema 6.2.4), dejando el caso del *toro perforado* $\Sigma_{1,1}$ para el capítulo siguiente (teorema 7.2.3). El caso general se deduce de estos dos por argumentos combinatorios (capítulo 9).

Trabajaremos con la presentación $\pi_1(\Sigma_{0,3}) = \langle c_1, c_2, c_3 \mid c_1 c_2 c_3 = 1 \rangle$ (subsección 1.1.1), de modo que resulta razonable estudiar la ecuación

$$C_3 = C_2^{-1} C_1^{-1}$$

Más precisamente, nos interesa saber cuándo un camino C_3^t puede ser levantado a un camino (C_1^t, C_2^t) que verifique

$$C_3^t = (C_2^t)^{-1} (C_1^t)^{-1}$$

pues entonces tendremos definido un camino de representaciones.

6.1. El producto en $SL(2, \mathbb{R})$

Consideremos el conjunto

$$H(\Sigma_{0,3}) := \{(C_1, C_2) \in Hyp^2 \subset SL(2, \mathbb{R})^2, C_1 C_2 \neq \pm I\} \quad (6.1)$$

Definamos el mapa producto

$$M : H(\Sigma_{0,3}) \longrightarrow SL(2, \mathbb{R}), \quad M(C_1, C_2) := C_1 C_2 \quad (6.2)$$

Ahora bien, recordemos de la sección 2.2 que tenemos un cubrimiento $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow SL(2, \mathbb{R})$. Esto nos permitirá “levantar” M a un mapa

$$\widetilde{M} : H(\Sigma_{0,3}) \longrightarrow \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$$

Es nuestro objetivo en esta sección establecer los requisitos necesarios para probar que M y \tilde{M} tienen la propiedad de levantamiento de caminos. Estos resultados serán mejorados en la sección 6.2, cuando proyectemos M y \tilde{M} a $PSL(2, \mathbb{R})$.

6.1.1. Definición de \tilde{M}

Procedemos ahora a definir \tilde{M} y establecer algunas propiedades sencillas que utilizaremos en el desarrollo de toda esta sección.

Observación 6.1.1. Sea $C \in Hyp \subset SL(2, \mathbb{R})$. Existe un elemento $\tilde{C} \in Hyp_0 \subset \widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ caracterizado por la siguiente propiedad: si $tr(C) > 2$, entonces \tilde{C} es el levantado canónico de C , mientras que si $tr(C) < -2$, entonces \tilde{C} es el levantado canónico de $-C$ (ver figura 6.1).

Es fácil ver que la siguiente asignación es diferenciable

$$C \mapsto \tilde{C} \tag{6.3}$$

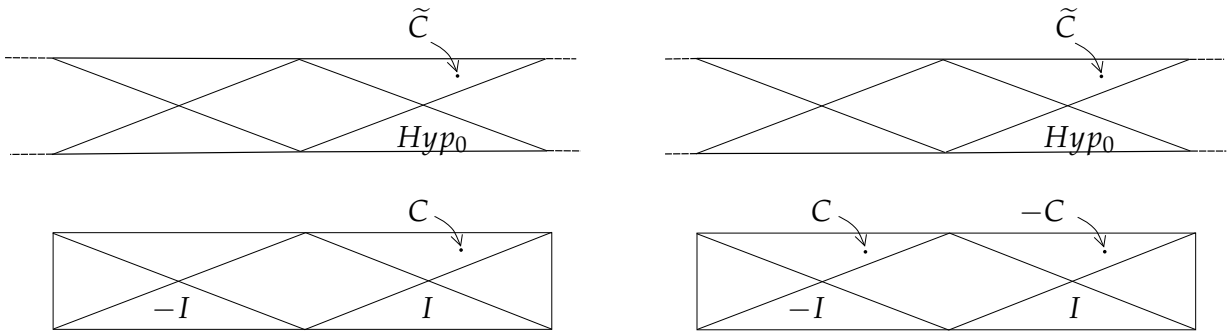


Figura 6.1: El mapa (6.3)

Este mapa nos permite definir \tilde{M} : dado $(C_1, C_2) \in H(\Sigma_{0,3})$ sean $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in Hyp_0$ las respectivas imágenes de C_1 y C_2 por (6.3). Definimos

$$\tilde{M}(C_1, C_2) := \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \tag{6.4}$$

Es claro que \tilde{M} es diferenciable.

Además, por (6.3) es fácil ver que la proyección de $\tilde{M}(C_1, C_2)$ a $SL(2, \mathbb{R})$ es

$$\begin{cases} C_1 C_2 & \text{si } sg(tr(C_1)) = sg(tr(C_2)) \\ -C_1 C_2 & \text{si } sg(tr(C_1)) = -sg(tr(C_2)) \end{cases} \tag{6.5}$$

Observación 6.1.2. El mapa \tilde{M} está relacionado con la clase de Euler de la siguiente manera. Fijemos la presentación $\pi_1(\Sigma_{0,3}) = \langle c_1, c_2, c_3 \mid c_1 c_2 c_3 = 1 \rangle$, de modo que por la sección 4 tenemos

6.1. El producto en $SL(2, \mathbb{R})$

$$\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{0,3}), PSL(2, \mathbb{R})) \cong \{(C_1, C_2, C_3) \in PSL(2, \mathbb{R})^3, C_1 C_2 C_3 = I\}$$

Sea $(C_1, C_2) \in H(\Sigma_{0,3})$ y tal que $C_1 C_2 \notin Ell$. Proyectando C_1 y C_2 a $PSL(2, \mathbb{R})$ podemos definir

$$\phi := (C_1, C_2, C_2^{-1} C_1^{-1}) \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{0,3}), PSL(2, \mathbb{R}))$$

Notemos $C_3 := C_2^{-1} C_1^{-1}$, entonces $C_3 \notin Ell$ y la clase de Euler de ϕ está definida (subsección 3.3.2). Más aún, si $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in Hyp_0$ y $\tilde{C}_3 \in Hyp_0 \cup Par_0$ son los levantados canónicos de $C_i \in PSL(2, \mathbb{R})$ para $i = 1, 2, 3$, entonces gracias a la observación 3.3.7 sabemos que

$$z^{eu(\phi)} = \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \tilde{C}_3 = \tilde{M}(C_1, C_2) \tilde{C}_3 \implies \tilde{M}(C_1, C_2) = z^{eu(\phi)} \tilde{C}_3^{-1}$$

Como $\tilde{C}_3^{-1} \in Hyp_0 \cup Par_0$ (porque al igual que \tilde{C}_3 fija puntos de \mathbb{R}), concluimos que $\tilde{M}(C_1, C_2)$ es el único levantado de $C_1 C_2 \in PSL(2, \mathbb{R})$ en el conjunto $Hyp_{eu(\phi)} \cup Par_{eu(\phi)}$.

Observación 6.1.3. Existen dos acciones naturales en $H(\Sigma_{0,3})$ que nos interesará considerar en el futuro. Las definimos aquí y observamos el efecto en los valores de \tilde{M} de las mismas.

- En primer lugar, consideremos $GL(2, \mathbb{R})$ actuando en $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ (sección 2.3). Notar que \tilde{M} es equivariante respecto de esta acción:

La proposición 2.3.2 prueba que la acción de cualquier $g \in GL(2, \mathbb{R})$ preserva el conjunto Hyp_0 . Fijemos $g \in GL(2, \mathbb{R})$ y $(C_1, C_2) \in H(\Sigma_{0,3})$. Si $\tilde{C}_i \in Hyp_0$ es como en (6.3) para $i = 1, 2$, entonces $g.\tilde{C}_i \in Hyp_0$ es la imagen de $g.C_i = g C_i g^{-1}$ por dicho mapa.

Como la acción de $GL(2, \mathbb{R})$ es por homomorfismos, obtenemos

$$\tilde{M}(g.(C_1, C_2)) = \tilde{M}(g C_1 g^{-1}, g C_2 g^{-1}) = (g.\tilde{C}_1)(g.\tilde{C}_2) = g.(\tilde{C}_1 \tilde{C}_2) = g.\tilde{M}(C_1, C_2)$$

En particular, si $g \in SL(2, \mathbb{R})$ y $\tilde{g} \in \widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ es un levantado cualquiera de g entonces

$$\tilde{M}(g.(C_1, C_2)) = \tilde{g} \tilde{M}(C_1, C_2) \tilde{g}^{-1}$$

- En segundo término, consideremos la acción de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en $H(\Sigma_{0,3})$ dada por

$$(\bar{1}, \bar{0}).(C_1, C_2) := (-C_1, C_2) \quad (\bar{0}, \bar{1}).(C_1, C_2) := (C_1, -C_2)$$

Entonces \tilde{M} es $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -invariante, porque C_i y $-C_i$ tienen la misma imagen por la función (6.3).

6.1.2. Imagen de \widetilde{M}

Sólo caminos en la imagen de \widetilde{M} pueden ser levantados, de modo que precisamos calcular $Im\widetilde{M}$ (ver proposición 6.1.6 más adelante). La estrategia para probar dicha proposición consiste de utilizar a la función traza como una manera de parametrizar elementos de $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$: conocer un camino de trazas en $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ nos permitirá detectar en qué subconjunto de la partición definida en la sección 2.2 estamos.

Recordemos el concepto de fibración introducido en la sección 1.3. El siguiente lema nos dice que \widetilde{M} es una fibración cuando nos restringimos a una clase de conjugación.

Lema 6.1.4. *Sea $c \in \mathbb{R}$. La restricción de \widetilde{M} a $(tr\widetilde{M})^{-1}(c) \subset SL(2, \mathbb{R})^2$ es una fibración.*

Demostración. Sea $\widetilde{H} : X \times [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}((tr\widetilde{M})^{-1}(c))$ una homotopía y $g(x) \in (tr\widetilde{M})^{-1}(c)$ tal que $\widetilde{M}(g(x)) = \widetilde{H}(x, 0)$. Notemos h a la proyección de $\widetilde{H} \subset \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ a $SL(2, \mathbb{R})$.

Afirmamos que basta encontrar una función continua $Z : X \times [0, 1] \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ tal que $Z_{(x,0)} = I$ y que para todo $(x, t) \in X \times [0, 1]$ verifique

$$h(x, t) = \left(Z_{(x,t)} \right)^{-1} h(x, 0) Z_{(x,t)}$$

En efecto, hecho esto podemos tomar $\widetilde{Z} : X \times [0, 1] \rightarrow \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ el levantado de Z que en $X \times 0$ vale I . Entonces

$$\widetilde{H}(x, t) = \left(\widetilde{Z}_{(x,t)} \right)^{-1} \widetilde{H}(x, 0) \widetilde{Z}_{(x,t)}$$

porque \widetilde{H} es el único levantado de h que en $(x, 0)$ vale $\widetilde{H}(x, 0)$.

A partir de ahí podemos definir

$$H(x, t) := \left(Z_{(x,t)} \right)^{-1} g(x) Z_{(x,t)} \in (tr\widetilde{M})^{-1}(c)$$

Notar que $H(x, 0) = g(x)$ y por la observación 6.1.3 se tiene que

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(H(x, t)) &= \widetilde{M} \left(\left(Z_{(x,t)} \right)^{-1} g(x) Z_{(x,t)} \right) = \left(\widetilde{Z}_{(x,t)} \right)^{-1} \widetilde{M}(g(x)) \widetilde{Z}_{(x,t)} = \\ &= \left(\widetilde{Z}_{(x,t)} \right)^{-1} \widetilde{H}(x, 0) \widetilde{Z}_{(x,t)} = \widetilde{H}(x, t) \end{aligned}$$

lo que termina la prueba.

Probemos entonces que existe una función continua $Z : X \times [0, 1] \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ tal que $Z_{(x,0)} = I$ y $h(x, t) = \left(Z_{(x,t)} \right)^{-1} h(x, 0) Z_{(x,t)}$.

Supongamos primero que $|c| > 2$, entonces $tr(h(x, t)) = c$ y por lo tanto $h(x, t) \in Hyp$ para todo $(x, t) \in X \times [0, 1]$. Podemos entonces encontrar mapas (continuos) $w(x, t) \neq w'(x, t)$ en $\mathbb{R}P^1$ dados por los subespacios propios $h(x, t)$. Como la aplicación natural $S^1 \subset$

6.1. El producto en $SL(2, \mathbb{R})$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ es un cubrimiento, existen levantados $w(x, t), w'(x, t) \in \mathbb{R}^2$ de modo que $\{w(x, t), w'(x, t)\}$ es una base que diagonaliza $h(x, t)$. Definamos

$$Z_{(x,t)} := (w(x, t) \mid w'(x, t))$$

Cambiando $w(x, t)$ por $-w(x, t)$ y dividiendo por el determinante si fuera necesario podemos suponer $Z_{(x,t)} \in SL(2, \mathbb{R})$. Entonces $Z_{(x,t)} h(x, t) \left(Z_{(x,t)} \right)^{-1}$ es una matriz diagonal de traza c y, para alguna de las dos soluciones de $\lambda + 1/\lambda = c$, se concluye que

$$Z_{(x,t)} h(x, t) \left(Z_{(x,t)} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} = Z_{(x,0)} h(x, 0) \left(Z_{(x,0)} \right)^{-1}$$

para todo (x, t) . Basta entonces cambiar $Z_{(x,t)}$ por $\left(Z_{(x,0)} \right)^{-1} Z_{(x,t)}$.

Por otra parte, supongamos que $-2 < c < 2$. Como $tr(h(x, t)) = c$ para todo (x, t) , existe un único punto fijo $w(x, t) \in \mathbb{H}^2$ de $h(x, t)$ y no es difícil ver que esto define una función continua $X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$. Existe $Z : X \times [0, 1] \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ continua tal que $Z_{(x,t)}(w(x, t)) = i \in \mathbb{H}^2$ para todo (x, t) , pues basta componer la traslación por $-Re(w(x, t))$ con la homotecia por $\frac{1}{Im(w(x, t))}$.

Entonces $Z_{(x,t)} h(x, t) \left(Z_{(x,t)} \right)^{-1}$ fija i y tiene traza c constante, así que es constante e igual a una matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sen\theta \\ -\sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. En particular

$$Z_{(x,t)} h(x, t) \left(Z_{(x,t)} \right)^{-1} = Z_{(x,0)} h(x, 0) \left(Z_{(x,0)} \right)^{-1}$$

y uno concluye igual que en el caso anterior.

Resta estudiar el caso $|c| = 2$. Observemos primeramente que $h(x, t) \neq \pm I$ para todo (x, t) porque $\tilde{H}(x, t) \in Im\tilde{M}$ y por definición este conjunto no corta $\{z^k\}_k$. Esto implica que existe una función continua $w(x, t) \in \mathbb{R}P^1$ donde $w(x, t)$ es el único subespacio propio de $h(x, t)$ para todo $(x, t) \in X \times [0, 1]$. Podemos levantar a $w(x, t) \in \mathbb{R}^2$ vector propio de $h(x, t)$ y considerar $Z_{(x,t)} \in SL(2, \mathbb{R})$ que lleve $w(x, t)$ en $(1, 0)$ para todo (x, t) . Entonces

$$Z_{(x,t)} h(x, t) \left(Z_{(x,t)} \right)^{-1} = \pm \begin{pmatrix} 1 & \zeta(x, t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Digamos para fijar ideas que $c = -2$ de modo que $tr(h(x, t)) = -2$ y podemos suponer

$$Z_{(x,t)} h(x, t) \left(Z_{(x,t)} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \zeta(x, t) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Notar que $\zeta(x, t) \neq 0$ porque $h(x, t) \neq -I$.

En particular, $\frac{\zeta(x, 0)}{\zeta(x, t)} > 0$ para todo (x, t) y se tiene

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\zeta(x, 0)}{\zeta(x, t)}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\zeta(x, t)}{\zeta(x, 0)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \zeta(x, t) \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\zeta(x, 0)}{\zeta(x, t)}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\zeta(x, t)}{\zeta(x, 0)}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \zeta(x, 0) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Así que modificando $Z_{(x,t)}$ podemos suponer

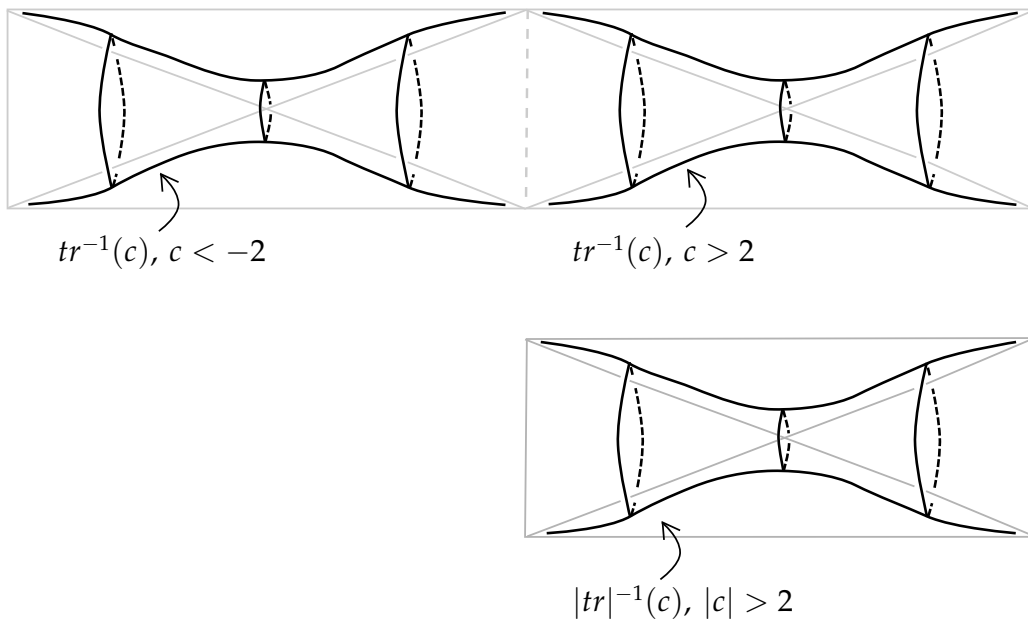
$$Z_{(x,t)}h(x,t) \left(Z_{(x,t)} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \zeta(x,0) \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Z_{(x,0)}h(x,0) \left(Z_{(x,0)} \right)^{-1}$$

□

Observación 6.1.5. En el razonamiento previo, si existiese (x,t) tal que $h(x,t) = \pm I$ no hay garantía de que la función $w(x,t)$ pueda elegirse de manera continua. Por ejemplo suponemos que $h(x,t) \in tr^{-1}(2)$ es una familia de matrices tal que $h(x,t)$ es triangular superior en $X \times [0, 1/2)$, $h(x,t)$ es triangular inferior en $X \times (1/2, 1]$ y $h(X \times \{1/2\}) = \{I\}$, entonces $w(x,t) \in \mathbb{RP}^1$ es la recta por $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ en $X \times [0, 1/2)$ y por $(0,1)$ en $X \times (1/2, 1]$ y no hay manera de extender continuamente esta función a $X \times \{1/2\}$.

Computamos ahora la imagen de \tilde{M} . Utilizaremos el siguiente hecho: sea $|c| > 2$ e $Hyp(c) := \{C \in Hyp, tr(C) = c\} \subset SL(2, \mathbb{R})$, entonces $Hyp(c)$ es un cilindro (no compacto). En efecto, en $PSL(2, \mathbb{R})$ un hiperbólico de traza $|c|$ está determinado por su atractor y su repulsor que son puntos distintos de $\partial\mathbb{H}^2$, así que podemos identificar este subespacio con $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2 \setminus \{(w,w), w \in \partial\mathbb{H}^2\}$ y en $SL(2, \mathbb{R})$ vemos una copia homeomorfa de este conjunto que es $Hyp(c)$. En particular,

$$Hyp(c) \cong S^1 \times S^1 \setminus \{(w,w), w \in S^1\} \cong S^1 \times \mathbb{R} \tag{6.6}$$



En un lenguaje un tanto informal la siguiente proposición establece que el producto de dos hiperbólicos “rota menos que 1”.

6.1. El producto en $SL(2, \mathbb{R})$

Proposición 6.1.6. $Im\tilde{M} = Ell_{\pm 1} \cup Par_0 \cup Hyp_0 \cup Hyp_{\pm 1} \cup Par_{-1}^+ \cup Par_1^-$ y $M : H(\Sigma_{0,3}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R}) \setminus \{\pm I\}$ es sobreyectiva.

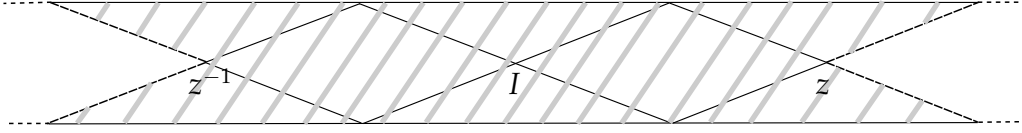


Figura 6.2: Imagen de \tilde{M}

Demostración de 6.1.6. La segunda afirmación se deduce fácilmente de la primera. Probemos entonces que

$$Im\tilde{M} = Ell_{\pm 1} \cup Par_0 \cup Hyp_0 \cup Hyp_{\pm 1} \cup Par_{-1}^+ \cup Par_1^-$$

Dividimos la demostración en varias etapas.

1. $Im\tilde{M} \cap \widetilde{Hyp} = Hyp_{-1} \cup Hyp_0 \cup Hyp_1$.

Consideremos $(C_1, C_2) \in H(\Sigma_{0,3})$ y $\tilde{C} := \tilde{M}(C_1, C_2)$. Supongamos primero que $\tilde{C} \in Hyp_{2k}$, queremos ver que $k = 0$.

Gracias al corolario 2.2.3 sabemos que $tr\tilde{C} > 2$ y por la observación 6.1.2 tenemos $2k = eu(\phi)$, donde $\phi = (C_1, C_2, C_2^{-1}C_1^{-1}) \in PSL(2, \mathbb{R})^3$.

Si $[C_1, C_2] = I$ deducimos que ϕ es reducible pues C_1 y C_2 fijan los mismos puntos de S^1 (que existen dado que $C_1, C_2 \in Hyp$). Por la proposición 3.4.5 sabemos que $eu(\phi) = 0$ y no hay más nada que probar.

Si $[C_1, C_2] \neq I$, por la observación 6.1.3 la acción de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en $H(\Sigma_{0,3})$ deja \tilde{M} invariante así que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $tr(C_1) > 2$ y $tr(C_2) > 2$. Por (6.5) sabemos que $\tilde{M}(C_1, C_2) = \tilde{C}$ es un levantado de $C_1C_2 \in SL(2, \mathbb{R})$ y en particular $tr(C_1C_2) = tr(\tilde{C})$. Entonces $\chi(C_1, C_2) = (tr(C_1), tr(C_2), tr(\tilde{C})) \in (2, \infty)^3$ y puede verse que existe un camino

$$(x_t, y_t, z_t) \in (2, \infty)^3$$

tal que $(x_0, y_0, z_0) = (tr(C_1), tr(C_2), tr(C))$ y $\kappa(x_1, y_1, z_1) = 2$.

Notar que $(x_t, y_t, z_t) \in \mathbb{R}^3 \setminus ([-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2])$ y como $[C_1, C_2] \neq I$, de la proposición 5.2.12 deducimos que existe un camino $(C_1^t, C_2^t) \in \Omega$ desde (C_1, C_2) y tal que

$$\chi(C_1^t, C_2^t) = (x_t, y_t, z_t)$$

Definamos el siguiente camino de representaciones comenzando en ϕ :

$$\phi_t := \left(C_1^t, C_2^t, (C_2^t)^{-1} (C_1^t)^{-1} \right)$$

Como $x_t > 2$, $y_t > 2$ y $z_t > 2$ para todo $t \in [0, 1]$, la clase de Euler de ϕ_t está definida, y por lo tanto es constante.

Pero $\kappa\chi(\phi_1) = 2$. Por la proposición 5.2.9, ϕ_1 es reducible y tenemos entonces que $eu(\phi_1) = 0$, lo que implica $eu(\phi) = 0$ como queríamos.

Supongamos por otra parte que $\tilde{C} \in Hyp_{2k+1}$, queremos ver que $k = 0$ o $k = -1$. Notar que $(C_1, C_2) \in \Omega$ porque si estos elementos conmutaran, definirían una representación ϕ reducible y es imposible dado que $eu(\phi) = 2k + 1$.

Por el corolario 2.2.3 sabemos que $tr(\tilde{C}) < -2$ y nuevamente podemos suponer que $tr(C_1) > 2$ y $tr(C_2) > 2$. Fijemos $\varepsilon > 0$ cualquiera y el camino

$$(tr(C_1), tr(C_2), (1-t)tr(\tilde{C}) + t(2+\varepsilon)) \in \mathbb{R}^3 \setminus ([-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2])$$

que comienza en $\chi(C_1, C_2)$. Por la proposición 5.2.12 podemos tomar $(C_1^t, C_2^t) \in \Omega$ desde (C_1, C_2) y tal que

$$\chi(C_1^t, C_2^t) = (tr(C_1), tr(C_2), 2 + \varepsilon)$$

Lo ya probado nos dice que (C_1^1, C_2^1) define una representación con clase de Euler cero, pues $tr(C_1^1 C_2^1) = 2 + \varepsilon > 2$. En particular, por la observación 6.1.2 deducimos que $\tilde{M}(C_1^1, C_2^1) \in Hyp_0$. Luego, si \tilde{C}_i^1 es el levantado canónico de C_i^1 , entonces $\tilde{C}_1^1 \tilde{C}_2^1 \in Hyp_0$. Como $C_i^t \in Hyp$ para todo $t \in [0, 1]$, su levantado comenzando en $\tilde{C}_i \in Hyp_0$ necesariamente termina en Hyp_0 así que termina en \tilde{C}_i^1 , luego el levantado $\tilde{C}_1^t \tilde{C}_2^t$ de $C_1^t C_2^t$ comenzando en $\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 = \tilde{C}$ termina en $\tilde{C}_1^1 \tilde{C}_2^1 \in Hyp_0$.

Pero $tr(\tilde{C}_1^t \tilde{C}_2^t) = tr(C_1^t C_2^t) = (1-t)tr(\tilde{C}) + t(2+\varepsilon)$ crece estrictamente desde $tr(\tilde{C}) < -2$ a $2 + \varepsilon$, así que $\tilde{C} \in Hyp_{\pm 1}$ (figura 6.3).

Para terminar 1. nos queda probar el recíproco, esto es, $Hyp_0 \cup Hyp_{\pm 1} \subset Im \tilde{M}$. Sea $\tilde{C} \in Hyp_1$ y anotemos $c := tr(\tilde{C}) < -2$. Elijamos dos elementos $C_1, C_2 \in SL(2, \mathbb{R})$ tales que $tr(C_1) > 2$, $tr(C_2) > 2$ y $tr(C_1 C_2) = c$ (la existencia de un tal par está garantizada por la proposición 5.2.5). Por lo ya probado, $\tilde{M}(C_1, C_2) \in Hyp_{\pm 1}$ así que conjugando por un elemento de $GL(2, \mathbb{R})^-$ si fuera necesario, la observación 6.1.3 y la proposición 2.3.2 nos dicen que podemos suponer $\tilde{M}(C_1, C_2) \in Hyp_1$.

6.1. El producto en $SL(2, \mathbb{R})$

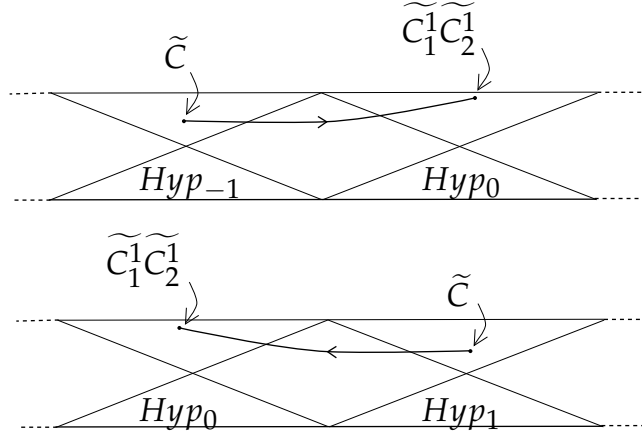


Figura 6.3: $t \mapsto \tilde{C}_1^t \tilde{C}_2^t$

Consideremos $Hyp_1(c) := \{\tilde{C} \in Hyp_1, \text{tr}(\tilde{C}) = c\}$, entonces $\tilde{M}(C_1, C_2), \tilde{C} \in Hyp_1(c)$ y como $Hyp_1(c) \cong Hyp(c)$, por (6.6) existe un camino $\tilde{\gamma} \subset Hyp_1(c)$ conectando $\tilde{M}(C_1, C_2)$ con \tilde{C} .

Como la traza está fijada, el lema 6.1.4 implica que existe $(C_1^t, C_2^t) \in (\text{tr}\tilde{M})^{-1}(c)$ tal que $\tilde{M}(C_1^t, C_2^t) = \tilde{\gamma}(t)$. En particular $\tilde{C} = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{M}(C_1^1, C_2^1) \in \text{Im}\tilde{M}$.

Así que $Hyp_1 \subset \text{Im}\tilde{M}$ y análogamente se vé que $Hyp_0 \cup Hyp_{-1} \subset \text{Im}\tilde{M}$. Hemos probado que $\text{Im}\tilde{M} \cap \tilde{Hyp} = Hyp_{-1} \cup Hyp_0 \cup Hyp_1$, terminando 1.

2. $\text{Im}\tilde{M} \cap (\bigcup_k Par_{2k}) = Par_0$.

Sea $\tilde{C} = \tilde{M}(C_1, C_2) \in Par_{2k}$, entonces $\text{tr}(\tilde{C}) = 2$ y $(C_1, C_2) \in \Omega$. Podemos suponer $\text{tr}(C_i) > 2$ y considerar

$$t \mapsto (\text{tr}(C_1), \text{tr}(C_2), (1-t)2 + t(2+\varepsilon))$$

que comienza en $(\text{tr}(C_1), \text{tr}(C_2), 2) = (\text{tr}(C_1), \text{tr}(C_2), \text{tr}(\tilde{C})) = \chi(C_1, C_2)$ y levantando por χ tenemos $(C_1^t, C_2^t) \in \Omega$.

Entonces $\tilde{M}(C_1^t, C_2^t)$ tiene traza mayor que 2 para todo $t > 0$. Por 1. deducimos que $\tilde{M}(C_1^t, C_2^t) \in Hyp_0$ para todo $t > 0$ y por hipótesis este camino comienza en $\tilde{M}(C_1, C_2) = \tilde{C} \in Par_{2k}$. Esto muestra que $k = 0$.

Recíprocamente, $Par_0 \subset \text{Im}\tilde{M}$. En efecto, existe $(C_1, C_2) \in \Omega$, ambos con traza mayor que 2 y tal que $\text{tr}(C_1 C_2) = 2$. En particular, $(C_1, C_2) \in H(\Sigma_{0,3})$ y por lo tanto $C_1 C_2 \in Par$, de donde $\tilde{M}(C_1, C_2) \in Par_{2k}$. Pero ya sabemos que esto implica $\tilde{M}(C_1, C_2) \in Par_0$. Como la acción de $GL(2, \mathbb{R})$ es transitiva en Par , estabiliza Par_0 y \tilde{M} es equivariante, se deduce que $Par_0 \subset \text{Im}\tilde{M}$, concluyendo 2.

3. Casos restantes.

Para estudiar los casos que restan, uno razona de manera completamente análoga. Por ejemplo, si $\tilde{C} = \tilde{M}(C_1, C_2) \in \tilde{Ell}$ podemos considerar

$$t \mapsto (tr(C_1), tr(C_2), (1-t)tr(\tilde{C}) + 2t)$$

Levantando por χ tenemos $(C_1^t, C_2^t) \in H(\Sigma_{0,3})$ tal que $tr(C_1^t C_2^t)$ crece estrictamente hasta dos. Por 2. deducimos que $\tilde{M}(C_1^1, C_2^1) \in Par_0$ y razonando como antes se ve que $\tilde{C} = \tilde{M}(C_1, C_2) = \tilde{M}(C_1^0, C_2^0) \in Ell_{\pm 1}$.

Por otra parte, dado $\tilde{C} \in Ell_1$ podemos considerar el proyectado $C \in SL(2, \mathbb{R})$. Por el lema 5.2.11 existe $(C_1, C_2) \in H(\Sigma_{0,3})$ con $tr(C_i) > 2$ y $tr(C_1 C_2) = tr(C)$. Por el corolario 2.1.2, conjugando el par (C_1, C_2) podemos suponer que $C_1 C_2 = C$ así que $\tilde{M}(C_1, C_2) \in Ell_{\pm 1}$ es un levantado de C . Si $\tilde{M}(C_1, C_2) \in Ell_1$ necesariamente es \tilde{C} y sino existe $g \in GL(2, \mathbb{R})^-$ tal que $g \cdot \tilde{M}(C_1, C_2) = \tilde{C}$ de modo que $\tilde{M}(g \cdot (C_1, C_2)) = \tilde{C}$. Así que $Ell_1 \subset Im \tilde{M}$ y análogamente $Ell_{-1} \subset Im \tilde{M}$.

El caso $Par_{\mp 1}^{\pm}$ se trata igual: $\tilde{C} = \tilde{M}(C_1, C_2) \in Par_{2k+1}$ se conecta a Hyp_{2k+1} , entonces $2k+1 = \pm 1$ y no puede ser $\tilde{C} \in Par_{\mp 1}^{\pm}$ porque se conectaría a $Ell_{\pm 2}$.

□

6.1.3. Fibras de \tilde{M}

Ahora estudiamos las fibras de \tilde{M} , para lo cual aplicamos la proposición 1.3.3. Gracias a dicho resultado y al lema a continuación, entender las componentes de las fibras $\tilde{M}^{-1}(\tilde{C})$ será equivalente a entender las componentes de $(tr \tilde{M})^{-1}(c)$, donde $c := tr(\tilde{C})$.

Lema 6.1.7. *Sea $c \in \mathbb{R}$, $(C_1, C_2) \in (tr \tilde{M})^{-1}(c)$ y $\tilde{C} := \tilde{M}(C_1, C_2)$. Entonces*

$$\tilde{M}_* : \pi_1 \left((tr \tilde{M})^{-1}(c), (C_1, C_2) \right) \longrightarrow \pi_1 \left(\tilde{M}((tr \tilde{M})^{-1}(c)), \tilde{C} \right)$$

es sobreyectiva.

Demostración. Supongamos primero que $c > 2$ y sea $Hyp_0(c) := \{\tilde{C} \in Hyp_0, tr(\tilde{C}) = c\}$, entonces la proposición anterior nos dice que $\tilde{M}((tr \tilde{M})^{-1}(c)) = Hyp_0(c)$.

Por otra parte, $Hyp_0(c) \cong Hyp(c) \cong S^1 \times \mathbb{R}$ por (6.6) así que $\pi_1(Hyp_0(c), \tilde{C}) \cong \mathbb{Z}$.

Sea $C \in SL(2, \mathbb{R})$ la proyección de $\tilde{C} \in PSL(2, \mathbb{R})$ y consideremos $Z : [0, 1] \longrightarrow SL(2, \mathbb{R})$ dada por

$$Z_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sen(\theta) \\ -\sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

6.1. El producto en $SL(2, \mathbb{R})$

Entonces $\theta \mapsto Z_\theta C Z_\theta^{-1}$ genera $\pi_1(\text{Hyp}(c), C)$. En efecto, es un lazo simple y por razonamientos análogos a los del lema 6.1.4 se deduce que no es homotópicamente trivial (ver figura 6.4 (a)).

Pero entonces $\theta \mapsto \tilde{Z}_\theta \tilde{C} \tilde{Z}_\theta^{-1}$ genera $\pi_1(\text{Hyp}_0(c), \tilde{C})$. Como $Z_\theta(C_1, C_2) Z_\theta^{-1} \in (\text{tr} \tilde{M})^{-1}(c)$ es un lazo basado en (C_1, C_2) y $\tilde{M}(Z_\theta(C_1, C_2) Z_\theta^{-1}) = \tilde{Z}_\theta \tilde{M}(C_1, C_2) \tilde{Z}_\theta^{-1} = \tilde{Z}_\theta \tilde{C} \tilde{Z}_\theta^{-1}$, la prueba está terminada en este caso.

Cuando $c < -2$ es análogo. Esta vez, $\tilde{M}((\text{tr} \tilde{M})^{-1}(c)) = \text{Hyp}_{\pm 1}(c)$ es la unión disjunta de dos cilindros, uno en Hyp_1 y el otro en Hyp_{-1} . Se razona en cada componente.

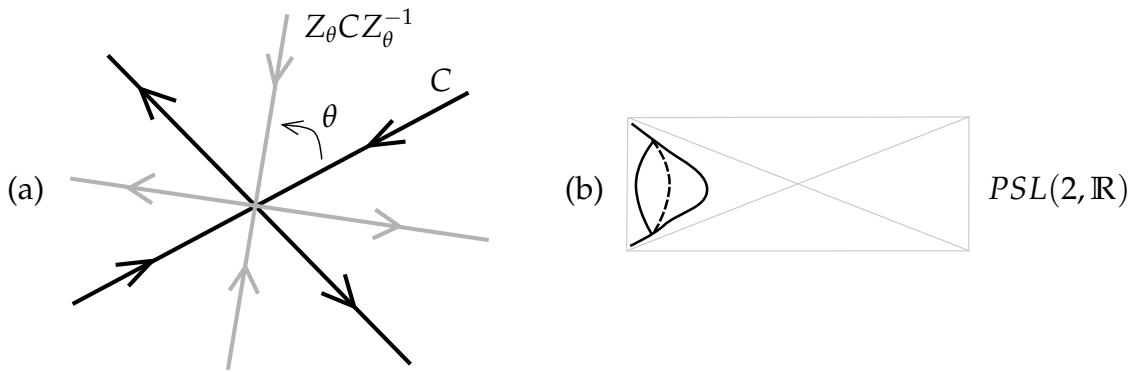


Figura 6.4: A la izquierda, un generador de $\pi_1(\text{Hyp}(c), C)$. A la derecha, el conjunto de nivel $|\text{tr}| = c \in [0, 2)$.

En el caso $|c| = 2$, se observa que $\text{Par} \subset PSL(2, \mathbb{R})$ es homeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}^*$ porque un parabólico está determinado por su punto fijo en S^1 y su parámetro de traslación, que puede ser positivo o negativo. En particular, tiene dos componentes conexas ambas con grupo fundamental \mathbb{Z} y se procede igual.

Supongamos finalmente que $-2 < c < 2$, entonces la tesis es trivial porque

$$\pi_1 \left(\tilde{M}((\text{tr} \tilde{M})^{-1}(c)), \tilde{C} \right) = 0$$

En efecto, si anotamos $\text{Ell}_{\pm 1}(c) := \{ \tilde{C} \in \text{Ell}_{\pm 1}, \text{tr}(\tilde{C}) = c \}$, aplicando la proposición 6.1.6 obtenemos $\tilde{M}((\text{tr} \tilde{M})^{-1}(c)) = \text{Ell}_{\pm 1}(c)$ y este conjunto es la unión disjunta de dos discos. Para verlo notemos que en $PSL(2, \mathbb{R})$ el conjunto de matrices de traza fija $0 \leq |c| < 2$ es homeomorfo a \mathbb{H}^2 porque fijar la traza corresponde a fijar un ángulo de rotación y a partir de ahí la rotación queda determinada por su centro que puede ser cualquier punto de \mathbb{H}^2 (como siempre, asumimos que el sentido es antihorario). Este disco en $PSL(2, \mathbb{R})$ se levanta a la unión disjunta de discos en $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ (ver figura 6.4 (b)).

□

Ahora caracterizamos las fibras de \tilde{M} . Recordar de la observación 6.1.3 que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ actúa en $H(\Sigma_{0,3})$ y que \tilde{M} es $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -invariante.

En la demostración de la siguiente proposición hacemos uso de los contenidos del apéndice A.

Proposición 6.1.8. *Sea $\tilde{C} \in \text{Im}\tilde{M}$. Entonces $\tilde{M}^{-1}(C)$ tiene cuatro componentes conexas transitivamente permutadas por la acción de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

Demostración. Notemos $c := \text{tr}(\tilde{C})$.

Por la proposición 6.1.6 existe $(C_1, C_2) \in (\text{tr}\tilde{M})^{-1}(c)$ con $\text{tr}(C_i) > 2$ para $i = 1, 2$ y tal que $\tilde{M}(C_1, C_2) = \tilde{C}$. Como obviamente (C_1, C_2) no se puede conectar a $(C_1, -C_2)$, $(-C_1, C_2)$ o $(-C_1, -C_2)$ sin salir de los hiperbólicos, alcanza con mostrar que todo $(X, Y) \in (\text{tr}\tilde{M})^{-1}(c)$ se conecta en $(\text{tr}\tilde{M})^{-1}(c)$ a un punto de $\{(C_1, C_2), (C_1, -C_2), (-C_1, C_2), (-C_1, -C_2)\}$. En efecto, esto implica que $(\text{tr}\tilde{M})^{-1}(c)$ tiene cuatro componentes conexas y aplicando la proposición 1.3.3 en conjunto con los lemas 6.1.4 y 6.1.7 se deduce que $\tilde{M}^{-1}(\tilde{C})$ las tiene. Obviamente, dichas componentes son intercambiadas por la acción de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Procedamos entonces a demostrar que si $(X, Y) \in (\text{tr}\tilde{M})^{-1}(c)$, entonces existe un camino en $(\text{tr}\tilde{M})^{-1}(c)$ que lo conecta a un punto de $\{(C_1, C_2), (C_1, -C_2), (-C_1, C_2), (-C_1, -C_2)\}$.

Dividimos la prueba en varios casos.

1. *Caso $c > 2$.*

En este caso sabemos que $\tilde{M}((\text{tr}\tilde{M})^{-1}(c)) = \text{Hyp}_0(c)$. Sea $(X, Y) \in (\text{tr}\tilde{M})^{-1}(c)$ y, digamos, $\text{tr}(X), \text{tr}(Y) > 2$. Afirmamos que en este caso (X, Y) y (C_1, C_2) se conectan en $(\text{tr}\tilde{M})^{-1}(c)$.

En primer lugar notemos que podemos deformar ambos pares para que sus elementos no conmuten. Por ejemplo, si $[X, Y] = I$ entonces (X, Y) es reducible y se conjuga a una representación diagonal por una matriz $Z \in SL(2, \mathbb{R})$. Un camino Z_t desde I hasta Z nos da $Z_t \cdot (X, Y) \in (\text{tr}\tilde{M})^{-1}(c)$ así que podemos suponer que X e Y son diagonales. Ahora basta deformar la entrada 1-2 de una de las dos matrices para que no conmuten (notar que esta deformación mantiene la traza del producto fija).

Supondremos entonces $(X, Y), (C_1, C_2) \in \Omega$. Ahora bien, hecho esto podemos tomar un camino

$$(x_t, y_t, c) \in (2, \infty)^3$$

comenzando en $\chi(X, Y)$ y tal que $\kappa(x_1, y_1, c) = 2$: sólo hay que notar que existe un punto $(x_1, y_1, c) \in \kappa^{-1}(2)$ y moverse "horizontalmente" desde $\chi(X, Y)$ hasta (x_1, y_1, c) (ver figura 6.5 (a)).

Por la proposición 5.2.12, el camino (x_t, y_t, c) se levanta así que podemos suponer que $\kappa\chi(X, Y) = 2$ (observar que la deformación anterior se produce dentro de $(\text{tr}\tilde{M})^{-1}(c)$).

6.1. El producto en $SL(2, \mathbb{R})$

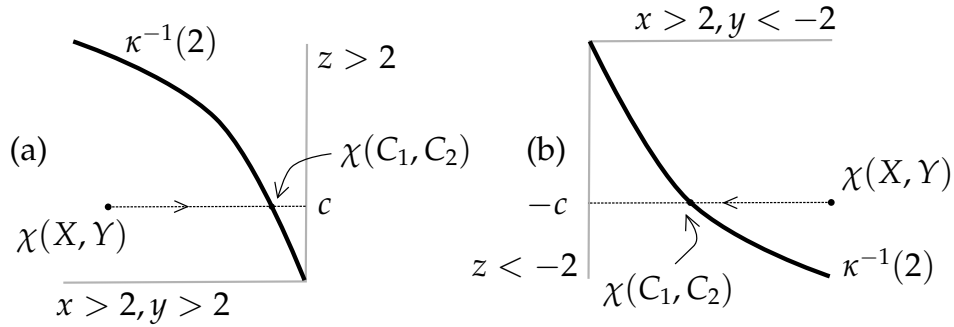


Figura 6.5: Deformaciones horizontales de caracteres.

Ahora bien, aplicando el mismo procedimiento a (C_1, C_2) suponemos que $\chi(C_1, C_2) = \chi(X, Y) \in \kappa^{-1}(2)$. La proposición 5.2.9 nos dice que conjugando en $SL(2, \mathbb{R})$ podemos suponer que

$$(C_1, C_2) = \left(\begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right)$$

Ahora bien, en esta representación cambiar los valores de ζ y η no afecta el valor de χ y como $c > 2$ se deduce que $a \neq \frac{1}{b}$ y por lo tanto conectando ζ y η con 0 tenemos que (C_1, C_2) se conecta a $\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right)$ dentro de una fibra de χ y tal que el producto no pasa por $\pm I$. En particular, esta deformación se produce en $(\text{tr} \tilde{M})^{-1}(c)$. Así que podemos suponer

$$(X, Y) \in \chi^{-1} \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right)$$

Pero por el mismo argumento podemos deformar (X, Y) en $(\text{tr} \tilde{M})^{-1}(c)$ a una representación por matrices diagonales, y con el mismo carácter que $\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right)$. Esto implica que, o bien $(X, Y) = \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right)$ o bien $(X, Y) = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right)$. Si ocurre lo primero, ya terminamos. Si por el contrario ocurre lo segundo, observamos que $(X, Y) = (C_1^{-1}, C_2^{-1})$. Para conectarlas, basta "intercambiar atractor con repulsor" y esto se logra rotando los subespacios propios. Más precisamente, definimos

$$g_t := \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) & \text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\ -\text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \end{pmatrix}, t \in [0, 1]$$

Entonces $g_t \cdot (X, Y)$ conecta (X, Y) con (C_1, C_2) dentro de $(\text{tr} \tilde{M})^{-1}(c)$.

Las restantes posibilidades admiten tratamientos similares. Por ejemplo, si $tr(X) < -2$ y $tr(Y) > 2$ entonces (X, Y) se conecta a $(C_1, -C_2)$ del siguiente modo: por (6.5) sabemos que $\tilde{M}(X, Y)$ es un levantado de $-XY$ y por lo tanto $\chi(X, Y) = (tr(X), tr(Y), -c) \in (2, \infty) \times (-\infty, -2) \times (-\infty, -2)$. Lo mismo ocurre para $\chi(C_1, -C_2)$ y estos caracteres se conectan horizontalmente al nivel $\kappa^{-1}(2)$. Uno concluye igual que antes (ver figura 6.5 (b)). Hemos terminado 1.

2. Caso $c < -2$.

Sabemos que $\tilde{M}((tr\tilde{M})^{-1}(c)) = Hyp_{\pm 1}(c)$ tiene dos componentes conexas así que podemos aplicar la proposición 1.3.3 y los lemas 6.1.4, 6.1.7 a las fibraciones

$$\tilde{M} : (tr\tilde{M})^{-1}(c)_1 \longrightarrow Hyp_1(c)$$

$$\tilde{M} : (tr\tilde{M})^{-1}(c)_{-1} \longrightarrow Hyp_{-1}(c)$$

donde $(tr\tilde{M})^{-1}(c)_{\pm 1} := \tilde{M}^{-1}(Hyp_{\pm 1}(c))$.

Supongamos por comodidad que $\tilde{C} \in Hyp_1$ y fijemos $(X, Y) \in (tr\tilde{M})^{-1}(c)_1$. Digamos que $tr(X) > 2, tr(Y) > 2$, entonces $tr(XY) = tr(C_1C_2) = c < -2$ así que por el análisis de los conjuntos de nivel de κ del apéndice A deducimos que $\kappa\chi(X, Y) \neq 2$ y $\kappa\chi(C_1, C_2) \neq 2$. Más aún, como en el caso previo podemos conectar "horizontalmente" (X, Y) con una representación del mismo carácter que (C_1, C_2) , así que podemos suponer

$$\chi(X, Y) = \chi(C_1, C_2) \notin \kappa^{-1}(2)$$

Pero la proposición 5.2.8 nos dice entonces que (X, Y) es $GL(2, \mathbb{R})$ -conjugado a (C_1, C_2) . Si fuera $g \in GL(2, \mathbb{R})^-$ tal que $g.(X, Y) = (C_1, C_2)$, entonces $\tilde{M}(g.(X, Y)) = \tilde{M}(C_1, C_2)$ y se concluye que $g.\tilde{M}(X, Y) = \tilde{M}(C_1, C_2) = \tilde{C} \in Hyp_1$. Esto es absurdo porque $\tilde{M}(X, Y) \in Hyp_1$ así que la proposición 2.3.2 garantiza que $g.\tilde{M}(X, Y) \in Hyp_{-1}$. En definitiva, son $GL(2, \mathbb{R})^+$ -conjugados así que se conjugan en $SL(2, \mathbb{R})$. Un camino de conjugaciones hasta la identidad termina la prueba en este caso. Distintas combinaciones de signo admiten razonamientos análogos y se concluye 2.

3. Caso $|c| < 2$.

Se razona igual, evitando el nivel 2 de κ .

4. Caso $|c| = 2$.

Supongamos finalmente que $\tilde{C} \in Par_0 \cup Par_{\mp 1}^{\pm}$. Aquí se razona igual gracias a la observación 2.3.3. Más precisamente, (C_1, C_2) y (X, Y) se deforman con carácter horizontal hasta un punto $(x_1, y_1, c) \notin \kappa^{-1}(2)$. Notar que dichas deformaciones se producen en Ω así que se producen en $(tr\tilde{M})^{-1}(c)$, i.e, el producto es distinto de $\pm I$.

□

6.1.4. Propiedad de levantamiento de caminos de \tilde{M}

Esta sección culmina con la propiedad de levantamiento de caminos para \tilde{M} . Gracias al lema 1.2.2 y a la proposición 6.1.8, sólo nos resta estudiar el diferencial de \tilde{M} .

Lema 6.1.9. *Para todo $(C_1, C_2) \in H(\Sigma_{0,3})$, se tiene que*

$$d_{(C_1, C_2)}M : T_{C_1}SL(2, \mathbb{R}) \times T_{C_2}SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow T_{C_1 C_2}SL(2, \mathbb{R})$$

es sobreyectiva. Misma conclusión para \tilde{M} .

Demostración. Observar que $T_{(C_1, C_2)}H(\Sigma_{0,3}) = T_{C_1}SL(2, \mathbb{R}) \times T_{C_2}SL(2, \mathbb{R})$. En efecto, $H(\Sigma_{0,3})$ es abierto en $Hyp \times Hyp$, y este conjunto lo es en $SL(2, \mathbb{R})^2$.

Como el producto de matrices es bilineal, se deduce que

$$d_{(C_1, C_2)}M(C_1\dot{E}, C_2\dot{F}) = C_1\dot{E}C_2 + C_1C_2\dot{F} = C_1C_2\dot{E}' + C_1C_2\dot{F} = C_1C_2(\dot{E}' + \dot{F})$$

Como $(\dot{E}, \dot{F}) \mapsto \dot{E}' + \dot{F}$ es sobreyectiva, la tesis para M se sigue.

Para \tilde{M} , sólo hay que observar que (6.3) es un difeomorfismo local. □

Combinando las proposiciones 6.1.6 y 6.1.8 con los lemas 6.1.9 y 1.2.2 uno obtiene el siguiente:

Corolario 6.1.10. $\tilde{M} : H(\Sigma_{0,3}) \longrightarrow Im\tilde{M}$ tiene la propiedad de levantamiento de caminos. □

Vemos entonces la utilidad del concepto de fibrición cuando uno quiere probar que \tilde{M} tiene la propiedad de levantamiento de caminos. En efecto, vimos que una restricción de \tilde{M} es una fibrición y eso nos permitió "tener un poco más de libertad" a la hora de deformar puntos en una misma fibra.

6.2. El caso $\Sigma_{0,3}$

En esta sección probamos el teorema 4.2.1 en el caso en que la superficie base es $\Sigma_{0,3}$ (teorema 6.2.4 más adelante). Deducimos también algunas propiedades que serán útiles en lo que queda del trabajo.

De aquí en más, por abuso de notación escribiremos

$$H(\Sigma_{0,3}) := \{(C_1, C_2) \in Hyp^2 \subset PSL(2, \mathbb{R})^2, C_1 C_2 \neq I\} \quad (6.7)$$

Es decir que $H(\Sigma_{0,3})$ denotará el proyectado a $PSL(2, \mathbb{R})^2$ del conjunto (6.1).

Podemos definir $M : H(\Sigma_{0,3}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ y $\tilde{M} : H(\Sigma_{0,3}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ de igual modo que en (6.2) y (6.4).

Observar que el fenómeno (6.5) no ocurre en este caso, es decir que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{PSL(2, \mathbb{R})} & \\ & \nearrow \tilde{M} & \downarrow \\ H(\Sigma_{0,3}) & \xrightarrow{M} & PSL(2, \mathbb{R}) \end{array} \quad (6.8)$$

Una combinación de todos los resultados de la sección anterior y el corolario 1.2.4 nos permiten probar el siguiente

Corolario 6.2.1. $Im\tilde{M} = Ell_{\pm 1} \cup Par_0 \cup Hyp_0 \cup Hyp_{\pm 1} \cup Par_{-1}^+ \cup Par_1^-$. Además, \tilde{M} tiene fibras conexas y

$$\tilde{M} : H(\Sigma_{0,3}) \longrightarrow Im\tilde{M}$$

tiene la propiedad de levantamiento de caminos a extremos fijos.

Demostración. Para todo $\tilde{C} \in Im\tilde{M}$, $\tilde{M}^{-1}(\tilde{C})$ corresponde a proyectar las fibras del mapa definido en $H(\Sigma_{0,3}) \subset SL(2, \mathbb{R})^2$. Pero sabemos tales fibras tienen cuatro componentes intercambiadas por la acción de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ así que en la proyección estas componentes se identifican. Además, \tilde{M} es submersiva porque el mapa en $SL(2, \mathbb{R})^2$ lo es y $SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ es un cubrimiento diferenciable. La tesis se sigue del corolario 1.2.4. \square

Observación 6.2.2. Las fibras del mapa $M : H(\Sigma_{0,3}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R}) \setminus \{I\}$ son desconexas. Por ejemplo, si $C \in Hyp$ entonces $M^{-1}(C) = \tilde{M}^{-1}(\tilde{C}) \sqcup \tilde{M}^{-1}(z\tilde{C}) \sqcup \tilde{M}^{-1}(z^{-1}\tilde{C})$ donde $\tilde{C} \in Hyp_0$ es el levantado canónico de C . En particular, M no puede tener la propiedad de levantamiento de caminos a extremos fijos. Más aún, M no tiene la propiedad de levantamiento de caminos porque un camino $\gamma \subset PSL(2, \mathbb{R}) \setminus \{I\}$ que “dé muchas vueltas” no puede levantarse.

Más precisamente, para $\tilde{M}(C_1, C_2) = \tilde{C}$ notemos $C \in PSL(2, \mathbb{R})$ a su proyectado y consideremos $\gamma(0) = C$ tal que su levantado $\tilde{\gamma}$ comenzando en \tilde{C} sale de $Im\tilde{M}$. Si existiera $(C_1^t, C_2^t) \in H(\Sigma_{0,3})$ tal que $M(C_1^t, C_2^t) = \gamma(t)$ obtendríamos $\tilde{M}(C_1^t, C_2^t) = \tilde{\gamma}(t)$ y esto es una contradicción.

Un resultado puede obtenerse sin embargo si nos restringimos al conjunto $W(\Sigma_{0,3})$, porque se evita el fenómeno anterior.

En efecto, recordar de la subsección 4.2 que hemos definido el conjunto

$$W(\Sigma_{0,3}) \cong \{(C_1, C_2, C_3) \in Hyp^3, C_1 C_2 C_3 = I\} \cong \{(C_1, C_2) \in Hyp^2, C_1 C_2 \in Hyp\}$$

Evidentemente, $W(\Sigma_{0,3}) \subset H(\Sigma_{0,3})$.

Corolario 6.2.3. La restricción $M : W(\Sigma_{0,3}) \longrightarrow Hyp$ tiene la propiedad de levantamiento de caminos.

6.2. El caso $\Sigma_{0,3}$

Demostración. Sea $\gamma \subset Hyp$, $(C_1, C_2) \in W(\Sigma_{0,3})$ tal que $M(C_1, C_2) = \gamma(0)$ y $\tilde{\gamma}$ el levantado comenzando en $\tilde{M}(C_1, C_2)$. Necesariamente $\tilde{\gamma} \subset Im\tilde{M}$, pues comienza en un punto de la imagen y es siempre hiperbólico. Existe entonces (C_1^t, C_2^t) desde (C_1, C_2) tal que $\tilde{M}(C_1^t, C_2^t) = \tilde{\gamma}(t)$ y por lo tanto $M(C_1^t, C_2^t) = \gamma(t)$. \square

Teorema 6.2.4. *Las componentes conexas de $W(\Sigma_{0,3})$ son los conjuntos*

$$\left(eu|_{W(\Sigma_{0,3})} \right)^{-1}(k), \quad k = -1, 0, 1$$

Demostración. En primer lugar, sea $\phi = (C_1, C_2, C_2^{-1}C_1^{-1}) \in W(\Sigma_{0,3})$. Por la observación 6.1.2 sabemos que $\tilde{M}(C_1, C_2) \in Hyp_{eu(\phi)}$ y por lo tanto $eu(\phi) \in \{-1, 0, 1\}$.

Recíprocamente, dado $k \in \{-1, 0, 1\}$ existe $(C_1, C_2) \in H(\Sigma_{0,3})$ tal que $\tilde{M}(C_1, C_2) \in Hyp_k$. En particular, $(C_1, C_2) \in W(\Sigma_{0,3})$ y $\phi := (C_1, C_2, C_2^{-1}C_1^{-1})$ es una representación con clase de Euler k .

Queda ver que si $\phi = (C_1, C_2, C_2^{-1}C_1^{-1}), \phi' = (C_1', C_2', C_2'^{-1}C_1'^{-1}) \in W(\Sigma_{0,3})$ son tales que $eu(\phi) = k = eu(\phi')$, entonces se conectan en $W(\Sigma_{0,3})$. Ahora bien, sabemos que $\tilde{M}(C_1, C_2) \in Hyp_k$ y $\tilde{M}(C_1', C_2') \in Hyp_k$ y como Hyp_k es conexo, existe un camino $\tilde{\gamma} \subset Hyp_k$ conectando estos puntos. La propiedad de levantamiento de caminos a extremos fijos garantiza $(C_1^t, C_2^t) \in W(\Sigma_{0,3})$ conectando (C_1, C_2) con (C_1', C_2') y tal que para todo t cumple

$$\tilde{M}(C_1^t, C_2^t) = \tilde{\gamma}(t)$$

Basta definir $\phi_t := (C_1^t, C_2^t, (C_2^t)^{-1}(C_1^t)^{-1})$.

\square

Hemos usado de manera crucial que \tilde{M} tiene la propiedad de levantamiento de caminos a extremos fijos y no sencillamente la propiedad de levantamiento de caminos. En efecto, fuimos capaces de conectar ϕ con ϕ' gracias a la misma. De lo contrario sólo hubieramos podido conectar ϕ con ϕ_1 tal que $\tilde{M}(\phi_1) = \tilde{M}(\phi')$ y, a priori, no tendríamos cómo deformar ϕ_1 en ϕ' . De hecho este es el problema con el que nos encontramos cuando miramos M en lugar de \tilde{M} y esto es razonable porque, a diferencia de \tilde{M} , el mapa M no detecta la clase de Euler.

Capítulo 7

El teorema para un toro perforado

En este capítulo probamos el teorema 4.2.1 cuando la superficie base es el toro perforado $\Sigma_{1,1}$ (teorema 7.2.3). Como $\pi_1(\Sigma_{1,1}) = \langle a, b, c_1 \mid [a, b]c_1 = 1 \rangle$, estudiaremos la ecuación

$$[A, B] = C_1^{-1}$$

Más precisamente, queremos probar que el conmutador tiene la propiedad de levantamiento de caminos. La estructura de la prueba de este resultado es la misma que utilizamos en el capítulo previo para el mapa producto.

7.1. El conmutador en $SL(2, \mathbb{R})$

Consideremos el mapa

$$R : SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow SL(2, \mathbb{R}), \quad R(X, Y) := [X, Y] \quad (7.1)$$

Consideraremos un levantado natural $\tilde{R} : SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ y dedicaremos esta sección a establecer los requisitos necesarios para demostrar la propiedad de levantamiento de caminos de R y \tilde{R} .

7.1.1. Definición de \tilde{R}

Podemos considerar un levantado natural

$$\tilde{R} : SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$$

definido así: sean $X, Y \in SL(2, \mathbb{R})$ y $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ levantados cualesquiera. Definimos

$$\tilde{R}(X, Y) := [\tilde{X}, \tilde{Y}] \quad (7.2)$$

Esta definición es correcta, pues no depende de la elección de \tilde{X} e \tilde{Y} . En efecto, recordar de la sección 2.2 que $\{z^k\}_k$ es la fibra sobre I por el cubrimiento $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})} \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ y que este conjunto es exactamente el centro de $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$.

Además, \tilde{R} es diferenciable pues $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ es un difeomorfismo local y las operaciones en $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ son diferenciables.

No es difícil ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{PSL(2, \mathbb{R})} & \\ \tilde{R} \nearrow & & \downarrow \\ SL(2, \mathbb{R})^2 & \xrightarrow{R} & SL(2, \mathbb{R}) \end{array} \quad (7.3)$$

Observación 7.1.1. Un razonamiento análogo al de la observación 6.1.2 se aplica. Más precisamente, supongamos $A, B \in SL(2, \mathbb{R})$ tales que $[A, B] \notin Ell$. Trabajando con la presentación $\pi_1(\Sigma_{1,1}) = \langle a, b, c_1 \mid [a, b]c_1 = 1 \rangle$ y proyectando a $PSL(2, \mathbb{R})$ este par define una representación $\pi_1(\Sigma_{1,1}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ dada por

$$\phi := (A, B, [B, A])$$

Notemos $C_1 := [B, A] \notin Ell$, entonces ϕ tiene clase de Euler y, si $\tilde{C}_1 \in I \cup Par_0 \cup Hyp_0$ es el levantado canónico de C_1 , por la observación 3.3.7 se verifica

$$\tilde{R}(A, B)\tilde{C}_1 = z^{eu(\phi)} \implies \tilde{R}(A, B) = z^{eu(\phi)}\tilde{C}_1^{-1} \quad (7.4)$$

Observación 7.1.2. ■ Consideremos la acción de $GL(2, \mathbb{R})$ por conjugación en $SL(2, \mathbb{R})^2$ y la acción en $PSL(2, \mathbb{R})$ de la sección 2.3. Entonces \tilde{R} es equivariante, porque R lo es.

■ Sea la acción de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en $SL(2, \mathbb{R})^2$ dada por

$$(\bar{1}, \bar{0}).(X, Y) := (-X, Y), \quad (\bar{0}, \bar{1}).(X, Y) := (X, -Y)$$

Notar que \tilde{R} es $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -invariante, porque R lo es. Además, consideramos el grupo

$$\Delta := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

que actúa en \mathbb{R}^3 por multiplicación y es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ vía

$$(\bar{1}, \bar{0}) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\bar{0}, \bar{1}) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Puede demostrarse sin dificultad que el mapa de caracteres χ definido en la sección 5.1 es $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \Delta)$ -equivariante.

7.1.2. Imagen de \tilde{R}

Por definición de \tilde{R} , es fácil ver $(Im\tilde{R})^{-1} = Im\tilde{R}$. Además la observación 7.1.2 nos dice que \tilde{R} es $GL(2, \mathbb{R})$ -equivariante. En particular, $Im\tilde{R}$ es $GL(2, \mathbb{R})$ -invariante.

Informalmente, la siguiente proposición establece que un conmutador “rota menos que 1”.

Proposición 7.1.3. $Im\tilde{R} = \{I\} \cup Ell_{\pm 1} \cup Par_0 \cup Hyp_0 \cup Hyp_{\pm 1} \cup Par_{-1}^+ \cup Par_1^-$ y R es sobreyectiva.

Demostración. Dividimos la demostración en varias etapas.

1. $Im\tilde{R} \cap \{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{I\}$.

Sea $\tilde{R}(X, Y) = z^k$. Entonces $[X, Y] = I$ y proyectando a $PSL(2, \mathbb{R})$, obtenemos que X e Y pertenecen a un mismo subgrupo a un parámetro (proposición 2.1.6). Podemos entonces conectar (X, Y) con (I, I) por un camino (X_t, Y_t) tal que $[X_t, Y_t] = I$.

Como $SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ es un cubrimiento, puede suponerse $(X_t, Y_t) \in SL(2, \mathbb{R})^2$ desde (X, Y) hasta $(\pm I, \pm I)$ y tal que $R(X_t, Y_t) = [X_t, Y_t] = \pm I$. Esto implica que $[X_t, Y_t]$ es constante igual $[X, Y] = I$ así que $\tilde{R}(X_t, Y_t) = z^k$ para todo t . De hecho, cambiando por $-X$ o $-Y$ si fuera necesario podemos suponer que $(X_1, Y_1) = (I, I)$. En efecto, cambiar X por $-X$ corresponde en $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ a multiplicar por z^{2p+1} , pero esto no afecta el valor del conmutador. Así que $z^k = \tilde{R}(X, Y) = \tilde{R}(I, I) = I$ y esto concluye 1.

2. $Im\tilde{R} \cap (\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} Par_{2k}) = Par_0$.

Consideremos los mapas χ y κ como en la sección 5.1, de modo que $\kappa\chi = trR$ (ecuación (5.2)).

Fijemos $k \in \mathbb{Z}$ y $\tilde{C} \in Par_{2k}$ tal que $\tilde{C} = \tilde{R}(X, Y)$, queremos ver que $k = 0$. Como $\tilde{C} \in Par_{2k}$, del corolario 2.2.3 sabemos que $tr(\tilde{C}) = 2$. Entonces $tr\tilde{R}(X, Y) = 2$ así que $\kappa\chi(X, Y) = 2$. Además, $[X, Y] \neq I$ así que la proposición 5.2.9 nos dice que existe $g \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que

$$g.(X, Y) = \left(\begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right)$$

Como la acción de g en $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ preserva $Im\tilde{R}$ y Par_{2k} podemos por abuso de notación suponer que $\tilde{R} \left(\begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right) = \tilde{C}$.

Proyectando a $PSL(2, \mathbb{R})$, podemos definir

$$\phi := \left(\begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} b & \eta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \right] \right)$$

Es claro entonces que ϕ es reducible, así que la proposición 3.4.5 permite concluir que $eu(\phi) = 0$.

Si anotamos $C_1 := \left[\begin{pmatrix} b & \eta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \right]$, la ecuación (7.4) nos dice que si $\tilde{C}_1 \in Par_0$ es el levantado canónico de C_1 , entonces

$$\tilde{C}\tilde{C}_1 = \tilde{R} \left(\begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right) \tilde{C}_1 = z^{eu(\phi)} = I$$

Pero entonces $\tilde{C} = \tilde{C}_1^{-1}$ y este elemento pertenece a Par_0 , porque fija un punto de \mathbb{R} .

Recíprocamente, $Par_0 \subset Im\tilde{R}$. En efecto, recordemos la observación 2.1.3, que establece que $GL(2, \mathbb{R})$ actúa por conjugación transitivamente en Par . Además, la proposición 2.3.2 dice que la acción levantada preserva Par_0 , así que $GL(2, \mathbb{R})$ actúa transitivamente en Par_0 . Como $Im\tilde{R}$ es invariante por esta acción, para probar que $Par_0 \subset Im\tilde{R}$ sólo hay que encontrar un elemento en $Par_0 \cap Im\tilde{R}$.

Ahora bien, ya vimos que basta encontrar (X, Y) con $[X, Y] \neq I$ y tal que $tr[X, Y] = 2$ (porque entonces $\tilde{R}(X, Y) \in Par_0 \cap Im\tilde{R}$). Tal elemento existe por el lema 5.2.11.

3. $Im\tilde{R} \cap (\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} Hyp_{2k}) = Hyp_0$.

Supongamos $\tilde{R}(X, Y) = \tilde{C} \in Hyp_{2k}$. Entonces $tr(\tilde{C}) > 2$, así que $\kappa\chi(X, Y) > 2$.

Consideremos el camino $t \mapsto 2 + t(tr(\tilde{C}) - 2) \in \mathbb{R}$ que termina en $tr(\tilde{C}) = \kappa\chi(X, Y)$. Por la proposición A.0.2 del apéndice A existe de un camino

$$(x_t, y_t, z_t) \in \mathbb{R}^3 \setminus ([-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2])$$

tal que $\kappa(x_t, y_t, z_t) = 2 + t(tr(\tilde{C}) - 2)$ y $(x_1, y_1, z_1) = \chi(X, Y)$. Ahora bien, $[X, Y] \neq I$ así que por la proposición 5.2.12 podemos encontrar

$$(X_t, Y_t) \in \Omega$$

tal que $\chi(X_t, Y_t) = (x_t, y_t, z_t)$ y terminando en (X, Y) . En particular,

$$trR(X_t, Y_t) = \kappa\chi(X_t, Y_t) = 2 + t(tr(\tilde{C}) - 2)$$

Pero entonces $\tilde{R}(X_t, Y_t) \in \widetilde{Hyp} \cup \widetilde{Par}$ y sólo es parabólico en $t = 0$. De hecho, por 2. sabemos que $\tilde{R}(X_0, Y_0) \in Par_0$, porque tiene traza igual a 2. Necesariamente $\tilde{C} = \tilde{R}(X, Y) = \tilde{R}(X_1, Y_1) \in Hyp_0$.

Recíprocamente, $Hyp_0 \subset Im\tilde{R}$. En efecto, un razonamiento análogo al aplicado en 2. puede realizarse: si $\tilde{C} \in Hyp_0$, tomemos (X, Y) tal que $trR(X, Y) = tr(\tilde{C})$. Proyectando \tilde{C} a $C \in SL(2, \mathbb{R})$, por la proposición 2.1.2 existe $g \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que

7.1. El conmutador en $SL(2, \mathbb{R})$

$$g[X, Y]g^{-1} = C \implies \tilde{R}(gXg^{-1}, gYg^{-1}) \in Hyp_0$$

Pero $\tilde{R}(gXg^{-1}, gYg^{-1})$ levanta $C \in SL(2, \mathbb{R})$, así que $\tilde{C} = \tilde{R}(gXg^{-1}, gYg^{-1}) \in Im\tilde{R}$.

4. $Im\tilde{R} \cap (\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} Ell_k) = Ell_{\pm 1}$.

Sea $\tilde{C} = \tilde{R}(X, Y) \in \tilde{Ell}$. Como vimos en 3., podemos encontrar un camino $(X_t, Y_t) \in \Omega$ terminando (X, Y) tal que

$$trR(X_t, Y_t) = 2 + t(tr(\tilde{C}) - 2)$$

Entonces $tr\tilde{R}(X_0, Y_0) = 2$ y lo ya probado permite concluir que $\tilde{R}(X_0, Y_0) \in Par_0 \cup \{I\}$. Pero para $t > 0$ se tiene que $\tilde{R}(X_t, Y_t) \in \tilde{Ell}$, así que $\tilde{C} = \tilde{R}(X_1, Y_1) \in Ell_{\pm 1}$.

Recíprocamente si $\tilde{C} \in Ell_{\pm 1}$ proyectando a $SL(2, \mathbb{R})$ podemos encontrar $[X, Y] = C$, de modo que $\tilde{R}(X, Y) \in Ell_{\pm 1}$ es un levantado de $C \in SL(2, \mathbb{R})$ y conjugado en $GL(2, \mathbb{R})$ podemos suponer que es \tilde{C} .

5. $Im\tilde{R} \cap (\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} Par_{2k+1}) = Par_{-1}^+ \cup Par_1^-$.

La demostración de este caso repite las mismas ideas.

□

7.1.3. Fibras de \tilde{R}

La tarea ahora es analizar las fibras de \tilde{R} (proposición 7.1.7). La técnica a utilizar es la misma que la del capítulo 6 y por ello muchas demostraciones serán omitidas.

Lema 7.1.4. Sea $c \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. La restricción de \tilde{R} a $(tr\tilde{R})^{-1}(c) \subset SL(2, \mathbb{R})^2$ es una fibración.

Demostración. Misma demostración que la del lema 6.1.4.

□

Observación 7.1.5. En el caso $c = 2$ debemos tener cuidado. Más precisamente, si $c = 2$ una homotopía $\tilde{H} \subset \tilde{R}((tr\tilde{R})^{-1}(c))$ puede pasar por la identidad y como vimos en la observación 6.1.5, esto puede traer problemas al intentar aplicar el razonamiento hecho en el lema 6.1.4. Cuando $c = -2$ este problema no ocurre porque $Im\tilde{R}$ no corta $\{z^{2p+1}\}_p$ de modo que $h(x, t) \neq -I$. El argumento del citado lema permite sin embargo mostrar que \tilde{R} levanta las homotopías a traza fija $c = 2$ que no pasan por $I \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Lema 7.1.6. Sea $c \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $(X, Y) \in (tr\tilde{R})^{-1}(c)$ y $\tilde{C} := \tilde{R}(X, Y)$. Entonces

$$\tilde{R}_* : \pi_1 \left((tr\tilde{R})^{-1}(c), (X, Y) \right) \longrightarrow \pi_1 \left(\tilde{R}((tr\tilde{R})^{-1}(c)), \tilde{C} \right)$$

es sobreyectiva.

Demostración. Misma demostración que la del lema 6.1.7. □

Al igual que en el caso del producto, una combinación de estos resultados y la proposición 1.3.3 sirve para obtener una descripción de las fibras de \tilde{R} . Utilizaremos el análisis de los conjuntos de nivel de κ del apéndice A y consideraremos la acción de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en $SL(2, \mathbb{R})^2$ definida en la observación 7.1.2.

Proposición 7.1.7. *Sea $\tilde{C} \in Im\tilde{R}$. Si $\tilde{C} \in Hyp_0 \cup \{I\}$ entonces $\tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$ es conexo. Si por otra parte $\tilde{C} \in Im\tilde{R} \setminus (Hyp_0 \cup \{I\})$ entonces $\tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$ tiene cuatro componentes conexas transitivamente permutadas por la acción de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

Demostración. Dividimos la demostración en varias etapas.

1. $\tilde{R}^{-1}(I)$ es conexo.

Tomemos $(X, Y) \in SL(2, \mathbb{R})^2$ tal que $\tilde{R}(X, Y) = I$, entonces $[X, Y] = I$. Proyectando a $PSL(2, \mathbb{R})$ obtenemos que existe un subgrupo a un parámetro en $PSL(2, \mathbb{R})$ conteniendo a X e Y . Sean $(\pm\mathcal{S}) \subset SL(2, \mathbb{R})$ sus dos levantados, donde \mathcal{S} es un subgrupo. Queda claro entonces que $(X, Y) \in (\pm\mathcal{S}) \times (\pm\mathcal{S})$.

Recíprocamente, si $(X, Y) \in (\pm\mathcal{S}) \times (\pm\mathcal{S})$ donde $\mathcal{S} \subset SL(2, \mathbb{R})$ es un subgrupo a un parámetro, entonces $[X, Y] = I$ y por lo tanto $\tilde{R}(X, Y) = I$. Hemos probado que

$$\tilde{R}^{-1}(I) = \bigcup_{\mathcal{S}} (\pm\mathcal{S}) \times (\pm\mathcal{S})$$

donde la unión se toma sobre todos los subgrupos a un parámetro de $SL(2, \mathbb{R})$.

Pero $\bigcup_{\mathcal{S}} (\pm\mathcal{S}) \times (\pm\mathcal{S})$ es conexo, y esto concluye 1. En efecto, el subgrupo elíptico $\mathcal{S}_0 := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ cumple $\mathcal{S}_0 = -\mathcal{S}_0$ así que $(\pm\mathcal{S}_0) \times (\pm\mathcal{S}_0) = \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_0$ que es conexo. Sea $(X, Y) \in \tilde{R}^{-1}(I)$ y $\mathcal{S} \subset SL(2, \mathbb{R})$ tal que $(X, Y) \in (\pm\mathcal{S}) \times (\pm\mathcal{S})$. Podemos conectar (X, Y) dentro de $(\pm\mathcal{S}) \times (\pm\mathcal{S})$ con algún punto del conjunto

$$\{(I, I), (-I, I), (I, -I), (-I, -I)\} \subset \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_0$$

Pero dentro de $\mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_0$ conectamos cualquiera de estos cuatro puntos con (I, I) . Así, todo $(X, Y) \in \tilde{R}^{-1}(I)$ se conecta en $\tilde{R}^{-1}(I)$ con (I, I) .

2. Si $\tilde{C} \in Hyp_0$, entonces $\tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$ es conexo.

Sea $\tilde{C} \in Hyp_0$ y $c := tr(\tilde{C}) > 2$. Consideremos la fibración $\tilde{R} : (tr\tilde{R})^{-1}(c) \rightarrow Hyp_0(c)$. Por la proposición 1.3.3 y el lema 7.1.6 alcanza con mostrar que $(tr\tilde{R})^{-1}(c)$ es conexo.

Ahora bien, fijemos

$$(X, Y) := \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & u \\ -1/u & 0 \end{pmatrix} \right), \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})^-$$

7.1. El conmutador en $SL(2, \mathbb{R})$

donde u es tal que $u^2 + 1/u^2 = c$. Entonces $tr[X, Y] = \kappa\chi(X, Y) = c$ y $g.(X, Y) = (-X, -Y) \in (tr\tilde{R})^{-1}(c)$.

El camino

$$t \mapsto (X_t, Y_t) := \begin{cases} \left(X, Y \begin{pmatrix} \cos(2t\pi) & -\text{sen}(2t\pi) \\ \text{sen}(2t\pi) & \cos(2t\pi) \end{pmatrix} \right) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \left(X \begin{pmatrix} \cos((2t-1)\pi) & -u\text{sen}((2t-1)\pi) \\ \text{sen}((2t-1)\pi)/u & \cos((2t-1)\pi) \end{pmatrix}, Y_{\frac{1}{2}} \right) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

conecta (X, Y) con $(-X, -Y)$ y verifica $tr[X_t, Y_t] = \kappa\chi(X_t, Y_t) = c$ para todo $t \in [0, 1]$. Entonces $(X_t, Y_t) \in (tr\tilde{R})^{-1}(c)$ para todo $t \in [0, 1]$.

Sea $(X', Y') \in (tr\tilde{R})^{-1}(c)$, afirmamos que se conecta a (X, Y) .

En efecto, $tr[X', Y'] = \kappa\chi(X, Y) = c$ así que $\chi(X', Y') \in \kappa^{-1}(c)$ que es conexo (ver apéndice A). Como $\chi(X, Y) \in \kappa^{-1}(c)$ existe $\gamma \subset \kappa^{-1}(c)$ camino desde $\chi(X', Y')$ hasta $\chi(X, Y)$. Ahora bien, $c > 2$ así que por la proposición 5.2.12 podemos encontrar un camino (X_t, Y_t) desde (X', Y') tal que $\chi(X, Y) = \gamma(t)$. Notar que $\kappa\chi(X_t, Y_t) = \kappa\gamma(t) = c$, luego (X', Y') se conecta en $(tr\tilde{R})^{-1}(c)$ a un punto de $\chi^{-1}(\chi(X, Y))$. Pero la proposición 5.2.8 nos dice que esta fibra es la unión de dos $SL(2, \mathbb{R})$ -órbitas, una conteniendo a (X, Y) y la otra a $(-X, -Y)$ y ya vimos que estos puntos se conectan en $(tr\tilde{R})^{-1}(c)$.

3. Si $\tilde{C} \in Ell_{\pm 1}$, entonces $\tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$ tiene cuatro componentes intercambiadas por la acción de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Sea $\tilde{C} \in Ell_{\pm 1}$, entonces $c := tr(\tilde{C}) \in (-2, 2)$. Como vimos en el lema 6.1.7, el conjunto $Ell_{\pm 1}(c) = \tilde{R}(tr\tilde{R}^{-1}(c))$ es la unión disjunta de dos discos, uno en Ell_1 y el otro en Ell_{-1} . Definamos

$$(tr\tilde{R})^{-1}(c)_{\pm 1} := \tilde{R}^{-1}(Ell_{\pm 1}(c))$$

Por el cómputo de la imagen de \tilde{R} estos conjuntos son no vacíos así que tenemos fibra-ciones

$$\tilde{R} : (tr\tilde{R})^{-1}(c)_1 \longrightarrow Ell_1(c)$$

$$\tilde{R} : (tr\tilde{R})^{-1}(c)_{-1} \longrightarrow Ell_{-1}(c)$$

Como la acción de $GL(2, \mathbb{R})^-$ intercambia los discos $Ell_1(c)$ y $Ell_{-1}(c)$ y \tilde{R} es equiva-riante, lo mismo se sigue para los conjuntos $(tr\tilde{R})^{-1}(c)_1$ y $(tr\tilde{R})^{-1}(c)_{-1}$.

Supongamos para fijar ideas que $\tilde{C} \in Ell_1(c)$ (el otro caso es análogo). Probaremos que $(tr\tilde{R})^{-1}(c)_1$ tiene cuatro componentes arcoconexas cada una de ellas con un punto de $\tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$ y luego basta aplicar el lema 7.1.6 y la proposición 1.3.3.

Ahora bien sea $(X, Y) \in (tr\tilde{R})^{-1}(c)_1$, entonces $\chi(X, Y) \in \kappa^{-1}(c)$ que es la unión disjunta de cuatro discos no compactos transitivamente permutados por el grupo Δ y una esfera contenida en $(-2, 2)^3$ (ver apéndice A). Como $tr[X, Y] = c \in (-2, 2)$, deducimos que $[X, Y] \neq I$ y por el lema 5.2.11 sabemos que

$$\chi(X, Y) \notin [-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2]$$

Esto implica que $\chi(X, Y)$ pertenece a una de las cuatro componentes no compactas de $\kappa^{-1}(c)$. Notemos $\mathcal{G}_c \subset \kappa^{-1}(c)$ a la unión de estas cuatro componentes, así que $\mathcal{G}_c \subset \mathbb{R}^3 \setminus [-2, 2]^3$.

Consideremos entonces la restricción

$$\chi : (tr\tilde{R})^{-1}(c)_1 \longrightarrow \mathcal{G}_c \quad (7.5)$$

Esta restricción es sobreyectiva, porque $\mathcal{G}_c \subset \chi(SL(2, \mathbb{R})^2)$ así que dado $(x, y, z) \in \mathcal{G}_c$ existe $(X, Y) \in SL(2, \mathbb{R})^2$ tal que $\chi(X, Y) = (x, y, z)$. Necesariamente $(X, Y) \in (tr\tilde{R})^{-1}(c)$ y conjugando por un elemento de $GL(2, \mathbb{R})^-$ si fuera necesario podemos suponer $(X, Y) \in (tr\tilde{R})^{-1}(c)_1$. Además, gracias a la proposición 5.2.12 tenemos que (7.5) levanta caminos y por lo tanto el conjunto $(tr\tilde{R})^{-1}(c)_1$ tiene al menos cuatro componentes conexas.

Ahora bien, consideremos dos puntos $(X, Y), (X', Y') \in (tr\tilde{R})^{-1}(c)_1$ tales que $\chi(X, Y)$ y $\chi(X', Y')$ pertenecen a la misma componente arcoconexa de \mathcal{G}_c . Afirmamos que se conectan en $(tr\tilde{R})^{-1}(c)_1$. En efecto, sea $\gamma \subset \mathcal{G}_c$ camino conectando $\chi(X, Y)$ y $\chi(X', Y')$ y $(X_t, Y_t) \subset (tr\tilde{R})^{-1}(c)_1$ un levantado por (7.5) desde (X, Y) . El punto final $(X_1, Y_1) =: (X'', Y'')$ pertenece a la fibra $\chi^{-1}(\chi(X', Y'))$ y como $\kappa\chi(X', Y') = c \neq 2$, por la proposición 5.2.8 sabemos que $\chi^{-1}(\chi(X', Y'))$ es una $GL(2, \mathbb{R})$ -órbita. Deducimos que (X', Y') y (X'', Y'') son $GL(2, \mathbb{R})$ -conjugados y como ambos pertenecen a $(tr\tilde{R})^{-1}(c)_1$, son $SL(2, \mathbb{R})$ -conjugados. Como $SL(2, \mathbb{R})$ es conexo y su acción preserva $(tr\tilde{R})^{-1}(c)_1$, (X', Y') se conecta a (X'', Y'') y por tanto a (X, Y) .

Hemos probado que $(tr\tilde{R})^{-1}(c)_1$ tiene cuatro componentes conexas. Para aplicar el corolario 1.3.3 tenemos que ver que en cada una de ellas existe un punto de $\tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$, pues por el lema 7.1.6 sabemos que \tilde{R}_* es sobreyectiva.

Ahora bien, sea $(X, Y) \in \tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$ entonces $(-X, Y), (X, -Y), (-X, -Y) \in \tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$, porque \tilde{R} es $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -invariante. Afirmamos que estos cuatro puntos están en componentes diferentes de $(tr\tilde{R})^{-1}(c)_1$ y esto finaliza 3.

En efecto, es fácil ver que \mathcal{G}_c no corta a los planos $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ y $\{z = 0\}$ así que $trX \neq 0$, $trY \neq 0$ y $tr(XY) \neq 0$. En particular, $\chi(X, Y), \chi(-X, Y), \chi(X, -Y), \chi(-X, -Y)$ pertenecen a componentes conexas distintas de \mathcal{G}_c . Sin embargo, hemos visto que χ induce una biyección

7.1. El conmutador en $SL(2, \mathbb{R})$

$$\chi : \pi_0((tr\tilde{R})^{-1}(c)_1) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{G}_c)$$

y esto termina la afirmación.

Más aún, por la observación 7.1.2 sabemos que χ es $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \Delta)$ -equivariante y como Δ actúa transitivamente en las componentes de \mathcal{G}_c , deducimos que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ lo hace en las de $\tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$.

4. Si $\tilde{C} \in Hyp_{\pm 1}$, entonces $\tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$ tiene cuatro componentes intercambiadas por la acción de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

En este caso el argumento es completamente análogo a 3. porque $tr(\tilde{C}) = c < -2$, así que $\kappa^{-1}(c)$ es la unión disjunta de cuatro discos transitivamente permutados por Δ .

5. Si $\tilde{C} \in Par_{-1}^+ \cup Par_{-1}^-$, entonces $\tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$ tiene cuatro componentes intercambiadas por la acción de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

El mismo argumento que en 3. y 4. se aplica en este caso: como $tr(\tilde{C}) = c = -2$, entonces $\kappa^{-1}(c)$ es la unión de cuatro discos en $\mathbb{R}^3 \setminus [-2, 2]^3$ junto con el origen $(0, 0, 0)$. Sólo hay que notar que $(0, 0, 0) \notin \chi(SL(2, \mathbb{R})^2)$ (proposición 5.2.5).

6. Si $\tilde{C} \in Par_0$, entonces $\tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$ tiene cuatro componentes intercambiadas por la acción de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Proyectemos \tilde{C} a $C \in SL(2, \mathbb{R})$, existe $g \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $gCg^{-1} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y como $trC = 2$, entonces $gCg^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Definamos

$$\mathcal{D} := \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right) \in SL(2, \mathbb{R})^2, \left[\begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Afirmamos que \mathcal{D} tiene cuatro componentes conexas y que existe un mapa $\mathcal{D} \longrightarrow \tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$ continuo, sobreyectivo, y que no identifica puntos de componentes diferentes.

Para verlo, sea $(X, Y) = \left(\begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right) \in \mathcal{D}$. Entonces

$$[X, Y] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = gCg^{-1} \implies [g^{-1}Xg, g^{-1}Yg] = C$$

En particular, $\tilde{R}(g^{-1}Xg, g^{-1}Yg)$ es un levantado de C .

Además, como $tr(C) = 2$ por la proposición 7.1.3 obtenemos que $\tilde{R}(g^{-1}Xg, g^{-1}Yg) \in Par_0$, así que $\tilde{R}(g^{-1}Xg, g^{-1}Yg) = \tilde{C}$.

Es natural definir la aplicación continua

$$\mathcal{D} \longrightarrow \tilde{R}^{-1}(\tilde{C}), \quad (X, Y) \mapsto (g^{-1}Xg, g^{-1}Yg) \tag{7.6}$$

Ahora bien, observemos que si $(X, Y) \in \tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$ entonces $[X, Y] = C$ tiene traza igual a 2. Por la proposición 5.2.9 existe $h \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que $h^{-1}Xh$ y $h^{-1}Yh$ son matrices triangulares superiores, y esto implica que $[h^{-1}Xh, h^{-1}Yh]$ lo es.

Pero

$$[h^{-1}Xh, h^{-1}Yh] = h^{-1}[X, Y]h = h^{-1}Ch = h^{-1}g^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} gh$$

Se deduce fácilmente que gh es triangular superior. Luego,

$$((gh)h^{-1}Xh(gh)^{-1}, (gh)h^{-1}Yh(gh)^{-1}) \in \mathcal{D}$$

Así, $(gXg^{-1}, gYg^{-1}) \in \mathcal{D}$ y hemos probado que $\mathcal{D} \rightarrow \tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$ es sobreyectiva.

Para ver que \mathcal{D} tiene cuatro componentes, notemos que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{++} \cup \mathcal{D}_{-+} \cup \mathcal{D}_{+-} \cup \mathcal{D}_{--}$, donde por ejemplo $\mathcal{D}_{++} := \{(X, Y) \in \mathcal{D}, \text{tr}X > 0, \text{tr}Y > 0\}$ (y $\mathcal{D}_{-+}, \mathcal{D}_{+-}, \mathcal{D}_{--}$ se definen de la manera correspondiente).

Veamos que \mathcal{D}_{++} es conexo (los otros también lo son de manera análoga).

Sea $(X, Y) = \left(\begin{pmatrix} a & \zeta \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \eta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \right) \in \mathcal{D}_{++}$. Podemos definir el polinomio $S_{ab}(\zeta, \eta) := a(1 - b^2)\zeta - b(1 - a^2)\eta$ de modo que

$$[X, Y] = \begin{pmatrix} 1 & S_{ab}(\zeta, \eta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $\mathcal{D}_{++} \cong \{(a, b, \zeta, \eta) \in (\mathbb{R}^+)^2 \times \mathbb{R}^2, S_{ab}(\zeta, \eta) = 1\} =: M$. Mostremos que M es conexo.

En efecto, 1 es valor regular de $(a, b, \zeta, \eta) \mapsto S_{ab}(\zeta, \eta)$ así que M es una variedad diferenciable y podemos tomar

$$f : M \rightarrow (\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{(1, 1)\}$$

la proyección en las primeras coordenadas. Entonces $f^{-1}(a, b)$ homeomorfo a una recta para todo $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{(1, 1)\}$. En particular, f tiene fibras conexas y es sobreyectiva. Además es fácil ver que es submersiva así que por el corolario 1.2.4 obtenemos que M es conexa.

Ahora bien, (7.6) no identifica puntos de componentes diferentes. Para verlo, observar que si $(X, Y) \in \tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$, entonces $\text{tr}X \neq 0$ y $\text{tr}Y \neq 0$ pues (X, Y) es conjugada a un elemento de \mathcal{D} . Como $\mathcal{D} \rightarrow \tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$ preserva la traza se deduce que este mapa no identifica componentes.

7.1. El conmutador en $SL(2, \mathbb{R})$

En conclusión, (7.6) es continua, sobreyectiva y no identifica puntos de las cuatro componentes de \mathcal{D} . Deducimos que $\tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$ tiene cuatro componentes.

Por último, queda mostrar que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es transitivo en las componentes de $\tilde{R}^{-1}(\tilde{C})$ pero esto es claro porque las cuatro componentes están distinguidas por los signos de las trazas.

□

7.1.4. Propiedad de levantamiento de caminos de \tilde{R}

Para deducir la propiedad de levantamiento de caminos de \tilde{R} , estudiamos su diferencial.

Lema 7.1.8. *Sea $\Omega = \{(X, Y) \in SL(2, \mathbb{R})^2, [X, Y] \neq I\}$. Entonces la restricción $R|_{\Omega}$ es submersiva. Explícitamente si $X, Y \in SL(2, \mathbb{R})$ son tales que $[X, Y] \neq I$, entonces*

$$d_{(X,Y)}R : T_X SL(2, \mathbb{R}) \times T_Y SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow T_{[X,Y]} SL(2, \mathbb{R})$$

es sobreyectivo. Misma conclusión para \tilde{R} .

Demostración. Sea $inv : SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow SL(2, \mathbb{R}), inv(X) := X^{-1}$. Entonces

$$inv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Podemos entonces extender linealmente esta aplicación a $inv : M(2, \mathbb{R}) \longrightarrow M(2, \mathbb{R})$. En particular, si $Z \in SL(2, \mathbb{R})$ obtenemos

$$d_Z inv = inv|_{T_Z SL(2, \mathbb{R})}$$

Ahora bien, como el producto en $M(2, \mathbb{R})$ es multilinear, un cálculo directo muestra que

$$d_{(X,Y)}R(X\dot{E}, Y\dot{F}) = X\dot{E}YX^{-1}Y^{-1} + XY\dot{F}X^{-1}Y^{-1} + XYinv(X\dot{E})Y^{-1} + XYX^{-1}inv(Y\dot{F})$$

Pero fácilmente se comprueba que $inv(X\dot{E}) = -\dot{E}X^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} d_{(X,Y)}R(X\dot{E}, Y\dot{F}) &= X\dot{E}YX^{-1}Y^{-1} + XY\dot{F}X^{-1}Y^{-1} - XY\dot{E}X^{-1}Y^{-1} - XYX^{-1}\dot{F}Y^{-1} = \\ &= X\dot{E}X^{-1}[X, Y] + XY\dot{F}(XY)^{-1}[X, Y] - XY\dot{E}(XY)^{-1}[X, Y] - [X, Y]Y\dot{F}Y^{-1} = \\ &= \left(X\dot{E}X^{-1} + (XY)\dot{F}(XY)^{-1} - (XY)\dot{E}(XY)^{-1} - [X, Y]Y\dot{F}Y^{-1}[Y, X] \right) [X, Y] = \\ &= \left(X\dot{E}X^{-1} - (XY)\dot{E}(XY)^{-1} + (XY)\dot{F}(XY)^{-1} - ([X, Y]Y)\dot{F}([X, Y]Y)^{-1} \right) [X, Y] \end{aligned}$$

Si anotamos $\dot{E}' := X\dot{E}X^{-1} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \dot{F}' := (XY)\dot{F}(XY)^{-1} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ se obtiene

$$\begin{aligned}
d_{(X,Y)}R(X\dot{E}, Y\dot{F}) &= \left(\dot{E}' - (XYX^{-1})\dot{E}'(XYX^{-1})^{-1} + \dot{F}' - ([X, Y]X^{-1})\dot{F}'([X, Y]X^{-1})^{-1} \right) [X, Y] \\
&= \left(\dot{E}' - Ad(XYX^{-1})(\dot{E}') + \dot{F}' - Ad([X, Y]X^{-1})(\dot{F}') \right) [X, Y] \\
&= \left(\left(Id_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - Ad(XYX^{-1}) \right) (\dot{E}') + \left(Id_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - Ad([X, Y]X^{-1}) \right) (\dot{F}') \right) [X, Y]
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\left(\left(Id_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - Ad(XYX^{-1}) \right) (\dot{E}') + \left(Id_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - Ad([X, Y]X^{-1}) \right) (\dot{F}') \right) \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ y las transformaciones $\dot{E} \mapsto \dot{E}'$, $\dot{F} \mapsto \dot{F}'$ son isomorfismos lineales de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Deducimos que basta mostrar que

$$(\dot{E}', \dot{F}') \mapsto \left(Id_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - Ad(XYX^{-1}) \right) (\dot{E}') + \left(Id_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - Ad([X, Y]X^{-1}) \right) (\dot{F}')$$

es sobreyectiva.

Es fácil ver que si $Z \neq \pm I$, entonces $\dim(Im(Id_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - Ad(Z))) = 2$ y como X e Y no conmutan, entonces $XYX^{-1} \neq \pm I$, $[X, Y]X^{-1} \neq \pm I$ así que la transformación anterior será sobreyectiva si

$$Im(Id_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - Ad(XYX^{-1})) \neq Im(Id_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - Ad([X, Y]X^{-1})) \quad (7.7)$$

Por otra parte si $Z \in SL(2, \mathbb{R})$, entonces $Ad(Z)$ preserva la forma de Killing \mathbb{K} de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ que es no degenerada, así que un argumento estándar de álgebra lineal garantiza que

$$Im(Id_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - Ad(Z)) = (Ker(Id_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - Ad(Z)))^\perp = (Fix(Ad(Z)))^\perp$$

donde $Fix(Ad(Z))$ denota el conjunto de puntos fijos de $Ad(Z)$ y \perp el complemento \mathbb{K} -ortogonal.

Supongamos por absurdo que (7.7) no ocurre. Entonces

$$Fix(Ad(XYX^{-1})) = Fix(Ad([X, Y]X^{-1}))$$

Conjugando por un elemento adecuado de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ podemos suponer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es un vector fijo común y un cálculo explícito muestra que esto implica que XYX^{-1} conmuta con $[X, Y]X^{-1}$. De ahí, uno deduce que $[X, Y] = I$ y esto es una contradicción. \square

Combinando las proposiciones 7.1.3 y 7.1.7 con los lemas 7.1.8 y 1.2.2 uno obtiene el siguiente:

Corolario 7.1.9. *La restricción $\tilde{R} : \Omega \rightarrow Im\tilde{R} \setminus \{I\}$ tiene la propiedad de levantamiento de caminos.* \square

Observación 7.1.10. Usando formas normales (ver capítulo 2) no es difícil ver que si $[X, Y] = I$, entonces $d_{(X,Y)}\tilde{R}$ no es sobreyectivo. En efecto, basta razonar como en el lema 7.1.8 y ver que los puntos fijos de las representaciones adjuntas coinciden. Una conclusión similar a la de la observación 5.2.13 se obtiene.

7.2. El caso $\Sigma_{1,1}$

Fijemos la presentación $\pi_1(\Sigma_{1,1}) = \langle a, b, c_1 \mid [a, b]c_1 = 1 \rangle$ y sea $W(\Sigma_{1,1})$ el subconjunto de representaciones $\pi_1(\Sigma_{1,1}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ que toman valores hiperbólicos en c_1 . Computamos aquí las componentes conexas de este espacio (teorema 7.2.3).

Por abuso de notación, de aquí en más notaremos R y \tilde{R} a los mapas definidos por (7.1) y (7.2) respectivamente, pero en $PSL(2, \mathbb{R})$. Es decir que

$$R : PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$$

$$\tilde{R} : PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$$

Los resultados de la sección previa en conjunto con el corolario 1.2.4 y el lema 1.2.2 nos permiten deducir los siguientes corolarios.

Corolario 7.2.1. $Im\tilde{R} = \{I\} \cup Ell_{\pm 1} \cup Par_0 \cup Hyp_0 \cup Hyp_{\pm 1} \cup Par_{-1}^+ \cup Par_1^-$. Además, \tilde{R} tiene fibras conexas y si Ω es el conjunto de pares de elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ que no conmutan, entonces

$$\tilde{R} : \Omega \longrightarrow Im\tilde{R} \setminus \{I\}$$

tiene la propiedad de levantamiento de caminos a extremos fijos. □

Corolario 7.2.2. $R : W(\Sigma_{1,1}) \longrightarrow Hyp$ tiene la propiedad de levantamiento de caminos. □

Estamos en condiciones de demostrar el resultado principal de este capítulo. Utilizaremos la identificación

$$W(\Sigma_{1,1}) \cong \{(A, B, C_1) \in PSL(2, \mathbb{R})^2 \times Hyp, [A, B]C_1 = I\}$$

Teorema 7.2.3. Las componentes conexas de $W(\Sigma_{1,1})$ son los conjuntos

$$\left(eu|_{W(\Sigma_{1,1})} \right)^{-1}(k), \quad k = -1, 0, 1$$

Demostración. Notemos en primer lugar que si $\phi = (A, B, C_1) \in W(\Sigma_{1,1})$ y $\tilde{C}_1 \in Hyp_0$ es el levantado canónico de C_1 , entonces $\tilde{R}(A, B)\tilde{C}_1 = z^{eu(\phi)}$. Como $\tilde{C}_1^{-1} \in Hyp_0$, obtenemos que $\tilde{R}(A, B) = z^{eu(\phi)}\tilde{C}_1^{-1} \in Hyp_{eu(\phi)}$ y por lo tanto $Im\tilde{R} \cap Hyp_{eu(\phi)} \neq \emptyset$. Por el corolario 7.2.1 deducimos que $eu(\phi) \in \{-1, 0, 1\}$.

Recíprocamente, sea $\tilde{C} \in Hyp_k$ con $k = -1, 0, 1$. Por el corolario 7.2.1 sabemos que existen $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$ tales que $\tilde{R}(A, B) = \tilde{C}$. Sea $C \in Hyp$ el proyectado y la representación

$$\phi := (A, B, C_1) \in W(\Sigma_{1,1})$$

donde $C_1 = C^{-1}$. Si $\tilde{C}_1 \in Hyp_0$ es el levantado canónico de C_1 , entonces \tilde{C}_1^{-1} es el levantado canónico de C y concluimos que $z^k \tilde{C}_1^{-1} = \tilde{C} = \tilde{R}(A, B)$. Por la observación 3.3.7 esto implica que $eu(\phi) = k$, es decir que todos los valores posibles son tomados.

Finalmente, sean $\phi, \phi' \in W(\Sigma_{1,1})$ tales que $eu(\phi) = k = eu(\phi')$. En las convenciones usuales de notación, tenemos $\tilde{R}(A, B) = z^k \tilde{C}_1^{-1} \in Hyp_k \subset Im\tilde{R} \setminus \{I\}$ y $\tilde{R}(A', B') = z^k (\tilde{C}'_1)^{-1} \in Hyp_k \subset Im\tilde{R} \setminus \{I\}$. Pero Hyp_k es conexo, así que existe $\tilde{\gamma} \subset Hyp_k$ conectando $\tilde{R}(A, B)$ con $\tilde{R}(A', B')$. Nuevamente por el corolario 7.2.1 existe $(A_t, B_t) \in PSL(2, \mathbb{R})^2$ desde (A, B) y hasta (A', B') tal que

$$\tilde{R}(A_t, B_t) = \tilde{\gamma}(t) \in Hyp_k$$

En particular, $\phi_t := (A_t, B_t, [B_t, A_t]) \in W(\Sigma_{1,1})$ es un camino comenzando en ϕ y terminando en ϕ' . □

Observación 7.2.4. Notar que si $k \neq k'$, entonces Hyp_k se conecta a $Hyp_{k'}$ dentro de $Im\tilde{R} \setminus \{I\}$ y tal camino puede ser levantado. Sin embargo, la representación que define no es un elemento de $W(\Sigma_{1,1})$ pues el camino en $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ no está incluido en \widetilde{Hyp} . Más aún, tal camino pasa por elementos elípticos así que su clase de Euler no siempre está definida. Esta observación también es válida para $\tilde{M} : H(\Sigma_{0,3}) \rightarrow Im\tilde{M} = Im\tilde{R} \setminus \{I\}$ y será utilizada en el capítulo 9.

Capítulo 8

El teorema para un bitoro

Calculamos ahora las componentes conexas del espacio

$$\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_2), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \cong \{(A_1, B_1, A_2, B_2) \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})^4, [A_1, B_1][A_2, B_2] = I\}$$

Por razones que quedarán claras en la prueba, es conveniente definir el subconjunto

$$W'(\Sigma_2) := \{(A_1, B_1, A_2, B_2) \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})^4, [A_1, B_1] = [B_2, A_2] \neq I\}$$

En el apéndice C se demuestra que $W'(\Sigma_2) \subset \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_2), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ es un abierto denso (proposición C.1.6). Además, puede probarse que $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_2), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ es localmente conexo por caminos (ver la observación 9.1.2 en el capítulo 9). Esto implica que toda representación se conecta a una del conjunto $W'(\Sigma_2)$.

Teorema 8.0.1. *Las componentes conexas de $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_2), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ son los conjuntos*

$$eu^{-1}(k), \quad k = -2, -1, 0, 1, 2$$

Demostración. Probemos en primer lugar que eu toma todos los valores en $[-2, 2] \cap \mathbb{Z}$ y sólo esos.

Sea $\phi = (A_1, B_1, A_2, B_2) \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_2), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$. Por el teorema 3.3.2 sabemos que

$$\tilde{R}(A_1, B_1)\tilde{R}(A_2, B_2) = z^{eu(\phi)}$$

Esto implica que $\tilde{R}(A_1, B_1) = z^{eu(\phi)}\tilde{R}(B_2, A_2)$ y por lo tanto $\text{Im}\tilde{R} \cap z^{eu(\phi)}\text{Im}\tilde{R} \neq \emptyset$. Gracias al corolario 7.2.1 deducimos que $eu(\phi) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Recíprocamente, si $|k| < 2$ entonces existe un punto en $\text{Im}\tilde{R} \cap z^k\text{Im}\tilde{R}$ así que es posible elegir $(A_1, B_1, A_2, B_2) \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})^4$ tales que

$$\tilde{R}(A_1, B_1) = z^k\tilde{R}(B_2, A_2) \implies [A_1, B_1] = [B_2, A_2]$$

Esto implica que $\phi := (A_1, B_1, A_2, B_2) \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_2), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ tiene clase de Euler igual a k .

Sólo queda mostrar que eu tiene fibras conexas.

Sean $\phi = (A_1, B_1, A_2, B_2)$ y $\phi' = (A'_1, B'_1, A'_2, B'_2)$ tales que $eu(\phi) = k = eu(\phi')$. Por los comentarios previos podemos suponer que $[A_1, B_1] \neq I$ y $[A'_1, B'_1] \neq I$ así que el corolario 7.2.1 implica que $\tilde{R}(A_1, B_1) \neq I$ y $\tilde{R}(A'_1, B'_1) \neq I$.

Ahora bien, hemos visto que

$$\tilde{R}(A_1, B_1) \in \text{Im}\tilde{R} \cap z^k \text{Im}\tilde{R} \quad \tilde{R}(A'_1, B'_1) \in \text{Im}\tilde{R} \cap z^k \text{Im}\tilde{R}$$

porque ϕ y ϕ' tienen clase de Euler igual a k . Como $|k| < 2$, el conjunto $\text{Im}\tilde{R} \cap z^k \text{Im}\tilde{R}$ es un conexo no vacío y de hecho $(\text{Im}\tilde{R} \cap z^k \text{Im}\tilde{R}) \setminus \{I\}$ lo es. Esto implica que podemos elegir un camino

$$\tilde{\gamma} \subset (\text{Im}\tilde{R} \cap z^k \text{Im}\tilde{R}) \setminus \{I\}$$

conectando $\tilde{R}(A_1, B_1)$ con $\tilde{R}(A'_1, B'_1)$.

Por el corolario 7.2.1 existe un camino $[A_1^t, B_1^t] \neq I$ comenzando en (A_1, B_1) y terminando en (A'_1, B'_1) tal que

$$\tilde{R}(A_1^t, B_1^t) = \tilde{\gamma}(t)$$

para todo $t \in [0, 1]$.

Ahora bien, como $\tilde{\gamma} \subset z^k \text{Im}\tilde{R} \setminus \{I\}$ no es difícil ver que $z^k \tilde{\gamma}^{-1} \subset \text{Im}\tilde{R} \setminus \{I\}$. Además,

$$z^k \tilde{\gamma}(0)^{-1} = z^k \tilde{R}(A_1, B_1)^{-1} = \tilde{R}(A_2, B_2)$$

$$z^k \tilde{\gamma}(1)^{-1} = z^k \tilde{R}(A'_1, B'_1)^{-1} = \tilde{R}(A'_2, B'_2)$$

Nuevamente por el corolario 7.2.1 existe $[A_2^t, B_2^t] \neq I$ comenzando en (A_2, B_2) y terminando en (A'_2, B'_2) tal que

$$\tilde{R}(A_2^t, B_2^t) = z^k \tilde{\gamma}(t)^{-1}$$

para todo $t \in [0, 1]$.

Hemos obtenido cuatro caminos verificando

$$\tilde{R}(A_1^t, B_1^t) = \tilde{\gamma}(t) = z^k \tilde{R}(B_2^t, A_2^t)$$

Esto implica que $[A_1^t, B_1^t] = [B_2^t, A_2^t]$ y por lo tanto $\phi_t := (A_1^t, B_1^t, A_2^t, B_2^t)$ define un deformación desde ϕ hasta ϕ' .

□

Capítulo 9

Componentes conexas de $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$

Argumentos combinatorios permiten generalizar los teoremas 6.2.4, 7.2.3 y 8.0.1 a cualquier superficie $\Sigma_{g,b}$. Para ello, trabajaremos con la descomposición árbol-dual de $\Sigma_{g,b}$ y probamos que las representaciones $\pi_1(\Sigma_{g,b}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ pueden deformarse de modo de aplicar la propiedad de aditividad (proposición 3.4.1) y los resultados de los capítulos 6 y 7. Este es el contenido de la sección 9.1. El contenido de la sección 9.2 es un paso intermedio necesario para la prueba del teorema en el caso general (sección 9.3).

9.1. Primeras deformaciones

De aquí en más, supondremos fijada una descomposición árbol-dual de $\Sigma_{g,b}$ (subsección 1.1.2).

Escribamos entonces $\Sigma_{g,b} = \bigcup_i \Sigma^{(i)}$ y tomemos $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$. Dado i podemos considerar la representación $\phi^i : \pi_1(\Sigma^{(i)}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ dada por la composición

$$\phi^i : \pi_1(\Sigma^{(i)}) \rightarrow \pi_1(\Sigma_{g,b}) \xrightarrow{\phi} \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \quad (9.1)$$

donde la primer flecha es la inducida por $\Sigma^{(i)} \hookrightarrow \Sigma_{g,b}$.

Formalmente deberíamos suponer elegido un punto base $x_0 \in \Sigma_{g,b}$, caminos γ_i conectando dicho punto con un punto base en $\Sigma^{(i)}$ y definir ϕ^i a partir de ahí. Es fácil ver que cambiar el camino γ_i conjugua ϕ^i con otra representación por un elemento de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Sin embargo, todos los resultados que nos interesa probar sobre las restricciones ϕ^i son “invariantes por conjugación” así que no nos preocuparemos en exceso por esto. Más precisamente, el objetivo de esta sección es el de establecer las siguientes propiedades:

- Genéricamente $\text{Im}\phi^i$ es no abeliana para todo i . Esto lo queremos porque gracias a lo estudiado en los capítulos 6 y 7 sabemos levantar caminos correspondientes a representaciones no abelianas.

- Siempre puede deformarse ϕ de modo que cada ϕ^i aplique los bordes de $\Sigma^{(i)}$ en elementos hiperbólicos. Esto lo queremos poder aplicar los teoremas ya probados en $\Sigma_{0,3}$ y $\Sigma_{1,1}$ y la propiedad de aditividad de la clase de Euler.

9.1.1. Una propiedad genérica en $W(\Sigma_{g,b})$

Recordemos que $W(\Sigma_{g,b}) \subset \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ es el subconjunto de representaciones que aplican los bordes de $\Sigma_{g,b}$ en elementos hiperbólicos. En particular, la definición anterior significa que $W(\Sigma_g) = \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$.

Sea una descomposición árbol-dual en $\Sigma_{g,b}$ y notemos de aquí en más

$$W'(\Sigma_{g,b}) := \{\phi \in W(\Sigma_{g,b}), \text{Im}\phi^i \text{ es no abeliana para todo } i\} \quad (9.2)$$

Proposición 9.1.1. $W'(\Sigma_{g,b})$ es abierto y denso en $W(\Sigma_{g,b})$.

Demostración. La prueba de esta proposición tiene algunos prerequisites técnicos. Para que la exposición sea más fluida, la posponemos hasta el apéndice C. \square

Observación 9.1.2. $W(\Sigma_{g,b})$ es localmente arco-conexo. En efecto, en el caso con borde uno tiene que $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{R})^{2g+b-1}$ es una variedad diferenciable y como “ser hiperbólico” es una propiedad abierta, uno deduce que $W(\Sigma_{g,b})$ es abierto y por lo tanto una variedad diferenciable. Por otra parte, $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ es una variedad algebraica (ver apéndice C) y por lo tanto puede ser triangulada así que es localmente arco-conexa (ver [18]). La proposición anterior implica entonces que toda $\phi \in W(\Sigma_{g,b})$ puede ser deformada a un elemento de $W'(\Sigma_{g,b})$ arbitrariamente cercano a ϕ .

En [6] se prueba algo más fuerte que la proposición 9.1.1. Concretamente, se demuestra que el conjunto de representaciones fieles es denso en $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$. Por otra parte, las representaciones no fieles también son densas en las clases distintas de $\pm(2g-2)$ (por esta y otras propiedades de densidad de representaciones de grupos de superficie en $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ ver [9]). Sin embargo ninguno de estos resultados es necesario para nuestros propósitos.

9.1.2. Deformaciones a $\bigcap_i W(\Sigma^{(i)})$

En esta subsección queremos probar que genéricamente podemos deformar toda representación de $W(\Sigma_{g,b})$ a una que aplique cada borde de cada subsuperficie $\Sigma^{(i)}$ en elementos hiperbólicos. Es decir, queremos ver que que toda representación puede deformarse a ϕ tal que

$$\phi^i \in W(\Sigma^{(i)}) \text{ para todo } i = 1, \dots, -\chi(\Sigma_{g,b})$$

donde ϕ^i es como en (9.1).

9.1. Primeras deformaciones

Es importante tener en cuenta que nos interesan representaciones en $W(\Sigma_{g,b})$, es decir que los bordes de $\Sigma_{g,b}$ van en elementos hiperbólicos. Si $c \subset \Sigma_{g,b} \setminus \partial\Sigma_{g,b}$ es una componente de borde de una subsuperficie de la descomposición árbol-dual, las deformaciones que realizaremos “moverán” $\phi(c)$ por distintos subconjuntos de la partición de $PSL(2, \mathbb{R})$ hasta llevarlo a *Hyp*, sin que esto implique que estemos saliendo de $W(\Sigma_{g,b})$.

La demostración es por inducción en $-\chi(\Sigma_{g,b})$. El paso base se divide en tres partes: el caso $\Sigma_{g,b} = \Sigma_{1,2}$, el caso $\Sigma_{g,b} = \Sigma_{0,4}$ y el caso $\Sigma_{g,b} = \Sigma_{2,0} = \Sigma_2$ (respectivamente, lemas 9.1.3, 9.1.6 y 9.1.9). En la proposición 9.1.11 se demuestra el paso inductivo. En el proceso de la demostración deduciremos algunos corolarios que serán útiles más adelante.

Paso base: el caso $\Sigma_{1,2}$

Consideramos en primer lugar $\Sigma_{1,2}$ con la descomposición

$$\Sigma_{1,2} = \Sigma^{(1)} \cup \Sigma^{(2)}$$

donde $\Sigma^{(1)} \cong \Sigma_{1,1}$ y $\Sigma^{(2)} \cong \Sigma_{0,3}$. Para fijar las ideas, notemos $T_1 := \Sigma^{(1)}$ y $P_1 := \Sigma^{(2)}$. Sea $c \subset T_1 \cap P_1$ la componente de borde común y las presentaciones

$$\pi_1(\Sigma_{1,2}) = \langle a, b, c_1, c_2 \mid [a, b]c_1c_2 = 1 \rangle$$

$$\pi_1(T_1) = \langle a, b, c \mid [a, b]c = 1 \rangle$$

$$\pi_1(P_1) = \langle c_1, c_2, c \mid c_1c_2c^{-1} = 1 \rangle$$

Para $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{1,2}), PSL(2, \mathbb{R}))$, notaremos ϕ^{T_1} y ϕ^{P_1} a las respectivas restricciones.

Lema 9.1.3. *En las notaciones anteriores, sea $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{1,2}), PSL(2, \mathbb{R}))$ tal que $\text{Im}(\phi^{T_1})$ y $\text{Im}(\phi^{P_1})$ son no abelianos. Entonces existe un camino $\phi_t \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{1,2}), PSL(2, \mathbb{R}))$ comenzando en ϕ tal que $\text{Im}(\phi_t^{T_1})$ y $\text{Im}(\phi_t^{P_1})$ son no abelianos para todo $t \in [0, 1]$ y $\phi_1(c) \in \text{Hyp}$.*

Demostración. Sean $A := \phi(a), B := \phi(b), C := \phi(c), C_i := \phi(c_i)$. Si $C \in \text{Hyp}$ no hay nada que probar así que asumimos $C \notin \text{Hyp}$. Como $[B, A] = C$, entonces $\tilde{R}(B, A) \in PSL(2, \mathbb{R})$ es un levantado de C y este elemento se proyecta a un punto de $SL(2, \mathbb{R})$ que por abuso anotaremos C . Sabemos entonces que $-2 \leq \text{tr}(C) \leq 2$.

Ahora bien, si $C_i \in SL(2, \mathbb{R})$ son levantados de $C_i \in PSL(2, \mathbb{R})$ cualesquiera, entonces $C_1C_2 = \pm C$, así que multiplicando C_1 por $-I$ si fuera necesario podemos suponer $C_1C_2 = C$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y los caminos

$$(x_t, y_t, z_t) := (\text{tr}(C_1), \text{tr}(C_2), t(2 + \varepsilon) + (1 - t)\text{tr}(C)) \tag{9.3}$$

$$(x_t, y_t, z'_t) := (\text{tr}(C_1), \text{tr}(C_2), t(-2 - \varepsilon) + (1 - t)\text{tr}(C))$$

Afirmamos que alguno de estos caminos evita $[-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2]$ y esto nos permitirá aplicar la proposición 5.2.12. En efecto, supongamos que el primero no lo evita. Entonces $-2 \leq \text{tr}(C_i) \leq 2$ para $i = 1, 2$ y existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que

$$\kappa(x_{t_0}, y_{t_0}, z_{t_0}) \in [-2, 2]$$

Esto implica que

$$\frac{\operatorname{tr}(C_1)\operatorname{tr}(C_2)}{2} - \frac{\sqrt{(4-\operatorname{tr}(C_1)^2)(4-\operatorname{tr}(C_2)^2)}}{2} \leq z_{t_0} \leq \frac{\operatorname{tr}(C_1)\operatorname{tr}(C_2)}{2} + \frac{\sqrt{(4-\operatorname{tr}(C_1)^2)(4-\operatorname{tr}(C_2)^2)}}{2}$$

De ahí, uno deduce que

$$\operatorname{tr}(C) < \frac{\operatorname{tr}(C_1)\operatorname{tr}(C_2)}{2} - \frac{\sqrt{(4-\operatorname{tr}(C_1)^2)(4-\operatorname{tr}(C_2)^2)}}{2} \quad (9.4)$$

De lo contrario, como $\operatorname{tr}(C) \leq t_0(2 + \varepsilon) + (1 - t_0)\operatorname{tr}(C) = z_{t_0}$ se deduciría que

$$\kappa\chi(C_1, C_2) = \kappa(x_0, y_0, z_0) \in [-2, 2]$$

Esto implicaría que $\chi(C_1, C_2) \in [-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2]$. Sin embargo, por hipótesis sabemos que $[C_1, C_2] \neq I$ y esto es contradictorio con el lema 5.2.11. Concluimos que (9.4) vale.

En particular, $z'_t \leq \operatorname{tr}(C) < \frac{\operatorname{tr}(C_1)\operatorname{tr}(C_2)}{2} - \frac{\sqrt{(4-\operatorname{tr}(C_1)^2)(4-\operatorname{tr}(C_2)^2)}}{2}$ para todo $t \in [0, 1]$ y esto implica que $\kappa(x_t, y_t, z'_t) > 2$, así que (x_t, y_t, z'_t) no corta $[-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2]$.

Como la hipótesis garantiza $[C_1, C_2] \neq I$, podemos entonces aplicar la proposición 5.2.12 a alguno de los dos caminos y encontrar un levantado $(C_1^t, C_2^t) \in \Omega \subset SL(2, \mathbb{R})^2$ tal que $(C_1^0, C_2^0) = (C_1, C_2)$. Proyectando a $PSL(2, \mathbb{R})$, tenemos un camino de representaciones de $\pi_1(P_1)$ en $PSL(2, \mathbb{R})$ comenzando en ϕ^{P_1} definido por

$$\phi_t^{P_1} := (C_1^t, C_2^t, C_1^t C_2^t)$$

Notar además que $|\operatorname{tr}(\phi_1^{P_1}(c))| = |\operatorname{tr}(C_1^1 C_2^1)| = 2 + \varepsilon$, de modo que $\phi_1^{P_1}(c) \in \text{Hyp}$.

Ahora "completamos" $\phi_t^{P_1}$ a una representación de $\pi_1(\Sigma_{1,2})$, aplicando el corolario 7.2.1. Más precisamente, como $\tilde{R}(B, A)$ levanta $C = C_1^0 C_2^0$ podemos considerar $\widetilde{C_1^t C_2^t}$ el levantado de $C_1^t C_2^t$ comenzando en $\tilde{R}(B, A)$. Más aún, $\widetilde{C_1^t C_2^t} \in \operatorname{Im} \tilde{R}$ porque comienza en $\tilde{R}(B, A) \in \operatorname{Im} \tilde{R}$ y su traza es monótona desde un punto no hiperbólico hasta un hiperbólico. Además $[C_1^t, C_2^t] \in PSL(2, \mathbb{R}) \setminus I$ así que $\widetilde{C_1^t C_2^t} \neq I$ para todo t y existe un camino

$$(B_t, A_t) \in \Omega$$

comenzando en (B, A) y tal que $\tilde{R}(B_t, A_t) = \widetilde{C_1^t C_2^t}$.

Proyectando a $PSL(2, \mathbb{R})$, obtenemos que $[B_t, A_t] = C_1^t C_2^t$ para todo $t \in [0, 1]$. Entonces

$$\phi_t := (A_t, B_t, C_1^t, C_2^t)$$

define un camino con las propiedades deseadas. □

Observación 9.1.4. Observemos que en las deformaciones del lema previo se tiene que $C_i^t \neq \pm I$ pues $\phi_t^{P_1}$ tiene imagen no abeliana y $\operatorname{tr}(C_i^t)$ es constante en t para $i = 1, 2$.

9.1. Primeras deformaciones

El resultado anterior puede ser mejorado en el caso en que $\phi \in W'(\Sigma_{1,2})$, i.e, si agregamos la hipótesis $C_1, C_2 \in Hyp$. Más precisamente:

Corolario 9.1.5. *En las notaciones del lema anterior, supongamos además que $\phi \in W'(\Sigma_{1,2})$. Entonces la deformación ϕ_t puede suponerse en $W(\Sigma_{1,2})$ y tal que $eu(\phi_1^{P_1}) = \pm 1$.*

Observar que modificar el valor de la clase de Euler en P_1 “fuerza” el valor que toma en T_1 porque $eu(\phi_t)$ es constante y la clase de Euler es aditiva.

Demostración de 9.1.5. Dividimos la demostración en dos etapas.

1. $C \notin Hyp$.

En este caso, manteniendo las notaciones de la prueba anterior tenemos ahora que $|tr(C_i)| > 2$ para $i = 1, 2$. En particular, los dos caminos (9.3) pueden ser levantados por χ y en cualquier caso ser completado a un camino $\phi_t : \pi_1(\Sigma_{1,2}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$. Automáticamente, este camino pertenece a $W'(\Sigma_{1,2})$ pues $|tr(C_i^t)| > 2$ para todo $t \in [0, 1]$.

Queda mostrar que puede suponerse $eu(\phi_1^{P_1}) = \pm 1$. Observemos en primer lugar que la clase de Euler de $\phi_1^{P_1}$ está definida pues los tres bordes de P_1 son aplicados en elementos hiperbólicos. Afirmamos que alguna de las dos posibles elecciones de signo para $tr(C_1^1 C_2^1)$ garantiza $eu(\phi^{P_1}) = \pm 1$. En efecto, si por ejemplo $tr(C_1) = tr(C_1^1) > 2$ y $tr(C_2) = tr(C_2^1) > 2$ puedo elegir el camino (9.3) tal que $tr(C_1^1 C_2^1) = -2 - \varepsilon$. Como $tr(C_1^1), tr(C_2^1) > 2$, los levantados canónicos $\widetilde{C}_1^1, \widetilde{C}_2^1 \in Hyp_0$ de $C_1^1, C_2^1 \in PSL(2, \mathbb{R})$ levantan $C_1^1, C_2^1 \in SL(2, \mathbb{R})$ (ver figura 9.1 (a)), así que $\widetilde{C}_1^1 \widetilde{C}_2^1$ levanta $C_1 C_2 \in SL(2, \mathbb{R})$. Sea como en el corolario 6.2.1 el mapa

$$\widetilde{M} : W(P_1) \subset PSL(2, \mathbb{R})^2 \rightarrow Hyp_0 \cup Hyp_{\pm 1}$$

Hemos probado que $\widetilde{M}(C_1, C_2)$ es un levantado de $C_1 C_2$ que tiene traza negativa, así que $\widetilde{M}(C_1, C_2) = \widetilde{C}_1^1 \widetilde{C}_2^1 \in Hyp_{\pm 1}$. En particular, gracias a la observación 6.1.2 deducimos que $eu(\phi_1^{P_1}) = \pm 1$.

Si por el contrario $tr(C_1) = tr(C_1^1) < -2$ y $tr(C_2) = tr(C_2^1) > 2$ elegimos esta vez el camino (9.3) de modo que $tr(C_1^1 C_2^1) = 2 + \varepsilon$. Entonces el levantado canónico de $C_1^1 \in PSL(2, \mathbb{R})$ no levanta $C_1^1 \in SL(2, \mathbb{R})$, sino que levanta $-C_1^1 \in SL(2, \mathbb{R})$ (ver figura 9.1 (b)). Así que $\widetilde{M}(C_1, C_2) = \widetilde{C}_1^1 \widetilde{C}_2^1$ levanta $-C_1^1 C_2^1 \in SL(2, \mathbb{R})$ que tiene traza negativa. Se deduce que $\widetilde{M}(C_1, C_2) = \widetilde{C}_1^1 \widetilde{C}_2^1 \in Hyp_{\pm 1}$ y por lo tanto $eu(\phi_1^{P_1}) = \pm 1$. Las restantes posibilidades admiten tratamientos análogos y hemos terminado 1.

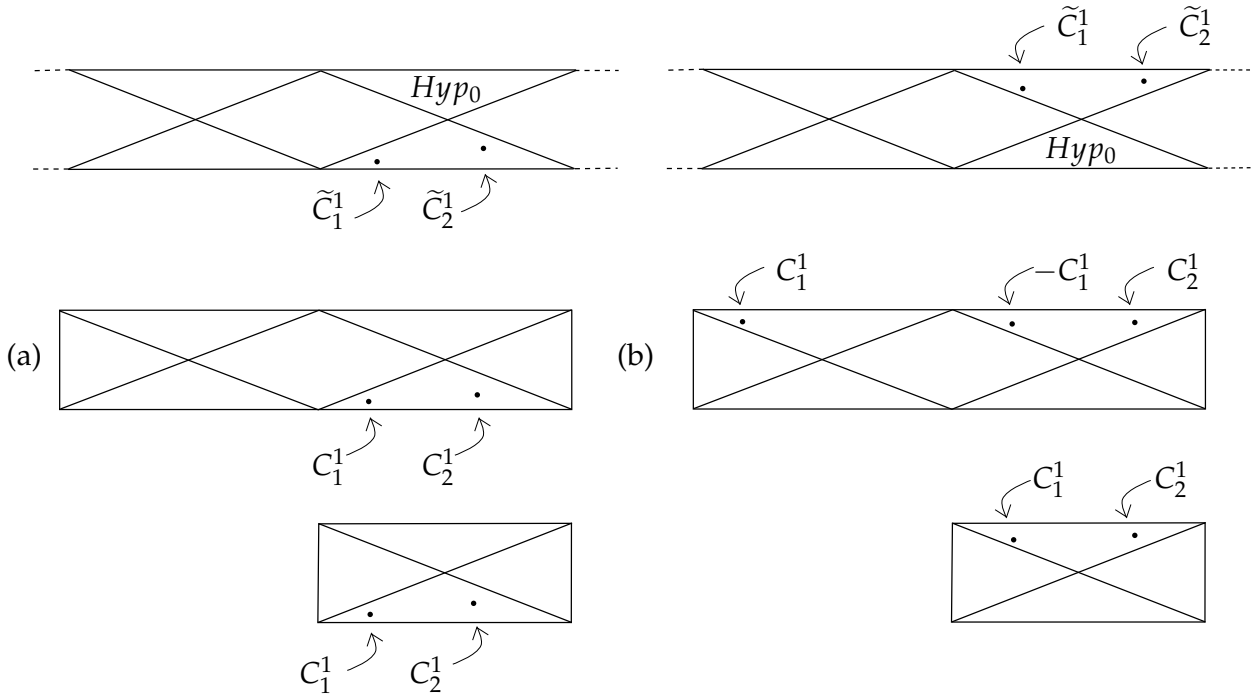


Figura 9.1: Deformaciones en 1.

 2. $C \in Hyp$.

Si $eu(\phi^{P_1}) = \pm 1$ no hay nada que probar, así que supongamos $eu(\phi^{P_1}) = 0$. Esto implica que $\tilde{C} = \tilde{C}_1 \tilde{C}_2$, donde \tilde{C} es el levantado canónico de C . Por la proposición 3.4.1, obtenemos que $k := eu(\phi) = eu(\phi^{T_1}) + eu(\phi^{P_1}) = eu(\phi^{T_1})$ y gracias al teorema 7.2.3 concluimos que $|k| < 1$. Además, sabemos que $\tilde{R}(A, B) \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 = z^k$.

Supongamos primero que $k = 0, 1$. Elegimos $\tilde{\gamma} \subset Im \tilde{M}$, de traza estrictamente decreciente comenzando en $\tilde{C} = \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \in Hyp_0$ y terminando en Hyp_1 . Por el corolario 6.2.1 existe $(C_1^t, C_2^t) \in Hyp^2$ comenzando en (C_1, C_2) y tal que

$$\tilde{M}(C_1^t, C_2^t) = \tilde{\gamma}(t)$$

Ahora bien, por elección de $\tilde{\gamma}$ sabemos que $z^{-k} \tilde{\gamma} \subset Im \tilde{M} = Im \tilde{R} \setminus \{I\}$ comienza en $z^{-k} \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 = \tilde{R}(B, A)$ y por el corolario 7.2.1 existe $(B_t, A_t) \in \Omega$ comenzando en (B, A) y tal que $\tilde{R}(B_t, A_t) = z^{-k} \tilde{\gamma}(t)$ (ver figura 9.2 (a)). En particular

$$[B_t, A_t] = C_1^t C_2^t$$

y $\phi_t := (A_t, B_t, C_1^t, C_2^t)$ define una deformación con las propiedades deseadas (notar que, si bien C_t no es siempre hiperbólico esto no implica que $\phi_t \notin W(\Sigma_{1,2})$ porque c no es un borde de $\Sigma_{1,2}$).

9.1. Primeras deformaciones

En el caso $k = -1$ podemos elegir $\tilde{\gamma}$ del mismo modo pero terminando en Hyp_{-1} , de modo que $z^{-k}\tilde{\gamma} \subset Im\tilde{M} = Im\tilde{R} \setminus \{I\}$ comienza en $z^{-k}\tilde{C}_1\tilde{C}_2 = \tilde{R}(B, A)$ y se procede igual (ver figura 9.2 (b)).

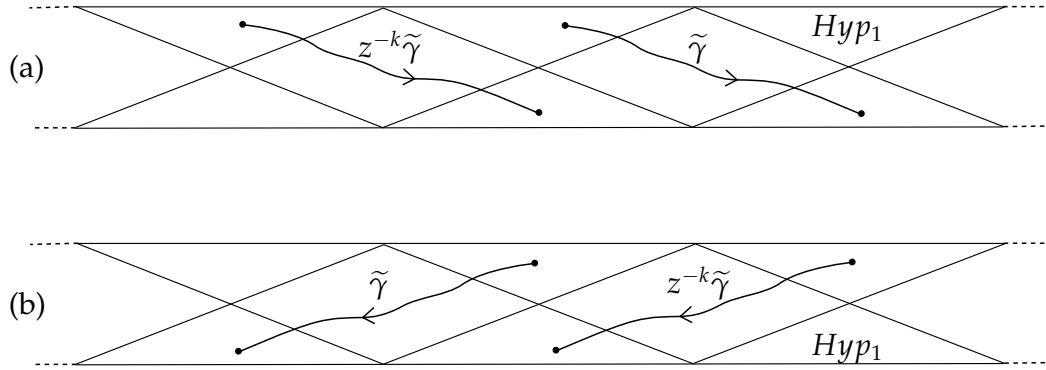


Figura 9.2: Deformaciones en 2.

□

Paso base: el caso $\Sigma_{0,4}$

A continuación probamos resultados análogos para la superficie base $\Sigma_{0,4}$. Consideremos la descomposición

$$\Sigma_{0,4} = \Sigma^{(1)} \cup \Sigma^{(2)}$$

donde $\Sigma^{(1)} \cong \Sigma_{0,3} \cong \Sigma^{(2)}$. Para fijar las ideas, notemos $P_1 := \Sigma^{(1)}$ y $P_2 := \Sigma^{(2)}$. Sea $c \subset P_1 \cap P_2$ la componente de borde común y las presentaciones

$$\pi_1(\Sigma_{0,4}) = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \mid c_1 c_2 c_3 c_4 = 1 \rangle$$

$$\pi_1(P_1) = \langle c_1, c_2, c \mid c_1 c_2 c = 1 \rangle$$

$$\pi_1(P_2) = \langle c_3, c_4, c \mid c_3 c_4 c^{-1} = 1 \rangle$$

Para $\phi \in Hom(\pi_1(\Sigma_{0,4}), PSL(2, \mathbb{R}))$, notaremos ϕ^{P_1} y ϕ^{P_2} a las respectivas restricciones.

Lema 9.1.6. *En las notaciones anteriores, sea $\phi \in Hom(\pi_1(\Sigma_{0,4}), PSL(2, \mathbb{R}))$ tal que $Im(\phi^{P_1})$ y $Im(\phi^{P_2})$ son no abelianos y $\phi(c_1) \in Hyp$. Existe un camino $\phi_t \in Hom(\pi_1(\Sigma_{0,4}), PSL(2, \mathbb{R}))$ comenzando en ϕ tal que $Im(\phi_t^{P_1})$ y $Im(\phi_t^{P_2})$ son no abelianos para todo $t \in [0, 1]$ y $\phi_1(c) \in Hyp$.*

Demostración. Sean $C_i := \phi(c_i)$, $C := \phi(c)$. Si $C \in Hyp$ no hay nada que probar así que asumimos $C \notin Hyp$. Levantando a $SL(2, \mathbb{R})$ tenemos las ecuaciones

$$C_1 C_2 = C^{-1} = C_4^{-1} C_3^{-1}$$

Razonando con los caminos

$$(x_t, y_t, z_t) := (tr(C_3), tr(C_4), t(2 + \varepsilon) + (1 - t)tr(C))$$

$$(x_t, y_t, z'_t) := (tr(C_3), tr(C_4), t(-2 - \varepsilon) + (1 - t)tr(C))$$

como en el lema 9.1.3 podemos obtener $\phi_t^{P_2} := (C_3^t, C_4^t, C_3^t C_4^t) : \pi_1(P_2) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ con imagen no abeliana, comenzado en ϕ^{P_2} y tal que $|tr(\phi_1^{P_2}(c))| > 2$, de modo que $\phi_1^{P_2}(c) \in Hyp$.

Para completar este camino, consideramos

$$t \mapsto (tr(C_1), tr(C_2), tr(\phi_t^{P_2}(c)))$$

que evita $[-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2]$ pues $C_1 \in Hyp$. Por hipótesis, $[C_1, C_2] \neq I$ y además

$$\chi(C_1, C_2) = (tr(C_1), tr(C_2), tr(C^{-1})) = (tr(C_1), tr(C_2), tr(C)) = (tr(C_1), tr(C_2), tr(\phi_0^{P_2}(c)))$$

entonces existe $(C_1^t, C_2^t) \in \Omega \subset SL(2, \mathbb{R})^2$ tal que $(C_1^0, C_2^0) = (C_1, C_2)$ y cumpliendo

$$tr(C_1^t C_2^t) = tr(\phi_t^{P_2}(c)) = tr\left(\left(\phi_t^{P_2}(c)\right)^{-1}\right)$$

Ahora bien, aplicando el primer ítem del ejemplo 2.1.9 obtenemos que los caminos $C_1^t C_2^t$ y $\left(\phi_t^{P_2}(c)\right)^{-1}$ son $SL(2, \mathbb{R})$ -conjugados para todo t . En efecto, $C_1^0 C_2^0 = C_1 C_2 = C^{-1} = \left(\phi_0^{P_2}(c)\right)^{-1} \in Ell \cup Par$ y ambos caminos tienen traza estrictamente monótona. Además $C_1^t C_2^t \neq \pm I$ y $\left(\phi_t^{P_2}(c)\right)^{-1} \neq \pm I$ porque $(C_1^t, C_2^t), (C_3^t, C_4^t) \in \Omega$. Por el lema 2.1.8 existe $X_t \in SL(2, \mathbb{R})$ comenzando en I tal que

$$C_1^t C_2^t = X_t \left(\phi_t^{P_2}(c)\right)^{-1} X_t^{-1}$$

Proyectando a $PSL(2, \mathbb{R})$, obtenemos que $\phi_t := (C_1^t, C_2^t, X_t C_3^t X_t^{-1}, X_t C_4^t X_t^{-1})$ define un camino de representaciones $\pi_1(\Sigma_{0,4}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ con las propiedades deseadas. \square

Observación 9.1.7. ■ Al igual que en el caso $\Sigma_{1,2}$, las deformaciones del resultado anterior dejan fija la traza de los bordes $C_i^t \neq \pm I$.

- Un cálculo explícito muestra que el lema 9.1.6 puede fallar si no suponemos que C_1 es hiperbólico (ver [15], observación 9.7). Sin embargo no será impedimento para nuestros propósitos.

Deducimos el siguiente corolario que será utilizado en la siguiente sección y cuya prueba omitimos por ser análoga a la del corolario 9.1.5.

9.1. Primeras deformaciones

Corolario 9.1.8. *En las notaciones del lema anterior, supongamos además que $\phi \in W'(\Sigma_{0,4})$. Entonces la deformación ϕ_t puede suponerse en $W(\Sigma_{0,4})$ y tal que $eu(\phi_1^{P_1}) = \pm 1$.*

□

Paso base: el caso Σ_2

Vamos ahora a tratar el caso Σ_2 . Es importante dejar claro que este paso no es formalmente necesario porque ya hemos demostrado el teorema de Goldman para el bitoro en el capítulo 8.

Consideremos la descomposición árbol-dual de Σ_2 que consta de dos toros perforados T_1 y T_2 y los grupos fundamentales con presentación

$$\pi_1(\Sigma_2) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] = 1 \rangle$$

$$\pi_1(T_1) = \langle a_1, b_1, c \mid [a_1, b_1]c = 1 \rangle$$

$$\pi_1(T_2) = \langle a_2, b_2, c \mid [a_2, b_2]c^{-1} = 1 \rangle$$

Si $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_2), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$, uno anota ϕ^{T_i} a su restricción a $\pi_1(T_i)$ para $i = 1, 2$.

Lema 9.1.9. *En las notaciones anteriores, sea $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_2), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ tal que $\text{Im}(\phi^{T_1})$ y $\text{Im}(\phi^{T_2})$ son no abelianos. Existe un camino $\phi_t \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_2), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ comenzando en ϕ tal que $\text{Im}(\phi_t^{T_1})$ y $\text{Im}(\phi_t^{T_2})$ son no abelianos para todo $t \in [0, 1]$ y $\phi_1(c) \in \text{Hyp}$.*

Demostración. Gracias al corolario 7.2.1, dado k tal que $|k| \leq 2$ existe $\tilde{C} \in \widetilde{\text{Hyp}} \cap \text{Im}\tilde{R} \cap z^k \text{Im}\tilde{R}$. Sean $A_1, B_1, A_2, B_2 \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tales que

$$\tilde{R}(A_1, B_1) = \tilde{C} \quad \tilde{R}(B_2, A_2) = z^{-k}\tilde{C}$$

Entonces $\phi_1 := (A_1, B_1, A_2, B_2)$ es una representación con clase de Euler igual a k . Para terminar basta aplicar el teorema 8.0.1.

□

La demostración del siguiente corolario queda a cargo del lector.

Corolario 9.1.10. *En las notaciones del lema anterior, la deformación puede elegirse ϕ_t de modo que $eu(\phi_1^{T_1}) = \pm 1$.*

□

Paso inductivo

Concluimos ahora con esta subsección, probando el resultado anunciado al inicio de la misma.

Proposición 9.1.11. *Sea la descomposición árbol-dual $\Sigma_{g,b} = \bigcup_{i=1}^{2g+b-2} \Sigma^{(i)}$ y $\phi \in W'(\Sigma_{g,b})$. Existe $\phi_t \in W'(\Sigma_{g,b})$ comenzando en ϕ y tal que si $i = 1, \dots, 2g+b-2$ y $c \subset \partial\Sigma^{(i)}$, entonces $\phi_1(c) \in Hyp$.*

Demostración. Por inducción en $-\chi(\Sigma_{g,b})$. Cuando $\chi(\Sigma_{g,b}) = -1$ no hay nada que probar pues la superficie coincide con la subsuperficie y, por definición, los elementos de $W'(\Sigma_{g,b})$ aplican los bordes en hiperbólicos.

El caso $\chi(\Sigma_{g,b}) = -2$ ya ha sido tratado en los lemas 9.1.3, 9.1.6 y 9.1.9.

Supongamos entonces que $\chi(\Sigma_{g,b}) < -2$. Cambiando de índices en la descomposición árbol-dual podemos suponer que $\Sigma^{(1)}$ y $\Sigma^{(2)}$ son tales que:

- Si $b \neq 0$ entonces $\Sigma^{(1)}$ contiene una componente de borde de $\Sigma_{g,b}$.
- $\Sigma := \Sigma^{(1)} \cup \Sigma^{(2)}$ es conexa y $\Sigma' := \Sigma_{g,b} \setminus \Sigma$ tiene una o dos componentes conexas, que denotaremos por Λ_1 y Λ_2 .

Para $j = 1, 2$, sea c_j la componente de borde común a Σ y Λ_j y sea también c la componente de borde adyacente a $\Sigma^{(1)}$ y $\Sigma^{(2)}$.

En primer lugar afirmamos que podemos deformar ϕ de modo que aplique c en un elemento hiperbólico. En efecto, si $\phi(c) \in Hyp$ no hay nada que probar. Si $\phi(c) \notin Hyp$, como $\chi(\Sigma) = -2$ y $\partial\Sigma \neq \emptyset$, entonces $\Sigma \in \{\Sigma_{1,2}, \Sigma_{0,4}\}$ y por los lemas 9.1.3 y 9.1.6 existe $\phi_t : \pi_1(\Sigma) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ comenzando en $\phi^\Sigma = \phi|_{\pi_1(\Sigma)}$, imagen no abeliana en $\Sigma^{(1)}$ y $\Sigma^{(2)}$ y tal que $\phi_1(c) \in Hyp$ (el lema 9.1.6 aplica pues si $\Sigma \cong \Sigma_{0,4}$ entonces uno de sus bordes es borde de $\Sigma_{g,b}$ y se mapea en un elemento hiperbólico). Más aún, por las observaciones 9.1.4 y 9.1.7 podemos suponer que $tr(\phi_t(c_j))$ es constante para todo $j = 1, 2$ y como $Im(\phi_t^{\Sigma^{(2)}})$ es no abeliano para todo t , obtenemos que $\phi_t(c_j) \neq I$. Por el ejemplo 2.1.9 y el lema 2.1.8 existe $X_t^{(j)} \in PSL(2, \mathbb{R})$ comenzando en la identidad tal que

$$\phi_t(c_j) = X_t^{(j)} \phi(c_j) \left(X_t^{(j)}\right)^{-1} \quad (9.5)$$

Ahora podemos extender ϕ_t a $\pi_1(\Sigma_{g,b})$ de la siguiente manera: si $\gamma \in \pi_1(\Lambda_j)$ definimos

$$\phi_t(\gamma) := X_t^{(j)} \phi(\gamma) \left(X_t^{(j)}\right)^{-1} \quad (9.6)$$

Esto define un camino continuo pues en los bordes c_j coincide con (9.5) y como la descomposición es árbol-dual no hay ningún otro problema de compatibilidad. Evidentemente $\phi_t \in W'(\Sigma_{g,b})$, $\phi_0 = \phi$ y $\phi_1(c) \in Hyp$ terminando la afirmación. Por abuso de notación supondremos de aquí en más que $\phi(c) \in Hyp$.

9.2. El caso $\chi(\Sigma_{g,b}) = -2$

Ahora bien, tomemos $\phi^{\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Sigma^{(2)}}$ la restricción de ϕ a $\pi_1(\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Sigma^{(2)})$. Como $\phi \in W'(\Sigma_{g,b})$ y $\phi(c) \in Hyp$, entonces $\phi^{\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Sigma^{(2)}} \in W'(\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Sigma^{(2)})$ y $\Sigma_{g,b} = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Sigma^{(2)} \cup \Sigma^{(1)}$ así que $\chi(\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Sigma^{(2)}) = \chi(\Sigma_{g,b}) + 1$. Por inducción, existe $\phi_t \in W'(\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Sigma^{(2)})$ comenzando en $\phi^{\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Sigma^{(2)}}$ y que aplica cada borde de $\Sigma^{(i)}$ en hiperbólicos ($i > 1$). Pero entonces $\phi_t(c) \in Hyp$ para todo $t \in [0, 1]$ así que este camino puede ser extendido a $\pi_1(\Sigma^{(1)})$ aplicando el corolario 6.2.3 o el corolario 7.2.2, según si $\Sigma^{(1)} \cong \Sigma_{0,3}$ o $\Sigma^{(1)} \cong \Sigma_{1,1}$. \square

Vemos aquí la utilidad de la generalidad de los lemas 9.1.3 y 9.1.6 pues al principio de la deformación no tenemos ningún control sobre los bordes c_j , de modo que bien podrían ser ambos elípticos o parabólicos.

Por otra parte, hemos visto también la utilidad de considerar una descomposición en donde el grafo dual \mathcal{T} es un árbol (ver subsección 1.1.2). Para verlo, imaginemos por un momento que las subsuperficies Λ_1 y Λ_2 comparten un borde c' , entonces el argumento de la proposición previa no es aplicable. En efecto, nada garantiza que los caminos $X_t^{(j)}$ verifiquen

$$X_t^{(1)}\phi(c') \left(X_t^{(1)}\right)^{-1} = X_t^{(2)}\phi(c') \left(X_t^{(2)}\right)^{-1}$$

Esto puede traer problemas de compatibilidad si intentamos extender $\phi_t : \pi_1(\Sigma) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ como lo hicimos en la ecuación (9.6).

9.2. El caso $\chi(\Sigma_{g,b}) = -2$

Ahora probamos el teorema de Goldman en los casos $\Sigma_{1,2}$ y $\Sigma_{0,4}$ (respectivamente, teoremas 9.2.2 y 9.2.3).

Para conseguir dichos resultados, necesitamos de un lema previo que es de carácter general y no supone $\chi = -2$. La idea de la demostración de dicho lema será utilizada varias veces en la sección 9.3.

Consideramos una generalización de los mapas \tilde{M} y \tilde{R} definidos en los capítulos 6 y 7. Más precisamente, sea $\Sigma_{g,b}$ con $b > 0$ y consideremos la presentación

$$\pi_1(\Sigma_{g,b}) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_b \mid \left(\prod_{j=1}^g [a_j, b_j]\right) c_1 \dots c_b = 1 \rangle$$

Definimos el *mapa evaluación*

$$\tilde{E}_{c_b} : W(\Sigma_{g,b}) \rightarrow \widetilde{Hyp}, \quad \tilde{E}_{c_b}(\phi) := \left(\prod_{j=1}^g [\tilde{A}_j, \tilde{B}_j]\right) \tilde{C}_1 \dots \tilde{C}_{b-1} \quad (9.7)$$

donde $\tilde{A}_j, \tilde{B}_j \in PSL(2, \mathbb{R})$ son levantados cualesquiera de $\phi(a_j), \phi(b_j)$ y $\tilde{C}_i \in Hyp_0$ son los levantados canónicos de $\phi(c_i)$. Notar que

$$\tilde{E}_{c_b}(\phi)\tilde{C}_b = z^{eu(\phi)} \implies \tilde{E}_{c_b}(\phi) \in Hyp_{eu(\phi)} \quad (9.8)$$

En palabras, podemos decir que $\tilde{E}_{c_b}(\phi)$ es el único levantado de $\phi(c_b)^{-1}$ en el conjunto $Hyp_{eu(\phi)}$.

Lema 9.2.1. *Sea la descomposición árbol-dual $\Sigma_{g,b} = \bigcup_{i=1}^{2g+b-2} \Sigma^{(i)}$ y tomemos $\phi, \phi' \in W'(\Sigma_{g,b})$ tales que $\phi(c), \phi'(c) \in Hyp$ para toda componente $c \subset \Sigma^{(i)}$. Supongamos que las restricciones ϕ^i y ϕ'^i a $\pi_1(\Sigma^{(i)})$ verifican $eu(\phi^i) = k_i = eu(\phi'^i)$ para todo $i = 1, \dots, -\chi(\Sigma_{g,b})$, entonces existe un camino en $W'(\Sigma_{g,b})$ conectando ϕ con ϕ' .*

Demostración. Por inducción completa en $-\chi(\Sigma_{g,b})$.

Si $\chi(\Sigma_{g,b}) = -1$ la prueba es el contenido de los teoremas 6.2.4 y 7.2.3. Supongamos entonces $\chi(\Sigma_{g,b}) < -1$.

Recordar que la propiedad de aditividad de la clase de Euler (proposición 3.4.1) nos dice que

$$k := eu(\phi) = \sum_{i=1}^{-\chi(\Sigma_{g,b})} k_i = eu(\phi')$$

Ahora bien, escribamos $\Sigma_{g,b} = \Sigma^{(1)} \cup_c \Sigma$ tal que $\chi(\Sigma^{(1)}) = -1$, Σ es conexa y c es la componente de borde común. Como $\chi(\Sigma) = \chi(\Sigma_{g,b}) + 1$, por inducción existe $\phi_t \in W'(\Sigma)$ conectando las restricciones ϕ^Σ y ϕ'^Σ .

Para fijar ideas digamos que $g > 0$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $\Sigma^{(1)} \cong \Sigma_{1,1}$, de modo que anotamos $T_1 := \Sigma^{(1)}$ (el caso $g = 0$ puede tratarse análogamente). Fijemos las presentaciones

$$\begin{aligned} \pi_1(T_1) &= \langle a_1, b_1, c \mid [a_1, b_1]c = 1 \rangle \\ \pi_1(\Sigma) &= \langle a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_b, c \mid \left(\prod_{j>1} [a_j, b_j] \right) c_1 \dots c_b c^{-1} = 1 \rangle \end{aligned}$$

Notaremos como es habitual

$$\begin{aligned} \phi &:= (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, C_1, \dots, C_b), C := \phi(c) \\ \phi' &:= (A'_1, B'_1, \dots, A'_g, B'_g, C'_1, \dots, C'_b), C' := \phi'(c) \\ \phi_t &:= (A_2^t, B_2^t, \dots, A_g^t, B_g^t, C_1^t, \dots, C_b^t, C^t) \end{aligned}$$

Como en (9.7) podemos definir $\tilde{E}_c : W(\Sigma) \rightarrow \widetilde{Hyp}$ la evaluación asociada al borde c , es decir que $\tilde{E}_c(\phi^\Sigma)$ es el trasladado por $z^{(\sum_{i>1} k_i)}$ del levantado canónico $\tilde{C} \in Hyp_0$. En general, $\tilde{E}_c(\phi_t) = z^{(\sum_{i>1} k_i)} \tilde{C}^t$ para todo $t \in [0, 1]$, donde $\tilde{C}^t \in Hyp_0$ es el levantado de $C^t \in Hyp$ comenzando en $\tilde{C} \in Hyp_0$. Observar que dicho levantado necesariamente termina en $\tilde{C}' \in Hyp_0$.

9.2. El caso $\chi(\Sigma_{g,b}) = -2$

Por otra parte, sabemos que $\tilde{R}(A_1, B_1) = z^{k_1} \tilde{C}^{-1}$ y $\tilde{R}(A'_1, B'_1) = z^{k_1} \tilde{C}'^{-1}$ porque $eu(\phi^1) = k_1 = eu(\phi'^1)$. Claramente $z^{k_1} (\tilde{C}^t)^{-1} \in Im \tilde{R} \setminus \{I\}$ así que por el corolario 7.2.1 existe $(A_1^t, B_1^t) \in \Omega$ conectando (A_1, B_1) con (A'_1, B'_1) y tal que

$$\tilde{R}(A_1^t, B_1^t) = z^{k_1} (\tilde{C}^t)^{-1}$$

En particular, $\tilde{R}(A_1^t, B_1^t) \tilde{E}_c(\phi_t) = z^{k_1} (\tilde{C}^t)^{-1} z^{(\sum_{i>1} k_i)} \tilde{C}^t = z^k$ y esto implica que

$$t \mapsto (A_1^t, B_1^t, \dots, A_{g'}^t, B_{g'}^t, C_1^t, \dots, C_b^t)$$

define un camino en $W'(\Sigma_{g,b})$ que extiende $\phi_t \in W'(\Sigma)$ y conecta ϕ con ϕ' . □

Probamos ahora el teorema 4.2.1 en el caso $\chi(\Sigma_{g,b}) = -2$.

Teorema 9.2.2. *Las componentes conexas de $W(\Sigma_{1,2})$ son los conjuntos*

$$\left(eu|_{W(\Sigma_{1,2})} \right)^{-1}(k), \quad k = -2, -1, 0, 1, 2$$

Demostración. Escribimos $\Sigma_{1,2} = T_1 \cup_c P_1$ al igual que en el lema 9.1.3, donde $T_1 \cong \Sigma_{1,1}$ y $P_1 \cong \Sigma_{0,3}$ y fijamos las presentaciones

$$\pi_1(\Sigma_{1,2}) = \langle a, b, c_1, c_2 \mid [a, b]c_1c_2 = 1 \rangle$$

$$\pi_1(T_1) = \langle a, b, c \mid [a, b]c = 1 \rangle$$

$$\pi_1(P_1) = \langle c_1, c_2, c \mid c_1c_2c^{-1} = 1 \rangle$$

Sea $\phi \in W(\Sigma_{1,2})$, veamos que $eu(\phi) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Por la observación 9.1.2 podemos suponer que $\phi \in W'(\Sigma_{1,2})$ y por el lema 9.1.3 asumimos que $\phi(c) \in Hyp$. Sabemos de los teoremas 7.2.3 y 6.2.4 que $|eu(\phi^{T_1})|, |eu(\phi^{P_1})| < 1$, entonces

$$eu(\phi) = eu(\phi^{T_1}) + eu(\phi^{P_1}) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

Recíprocamente, si $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ existen $\phi^{T_1} \in W(\Sigma_{1,1})$ y $\phi^{P_1} \in W(\Sigma_{0,3})$ tales que

$$eu(\phi^{T_1}) + eu(\phi^{P_1}) = k$$

En particular, $\phi^{T_1}(c), \phi^{P_1}(c) \in Hyp$ pueden ser conectados por un camino $\gamma \subset Hyp$. Por el corolario 7.2.2 podemos levantar dicho camino con el conmutador desde $(\phi(b), \phi(a))$ deformando ϕ^{T_1} , de modo que podemos suponer que $\phi^{T_1}(c) = \phi^{P_1}(c)$. Luego ϕ^{T_1} y ϕ^{P_1} se pegan bien a una representación $\phi \in W'(\Sigma_{1,2})$, con clase de Euler igual a k .

Finalmente, demostremos que las fibras del mapa de Euler son conexas. Supongamos entonces que $eu(\phi) = k = eu(\phi')$ con $\phi, \phi' \in W(\Sigma_{1,2})$. Nuevamente por la observación 9.1.2 podemos suponer $\phi, \phi' \in W'(\Sigma_{1,2})$ y más aún por el corolario 9.1.5 asumir que c es aplicado en elementos hiperbólicos y que las restricciones a P_1 tienen clase de Euler no nula. Entonces hay dos casos que discutir:

- $eu(\phi^{P_1}) = eu(\phi'^{P_1}) = \pm 1$
- $\pm 1 = eu(\phi^{P_1}) = -eu(\phi'^{P_1}) = \mp 1$

Supongamos lo primero. Por aditividad se deduce que

$$eu(\phi^{T_1}) = eu(\phi'^{T_1}) = k \mp 1$$

y basta aplicar el lema previo.

En el segundo caso, digamos $eu(\phi^{P_1}) = 1 = -eu(\phi'^{P_1})$. Es fácil ver que esto implica $k = 0$, o sea que $eu(\phi^{T_1}) = -1 = -eu(\phi'^{T_1})$. Notemos como es habitual

$$\begin{aligned}\phi &= (A, B, C_1, C_2), \phi(c) = C \\ \phi' &= (A', B', C'_1, C'_2), \phi'(c) = C'\end{aligned}$$

Si \tilde{C} y \tilde{C}' denotan a los levantados canónicos tenemos que

$$\tilde{M}(C_1, C_2) = z\tilde{C} \quad \tilde{M}(C'_1, C'_2) = z^{-1}\tilde{C}'$$

y

$$\tilde{R}(A, B) = z^{-1}(\tilde{C})^{-1} \quad \tilde{R}(A', B') = z(\tilde{C}')^{-1}$$

Sea $\tilde{\gamma} \subset Im\tilde{M} = Im\tilde{R} \setminus \{I\}$ conectando $z\tilde{C}$ con $z^{-1}\tilde{C}'$. Es fácil ver que $\tilde{\gamma}^{-1} \subset Im\tilde{M} = Im\tilde{R} \setminus \{I\}$ de modo que los corolarios 6.2.1 y 7.2.1 garantizan caminos $(C_1^t, C_2^t) \in Hyp^2$ desde (C_1, C_2) hasta (C_1^t, C_2^t) y $(A_t, B_t) \in \Omega$ desde (A, B) hasta (A', B') tales que

$$\tilde{M}(C_1^t, C_2^t) = \tilde{\gamma}(t) \quad \tilde{R}(A_t, B_t) = \tilde{\gamma}(t)^{-1}$$

Entonces $\phi_t := (A_t, B_t, C_1^t, C_2^t) \in W(\Sigma_{1,2})$ conecta ϕ con ϕ' . □

El teorema en el caso $\Sigma_{0,4}$ admite la misma demostración y por eso se omite.

Teorema 9.2.3. *Las componentes conexas de $W(\Sigma_{0,4})$ son los conjuntos*

$$\left(eu|_{W(\Sigma_{0,4})} \right)^{-1}(k), \quad k = -2, -1, 0, 1, 2$$

□

Recordemos que en el capítulo 8 hemos tratado el caso Σ_2 :

Teorema 9.2.4. *Las componentes conexas de $Hom(\pi_1(\Sigma_2), PSL(2, \mathbb{R}))$ son los conjuntos*

$$eu^{-1}(k), \quad k = -2, -1, 0, 1, 2$$

□

Hemos visto nuevamente la utilidad de considerar una descomposición árbol-dual. En efecto, esta descomposición es óptima en el sentido de que para extender una representación a “una pieza más” nos basta con levantar el camino determinado por el borde común y esta es la única restricción de compatibilidad que debe tenerse en cuenta.

9.3. El caso general

Concluimos ahora con el trabajo. Como siempre, si $b = 0$ entendemos implícitamente que los espacios $W(\Sigma_{g,b})$ y $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ coinciden. Supondremos además prefijada una descomposición árbol-dual $\Sigma_{g,b} = \bigcup_{i=1}^{-\chi(\Sigma_{g,b})} \Sigma^{(i)}$.

9.3.1. Desigualdad de Milnor-Wood

Teorema 9.3.1 (Desigualdad de Milnor-Wood). *Sea $\phi \in W(\Sigma_{g,b})$, entonces*

$$|eu(\phi)| \leq -\chi(\Sigma_{g,b})$$

Recíprocamente, dado $|k| \leq -\chi(\Sigma_{g,b})$ existe $\phi \in W(\Sigma_{g,b})$ tal que

$$eu(\phi) = k$$

El contenido del teorema anterior fue establecido originalmente por Wood en [31] continuando el trabajo de Milnor [22].

Demostración de 9.3.1. La prueba sigue las ideas que ya han sido tratadas en la sección previa. En primer lugar, si $\phi \in W(\Sigma_{g,b})$ sabemos que podemos deformarla a $\phi \in W'(\Sigma_{g,b})$ y a partir de ahí a una que en los bordes de las subsuperficies de la descomposición árbol-dual sea hiperbólica (proposiciones 9.1.1 y 9.1.11). Si ϕ^i denota la restricción a $\pi_1(\Sigma^{(i)})$, entonces por aditividad

$$|eu(\phi)| = \left| \sum_{i=1}^{-\chi(\Sigma_{g,b})} eu(\phi^i) \right| \leq \sum_{i=1}^{-\chi(\Sigma_{g,b})} |eu(\phi^i)| \leq \sum_{i=1}^{-\chi(\Sigma_{g,b})} 1 = -\chi(\Sigma_{g,b})$$

Para el recíproco razonamos por inducción en $-\chi(\Sigma_{g,b})$. Si $\chi(\Sigma_{g,b}) = -1$ el resultado ya ha sido probado en los teoremas 6.2.4 y 7.2.3. Si $\chi(\Sigma_{g,b}) < -1$, dado $|k| \leq -\chi(\Sigma_{g,b})$ existen $|k_1| < 1$ y $|k'| \leq -\chi(\Sigma_{g,b}) - 1$ tales que $k = k_1 + k'$. Tomemos $\Sigma^{(1)}$ una superficie de la descomposición tal que $\Sigma := \Sigma_{g,b} \setminus \Sigma^{(1)}$ es conexa. Existe $\phi^{\Sigma^{(1)}} \in W(\Sigma^{(1)})$ tal que $eu(\phi^{\Sigma^{(1)}}) = k_1$ y por inducción existe $\phi^\Sigma \in W(\Sigma)$ tal que $eu(\phi^\Sigma) = k'$. Ahora bien, si c es el borde común a $\Sigma^{(1)}$ y Σ entonces $\phi^{\Sigma^{(1)}}(c), \phi^\Sigma(c) \in \text{Hyp}$. Levantado un camino hiperbólico conectándolos con M o R según el caso (corolario 6.2.3 o corolario 7.2.2) podemos compatibilizar $\phi^{\Sigma^{(1)}}(c)$ con $\phi^\Sigma(c)$ de modo que definan $\phi \in W(\Sigma_{g,b})$. En particular,

$$eu(\phi) = eu(\phi^{\Sigma^{(1)}}) + eu(\phi^\Sigma) = k_1 + k' = k$$

y hemos terminado. □

Observación 9.3.2. El recíproco del teorema anterior puede ser generalizado: consideremos $(k_1, \dots, k_{-\chi(\Sigma_{g,b})}) \in \{-1, 0, 1\}^{-\chi(\Sigma_{g,b})}$, entonces existe una representación $\phi \in W(\Sigma_{g,b})$ que aplica cada borde de cada subsuperficie en elementos hiperbólicos y tal que $eu(\phi^i) = k_i$ para todo $i = 1, \dots, -\chi(\Sigma_{g,b})$. La prueba es por inducción y queda a cargo del lector.

9.3.2. Prueba del teorema

La demostración en el caso general del teorema de Goldman se reduce a los resultados de la sección anterior, gracias a un lema combinatorio que a continuación enunciamos y demostramos.

Sea \mathcal{T} un árbol, \mathcal{V} el conjunto (finito) de sus vértices y \mathcal{E} el de sus aristas. Definamos

$$\mathcal{F}(\mathcal{V}, \{-1, 0, 1\}) := \{f : \mathcal{V} \longrightarrow \{-1, 0, 1\}, f \text{ es función}\}$$

y la aplicación $\Sigma : \mathcal{F}(\mathcal{V}, \{-1, 0, 1\}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por

$$\Sigma(f) := \sum_{v \in \mathcal{V}} f(v)$$

En $\mathcal{F}(\mathcal{V}, \{-1, 0, 1\})$ consideramos la relación de equivalencia

$$f \sim f' \text{ si } \Sigma(f) = \Sigma(f')$$

Definimos también en $\mathcal{F}(\mathcal{V}, \{-1, 0, 1\})$ la relación $f \mathcal{R} f'$ si existe un eje $e \in \mathcal{E}$ de modo que si v y u son sus vértices, entonces:

- $f|_{\mathcal{V} \setminus \{v, u\}} = f'|_{\mathcal{V} \setminus \{v, u\}}$.
- $f(v) + f(u) = f'(v) + f'(u)$

Observar que \mathcal{R} es idéntica y simétrica, pero no necesariamente es transitiva. Además si $f \mathcal{R} f'$ entonces $f \sim f'$.

Lema 9.3.3. *En las notaciones anteriores, supongamos que $\#\mathcal{V} \geq 2$. Entonces la relación de equivalencia generada por \mathcal{R} es \sim . Dicho de otro modo, si $f \sim f'$ entonces existe una sucesión $\{f = f_1, f_2, \dots, f_p = f'\} \subset \mathcal{F}(\mathcal{V}, \{-1, 0, 1\})$ tal que $f_i \mathcal{R} f_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, p - 1$.*

Demostración. Por inducción completa en $\#\mathcal{V}$. Si $\#\mathcal{V} = 2$ el resultado es trivial.

Supongamos $\#\mathcal{V} > 2$ y fijemos un vértice $v \in \mathcal{V}$. Afirmamos que existen sucesiones $\{f = f_1, f_2, \dots, f_s\}$ y $\{f' = f'_1, f'_2, \dots, f'_l\}$ tales que $f_i \mathcal{R} f_{i+1}$ y $f'_j \mathcal{R} f'_{j+1}$ para todos i, j y además

$$f_s(v) = f'_l(v)$$

Probado esto, la prueba concluye de la siguiente manera: la afirmación nos dice que a los efectos de probar la tesis podemos suponer que $f(v) = f'(v)$. Sea $\hat{\mathcal{V}}$ el grafo obtenido de eliminar de \mathcal{V} el vértice v y sus aristas adyacentes. Entonces las componentes conexas de $\hat{\mathcal{V}}$ son árboles. Además, $f(v) = f'(v)$ y como $f \sim f'$ se deduce que $f|_{\hat{\mathcal{V}}} \sim f'|_{\hat{\mathcal{V}}}$. Por inducción en cada componente de $\hat{\mathcal{V}}$ tenemos una sucesión $\{f|_{\hat{\mathcal{V}}} = \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p = f'|_{\hat{\mathcal{V}}}\} \subset \mathcal{F}(\hat{\mathcal{V}}, \{-1, 0, 1\})$ tal que $\hat{f}_i \mathcal{R} \hat{f}_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, p - 1$ y basta extender \hat{f}_i a $f_i \in \mathcal{F}(\mathcal{V}, \{-1, 0, 1\})$ definiendo

$$f_i(v) := f(v) = f'(v)$$

9.3. El caso general

Debemos entonces probar la afirmación. Supongamos primero que $\Sigma(f) = \Sigma(f') > 0$, entonces existen $v_1, v'_1 \in \mathcal{V}$ tales que $f(v_1) = 1 = f'(v'_1)$. Como \mathcal{T} es un árbol, podemos tomar únicas sucesiones de vértices $v_1, v_2, \dots, v_s = v$ y $v'_1, v'_2, \dots, v'_l = v$. Ahora bien, definimos $f_1 = f, f_2$ como la función f_1 con los valores $1 = f_1(v_1)$ y $f_1(v_2)$ intercambiados, f_3 como la función f_2 con los valores $f_2(v_2)$ y $f_2(v_3)$ intercambiados y así sucesivamente. Es claro que $f_i \mathcal{R} f_{i+1}$ para todo i y $f_s(v) = 1$. A partir de v'_1 y con el mismo procedimiento se obtiene la sucesión $\{f'_i\}$ tal que $f'_l(v) = 1$ terminando este caso.

Si por otra parte $\Sigma(f) = \Sigma(f') < 0$, existen $v_1, v'_1 \in \mathcal{V}$ tales que $f(v_1) = -1 = f'(v'_1)$ y se razona del mismo modo.

Supongamos finalmente que $\Sigma(f) = \Sigma(f') = 0$. Observar que si $f \neq 0$ y $f' \neq 0$ entonces existen v_1, v'_1 con $f(v_1) = 1 = f'(v'_1)$ así que no es un caso distinto a los anteriores. Queda entonces mostrar que siempre puede suponerse $f \neq 0$ y $f' \neq 0$. Por ejemplo, si $f = 0$ entonces se elige un eje $e \in \mathcal{E}$ arbitrario con vértices u_1, u_2 y definimos f_2 que coincida con f en $\mathcal{V} \setminus \{u_1, u_2\}$ y tal que $f_2(u_1) = 1 = -f_2(u_2)$. Entonces $f \mathcal{R} f_2$ y $f_2 \neq 0$. □

Concluimos ahora con la demostración del resultado principal de este trabajo.

Teorema 9.3.4 (Goldman, [15]). *Las componentes conexas de $W(\Sigma_{g,b})$ son los conjuntos*

$$\left(eu|_{W(\Sigma_{g,b})} \right)^{-1}(k), \quad k = \chi(\Sigma_{g,b}), \dots, -\chi(\Sigma_{g,b})$$

Demostración. Por el teorema 9.3.1 sólo hay que ver que si $\phi, \phi' \in W(\Sigma_{g,b})$ son tales que $eu(\phi) = k = eu(\phi')$, entonces existe una deformación en $W(\Sigma_{g,b})$ conectándolas. Por la observación 9.1.2 podemos suponer $\phi, \phi' \in W'(\Sigma_{g,b})$ y más aún, por la proposición 9.1.11 asumimos que en los bordes de las subsuperficies de la descomposición árbol-dual son hiperbólicas.

En la notación (9.1) y por la proposición 3.4.1 sabemos que $\Sigma eu(\phi^i) = \Sigma eu(\phi'^i)$. Sea \mathcal{T} el árbol dual asociado a la descomposición, que tiene por vértices a las subsuperficies. En el lenguaje del lema anterior, tenemos definidas $f := (eu(\phi^1), \dots, eu(\phi^{-\chi(\Sigma_{g,b})}))$ y $f' := (eu(\phi'^1), \dots, eu(\phi'^{-\chi(\Sigma_{g,b})}))$ tales que $f \sim f'$. Existe entonces una sucesión de elementos de $\mathcal{F}(\mathcal{V}, \{-1, 0, 1\})$ desde f hasta f' y tal que dos consecutivos están \mathcal{R} -relacionados. Por la observación 9.3.2, toda función $(k_1, \dots, k_{-\chi(\Sigma_{g,b})}) \in \{-1, 0, 1\}^{-\chi(\Sigma_{g,b})} = \mathcal{F}(\mathcal{V}, \{-1, 0, 1\})$ define una representación ϕ con $eu(\phi^i) = k_i$. Así, la prueba del teorema se reduce a demostrar la siguiente afirmación: sean $f \mathcal{R} f'$ y ϕ, ϕ' dos representaciones determinadas por f y f' , entonces ϕ y ϕ' están en la misma componente conexa de $W(\Sigma_{g,b})$.

La prueba de la afirmación es por inducción en $-\chi(\Sigma_{g,b}) \geq 2$. El paso base ya ha sido tratado en la sección 9.2 (teoremas 9.2.2 y 9.2.3).

Supongamos que $\chi(\Sigma_{g,b}) < -2$ y sean $f, f' \in \mathcal{F}(\mathcal{V}, \{-1, 0, 1\})$ tales que $f \mathcal{R} f'$. Consideramos ϕ y ϕ' representaciones asociadas de modo que existen dos subsuperficies adyacentes $\Sigma^{(1)}$ y $\Sigma^{(2)}$ tales que

$$\begin{aligned} eu(\phi^i) &= eu(\phi'^i) \text{ para todo } i > 2 \\ eu(\phi^1) + eu(\phi^2) &= eu(\phi'^1) + eu(\phi'^2) \end{aligned}$$

Como $\chi(\Sigma_{g,b}) < -2$, existe $\Sigma^{(3)}$ subsuperficie distinta de $\Sigma^{(1)}$ y $\Sigma^{(2)}$ y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\Sigma := \Sigma_{g,b} \setminus \Sigma^{(3)}$ es conexa. En particular, $f|_{\Sigma} \mathcal{R} f'|_{\Sigma}$ así que por inducción existe $\phi_t \in W(\Sigma)$ conectando ϕ^{Σ} con ϕ'^{Σ} . Como $eu(\phi^3) = k_3 = eu(\phi'^3)$, la prueba finaliza igual que la demostración del lema 9.2.1. □

A modo de reflexión final podemos preguntarnos si es necesario el argumento combinatorio del lema 9.3.3. En efecto, el mapa \tilde{E}_{c_b} definido en (9.7) puede extenderse al conjunto

$$H(\Sigma_{g,b}) := \left\{ (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, C_1, \dots, C_{b-1}), \quad C_i \in Hyp, \quad \left(\prod_{j=1}^g [A_j, B_j] \right) C_1 \dots C_{b-1} \neq I \right\}$$

Puede intentarse probar por inducción en $-\chi(\Sigma_{g,b})$ que \tilde{E}_{c_b} definido en este conjunto tiene la propiedad de levantamiento de caminos a extremos fijos y a partir de ahí deducir el teorema de Goldman en el caso general.

Apéndice A

Conjuntos de nivel de κ

Analizamos aquí la topología de los conjuntos $\kappa_c := \kappa^{-1}(c)$, donde $\kappa : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$\kappa(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2$$

Observar que la ecuación $\kappa(x, y, z) = c$ es equivalente a

$$\left(\frac{2+z}{4}\right)(x-y)^2 + \left(\frac{2-z}{4}\right)(x+y)^2 = 2+c-z^2$$

Por comodidad denotaremos $\alpha(z) := \frac{2+z}{4}$, $\beta(z) := \frac{2-z}{4}$ y $\gamma_c(z) := 2+c-z^2$ y para cada $z \in \mathbb{R}$ consideramos la cónica $\kappa_c(z) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \kappa(x, y, z) = c\}$. Como $\kappa_c(z)$ no puede ser una parábola, las distintas posibilidades son:

- i. $\kappa_c(z)$ es una hipérbola no degenerada: esto ocurre sólo cuando los coeficientes $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ son no nulos y de signo opuesto y además $\gamma_c(z) \neq 0$. Es decir, cuando $|z| > 2$ y $\gamma_c(z) \neq 0$.
- ii. $\kappa_c(z)$ es la unión de dos rectas secantes: esto ocurre sólo cuando uno de los coeficientes $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ son no nulos y de signo opuesto y además $\gamma_c(z) = 0$. Es decir, cuando $|z| > 2$ y $\gamma_c(z) = 0$.
- iii. $\kappa_c(z)$ es una elipse no degenerada: esto ocurre sólo cuando $sg(\alpha(z)) = sg(\beta(z)) = sg(\gamma_c(z)) \neq 0$. Como $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ no pueden ser simultáneamente negativos, lo anterior es equivalente a $|z| < 2$ y $\gamma_c(z) > 0$.
- iv. $\kappa_c(z)$ es un punto: esto ocurre sólo cuando $sg(\alpha(z)) = sg(\beta(z)) \neq 0$ y $\gamma_c(z) = 0$. Es decir, cuando $|z| < 2$ y $\gamma_c(z) = 0$.
- v. $\kappa_c(z)$ es vacío: esto ocurre sólo cuando $\alpha(z), \beta(z) \geq 0$ y $\gamma_c(z) < 0$. O sea, $|z| \leq 2$ y $\gamma_c(z) < 0$.

- vi. $\kappa_c(z)$ es una recta: esto ocurre sólo cuando uno de los coeficientes $\alpha(z)$ o $\beta(z)$ se anula y $\gamma_c(z) = 0$. O sea, $|z| = 2$ y $\gamma_c(z) = 0$.
- vii. $\kappa_c(z)$ es la unión de dos rectas paralelas disjuntas: esto ocurre cuando uno sólo de los coeficientes $\alpha(z)$ o $\beta(z)$ se anula y el otro tiene el mismo signo que $\gamma_c(z)$. Es fácil ver que esto es equivalente a $|z| = 2$ y $\gamma_c(z) > 0$.

Consideremos el grupo

$$\Delta := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

actuando en \mathbb{R}^3 por multiplicación. Es claro que κ es Δ -invariante, así que Δ actúa en κ_c para todo $c \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces las siguientes posibilidades para los conjuntos κ_c :

- I. Si $c = 2$ entonces κ_c es la unión de una esfera con cuatro discos abiertos, transitivamente permutados por Δ . Dicha esfera es un subconjunto de $[-2, 2]^3$ y corta $\partial[-2, 2]^3$ en seis segmentos. Por otra parte, los discos y la esfera se encuentran en los puntos $(2, 2, 2)$, $(2, -2, -2)$, $(-2, -2, 2)$ y $(-2, 2, -2)$. Más aún, se tiene por ejemplo que el disco conteniendo a $(2, 2, 2)$ está contenido en $[2, \infty] \times [2, \infty] \times [2, \infty]$ y corta a su borde en el rayo $\{(x, x, 2) \in \mathbb{R}^3, x \geq 2\}$. Análogas afirmaciones para los otros discos.

Para verlo, observemos que $\kappa_2(0)$ es el círculo centrado en el origen y de radio igual a 2. Cuando $0 < z < 2$, se tiene que $\kappa_c(z)$ es una elipse dentro de $[-2, 2]^3$ y con el eje mayor contenido en la recta $\{(x, x, z), x \in \mathbb{R}\}$. Además, dicha elipse corta $\partial[-2, 2]^3$ en cuatro puntos. Ahora bien, cuando $z = 2$ las elipses degeneran en la recta $\{(x, x, 2), x \in \mathbb{R}\}$ y si $z > 2$ entonces $\kappa_c(z)$ es una hipérbola no degenerada, con ramas cortando a la recta $\{(x, x, z), x \in \mathbb{R}\}$. Mismo análisis para $z < 0$, donde esta vez las elipses degeneran en la recta $\{(x, -x, -2), x \in \mathbb{R}\}$.

- II. Si $c > 2$ entonces κ_c es homeomorfo a una esfera menos cuatro discos abiertos. En efecto, si $z = 0$ entonces $\kappa_c(z)$ es un círculo de radio mayor que 2 y centrado en el origen. Cuando $0 < z < 2$ se tiene que $\kappa_c(z)$ es una elipse y cuando $z = 2$ es una unión de rectas paralelas, y con dirección $(1, 1, 0)$. Si $2 < z < \sqrt{2+c}$ uno obtiene que $\kappa_c(z)$ es una hipérbola que degenera en dos rectas secantes cuando $z = \sqrt{2+c}$, y si $z > \sqrt{2+c}$ vuelve a ser una hipérbola. En $z = \sqrt{2+c}$ la función $\kappa_c(z) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(x, y, z) \mapsto z$ tiene un punto silla.

Observamos entonces que $\kappa_c \cap \{z \geq 0\}$ es un par de pantalones “no acotado” y con borde igual a $\kappa_c(0)$. El mismo análisis aplica cuando $z < 0$ de donde se sigue la afirmación.

- III. Si $-2 < c < 2$ entonces κ_c es la unión disjunta de una esfera contenida en $(-2, 2)^3$ y cuatro discos abiertos, transitivamente permutados por la acción de Δ . En efecto, si $z = 0$ entonces $\kappa_c(z)$ es un círculo de radio menor que 2 y centrado en el origen. Cuando $0 < z < \sqrt{2+c}$ se obtiene que $\kappa_c(z)$ es una elipse y cuando $z = \sqrt{2+c} < 2$

A. Conjuntos de nivel de κ

es el punto $\{(0, 0, \sqrt{2+c})\}$. Si $\sqrt{2+c} < z \leq 2$ es el conjunto vacío y cuando $z > 2$ se tiene que $\kappa_c(z)$ es una hipérbola. El mismo análisis aplica cuando $z < 0$ de donde se sigue la afirmación.

IV. Si $c = -2$ entonces κ_c es la unión disjunta del origen con cuatro discos abiertos transitivamente permutados por la acción de Δ .

V. Si $c < -2$ entonces κ_c es la unión disjunta de cuatro discos abiertos transitivamente permutados por la acción de Δ .

Del análisis anterior se deduce fácilmente el siguiente

Proposición A.0.1. *Los siguientes conjuntos son conexos:*

$$\mathbb{E} := \{(x, y, z) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, 2), \quad \kappa(x, y, z) > 2\}$$

$$\mathbb{E}' := \{(x, y, z) \in (-\infty, 0) \times (-\infty, 0) \times (-2, 0), \quad \kappa(x, y, z) > 2\}$$

□

Proposición A.0.2. *La restricción*

$$\kappa : \mathbb{R}^3 \setminus ([-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

verifica la propiedad de levantamiento de caminos.

Demostración. El análisis previo nos dice que la restricción es sobreyectiva. Además, es fácil ver que Δ actúa en $\mathbb{R}^3 \setminus ([-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2])$ y dejando κ invariante, así que aplicamos la proposición 1.2.2.

Para ello, observamos que Δ es transitivo en las componentes de las fibras. En efecto, si $c < -2$ la acción es transitiva en las componentes de

$$\kappa_c = \kappa^{-1}(c) \cap (\mathbb{R}^3 \setminus ([-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2]))$$

Cuando $-2 \leq c \leq 2$ la acción es transitiva en las componentes de κ_c contenidas en $\mathbb{R}^3 \setminus [-2, 2]^3$, que son las únicas que tienen sentido de ser consideradas para la restricción $\kappa : \mathbb{R}^3 \setminus ([-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2]) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si $c > 2$, entonces $\kappa^{-1}(c) \cap (\mathbb{R}^3 \setminus ([-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2]))$ tiene también cuatro componentes conexas, homeomorfas a cilindros e intercambiadas por Δ .

Finalmente, la restricción de κ en cuestión es submersiva: observar que $\nabla\kappa(x, y, z) = (2x - yz, 2y - xz, 2z - xy) \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus ([-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}[-2, 2])$. □

Apéndice B

La forma de Killing en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

En este capítulo definimos la *forma de Killing* de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (aunque el tratamiento se generaliza fácilmente al caso complejo) y establecemos sus propiedades más sencillas. El grado de generalidad de los temas aquí tratados es el mínimo indispensable para una correcta lectura de los contenidos tratados en este trabajo. Referencias generales se irán brindando cuando sea necesario.

Consideremos el grupo $SL(2, \mathbb{R})$ con su álgebra de Lie

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{\dot{E} \in M(2, \mathbb{R}), \text{tr} \dot{E} = 0\}$$

El corchete en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ es

$$[\dot{E}, \dot{F}] := \dot{E}\dot{F} - \dot{F}\dot{E}$$

Este mapa es bilineal, antisimétrico y verifica la identidad de Jacobi, i.e.,

$$[[\dot{E}, \dot{F}], \dot{H}] + [[\dot{F}, \dot{H}], \dot{E}] + [[\dot{H}, \dot{E}], \dot{F}] = 0$$

para todos $\dot{E}, \dot{F}, \dot{H} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Fijemos la base "canónica" $\mathcal{C}_0 := \{\dot{H}_0, \dot{E}_0, \dot{F}_0\}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, donde

$$\dot{H}_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \dot{E}_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dot{F}_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que

$$[\dot{H}_0, \dot{E}_0] = 2\dot{E}_0 \quad [\dot{H}_0, \dot{F}_0] = -2\dot{F}_0 \quad [\dot{E}_0, \dot{F}_0] = \dot{H}_0 \quad (\text{B.1})$$

Para $X \in SL(2, \mathbb{R})$, sea $Ad(X) : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ la transformación lineal definida por

$$Ad(X)(\dot{E}) := X\dot{E}X^{-1}$$

Es fácil ver que $Ad(X)$ es un isomorfismo lineal y que preserva el corchete, esto es,

$$Ad(X) ([\dot{E}, \dot{F}]) = [Ad(X)(\dot{E}), Ad(X)(\dot{F})]$$

Ahora bien, si notamos $Aut(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ al espacio de isomorfismos lineales de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ que preservan el corchete, hemos definido la *representación adjunta*

$$Ad : SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow Aut(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$$

Trabajando en la base \mathcal{C}_0 observamos que $Aut(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ es un grupo de matrices 3×3 , de modo que tiene naturalmente una topología según la cual es un grupo de Lie y Ad es un homomorfismo diferenciable. El álgebra de Lie de $Aut(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ es el conjunto de transformaciones lineales de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ que preserve el corchete, denotado $End(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$, y el diferencial en la identidad de Ad está dado por

$$ad := d_1 Ad : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow End(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})), \quad ad(\dot{E})(\dot{F}) = [\dot{E}, \dot{F}] \quad (B.2)$$

Por una construcción general de la representación adjunta y su derivada, ver por ejemplo [1] (capítulo 1).

La *forma de Killing* en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ es la forma (bilineal y simétrica):

$$\mathbb{K} : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbb{K}(\dot{E}, \dot{F}) := tr(ad(\dot{E})ad(\dot{F}))$$

No es difícil ver que \mathbb{K} es $Ad(X)$ -invariante para todo $X \in SL(2, \mathbb{R})$. Además, las fórmulas (B.1) permiten mostrar que

$$[\mathbb{K}]_{\mathcal{C}_0} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad (B.3)$$

Esta matriz tiene valores propios $-4, 4$ y 8 , así que \mathbb{K} es no degenerada y de signatura $(1,2)$. De hecho, un sencillo cálculo muestra que

$$\mathbb{K}(\dot{E}, \dot{F}) = 4tr(\dot{E}\dot{F}) \quad (B.4)$$

Consideremos por otro lado la forma

$$\langle, \rangle_{1,2} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle_{1,2} := xx' + yy' - zz' \quad (B.5)$$

y el grupo $O(1,2)$ de matrices reales 3×3 que preservan esta forma. Es decir,

$$O \in O(1,2) \iff \langle Ox, Oy \rangle_{1,2} = \langle x, y \rangle_{1,2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

Como es usual, denotamos $SO(1,2)$ al subgrupo de aquellas matrices que tienen determinante igual a 1. Puede verse que $SO(1,2)$ es un grupo de Lie de dimensión 3 con dos componentes conexas. La componente que contiene a la identidad se denota $SO(1,2)^0$ (ver [10], capítulo 6 por un tratamiento completo de estos grupos). Explícitamente, $SO(1,2)^0$ es el subgrupo de matrices de $O(1,2)$ que preservan la orientación de \mathbb{R}^3 y la hoja de hiperboloide

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$$

B. La forma de Killing en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

La forma de Killing permite pensar a la representación adjunta como un mapa a $SO(1, 2)^0$. En efecto, (B.5) es una forma bilineal y simétrica real de signatura (1,2), al igual que \mathbb{K} . Esto implica que son la misma forma, en distintas bases de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^3$. Ahora bien, si $X \in SL(2, \mathbb{R})$ entonces $Ad(X)$ preserva \mathbb{K} así que cambiando de base tenemos que preserve (B.5) y por tanto es un elemento de $O(1, 2)$. Como Ad es un homomorfismo continuo y $SL(2, \mathbb{R})$ es conexo, tenemos de hecho que $Ad(X) \in SO(1, 2)^0$.

Proposición B.0.1. $Ad : SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow SO(1, 2)^0$ es un cubrimiento doble, con núcleo $\{\pm I\}$.

Demostración. La igualdad $Ker(Ad) = \{\pm I\}$ es trivial. Para ver que Ad es un cubrimiento, aplicamos la proposición 1.24 de [1]. Observar que $Ad : SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow SO(1, 2)^0$ es un homomorfismo suave y que $d_I Ad = ad : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{so}(1, 2)$ es inyectiva (utilizando la expresión (B.2)). Como $dim(\mathfrak{so}(1, 2)) = 3$, se deduce que $d_I Ad$ es un isomorfismo. \square

La demostración del siguiente lema es un cálculo directo.

Lema B.0.2. Si $X \in SL(2, \mathbb{R})$, entonces

$$tr(Ad(X)) = tr(X)^2 - 1$$

\square

Apéndice C

$W'(\Sigma_{g,b})$ es abierto y denso en $W(\Sigma_{g,b})$

La demostración de la proposición 9.1.1 tiene prerequisites técnicos de geometría algebraica. Es por esto que en la sección C.1 incluimos una prueba elemental para el caso Σ_2 (proposición C.1.6) y en la sección C.2 brindamos los argumentos del caso general (proposición C.2.19).

C.1. Una prueba elemental en el caso Σ_2

Recordemos que $W'(\Sigma_2)$ es el conjunto de representaciones $\pi_1(\Sigma_2) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ que son no abelianas en cada subsuperficie de la descomposición árbol-dual de Σ_2 . Más precisamente

$$W'(\Sigma_2) \cong \{(A_1, B_1, A_2, B_2) \in PSL(2, \mathbb{R})^4, [A_1, B_1] = [B_2, A_2] \neq I\}$$

Demostremos aquí que $W'(\Sigma_2)$ es denso en $Hom(\pi_1(\Sigma_2), PSL(2, \mathbb{R}))$ con un argumento elemental.

C.1.1. Preliminares

La prueba se basa en un argumento de transversalidad, es por esto que necesitamos entender algunos subespacios distinguidos de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Consideremos el *mapa exponencial*, definido por

$$exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R}), \quad exp(\dot{E}) := e^{\dot{E}}$$

Es fácil ver que exp es continua y un difeomorfismo local en $0 \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Además, es equivariante respecto de la acción por conjugación de $PSL(2, \mathbb{R})$ (ver [1], sección 1.3 por una definición del mapa exponencial y algunas de sus propiedades).

Observación C.1.1. No es difícil ver que todo subgrupo a un parámetro de $PSL(2, \mathbb{R})$ es la imagen de una recta por el origen a través del mapa exponencial. Es decir que $\mathcal{S} \subset PSL(2, \mathbb{R})$ es un grupo a un parámetro si y sólo si existe $\dot{E} \neq 0$ en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ tal que

$$\mathcal{S} = \exp(\mathbb{R}\dot{E})$$

La forma de Killing nos permite distinguir de manera sencilla los distintos tipos de subgrupos en $PSL(2, \mathbb{R})$. En efecto, fijemos $\mathcal{S} = \exp(\mathbb{R}\dot{E})$ un subgrupo a un parámetro. Entonces un cálculo explícito (ver [12], sección 2.3) muestra que

- $\mathcal{S} \subset Par \cup I$ si y sólo si $\mathbb{K}(\dot{E}, \dot{E}) = 0$.
- $\mathcal{S} \subset Ell \cup I$ si y sólo si $\mathbb{K}(\dot{E}, \dot{E}) < 0$.
- $\mathcal{S} \subset Hyp \cup I$ si y sólo si $\mathbb{K}(\dot{E}, \dot{E}) > 0$.

Lema C.1.2. *Sea $\mathcal{S} \subset PSL(2, \mathbb{R})$ un subgrupo a un parámetro y $A, B \in \mathcal{S}$. Tomemos U y V entornos respectivos de A y B . Entonces existe $\mathcal{S}' \subset PSL(2, \mathbb{R})$ un grupo a un parámetro distinto de \mathcal{S} que corta a U y V .*

Demostración. Sea $\dot{E} \neq 0$ en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ tal que $\mathcal{S} = \exp(\mathbb{R}\dot{E})$. Tomando preimágenes por \exp , los conjuntos U y V determinan abiertos de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ que cortan $\mathbb{R}\dot{E}$. Ahora sólo hay que elegir una dirección $\dot{E}' \neq 0$ tal que $\mathbb{R}\dot{E}' \neq \mathbb{R}\dot{E}$ y que corte a ambos levantados y definir $\mathcal{S}' := \exp(\mathbb{R}\dot{E}')$. □

El siguiente ejemplo será útil más adelante.

Ejemplo C.1.3. ▪ Para cada geodésica $\alpha \subset \mathbb{H}^2$, denotemos \mathcal{S}_α^{Hyp} al subgrupo a un parámetro de elementos hiperbólicos de eje α . Podemos elegir $\dot{E}_\alpha \neq 0$ tal que

$$\mathcal{S}_\alpha^{Hyp} = \exp(\mathbb{R}\dot{E}_\alpha)$$

Fijemos $z \in \mathbb{H}^2$ y definamos

$$H_z := \text{span}\{\dot{E}_\alpha, z \in \alpha\}$$

Entonces H_z es un subespacio de dimensión 2 en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. En efecto, no es de dimensión 1 porque existe más de un subgrupo a un parámetro hiperbólico de eje pasando por z y no es de dimensión 3 porque $\exp(H_z) \subset Hyp \cup I$

Para lo que sigue será conveniente describir H_z de un modo más explícito. Sea $\mathcal{S}_z^{Ell} := \exp(\mathbb{R}\dot{F}_z)$ el subgrupo a un parámetro de elementos elípticos con punto fijo z . Afirmamos que

$$(\mathbb{R}\dot{F}_z)^\perp = H_z$$

donde el complemento perpendicular es tomado respecto de la forma de Killing.

Para verlo, recordemos del apéndice B que \mathbb{K} es invariante por la acción adjunta así que conjugando por un elemento adecuado de $PSL(2, \mathbb{R})$ podemos suponer que $z = i$. Entonces

C.1. Una prueba elemental en el caso Σ_2

$$\mathcal{S}_i^{Ell} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \right\}_{\theta \in \mathbb{R}} = SO(2) = \exp(\mathbb{R}\dot{F}_i)$$

donde $\dot{F}_i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sea \mathcal{S} el grupo de matrices hiperbólicas de eje la geodésica por 0 e ∞ (que contiene a $z = i$). Es decir que

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \right\}_{\lambda \in \mathbb{R}^+} = \exp\left(\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

y se ve fácilmente que

$$\mathbb{K}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

Esto muestra que la dirección asociada a \mathcal{S} es \mathbb{K} -perpendicular a \dot{F}_i . Utilizamos esto para deducir que $H_z \subset (\mathbb{R}\dot{F}_i)^\perp$.

Dada una geodésica cualquiera α por z , existe un elemento $g \in SO(2)$ que aplica la geodésica por 0 e ∞ en α . Se concluye que $\mathcal{S}_\alpha^{Hyp} = g\mathcal{S}g^{-1}$ y por lo tanto

$$\mathcal{S}_\alpha^{Hyp} = g \exp\left(\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) g^{-1} = \exp\left(\mathbb{R} \left(g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g^{-1}\right)\right)$$

Pero entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{K}\left(g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \text{tr}\left(g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g\right) = \\ &= \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 \end{aligned}$$

y esto implica que $\mathbb{R} \left(g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g^{-1}\right) \perp \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es decir que hemos probado que

$$H_z \subset \left(\mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^\perp$$

y son iguales porque tienen la misma dimensión.

Más adelante utilizaremos el siguiente cálculo explícito

$$H_i = \left(\mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \right\}_{x,y \in \mathbb{R}} \quad (\text{C.1})$$

- Sea $z \in S^1$. Denotemos \mathcal{S}_z^{Par} al subgrupo a un parámetro de elementos parabólicos que fijan el punto z .

Fijemos $z \neq w$ en S^1 y tomemos $\dot{E}_z, \dot{E}_w \neq 0$ en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ tales que

$$\mathcal{S}_z^{Par} = \exp(\mathbb{R}\dot{E}_z) \quad \mathcal{S}_w^{Par} = \exp(\mathbb{R}\dot{E}_w)$$

Entonces $\{\dot{E}_z, \dot{E}_w\}$ es un conjunto linealmente independiente y podemos definir el plano

$$P_{zw} := \text{span}\{\dot{E}_z, \dot{E}_w\}$$

Cuando $z = \infty$ y $w = 0$, no es difícil ver que pueden tomarse $\dot{E}_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\dot{E}_w = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y por lo tanto

$$P_{\infty 0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \right\}_{x,y \in \mathbb{R}} \quad (\text{C.2})$$

En general, una expresión explícita de P_{zw} se obtiene conjugando (C.2) por un elemento $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ que aplique z en ∞ y w en 0 .

C.1.2. Prueba de la proposición 9.1.1 en el caso Σ_2

Sea \mathcal{S} un grupo a un parámetro hiperbólico o elíptico y tomemos $A, B \in \mathcal{S}$. Asumamos además que $A \neq I$ y que V es un entorno de B . Para probar que $W'(\Sigma_2)$ es denso en $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_2), PSL(2, \mathbb{R}))$ necesitamos de dos lemas que permiten encontrar ciertas subsuperficies de $[A, V]$ que tienen planos tangentes como aquellos descritos en el ejemplo C.1.3 (lemas C.1.4 y C.1.5). Un argumento de transversalidad entre los mismos implicarán el resultado.

Fijemos $A \neq I$ en $PSL(2, \mathbb{R})$ y definamos el mapa

$$R_A : PSL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R}), \quad R_A(B) := [A, B]$$

Al igual que en la prueba del lema 7.1.8 se concluye que

$$d_B R_A(B\dot{E}) = AB\dot{E}A^{-1}B^{-1} - ABA^{-1}\dot{E}B^{-1}$$

C.1. Una prueba elemental en el caso Σ_2

En el caso particular en que $[A, B] = I$, se obtiene que

$$d_B R_A(B\dot{E}) = A\dot{E}'A^{-1} - \dot{E}' = \left(\text{Ad}(A) - \text{Id}_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} \right) (\dot{E}') \quad (\text{C.3})$$

donde $\dot{E}' := B\dot{E}B^{-1}$.

Recordar del ejemplo C.1.3 que si $z \in \mathbb{H}^2$, entonces H_z denota el plano generado por las direcciones asociadas a los subgrupos $\mathcal{S}_\alpha^{\text{Hyp}}$, donde α es una geodésica por z .

Lema C.1.4. *Sea $\mathcal{S} \subset \text{Ell} \cup I$ un subgrupo a un parámetro y $A, B \in \mathcal{S}$, donde $A \neq I$. Notemos $z \in \mathbb{H}^2$ al punto fijo de los elementos de $\mathcal{S} \setminus I$. Entonces para todo entorno V de B existe una superficie $\nu \subset [A, V]$ tal que*

$$T_I \nu = H_z$$

Demostración. Es claro que el enunciado es invariante por conjugación, esto es, si lo probamos para un elemento z concreto entonces conjugando por elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ lo habremos probado en general. Supongamos entonces que $z = i$, de modo que $\mathcal{S} = SO(2)$ y $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $b \neq 0$.

El cálculo del ejemplo C.1.3 nos dice que

$$H_z = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \right\}_{x, y \in \mathbb{R}}$$

Como $[A, B] = I$ y la asignación $\dot{E} \mapsto B\dot{E}B^{-1} =: \dot{E}'$ es un isomorfismo lineal, una combinación del teorema de la función inversa con (C.3) nos dice que sólo necesitamos mostrar que

$$H_z \subset \left(\text{Ad}(A) - \text{Id}_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} \right) (\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$$

Esto es un cálculo explícito que se deja al lector. □

Cuando \mathcal{S} es hiperbólico tenemos un resultado análogo. Recordar del ejemplo C.1.3 que si $z \neq w$ en S^1 , entonces P_{zw} denota el plano generado por las direcciones asociadas a $\mathcal{S}_z^{\text{Par}}$ y $\mathcal{S}_w^{\text{Par}}$.

Lema C.1.5. *Sea $\mathcal{S} \subset \text{Hyp} \cup I$ un subgrupo a un parámetro y $A, B \in \mathcal{S}$, donde $A \neq I$. Notemos z y w a los extremos de la geodésica que es eje de los elementos de $\mathcal{S} \setminus I$. Entonces para todo entorno V de B existe una superficie $\sigma \subset [A, V]$ tal que*

$$T_I \sigma = P_{zw}$$

Demostración. La prueba es análoga a la del lema previo, asumiendo que $z = \infty$ y $w = 0$. □

Ahora podemos dar una demostración de la proposición 9.1.1 en el caso cerrado de género dos.

Proposición C.1.6. *El conjunto*

$$W'(\Sigma_2) = \{(A_1, B_1, A_2, B_2) \in PSL(2, \mathbb{R})^4, [A_1, B_1] = [B_2, A_2] \neq I\}$$

es abierto y denso en $Hom(\pi_1(\Sigma_2), PSL(2, \mathbb{R}))$.

Demostración. Es claro que $W'(\Sigma_2)$ es abierto en $Hom(\pi_1(\Sigma_2), PSL(2, \mathbb{R}))$.

Sea $\phi \in Hom(\pi_1(\Sigma_2), PSL(2, \mathbb{R}))$ y \mathcal{A} un entorno de ϕ , queremos encontrar

$$\phi' \in W'(\Sigma_2) \cap \mathcal{A}$$

Si $\phi \in W'(\Sigma_2)$ no hay más nada que probar, así que supongamos que $\phi \notin W'(\Sigma_2)$. Si escribimos $\phi = (A_1, B_1, A_2, B_2)$, esto significa que

$$[A_1, B_1] = [B_2, A_2] = I$$

y por la proposición 2.1.6 existen subgrupos a un parámetro \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 de $PSL(2, \mathbb{R})$ tales que

$$A_1, B_1 \in \mathcal{S}_1 \quad A_2, B_2 \in \mathcal{S}_2$$

Como la topología de $Hom(\pi_1(\Sigma_2), PSL(2, \mathbb{R}))$ es la topología producto, el abierto \mathcal{A} determina U_1, V_1, U_2 y V_2 entornos respectivos de A_1, B_1, A_2 y B_2 . En particular, podemos perturbar A_1 dentro de $\mathcal{S}_1 \cap U_1$ y suponer que $A_1 \neq I$. Por lo mismo, podemos suponer que $B_2 \neq I$.

Aplicamos ahora los resultados previos discutiendo por casos.

1. Si $\mathcal{S}_1 \subset Ell \cup I$ y $\mathcal{S}_2 \subset Ell \cup I$.

Por el lema C.1.2, podemos modificar \mathcal{S}_1 si fuera necesario y suponer que $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2$. Para $i = 1, 2$, denotemos z_i al punto fijo asociado a elementos de \mathcal{S}_i . Como $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2$, esto implica que $z_1 \neq z_2$ y por lo tanto los planos H_{z_1} y H_{z_2} son transversales: se cortan en la recta que corresponde a hiperbólicos de eje la única geodésica que pasa por z_1 y z_2 .

Sea $\nu_1 \subset [A_1, V_1]$ tangente a H_{z_1} en I y $\nu_2 \subset [B_2, U_2]$ tangente a H_{z_2} en I . Por transversalidad, obtenemos que ν_1 y ν_2 se cortan en una curva que pasa por I y en particular existen $B'_1 \in V_1$ y $A'_2 \in U_2$ tales que

$$[A_1, B'_1] = [B_2, A'_2] \neq I$$

Entonces $\phi' := (A_1, B'_1, A'_2, B_2) \in W'(\Sigma_2) \cap \mathcal{A}$ y hemos terminado este caso.

2. Si $\mathcal{S}_1 \subset Hyp \cup I$ y $\mathcal{S}_2 \subset Hyp \cup I$.

El argumento es igual: suponemos que $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2$. Sean $z_i \neq w_i$ los fijos de elementos de $\mathcal{S}_i \setminus I$, para $i = 1, 2$. Entonces $\{z_1, w_1\} \neq \{z_2, w_2\}$ y por lo tanto $P_{z_1 w_1}$ es transverso a $P_{z_2 w_2}$.

C.1. Una prueba elemental en el caso Σ_2

3. Si $\mathcal{S}_1 \subset Hyp \cup I$ y $\mathcal{S}_2 \subset Ell \cup I$.

P_{zw} es transverso a $H_{z'}$ para todos $z, w \in S^1$ y $z' \in \mathbb{H}^2$.

4. Si $\mathcal{S}_1 \subset Par \cup I$ o $\mathcal{S}_2 \subset Par \cup I$.

Por el lema C.1.2 podemos perturbar \mathcal{S}_1 o \mathcal{S}_2 de modo que se verifique 2. o 3.

□

Comentarios sobre la demostración anterior

A modo de cierre de esta sección realizamos algunas interpretaciones geométricas acerca de los resultados obtenidos en los lemas C.1.4 y C.1.5. Esto se incluye sólo como motivación de la prueba, es por esto que los contenidos se tratarán de manera informal.

Sobre el lema C.1.4

El resultado obtenido está motivado por la siguiente construcción. Sean $\mathcal{S} = \mathcal{S}_z^{Ell} \subset Ell \cup I$ un grupo a un parámetro, dos matrices $A, B \in \mathcal{S}$ con $A \neq I$ y V un entorno de B .

Tomemos $2\theta \in (0, 2\pi)$ el ángulo de rotación de A (antihorario). Si $B' \in V$, entonces $B'A^{-1}B'^{-1}$ es una rotación de centro $B'(z)$ y ángulo antihorario $2\pi - 2\theta$.

Tomemos $B' \in V \setminus \mathcal{S}$. Entonces $B'(z) \neq z$ y podemos considerar la geodésica γ_2 conectando estos dos puntos. Ahora bien, esto determina γ_1 y γ_3 geodésicas por z y $B'(z)$ formando ángulos respectivos θ y $\pi - \theta$ con γ_2 (ver figura C.1). Si notamos R_i a la reflexión respecto de γ_i , como en el lema 5.2.3 obtenemos que

$$[A, B'] = R_1 R_3$$

es una transformación hiperbólica con eje $\beta_{B'}$ la perpendicular común a γ_1 y γ_3 y distancia de traslación $d_{B'} := 2d(\gamma_1, \gamma_3)$. Más aún, por el teorema de Gauss-Bonnet (ver [20], teorema 1.4.2) se deduce que $\beta_{B'}$ corta el segmento determinado por z y $B'(z)$ en un punto $w_{B'}$. Denotemos $\alpha_{B'}$ a la geodésica perpendicular a γ_1 por z

Ahora deformaremos B' en dos coordenadas, una "radial" y la otra "rotacional".

En primer lugar, si hacemos $B'(z) \rightarrow z$ "radialmente" por γ_2 , uno observa que $w_{B'} \rightarrow z$ y por lo tanto $\beta_{B'} \rightarrow \alpha_{B'}$. En este proceso, es claro que $d_{B'} \rightarrow 0$ de modo que $[A, B']$ se aproxima a I .

La deformación "rotacional" se produce de la siguiente manera: sea $g \in \mathcal{S}_z^{Ell}$. Como $gBg^{-1} = B$ entonces B' puede ser elegido de modo que $gB'g^{-1} \in V$. Ahora bien, reconstruir la figura C.1 para $gB'g^{-1}$ corresponde a rotar $B'(z)$ por g de modo que "toda la figura rota", y en particular $\alpha_{B'}$ rota.

Esto muestra que dada una geodésica α por z , perturbando B "radialmente" o "rotacionalmente" dentro de V podemos conseguir conmutadores que sean hiperbólicos y con eje paralelo a α , arbitrariamente cercano al mismo. Sin embargo, no podemos conseguir que el conmutador sea hiperbólico de eje α . Esto sugiere que existe $\nu \subset [A, V]$ que sólo corta a $exp(H_z)$ en I .

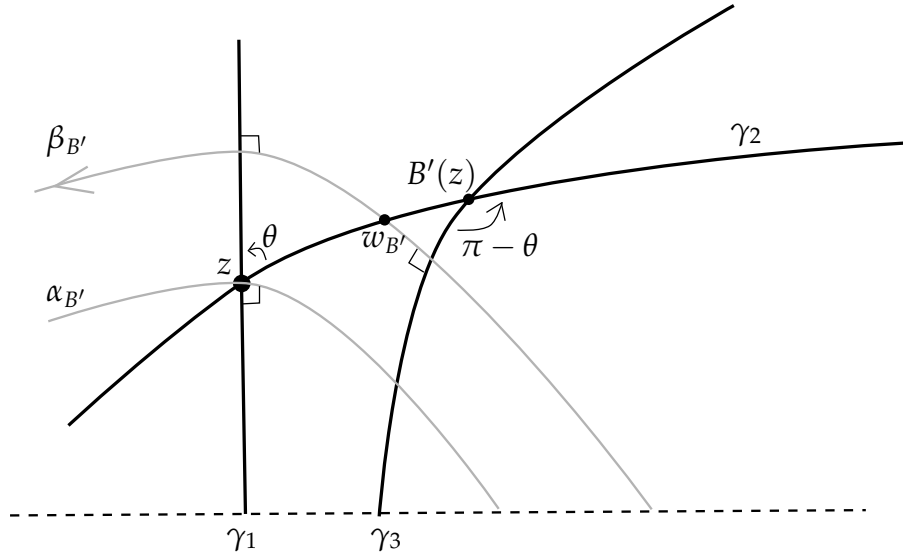


Figura C.1: El conmutador $[A, B']$, con $B' \in V$

Sobre el lema C.1.5

Sean $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha^{Hyp} \subset Hyp \cup I$ un grupo a un parámetro donde α es una geodésica de extremos z y w . Tomemos dos matrices $A, B \in \mathcal{S}$ con $A, B \neq I$ y V un entorno de B . La idea consiste de mostrar que deformando los puntos fijos de B es posible conseguir todos los elementos de \mathcal{S}_z^{Par} y \mathcal{S}_w^{Par} suficientemente cercanos a I . En el proceso de esas deformaciones, el conmutador describirá una superficie que pasa tanto por elementos hiperbólicos como elípticos y que es la candidata natural a la superficie σ del lema C.1.5.

Para fijar ideas, supondremos que w es el atractor de A y que z es su repulsor. Ahora bien, perturbando los puntos fijos de B podemos obtener $B' \in V$ con $B'(z)$ y $B'(w)$ en cualquiera de las situaciones de la figura C.2.

En todos los casos, para computar $[A, B']$ consideramos el eje determinado por $B'(z)$ y $B'(w)$. De este modo, $B'A^{-1}B'^{-1}$ es una matriz hiperbólica con atractor $B'(z)$ y repulsor $B'(w)$ y debemos primero aplicar $B'A^{-1}B'^{-1}$ y luego A .

En el caso de la figura C.2 (a), el conmutador $[A, B']$ es hiperbólico. En efecto, no es difícil ver que el intervalo compacto J determinado por w y $B'(z)$ y que no contiene a z verifica

$$[A, B'](J) = A(B'A^{-1}B'^{-1})(J) \subset \overset{\circ}{J}$$

así que existe un punto fijo de $[A, B']$ en el interior de J , necesariamente atractor (ver [27], sección 28). Análogamente, el intervalo J' determinado por z y $B'(w)$ que no contiene a w tiene un repulsor. Así que existe una geodésica $\beta_{B'}$ transversal al eje de A y que es el eje de traslación de $[A, B']$.

Notar que si hacemos $B'(z) \rightarrow z$ dejando fijo $B'(w)$, entonces $\beta_{B'}$ converge a z y esto nos dice que $[A, B'] \in Hyp$ se aproxima a un elemento $X \in \mathcal{S}_z^{Par}$ (figura C.2 (b)), trasladando

C.1. Una prueba elemental en el caso Σ_2

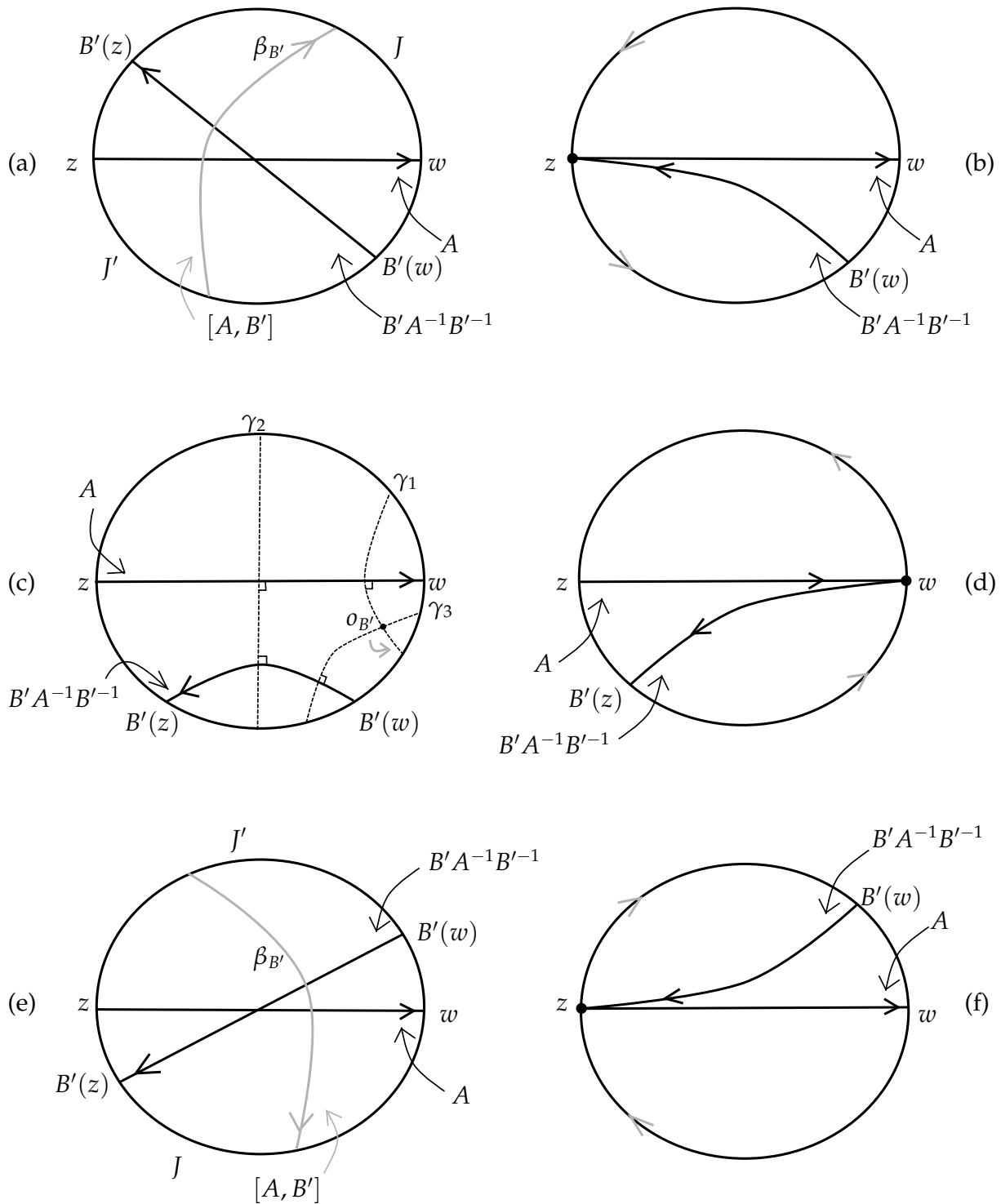


Figura C.2: El conmutador $[A, B']$, con $B' \in V$.

en sentido antihorario. Podemos hacer la distancia de traslación arbitrariamente pequeña dejando fijo $B'(z) = z$ y haciendo $B'(w) \rightarrow w$. Esto produce que $[A, B'] \rightarrow I$ en \mathcal{S}_z^{Par} .

Ahora continuamos deformando $B'(z)$ de modo de llegar a la figura C.2 (c). Si V es suficientemente chico entonces $[A, B']$ es elíptico con centro un punto $o_{B'} \in \mathbb{H}^2$ en la región determinada por los ejes de A y $B'A^{-1}B'^{-1}$. Para verlo, basta considerar γ_1, γ_2 y γ_3 como en la figura. Al igual que en el lema 5.2.3 se deduce que $[A, B']$ es la composición de las reflexiones respecto a γ_1 y γ_3 .

Ahora hacemos $B'(w) \rightarrow w$ (figura C.2 (d)) y obtenemos un elemento parabólico de fijo w . En todo este proceso, el punto $o_{B'}$ describe un camino desde z hasta w .

Si ahora continuamos deformando B' de modo de llevar a la figura C.2 (e) y luego hasta el caso de la figura C.2 (f) conseguimos nuevamente aproximarnos a \mathcal{S}_z^{Par} pero trasladando en sentido inverso que en el caso de la figura C.2 (b).

C.2. Una prueba para el caso general

En esta sección brindamos los argumentos de la prueba de la proposición 9.1.1 en el caso general.

C.2.1. Preliminares

Listamos primeramente sin demostración una serie de resultados en geometría algebraica necesarios para probar la proposición 9.1.1 en el caso general.

Sea $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ y $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ el conjunto de polinomios a \mathbb{F} en n variables.

Definición C.2.1. Una *variedad algebraica* en \mathbb{F}^n es el conjunto de raíces comunes a una familia de polinomios en $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$. Más precisamente, si $S \subset \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ la variedad algebraica asociada es

$$Var(S) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n, p(x_1, \dots, x_n) = 0 \ \forall p \in S\} = \bigcap_{p \in S} p^{-1}(0)$$

No es difícil ver que si $\langle S \rangle$ es el ideal generado por S entonces $Var(S) = Var(\langle S \rangle)$. Por otra parte, si $V \subset \mathbb{F}^n$ anotamos $I(V) := \{p \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n], p(v) = 0 \ \forall v \in V\}$. Observar que $I(V)$ es un ideal y que si V es una variedad algebraica entonces $V = Var(I(V))$.

Ejemplo C.2.2. $SL(2, \mathbb{R})$ y $SL(2, \mathbb{C})$ son variedades algebraicas pues $\det - 1$ es una función polinomial. Más aún, $PSL(2, \mathbb{R})$ y $PSL(2, \mathbb{C})$ también lo son. En efecto, la representación adjunta nos da $PSL(2, \mathbb{R}) \cong SO(1, 2)^0$ y $SO(1, 2)^0$ es una subvariedad algebraica de \mathbb{R}^9 . Una manera de verlo es aplicar el teorema 6.4 de [10], que nos dice que $X \in SO(1, 2)^0$ si y sólo si existen $P, Q, \in SO(2)$ y $d \in \mathbb{R}$ tales que

$$X = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(d) & \sinh(d) \\ 0 & \sinh(d) & \cosh(d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C.2. Una prueba para el caso general

La condición “ser ortogonal” es algebraica y la matriz del medio puede ser modelada por la ecuación $a^2 - b^2 = 1$ que también es polinomial. Siendo el producto de matrices polinomial, la afirmación se sigue.

En el caso complejo y con las adaptaciones correspondientes a los contenidos del apéndice B, se obtiene que $PSL(2, \mathbb{C})$ es una variedad algebraica.

Definición C.2.3. Una variedad algebraica V es irreducible si no es unión de variedades algebraicas propias, i.e, distintas de V y \emptyset . Equivalentemente, si $I(V)$ es primo.

La demostración del siguiente teorema puede encontrarse por ejemplo en [28], teorema 3.6.

Teorema C.2.4. Para toda variedad algebraica V existen variedades irreducibles V_1, \dots, V_r , únicas a menos de permutación de los índices, tales que $V_i \not\subseteq V_j$ para todo $i \neq j$ y $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$.

□

Definición C.2.5. Las V_i del teorema anterior se denominan las *componentes irreducibles* de V .

Para evitar confusiones, cualquier afirmación topológica que realicemos de aquí en más referirá siempre a la topología euclídea, i.e, la topología que V hereda de \mathbb{F}^n .

Sea V una variedad algebraica compleja irreducible y $W \subset V$ una variedad algebraica propia. Puede probarse que $V \setminus W$ es un subconjunto denso de V (ver por ejemplo [29], página 124). Obviamente este resultado no es cierto si V no es irreducible, basta por ejemplo considerar $V = \text{Var}(p) \subset \mathbb{C}^2$ donde $p(z, w) = zw$. Para variedades reales el resultado no es cierto (ver ejemplo B de [23], página 12). Con algunas hipótesis adicionales puede probarse un resultado análogo en el caso real (ver corolario C.2.9 más adelante).

Definición C.2.6. Sea V una variedad algebraica y consideremos $I \subset \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ el ideal tal que $V = \text{Var}(I)$. Si $v \in V$, el *espacio tangente de Zariski a V en v* es

$$T_v^Z V := \bigcap_{p \in I} \text{Ker}(d_v p)$$

Si V es irreducible, su *dimensión* es

$$\dim V := \min_{v \in V} (\dim T_v^Z V)$$

Si V no es irreducible definimos su *dimensión* como el máximo de las dimensiones de las componentes irreducibles.

Veamos que la definiciones anteriores generalizan las correspondientes nociones en el contexto diferenciable. En efecto, consideremos $V = \text{Var}(I)$ irreducible, con $I = \langle p_1, \dots, p_s \rangle$. Si anotamos $p := (p_1, \dots, p_s)$, entonces

$$V = \bigcap_{i=1}^s p_i^{-1}(0) = p^{-1}(0)$$

Por otra parte, la regla de Leibnitz implica que $T_v^Z V = \bigcap_{i=1}^s \text{Ker}(d_v p_i) = \text{Ker}(d_v p)$ para todo $v \in V$. En particular uno obtiene que $\dim(T_v^Z V) \geq n - s$ para todo $v \in V$.

Supongamos que existe v_0 un punto regular de p , entonces la dimensión de V es $n - s$. En efecto, si v_0 es punto regular de p entonces

$$n - s = \dim(\text{Ker}(d_{v_0} p)) = \dim(T_{v_0}^Z V)$$

así que $T_{v_0}^Z V$ tiene la menor dimensión posible.

Observar que en dicho caso (y por el teorema de la función inversa) existe un entorno de v_0 en V difeomorfo a \mathbb{F}^{n-s} .

Definición C.2.7. Sea V una variedad algebraica y $v \in V$. Decimos que v es un *punto suave* de V si existe $k > 0$ tal que v tiene un entorno en V difeomorfo a \mathbb{F}^k .

En particular, si $V = p^{-1}(0) \subset \mathbb{F}^n$, donde $p = (p_1, \dots, p_s)$ es polinomial y $v \in V$ es un punto regular de p se obtiene que v es un punto suave. Si V es irreducible, su dimensión es $n - s$.

Lema C.2.8. Sea V una variedad algebraica irreducible real de dimensión k . Tomemos $W \subset V$ una subvariedad algebraica de dimensión $l < k$ y $v \in W$ un punto suave de V . Entonces v se aproxima en la topología euclídea por puntos de $V \setminus W$. En particular, si los puntos suaves de V son densos entonces $V \setminus W$ es denso en V .

Demostración. Ver [6], lema 3. □

Corolario C.2.9. Sea V variedad algebraica real y $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$ su descomposición en componentes irreducibles, con los V_i dos a dos disjuntos. Supongamos que el conjunto de puntos suaves de V es denso y que $W \subset V$ es una subvariedad algebraica que no contiene ninguna componente irreducible. Entonces $V \setminus W$ es denso en V .

Demostración. No es difícil ver que los puntos suaves son densos en V_i para todo $i = 1, \dots, r$. Luego, el conjunto $W_i := W \cap V_i$ es una subvariedad algebraica de V_i y es propia por hipótesis. Por el lema anterior se deduce que $V_i \setminus W_i$ es denso en V_i para todo i y hemos terminado. □

La demostración del siguiente resultado se encuentra en [4] (ver teorema 8.4).

Teorema C.2.10. Sea V una variedad algebraica sobre \mathbb{C} . Entonces V es irreducible si y sólo si contiene un subconjunto abierto, denso y conexo de puntos suaves. □

C.2.2. Prueba de la proposición 9.1.1 en el caso $\Sigma_{g,b}$

Listados todos los prerequisites de geometría algebraica, el objetivo es probar ahora que $W'(\Sigma_{g,b})$ es denso en $W(\Sigma_{g,b})$ (proposición C.2.19 más adelante). La idea es consiste en aplicar el corolario C.2.9, para lo cual necesitamos calcular las componentes irreducibles de esta variedad (esto se hace aplicando el teorema C.2.10).

En primer lugar observemos que $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ es una variedad algebraica. En efecto, $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ es una variedad algebraica de dimensión 3 (ejemplo C.2.2). Así, si $b > 0$ se deduce que $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) = \text{PSL}(2, \mathbb{R})^{2g+b-1}$ es también una variedad algebraica. Por otra parte, cuando $b = 0$ la ecuación

$$[A_1, B_1] \dots [A_g, B_g] = I \quad (\text{C.4})$$

es claramente polinomial en las entradas así que $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ es una variedad algebraica. Análogos resultados se obtienen cuando miramos representaciones a $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Para $b > 0$ la variedad de representaciones es una variedad diferenciable. Cuando $b = 0$ tenemos el siguiente

Lema C.2.11. *Sea $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ una representación no abeliana. Entonces $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ es un punto suave. Análogamente en el caso complejo.*

Demostración. Escribimos $\phi := (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g)$. Sea $R_g : \text{PSL}(2, \mathbb{R})^{2g} \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ dado por

$$(A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) \mapsto [A_1, B_1] \dots [A_g, B_g]$$

de modo que $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) = (R_g - I)^{-1}(0)$. Veamos que ϕ es un punto regular de R_g y esto es suficiente.

Por comodidad, supondremos $g = 2$ (aunque el argumento es general) y notemos $p := R_2 - I$. Si R es el conmutador, es fácil ver que

$$d_\phi p(A_1 \dot{E}_1, B_1 \dot{F}_1, A_2 \dot{E}_2, B_1 \dot{F}_1) = d_{(A_1, B_1)} R(A_1 \dot{E}_1, B_1 \dot{F}_1)[A_2, B_2] + [A_1, B_1] d_{(A_2, B_2)} R(A_2 \dot{E}_2, B_2 \dot{F}_2)$$

Por el lema 7.1.8, y siguiendo su notación uno obtiene que $d_{(A_1, B_1)} R(A_1 \dot{E}_1, B_1 \dot{F}_1)[A_2, B_2]$ es igual a

$$\left(\left(\text{Id}_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - \text{Ad}(A_1 B_1 A_1^{-1}) \right) (\dot{E}'_1) + \left(\text{Id}_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - \text{Ad}([A_1, B_1] A_1^{-1}) \right) (\dot{F}'_1) \right) [A_1, B_1][A_2, B_2]$$

Escribimos $X_1 := A_1 B_1 A_1^{-1}$ e $Y_1 := [A_1, B_1] A_1^{-1}$. Razonando análogamente se obtiene que $[A_1, B_1] d_{(A_2, B_2)} R(A_2 \dot{E}_2, B_2 \dot{F}_2)$ es igual a

$$[A_1, B_1] \left(\left(\text{Id}_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - \text{Ad}(A_2 B_2 A_2^{-1}) \right) (\dot{E}'_2) + \left(\text{Id}_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - \text{Ad}([A_2, B_2] A_2^{-1}) \right) (\dot{F}'_2) \right) [A_2, B_2]$$

y por propiedades elementales de la representación adjunta esto es igual a

$$\left(\left(\text{Id}_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - \text{Ad}(X_2) \right) (\dot{E}'_2) + \left(\text{Id}_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - \text{Ad}(Y_2) \right) (\dot{F}'_2) \right) [A_1, B_1][A_2, B_2]$$

donde $X_2 := [A_1, B_1]A_2B_2A_2^{-1}$ e $Y_2 := [A_1, B_1][A_2, B_2]A_2^{-1}$. Combinando todo lo anterior hemos obtenido que $d_\phi p(A_1\dot{E}_1, B_1\dot{F}_1, A_2\dot{E}_2, B_1\dot{F}_1)$ es igual a

$$\sum_{i=1,2} \left(\left(Id_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - Ad(X_i) \right) (\dot{E}'_i) + \left(Id_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} - Ad(Y_i) \right) (\dot{F}'_i) \right) [A_1, B_1][A_2, B_2]$$

Ahora bien, basta mostrar que dos elementos del conjunto $\{X_1, Y_1, X_2, Y_2\}$ no conmutan, porque entonces son distintos de I y aplica el mismo argumento que en el lema 7.1.8. Si suponemos por absurdo que estos elementos conmutan dos a dos, se concluye fácilmente que los elementos de $\{A_1, B_1, A_2, B_2\}$ conmutan, contradicción.

La prueba en el caso complejo es igual. □

Observación C.2.12. ■ Por el teorema de la función inversa se deduce que el conjunto de representaciones no abelianas es una variedad diferenciable. Su dimensión es

$$\dim(PSL(2, \mathbb{R})^{2g}) - \dim(PSL(2, \mathbb{R})) = 6g - 3$$

Observar que una representación ϕ a $PSL(2, \mathbb{R})$ es abeliana si y sólo si existe un subgrupo a un parámetro \mathcal{S} tal que $Im\phi \subset \mathcal{S}$. Puede probarse en este caso con las mismas ideas del lema previo que $d_\phi p$ no es sobreyectivo.

Notar que el conjunto de puntos suaves de $Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{R}))$ es denso. En efecto, sea $\phi := (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g)$ abeliana y \mathcal{A} un entorno de ϕ . La topología de $Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{R}))$ es la topología producto así que esto determina U_1 y V_1 entornos respectivos de A_1 y B_1 . Ahora bien, sea $\mathcal{S} \subset PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $Im\phi \subset \mathcal{S}$. Por el lema C.1.2 existe $\mathcal{S}' \neq \mathcal{S}$ que corta a U_1 y V_1 . Podemos entonces elegir $A'_1, B'_1 \in \mathcal{S}'$ tales que $A'_1 \in U_1$ y $B'_1 \in V_1$. Entonces $[A'_1, B'_1] = I$ de modo que $\phi' := (A'_1, B'_1, \dots, A_g, B_g) \in \mathcal{A}$ y no es abeliana.

- En el caso complejo uno obtiene también que los puntos suaves son densos, sin embargo hay una diferencia. Hemos visto que toda representación no abeliana es un punto suave pero existen representaciones abelianas $\phi \in Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{C}))$ que también lo son. Por ejemplo, elijamos $\phi \in Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{C}))$ tal que

$$Im\phi = \left\{ I, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Entonces ϕ es abeliana pero haciendo un cálculo explícito se puede ver que $d_\phi p$ es sobreyectivo. Puede probarse que el ejemplo anterior es el único posible (a menos de conjugadas) de un punto abeliano y suave, es decir que los restantes puntos abelianos no son suaves. Esto ocurre cuando la imagen está contenida en un grupo a un parámetro o, a lo sumo, en la unión de dos. Uno puede entonces concluir que los puntos suaves son densos como en el caso real. Por información complementaria sugerimos consultar [14] (proposición 3.7) y [15] (página 567), así como [3] (lema 5.3.2).

C.2. Una prueba para el caso general

El objetivo es ahora calcular las componentes irreducibles de $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$, para lo cual calculamos previamente las de $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$. Inevitablemente, y para no exceder los límites de este trabajo, algunos resultados serán asumidos.

En primer lugar, definamos el *mapa de Stiefel-Whitney* de una representación (ver la sección 2 de [15] por información complementaria).

Consideremos $\phi = (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ (respectivamente a $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$) y el cubrimiento doble $SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ (respectivamente $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$). Elijamos levantados cualesquiera de los elementos A_j, B_j que por abuso anotaremos de la misma manera. En $SL(2, \mathbb{R})$ (respectivamente $SL(2, \mathbb{C})$) uno tiene

$$\prod_{j=1}^g [A_j, B_j] = \pm I \quad (\text{C.5})$$

Definición C.2.13. La *segunda clase de Stiefel-Whitney* de ϕ es 0 si en la igualdad anterior el levantado es I y 1 si es $-I$. La denotamos $w_2(\phi)$.

En este sentido, la segunda clase de Stiefel-Whitney puede ser pensada como la *obstrucción* de levantar ϕ a una representación en el cubrimiento doble.

Observar que si pensamos

$$w_2 : \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

entonces w_2 es sencillamente la reducción módulo 2 de eu .

Es claro que

$$\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) = w_2^{-1}(0) \sqcup w_2^{-1}(1)$$

y lo mismo en el caso complejo. De hecho, en este último caso tenemos el siguiente teorema cuya demostración puede encontrarse por ejemplo en [15] (teorema 5.1) o [12] (teorema 3.10).

Teorema C.2.14 (Goldman). *Si $g > 1$, las componentes conexas de $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ son los conjuntos*

$$w_2^{-1}(k), \quad k = 0, 1$$

□

Este resultado es radicalmente diferente al que se obtiene en el caso real. En particular, la cantidad de componentes conexas es independiente del género de la superficie base.

Para probar el siguiente corolario uno sólo necesita notar que $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), SL(2, \mathbb{C})) \cong w_2^{-1}(0)$.

Corolario C.2.15. *$\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), SL(2, \mathbb{C}))$ es conexo.*

□

Además de ser las componentes conexas, si pensamos $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ como variedad algebraica tenemos la siguiente

Proposición C.2.16. *Si $g > 1$, las componentes irreducibles de $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ son los conjuntos*

$$w_2^{-1}(k), \quad k = 0, 1$$

Demostración. La ecuación (C.5) deja en evidencia que $w_2^{-1}(k)$ es una variedad algebraica para todo $k = 0, 1$ y como son disjuntas, sólo hay que mostrar que son irreducibles.

Para verlo, aplicamos el teorema C.2.10. En efecto, supongamos primero que $k = 1$ entonces $w_2^{-1}(1)$ es una variedad diferenciable: si $w_2(\phi) = 1$, entonces $\text{Im}\phi$ no puede estar contenida en la unión de uno o dos grupos a un parámetro, de lo contrario ϕ se deforma dentro de dichos subgrupos a la representación trivial $\phi' \equiv I$, que es tal que $w_2(\phi') = 0$. Esto es absurdo porque w_2 es continua. Así, los puntos de $w_2^{-1}(1)$ son suaves y en particular este conjunto es una variedad diferenciable y conexa, así que por el teorema C.2.10 es irreducible.

Para el caso $k = 0$ uno procede de manera similar, sólo hay que encontrar un subconjunto conexo, abierto y denso de puntos suaves en $w_2^{-1}(0) \cong \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ (ver [12], página 74 o [15], sección 8). \square

Corolario C.2.17. *Si $g > 1$, las componentes irreducibles de $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ son los conjuntos*

$$w_2^{-1}(k), \quad k = 0, 1$$

Demostración. Nuevamente sólo hay que mostrar que las variedades reales $w_2^{-1}(k)$ son irreducibles. Ahora bien, (C.5) muestra que los polinomios que definen a las variedades $w_2^{-1}(k)$ tienen coeficientes reales. En particular, si $I_{\mathbb{R}}^k$ e $I_{\mathbb{C}}^k$ son los respectivos ideales generados por dichos polinomios sobre los reales y los complejos uno tiene que $I_{\mathbb{R}}^k \subset I_{\mathbb{C}}^k$ y por la proposición anterior $I_{\mathbb{C}}^k$ es primo. Notar además que si $p \in I_{\mathbb{C}}^k$ tiene coeficientes reales, entonces $p \in I_{\mathbb{R}}^k$. Ahora bien, si $pq \in I_{\mathbb{R}}^k \subset I_{\mathbb{C}}^k$ podemos suponer que $p \in I_{\mathbb{C}}^k$ y siendo q un polinomio de coeficientes reales, se deduce $q \in I_{\mathbb{R}}^k$ de modo que $I_{\mathbb{R}}^k$ es primo. \square

Sólo hace falta un resultado adicional previo a la demostración de la proposición central de este apéndice.

Lema C.2.18. *Sea $g > 1$ y la descomposición árbol-dual $\Sigma_g = \bigcup_{i=1}^{2g-2} \Sigma^{(i)}$. Dado $i = 1, \dots, 2g - 2$ existen representaciones $\phi, \phi' \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ tales que las restricciones $\phi^i, \phi'^i : \pi_1(\Sigma^{(i)}) \hookrightarrow \pi_1(\Sigma_g) \longrightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tienen imagen no abeliana y*

$$eu(\phi) = 3 - 2g, \quad eu(\phi') = 2 - 2g$$

C.2. Una prueba para el caso general

Demostración. Renombrando las subsuperficies podemos escribir $\Sigma_g = \Sigma^{(1)} \cup \Sigma$ de modo que $\Sigma^{(1)} \cong \Sigma_{1,1}$ y $\Sigma^{(i)} \subset \Sigma \cong \Sigma_{g-1,1}$. Tomemos en Σ una métrica riemanniana completa de curvatura constante igual a -1 . Esta métrica se levanta al cubrimiento universal $\tilde{\Sigma}$, que resulta ser isométrico a \mathbb{H}^2 (ver [7], capítulo 8). En particular $\pi_1(\Sigma)$ actúa en $\tilde{\Sigma} \cong \mathbb{H}^2$ por isometrías. Esto define una representación fuchsiana

$$\phi^\Sigma : \pi_1(\Sigma) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$$

Más aún, sea $c \subset \Sigma^{(1)} \cap \Sigma$ la componente de borde común de modo que uno tiene las presentaciones

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{j=1}^g [a_j, b_j] = 1 \rangle$$

$$\pi_1(\Sigma^{(1)}) = \langle a_1, b_1, c \mid [a_1, b_1]c = 1 \rangle$$

$$\pi_1(\Sigma) = \langle a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, c \mid \prod_{j>1} [a_j, b_j]c^{-1} = 1 \rangle$$

Escribamos por comodidad $\phi^\Sigma := (A_2, B_2, \dots, A_g, B_g, C)$. Observar que $C \notin Ell \cup I$. En efecto, como ϕ^Σ es discreta si fuera elíptico sería una rotación de ángulo racional y ϕ^Σ es fiel así que c sería un elemento de torsión de $\pi_1(\Sigma)$. Ahora bien, $c = \prod_{j>1} [a_j, b_j]$ y los a_j, b_j son los generadores libres de $\pi_1(\Sigma)$, contradicción. Por lo mismo $C \neq I$ y en particular la clase de Euler de ϕ^Σ está definida. Más aún, por la proposición 3.4.8 (y la observación 3.4.9) sabemos que

$$eu(\phi^\Sigma) = \pm\chi(\Sigma) = \pm(3 - 2g)$$

Conjugando por un elemento de $GL(2, \mathbb{R})^-$ si fuera necesario podemos suponer que $eu(\phi^\Sigma) = 3 - 2g$. Notar además que $\pi_1(\Sigma)$ es libre y ϕ^Σ es inyectiva, así $Im(\phi^\Sigma)^i$ es no abeliano y sólo queda mostrar que ϕ^Σ puede ser extendida a $\pi_1(\Sigma^{(1)})$ sin alterar la clase de Euler total. Para ello, tomemos $\tilde{C} \in Hyp_0 \cup Par_0$ el levantado canónico. Del capítulo 7 sabemos que existen $A_1, B_1 \in PSL(2, \mathbb{R})$ tales que $\tilde{R}(B_1, A_1) = \tilde{C}$. Entonces $\phi^1 := (A_1, B_1, C)$ es una representación $\pi_1(\Sigma^{(1)}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ con clase de Euler igual a 0 y podemos definir

$$\phi := (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) \in Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL(2, \mathbb{R}))$$

Por la proposición 3.4.1 se deduce que

$$eu(\phi) = eu(\phi^\Sigma) + eu(\phi^1) = 3 - 2g$$

La representación ϕ' se construye directamente a partir de una métrica hiperbólica en Σ_g . \square

Consideremos la descomposición árbol-dual $\Sigma_{g,b} = \bigcup_{i=1}^{2g+b-2} \Sigma^{(i)}$ y $W(\Sigma_{g,b})$ el subconjunto de $Hom(\pi_1(\Sigma_{g,b}), PSL(2, \mathbb{R}))$ de representaciones que aplican los bordes de $\Sigma_{g,b}$ en elementos hiperbólicos. Sea

$$W'(\Sigma_{g,b}) := \{\phi \in W(\Sigma_{g,b}), \text{ Im}\phi^i \text{ es no abeliana para todo } i\}$$

Proposición C.2.19. $W'(\Sigma_{g,b})$ es abierto y denso en $W(\Sigma_{g,b})$.

Demostración. Para cada $i = 1, \dots, 2g + b - 2$ consideremos generadores libres x_i, y_i de $\pi_1(\Sigma^{(i)})$ y definamos

$$C_i : \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \longrightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R}), \quad C_i(\phi) := [\phi(x_i), \phi(y_i)]$$

De este modo, se tiene que $\text{Im}\phi^i$ es no abeliana si y sólo si $\phi \notin C_i^{-1}(I)$. Observar además que C_i es un mapa polinomial de modo que $C_i^{-1}(I)$ es una subvariedad algebraica de la variedad de representaciones $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$.

Digamos primero que $b > 0$. Entonces $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) = \text{PSL}(2, \mathbb{R})^{2g+b-1}$ es una variedad diferenciable y conexa. Más aún, observemos que \det es una función analítica (porque es polinomial) y $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ es un nivel regular de la misma, así que $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ es una variedad analítica. Esto implica que $\text{PSL}(2, \mathbb{R})^{2g+b-1}$ es una variedad analítica y como $C_i : \text{PSL}(2, \mathbb{R})^{2g+b-1} \longrightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ es polinómica, es una función analítica.

Supongamos por absurdo que $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \setminus C_i^{-1}(I)$ no es denso. Entonces $C_i^{-1}(I)$ contiene un abierto de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})^{2g+b-1}$ y como C_i es analítica en una variedad analítica conexa, es constante. Esto es contradictorio con el lema previo porque existe una representación fuchsiana $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ y por lo tanto $\phi \notin C_i^{-1}(I)$.

Deducimos que $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \setminus C_i^{-1}(I)$ es denso y por lo tanto el conjunto

$$\bigcap_{i=1}^{2g+b-2} \left(\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \setminus C_i^{-1}(I) \right)$$

lo es. Es claro además que es abierto y coincide con el subconjunto de representaciones que son no abelianas en cada subsuperficie.

Por otra parte $W(\Sigma_{g,b}) \subset \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ es abierto, porque “ser hiperbólico” es una propiedad abierta. Esto implica que

$$W'(\Sigma_{g,b}) = W(\Sigma_{g,b}) \cap \bigcap_{i=1}^{2g+b-2} \left(\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,b}), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \setminus C_i^{-1}(I) \right)$$

es abierto y denso, terminando este caso.

Supongamos ahora que $b = 0$ de modo que $W(\Sigma_g) = \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ y por lo tanto

$$W'(\Sigma_g) = \bigcap_{i=1}^{2g+b-2} \left(\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \setminus C_i^{-1}(I) \right)$$

Por la observación C.2.12, los puntos suaves de $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ son densos y por el corolario C.2.17 sabemos además que las componentes irreducibles son los conjuntos $w_2^{-1}(k)$, $k = 0, 1$. Como son disjuntos, podemos aplicar el corolario C.2.9. Para ello, observemos que el lema anterior implica que dado $i = 1, \dots, 2g + b - 2$ y $k = 0, 1$ existe $\phi \in w_2^{-1}(k) \setminus C_i^{-1}(I)$. En particular, $C_i^{-1}(I)$ es una subvariedad que no contiene a ninguna componente irreducible así que $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \setminus C_i^{-1}(I)$ es denso para todo i y se concluye como en el caso con borde. □

Referencias

- [1] Alexandrino, M., Bettioli, R.: *Lie groups and geometric aspects of isometric actions*. Springer, Switzerland (2015).
- [2] Candel, A., Conlon, L.: *Foliations II*. American Mathematical Society, USA (2003).
- [3] Cano, A., Navarrete, J., Seade, J.: *Complex kleinian groups*. Springer, Switzerland (2013).
- [4] Cooper, D., Manning, J.: *Non-faithful representations of surface groups into $SL(2, \mathbb{C})$ which kill no simple closed curve*. *Geometriae Dedicata*, p.177-165 (2015).
- [5] Culler, M., Shalen, P.: *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*. *Annals of Mathematics, Second series*, Vol. 117, Nro. 1, p. 109-146 (1983).
- [6] DeBlois, J., Kent, P.: *Surface groups are frequently faithful*. arXiv:math/0411270 [math.GT].
- [7] do Carmo, M.: *Riemannian geometry*. Birkhäuser, USA (1992).
- [8] Farb, B., Margalit, D.: *A primer on mapping class groups*. Princeton University Press, USA (2012).
- [9] Funar, L., Wolff, M.: *Non-injective representations of a closed surface group into $PSL(2, \mathbb{R})$* . *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 142, p.289-304 (2007).
- [10] Gallier, J.: *Notes on differential geometry and Lie groups*. <http://www.seas.upenn.edu/~jean/diffgeom.pdf>
- [11] Ghys, E.: *Groups acting on the circle*. *L'Enseignement Mathématique* 47, p.329-407 (2001).
- [12] Goldman, W.: *Discontinuous groups and their Euler class*. Doctoral thesis, University of California, Berkeley (1980).
- [13] Goldman, W.: *Geometric structures and varieties of representations*. <http://www.math.umd.edu/wmg/geost.pdf>
- [14] Goldman, W.: *The symplectic nature of fundamental groups of surfaces*. *Advances in Mathematics* 54, p.200-225 (1984).

- [15] Goldman, W.: *Topological components of spaces of representations*. Inventiones Mathematicae 93, p. 557-607 (1988).
- [16] Goldman, W.: *Trace coordinates on Fricke spaces of some simple hyperbolic surfaces*. arXiv:0901.1404 [math.GT].
- [17] Hatcher, A.: *Algebraic topology*. Cambridge University Press, England (2002).
- [18] Hironaka, H.: *Triangulations of algebraic sets*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 29, p.165-185 (1975).
- [19] Hitchin, N.: *Lie groups and Teichmüller space*. Topology, Vol.31, Nro. 3, p.449-473 (1992).
- [20] Katok, S.: *Fuchsian groups*. The University of Chicago Press, USA (1992).
- [21] Lang, S.: *Algebra*. Springer-Verlag, USA (2002).
- [22] Milnor, J.: *On the existence of a connection with curvature zero*. Comentarîi Mathematici Helvetici 32, p.215-223 (1958).
- [23] Milnor, J.: *Singular points of complex hypersurfaces*. Princeton University Press, USA (1968).
- [24] Milnor, J.: *Topology from the differential viewpoint*. The University Press of Virginia, USA (1965).
- [25] Morgan, J., Shalen, P.: *Valuations, trees, and degenerations of hyperbolic structures I*. Annals of Mathematics, Second series, Vol. 120, Nro. 3, p.401-476 (1984).
- [26] Morita, S.: *The geometry of differential forms*. American Mathematical Society, USA (2001).
- [27] Munkres, J.: *Topología*. Pearson Educación, España (2002).
- [28] Perrin, D.: *Algebraic geometry, an introduction*. Springer-Verlag, England (2008).
- [29] Shafarevich, I.: *Basic algebraic geometry II*. Springer-Verlag, Germany (1977).
- [30] Whitney, H.: *Elementary structure of real algebraic varieties*. Annals of Mathematics, Second series, Vol.66, Nro. 3, p.545-556 (1957).
- [31] Wood, J.: *Bundles with totally disconnected structure group*. Comentarîi Mathematici Helvetici 46, p.257-273 (1971).