UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

FACULTAD DE CIENCIAS

Tesis de Maestría:

Anosov Topológicos en el Plano

Diciembre de 2016

Gonzalo Cousillas

Orientador: Jorge Groisman

Maestría en Matemática
(PEDECIBA)
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Resumen

Sea X un espacio topológico, se dice que $f : X \to X$ homeomorfismo, es Anosov topológico si es expansivo topológico y tiene la propiedad del sombreado topológico. En el presente trabajo se introducen estos conceptos, y se prueba como resultado principal que un Anosov topológico que preserva orientación en el plano tiene un punto fijo.

Abstract

Let X be a topological space. A homeomorphism $f : X \to X$ is topologically Anosov if it is topologically expansive and has the topological shadowing property. In this work we introduce this concepts and prove our main theorem, that states that an orientation preserving topologically Anosov homeomorphism acting on the plane has a fixed point.

Dedicado a mi familia, amigos y

a todos los que me impulsaron a estudiar matemática.

Índice

1 Introducción

El siguiente trabajo se encuadra en el contexto de la dinámica topológica en espacios no compactos, y el resultado principal de esta tesis es un teorema de existencia de punto fijo para Anosov topológicos que preservan orientación en el plano.

Una propiedad de interés en sistemas dinámicos es la expansividad, si M es un espacio métrico, $f : M \to M$ un homeomorfismo, se dice *expansivo* si existe una constante $\alpha > 0$, llamada de expansividad, tal que para todo par de puntos $x \neq y$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \alpha$. Este concepto se puede interpretar como que cada punto del espacio tiene, desde el punto de vista de su dinámica un comportamiento distintivo. El estudio de los homeomorfismos expansivos comienza con Utz en la década del 50 [Utz50] donde reciben el nombre de *homeomorfismos inestables*, en el mismo ya se evidencia la consideración de entornos de la diagonal para trabajar de forma equivalente a la definición de la expansividad; en [Sc52] Schwartzman llega a que los únicos espacios métricos compactos que admiten expansividad a futuro, son finitos y con esto se evidencia la necesidad de que las órbitas de cualquier par de puntos sean distinguibles a futuro o a pasado. En el afán de determinar qué espacios admiten sistemas expansivos, Lewowicz y Hiraide llegan casi simultáneamente y por argumentos diferentes a probar la no existencia de expansivos en la esfera S^2 y siguiendo con su trabajo, llegan a la clasificación de expansivos en superficies: Los expansivos en el Toro son conjugados a un Anosov y en superficies de género mayor a 1, son conjugados a un Pseudo-Anosov [Le89].

En contextos no compactos, Groisman [Gr11] enfrenta el problema de la clasificación de expansivos en el plano; asimismo en el trabajo de Richeson y Wiseman [RW07] se introducen las nociones de *expansividad positiva débil* y *fuerte* como generalizaciones en espacios no compactos del concepto de expansividad métrica. Por último, en [DLRW13] se retoma el enfoque de entornos de la diagonal de [Utz50] para generalizar estos conceptos a espacios topológicos; $f : X \to X$ se dice *expansivo topológico* si existe N cerrado entorno de la diagonal Δ_X tal que si $(x, y) \notin \Delta_X$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $(f^n(x), f^n(y)) \notin N$.

La propiedad del sombreado de pseudo-órbitas es introducida en los trabajos de Anosov y Bowen y resulta ser un concepto fundamental en el estudio de los sistemas dinámicos. Se dice que una sucesión $\{x_n\} \subset M$, es ε sombreada por un punto $y \in M$ si $d(f^n(y), x_n) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se dice que f tiene la *propiedad del sombreado* si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que cualquier δ-pseudo órbita; esto es, cualquier sucesión $\{x_n\}$ que cumple $d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, es ε sombreada por un punto $y \in M$. La idea de este concepto viene de pensar que en cada iteración se comete un "error en la medición". A medida que el sistema evoluciona en el tiempo puede suceder que la acumulación de los errores de cada iterado haga que el comportamiento "teórico" y el comportamiento "numérico" sean totalmente distintos. Si tenemos un control uniforme de tamaño δ del error que se puede cometer, entonces la órbita numérica se llamará δ-pseudo órbita. El sistema tendrá la propiedad del sombreado de pseudo órbitas si, independientemente de la acumulación de errores que se tenga en cada etapa, el comportamiento numérico es cercano al comportamiento teórico. Desde un enfoque topológico, [DLRW13] generalizan el concepto, $f : X \to X$ tiene la *propiedad del sombreado* si para cualquier E entorno de la diagonal Δ_X, existe otro entorno D de la diagonal Δ_X tal que para toda D-pseudo órbita, esto es, una sucesión $\{x_n\}$ tal que $(f(x_n), x_{n+1}) \in D$, existe $y \in X$ tal que $(f^n(y), x_n) \in E$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

En el plano, si tomamos la transformación lineal A, dada por la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, la misma tiene coeficientes enteros y determinante 1. Sus valores propios son uno mayor que 1 y el otro menor que 1 y sus subespacios propios tienen pendiente irracional. Dicha transformación es infinitamente expansiva métrica; esto es que cualquier $\alpha > 0$ es constante de expansividad, y tiene la propiedad del sombreado métrico, además induce en el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ un difeomorfismo de Anosov (lineal). Éste tiene propiedades sorprendentes; es expansivo, los puntos periódicos son densos, es transitivo y además tiene la propiedad del sombreado.

Con esta referencia, en el contexto de espacios métricos, $f : M \to M$ homeomorfismo se llama *Anosov* si es expansivo y tiene la propiedad del sombreado [AHK03]. En [DLRW13] se adopta otra vez esta idea para llamar *Anosov* a los homeomorfismos que tengan estas dos propiedades topológicas.
En este trabajo nos proponemos estudiar las generalizaciones de los conceptos

de expansividad y sombreado topológico y sus comparaciones con las definiciones métricas (Sección 3.) para luego centrar nuestra atención en el caso en que el espacio es el plano.
En la Sección 4. se revisan los ejemplos más sencillos que tienen la propiedad de expansividad y sombreado métrico, las transformaciones lineales hiperbólicas, y se analiza si tienen las mismas propiedades en este nuevo contexto. Se obtiene que en el caso en que A represente una transformación lineal de la forma $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{N}, \lambda > 1$, tiene ambas propiedades y por tanto es un Anosov Topológico y en el caso en que A sea una transformación lineal de la forma $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$, no tiene la propiedad del sombreado topológico con lo que no es Anosov Topológico.

En la Sección 5. obtenemos el resultado principal de esta tesis.
Teorema 5.3
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Anosov Topológico que preserva orientación, entonces f tiene al menos un punto fijo.

Por último, en la Sección 6 delineamos posibles caminos a seguir en el futuro.

2 Preliminares

Dado $f : X \to X$, para trabajar nociones dinámicas en caso en que X es espacio topológico y f homeomorfismo en [RW07] se plantea de utilidad considerar $F \equiv f \times f$ en $X \times X$ y entornos de la diagonal $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$. Esto surge de pensar lo siguiente: un punto y se encuentra en un entorno de x si y sólo si el par (x, y) se encuentre en un entorno de la diagonal Δ_X.
Esta tesis tiene como puntapie inicial el artículo [DLRW13] donde se definen las nociones de expansividad y propiedad del sombreado en el contexto de espacios topológicos. En el mismo se pide como hipótesis que X sea espacio topológico localmente compacto, paracompacto, que cumpla el primer axioma de numerabilidad y que sea de Hausdorff. Esto permite considerar la familia de entornos de la diagonal para tener nociones de "cercanía" y nociones de continuidad en el producto.
Sea U un entorno de Δ_X, se define $U[x] := \{y \in X : (x, y) \in U\}$ como la sección transversal de U en x. Observar que para cualquier $x \in X$ y un entorno A de x, existe U entorno de Δ_X tal que $U[x] \subset A$. Se dice que un conjunto $M \subset X \times X$ es *propio* si para cada subconjunto S compacto de X, se tiene que $M[S] = \bigcup_{x \in S} M[x]$ es compacto. Definimos $M^t = \{(y, x) : (x, y) \in M\}$, se dice que M es *simétrico* si $M = M^t$. Es facil ver que si M es un entorno de Δ_X, entonces $M \cap M^t$ es un entorno simétrico de Δ_X, con lo que a partir de un entorno cualquiera podemos obtener uno simétrico contenido en el primero.
Sean $n \in \mathbb{N}$, definimos U^n como

$$\{(x, y) \in X \times X : \text{ existe } x = z_0, \ldots, z_n = y \in X \text{ tales que } (z_{i-1}, z_i) \in U;\ 1 \leq i \leq n\}$$

La idea de esta definición es pensar que al tomar un entorno U^n, y compararlo con U tengamos un análogo de tomar una bola de radio ε en cada punto, y compararla con una bola de radio ε/n.

Veamos como podemos considerar una noción de expansividad utilizando sólamente conceptos topológicos, para ello tomaremos entornos de la diagonal Δ_X del producto $X \times X$.

Definición 2.1 (Expansivo Topológico)**.** *Se dice que un homeomorfismo $f : X \to$*

X es expansivo topológico si existe un entorno cerrado N de Δ_X tal que para $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $F^n(x,y) = (f^n(x), f^n(y)) \notin N$. Dicho entorno se llama entorno de expansividad para f.

Por otro lado veamos el análogo de propiedad del sombreado en el caso topológico.

Definición 2.2. *Sean D y E entornos de Δ_X. Una D-cadena es una sucesión $\{x_0, \ldots, x_n\}$ con $n \geq 1$ tal que $(f(x_{i-1}), x_i) \in D$ para $i = 1, \ldots, n$. Una D-pseudo órbita es una D-cadena bi-infinita. Una D-cadena es E-sombreada por un punto $y \in X$ si $(f^i(y), x_i) \in E$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Definición 2.3 (Sombreado Topológico)**.** *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo, se dice que f tiene la propiedad del sombreado topológico si para cada E entorno de Δ_X, existe D entorno de Δ_X tal que toda D-pseudo órbita es E-sombreada por un punto $y \in X$.*

Estos dos conceptos de expansividad y propiedad del sombreado desde el punto de vista topológicos son buenas generalizaciones de sus contrapartes métricas en espacios compactos pues son propiedades dinámicas, es decir, invariantes por conjugaciones y además cualquier potencia también mantiene estas propiedades. La proposición a continuación justifica este hecho.

Proposición 2.1. *Sea X espacio topológico, $f : X \to X$ homeomorfismo.*

1. *f es expansivo topológico (respectivamente tiene la propiedad del sombreado topológico) si y sólo si f^k es expansivo topológico (respectivamente tiene la propiedad del sombreado topológico) para todo $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$.*
2. *Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo, entonces f es expansivo topológico (respectivamente tiene la propiedad del sombreado topológico) si y sólo si $h \circ f \circ h^{-1}$ es expansivo topológico (respectivamente tiene la propiedad del sombreado topológico).*

Demostración:

1. Primero veamos que f es expansivo (o tiene la propiedad del sombreado) si y sólo si f^{-1} también: podemos ver que N es un entorno de expansividad para

f si y sólo si N es un entorno de expansividad para f^{-1}, por otro lado una sucesión $\{x_n\}$ es una D-cadena para f si y sólo si es una $F^{-1}(D)$- cadena para f^{-1}, dado que $(f(x_{i-1}), x_i) \in D$ si y sólo si $(x_{i-1}, f^{-1}(x_i)) \in F^{-1}(D)$.

Por tanto si trabajamos con $k > 0$, será análogo con $k < 0$:
Sea $k > 0$, si E es un entorno de expansividad para f^k, es claro que E también es un entorno de expansividad para f. Recíprocamente, si E es un entorno de expansividad para f, dados $x \neq y$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $(f^n(x), f^n(y)) \notin E$, existen únicos $p \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < k$ tales que $f^n = f^r \circ (f^k)^p$, entonces $(f^r \circ (f^k)^p(x), f^r \circ (f^k)^p(y)) \notin N$ implica que $((f^k)^p(x), (f^k)^p(y)) \notin F^{-r}(E)$. Por tanto tomando $\tilde{E} = \bigcap_{i=0}^{k-1} F^{-i}(E)$, este es un entorno de expansividad para f^k.
Consideremos ahora que f tiene la propiedad de sombreado y E es un entorno de Δ_X. Entonces existe D entorno de Δ_X, tal que toda D_f-pseudo órbita es E_f sombreada por un punto y. Sea $\{\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots\}$ una D_{f^k}-pseudo órbita. Entonces

$$\{\ldots, x_{-1}, f(x_{-1}), f^2(x_{-1}), \ldots, f^{k-1}(x_{-1}), x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0), x_1, \ldots\}$$

es una D_f-pseudo órbita, con lo que existe un punto y que la E_f-sombrea. Se tiene entonces que este punto y también E_{f^k} sombrea la D_{f^k}-pseudo órbita. Por tanto f^k tiene la propiedad del sombreado.
Recíprocamente, si f^k tiene la propiedad del sombreado, consideremos E entorno de Δ_X. Sea B entorno simétrico de Δ_X tal que $B^k \subset E$, entonces $E' = \bigcap_{i=0}^{k-1} F^{-k}(B)$ es también un entorno de Δ_X, con lo que existe D (se puede considerar contenido en E') tal que toda D_{f^k}-pseudo órbita es E'_{f^k} sombreada por un punto y. Sea C un entorno simétrico de Δ_X tal que $C^k \subset D$, y consideremos $D' = \bigcap_{i=0}^{k-1} F^{-k}(C)$. Tomamos $\{\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots\}$ una D'-pseudo órbita. Entonces $\{\ldots, x_{-k}, x_0, x_k, x_{2k}, \ldots\}$ es una D_{f^k}-pseudo órbita, con lo que existe un punto y que la E'_{f^k}-sombrea. Este y también E_f-sombrea la pseudo órbita $\{\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots\}$. Esto muestra que f tiene la propiedad del sombreado.

2. Consideremos $H : X \times X \to Y \times Y$ tal que $H = h \times h$. Se tiene que N

es un entorno de expansividad para f si y sólo si $H(N)$ es un entorno de expansividad para $h \circ f \circ h^{-1}$.
Por otro lado, una D_f-pseudo órbita $\{\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots\}$ es E_f sombreada por un punto y si y sólo si la $H(D)_{h\circ f\circ h^{-1}}$-pseudo órbita $\{\ldots, h(x_{-1}), h(x_0), h(x_1), \ldots\}$ es $H(E)_{h\circ f\circ h^{-1}}$ sombreada por el punto $h(y)$.

∎

En la siguiente sección retomaremos los conceptos métricos y topológicos y analizaremos sus relaciones.
Se sabe que si f es Anosov, entonces f es expansivo y tiene la propiedad del sombreado; en [Ya01] a los homeomorfismos que cumplen ambas propiedades métricas se les llama Anosov topológicos, por lo que en [DLRW13] si un homeomorfismo es expansivo topológico y tiene la propiedad del sombreado topológico se le llama *Anosov Topológico.*

Definición 2.4 (Anosov Topológico)**.** *Un homeomorfismo $f : X \to X$ se dice que es Anosov topológico si es expansivo topológico y tiene la propiedad del sombreado topológico.*

Con la proposición anterior se tiene que los Anosv topológicos son invariantes por conjugaciones y cualquier potencia de un Anosov topológico también lo es.

Si se considera un entorno de expansividad adecuado, es posible elegir un entorno D de forma que el punto que sombrea una D-pseudo órbita sea único, esto lo resumimos en el siguiente

Lema 2.1. *Sea $f : X \to X$ Anosov topológico. Si E es un entorno de Δ_X tal que E^2 es un entorno de expansividad de f, entonces existe un entorno D de Δ_X tal que toda D-pseudo órbita es E-sombreada por un único punto de X.*
Además, si la D-pseudo órbita es periódica, entonces también lo es la órbita que la sombrea.

Demostración:
Sea E un entorno simétrico de Δ_X tal que E^2 es un entorno de expansividad. Como f tiene la propiedad del sombreado topológico, existe D entorno de Δ_X tal que toda D-pseudo órbita es E-sombreada por un punto de X. Veamos la

unicidad del punto:
Supongamos $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es una D-pseudo órbita y x e y son puntos que la E-sombrean. Entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene $(x_n, f^n(x)), (x_n, f^n(y)) \in E$. Por tanto $(f^n(x), f^n(y)) \in E^2$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. Como E^2 es un entorno de expansividad de f, se tiene que $(x, y) \in \Delta_X$.

Consideremos por otro lado $\{y_k\}$ una D-pseudo órbita periódica de período q y sea x el único punto que la E-sombrea, entonces $\{y_{k+q}\}$ es una D-pseudo órbita periódica y como $f^q(x)$ es un punto que E sombrea, debe ser único. Como $\{y_k\} = \{y_{k+q}\}$, se tiene que $x = f^q(x)$ y x es periódico. ∎

Con esto terminamos los conceptos preliminares y pasaremos en la siguiente sección a familiarizarnos un poco más con estas definiciones al trabajar con ejemplos concretos y compararlos con las definiciones métricas.

3 Conceptos Métricos vs Topológicos

En este capítulo nos propondremos estudiar posibles relaciones entre la expansividad y sombreado métrico respecto a la expansividad y sombreado topológico, todo esto en ejemplos donde el sistema dinámico está definido en $X \subset \mathbb{R}$ o $X \subset \mathbb{R}^2$.

Lo primero que hay que notar es que las definiciones métricas y topológicas coinciden en el caso en que X sea compacto dado que los entornos de la diagonal y los entornos que se obtienen como preimagen de intervalos por la métrica son equivalentes:
Si U es un entorno de Δ_X, por la compacidad, definiendo

$$\delta = \inf_{x \in X} \{d(x, X - U[x])\},$$

se tiene que $\delta > 0$ y tomando $U_\delta = d^{-1}[0, \delta]$ obtenemos que $U_\delta \subset U$. Recíprocamente todo U_δ es un entorno de Δ_X.

Sin embargo, en espacios métricos no compactos veremos que las cosas pueden comportarse de manera diferente.

3.1 Expansividad

Es inmediato ver que si (X, d) es espacio métrico y $f : X \to X$ un homeomorfismo, si f es expansivo métrico, entonces f es expansivo topológico:
Si α es constante de expansividad para f, entonces $U_\alpha = d^{-1}[0, \alpha]$ es un entorno de Δ_X que claramente es entorno de expansividad topológico (ver Figura 1).

Observación 3.1. *Sin embargo la expansividad topológica no implica la expansividad métrica:*

Consideremos $a > 0$, $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $T(x) = x + a$, sea U entorno de Δ_X tal que $U[x] = \{y \in \mathbb{R} : d(x, y) \leq e^{-x^2}\}$ (ver Figura 2). Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) = d(x + na, y + na) = d(T^n(x), T^n(y)) \leq e^{-(x+na)^2}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, pero $e^{-(x+na)^2} \to 0$ si $|n| \to \infty$, con lo que la desigualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{Z}$ sólo si $x = y$, por tanto T es expansivo topológico.

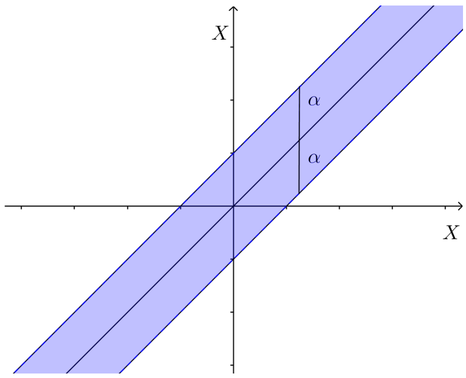

Figura 1: Entorno de Δ_X: $U = d^{-1}[0, \alpha]$

Este homeomorfismo no es expansivo métrico: dado $\alpha > 0$, como T es una isometría, si $x \neq y$ son tales que $d(x, y) < \alpha$, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$, $d(T^n(x), T^n(y)) = d(x, y) \leq \alpha$, y esto implica que T no es expansivo métrico.

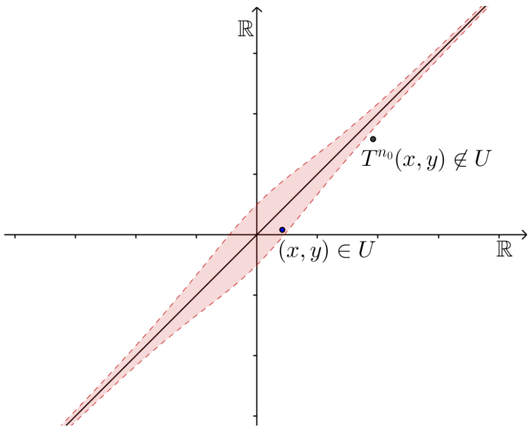

Figura 2: Entorno U de Δ_X que se pega a la diagonal y es de expansividad para una traslación en $\mathbb{R}$.

3.2 Sombreado

Al trabajar con la propiedad del sombreado, en contextos no compactos suceden cosas llamativas. El sombreado métrico y el sombreado topológico van por carriles distintos, ninguno implica el otro. Mostraremos esto en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.1. *[DLRW13] La propiedad del sombreado métrico no implica la propiedad del sombreado topológico:*

Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} X_n$, donde $X_n = \{n\} \times [0, 2^{-|n|}]$, con la métrica relativa a la usual de $\mathbb{R}^2$. Definimos $f : X \to X$ como

$$f(n,y) = \begin{cases} (n+1, 2y) & \text{si } n < 0, \\ (n+1, \frac{1}{2}y) & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

- Veamos que f tiene la propiedad del sombreado métrico:
  Dado $\varepsilon > 0$, si n cumple que $|n| > n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, entonces $diam(X_n) < \varepsilon$. Tomamos $\delta < \text{mín}\{\varepsilon/2, 1\}$, si $\{x_n\}$ es una δ-pseudo órbita, considerando $x_0 \in X_0$, entonces $x_n \in X_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

  Con esto cualquier δ-pseudo órbita va a ser sombreada por cualquier punto si $|n| > n_0$ pues si el punto y_0 que sombrea es tal que $y_0 \in X_0$, entonces $f^n(y_0) \in X_n$ y $d(f^n(y_0), x_n) < \varepsilon$.

  Por otro lado como f y f^{-1} son uniformemente continuas en $X_{-n_0} \cup \ldots \cup X_{n_0}$, esto garantizará la propiedad del sombreado en este subconjunto. Justifiquemos esto:

  Afirmamos que x_0, el término de la δ-pseudo órbita que esta en X_0 ε-sombrea la δ-pseudo órbita:

  Si $n \geq 0$, $d(x, x') < \delta$ implica $d(f(x), f(x')) < \delta/2$. Por cómo esta definido f, si $d(x_1, f(x_0)) < \delta$, entonces $d(f(x_1), f^2(x_0)) < \delta/2$, el término x_2 es tal que $d(f(x_1), x_2) < \delta$.

  Por desigualdad triangular, se tiene que $d(f^2(x_0), x_2) < \frac{3}{2}\delta < \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$. Aplicando otra vez f, $d(f^2(x_0), x_2) < \frac{3}{2}\delta$, esto implica que $d(f^3(x_0), f(x_2)) < \frac{3}{2^2}\delta$ y $d(f(x_2), x_3) < \delta$, entonces $d(f^3(x_0), x_3) < \left(\frac{2^3-1}{2^{(3-1)}}\right)\delta < \left(\frac{2^3-1}{2^3}\right)\varepsilon < \varepsilon$.
  El mismo razonamiento aplicado para $0 < n \leq n_0$, muestra que $d(f^n(x_0), x_n) < \left(\frac{2^n-1}{2^{n-1}}\right)\delta < \left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)\varepsilon < \varepsilon$
  De forma análoga al considerar f^{-1}, se prueba que $f^n(x_0)$ sombrea la δ-pseudo órbita para $-n_0 \leq n < 0$.

- f no tiene la propiedad del sombreado topológico:
  Tomemos E entorno de Δ_X que se "pegue" asintóticamente a la diagonal más rápido que $\frac{1}{2^n}$, por ejemplo E tal que $E[(n,x)] = \{(n,y) \in$

$X : d((n,x),(n,y)) \leq e^{-\|(n,x)\|^2}\}$. Observar que si $(n,y) \in X_n$, entonces $e^{-\|(n,y)\|^2} \leq e^{-n^2}$.

De esta manera, a futuro las únicas δ-pseudo órbitas sombreadas van a ser órbitas:

Si $x_0, y_0 \in X_0$, entonces $d(f^n(x_0), f^n(y_0)) = \frac{d(x_0,y_0)}{2^n}$ para $n > 0$. Y si y_0 sombrea la órbita de x_0 a futuro, entonces $d(f^n(x_0), f^n(y_0)) \leq e^{-\|f^n(x_0)\|} \leq e^{-n^2}$ y esto implica que $d(x_0, y_0) \leq \frac{2^n}{e^{n^2}}$. Pero $\frac{2^n}{e^{n^2}} \to 0$ si $n \to +\infty$, con lo que deducimos que esto tiene sentido sólo si $x_0' = x_0$, es decir el único punto que sombrea a la órbita futura de x_0 es el propio x_0.

El razonamiento es análogo para la órbita pasada de y_0.
Sea entonces D un entorno arbitrario de Δ_X, y_0 tal que $(x_0, y_0) \in D \setminus \Delta_X$, consideramos la D-pseudo órbita $x_n = \begin{cases} f^n(x_0) & \text{si } n \geq 0 \\ f^n(y_0) & \text{si } n < 0 \end{cases}$. Por lo visto anteriormente, esta D-pseudo órbita no es sombreada en X.

Observación 3.2. *La propiedad del sombreado topológico no implica la propiedad del sombreado métrico:*

Sea $f : X \to X$ el mapa identidad en el espacio $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, con la métrica usual de $\mathbb{R}$.

- Como en X todos los puntos son aislados, son abiertos, y podemos considerar D como la diagonal Δ_X. Entonces las únicas D-pseudo órbitas son verdaderas órbitas, que como f es la identidad, son puntos fijos. Por tanto, se cumple la propiedad del sombreado topológico trivialmente.

- Por otro lado, dado $\delta > 0$ y $N > \frac{1}{\delta}$, $\{\ldots, x_N, x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots\}$ es una δ-pseudo órbita dado que si $n \geq N$, $d(x_n, x_{n+1}) < \delta$. Es claro que no es sombreada porque la misma tiende a infinito y las órbitas son puntos fijos. Esto muestra que f no tiene la propiedad del sombreado métrico.

Cabe notar que el homeomorfismo del ejemplo anterior también es expansivo topológico:
El propio entorno D definido anteriormente es un entorno de expansividad.
Con esto concluímos que $f : X \to X$ es Anosov Topológico y obtenemos nuestro primer ejemplo que, curiosamente es la identidad.

4 Ejemplos en el Plano

En esta sección nos concentraremos en estudiar Anosov Topológicos en $\mathbb{R}^2$.

Como nuestro espacio es $\mathbb{R}^2$, utilizaremos bolas centradas en cada punto que varien de forma continua su radio en vez de trabajar con entornos de la diagonal. Es decir, vamos a considerar funciones $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ que a cada punto x, le asocie el radio $\varepsilon(x)$ de una bola centrada en x.

Si $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ es continua, podemos nombrar $E[x] = \bar{B}(x, \varepsilon(x))$ y entonces definir un E entorno de $\Delta_{\mathbb{R}^2}$, como $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : y \in \bar{B}(x, \varepsilon(x))\}$. Recíprocamente, si queremos obtener a partir de un entorno de la diagonal una función que a un punto le asocie un radio de una bola centrada en el punto, debemos pedir como hipótesis que E sea cerrado, propio (para que $E[x]$ sea compacto), simétrico (para que sea indistinto tomar $d(x, y) < \varepsilon(x)$ o $d(x, y) < \varepsilon(y)$) y que además para cada $x, E[x]$ sea conexo. Entonces definimos

$$\varepsilon(x) = \sup_{y \in E[x]} \{d(x, y)\}$$

De esta forma si $(x, y) \in E$, se tiene que $d(x, y) \leq \varepsilon(x)$.

Por tanto en vez de tomar entornos de la diagonal, tomaremos la familia de funciones $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2) = \{\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+, \text{ tal que } \varepsilon \text{ es continua}\}$, y consideraremos $\varepsilon \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ en vez de tomar E entornos de la diagonal $\Delta_{\mathbb{R}^2}$.

En este contexto $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es expansivo topológico si existe $\alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ tal que si $x \neq y$, existe $n \in \mathbb{Z}$ que cumple $d(f^n(x), f^n(y)) > \alpha(f^n(x))$. Asimismo, f tiene la propiedad del sombreado topológico si para todo $\varepsilon \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, existe $\delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ tal que si $\{x_n\}$ cumple que $d(f(x_{i-1}), x_i) \leq \delta(f(x_{i-1}))$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, entonces existe $y \in \mathbb{R}^2$ que verifica $d(f^i(y), x_i) \leq \varepsilon(x_i)$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Las transformaciones lineales hiperbólicas en $\mathbb{R}^n$, es decir, las transformaciones con valores propios de módulo diferente de 1, son expansivos métricos, en particular, la expansividad es infinita; además tienen la propiedad del sombreado métrico, en [Om94] se encuentra una exposición elegante de este resultado.

Pasemos entonces a ver si las transformaciones lineales hiperbólicas tienen las propiedades de expansividad y sombreado topológico. En la sección anterior vimos que el sombreado métrico no implica el sombreado topológico, sin embargo el ejemplo mostrado era bastante patológico. Por tanto estudiaremos si se cumplen dichas propiedades, primero en el caso de una homotecia de razón 2 y luego en el caso en que la transformación lineal hiperbólica tenga valores propios 2 y 1/2.

Antes de eso, pasemos a mostrar un lema que nos será de utilidad para garantizar la propiedad del sombreado sabiendo que se sombrean pseudo órbitas al futuro. Diremos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiene la *propiedad del sombreado a futuro* si dado $\varepsilon \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, existe $\delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ tal que para toda δ-pseudo órbita $\{x_n\}$, para cualquier k, existe y_k tal que $d(f^n(y_k), x_n) \leq \varepsilon(x_n)$ para todo $n \geq k$.

Lema 4.1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homeomorfismo con la propiedad del sombreado topológico a futuro, entonces f tiene la propiedad del sombreado topológico.*

La idea intuitiva de esta prueba consiste en observar que al tomar una δ-pseudo órbita y fijar $n_0 = 0$, hay un punto que sombrea a futuro, luego al considerar la δ-pseudo órbita comenzando en el término anterior, hay otro punto que sombrea la δ-pseudo órbita futura tal que el primer iterado esta cerca de x_0, siguiendo el razonamiento para todo tiempo pasado, obtenemos un punto que sombrea a futuro y que en tiempo 0 pasa cerca de x_0. Luego tomando un punto de acumulación de la sucesión de puntos que en tiempo 0 pasan cerca de x_0 obtendremos un punto que sombreará la δ-pseudo órbita tanto a futuro como a pasado.

Demostración:
Dado $\varepsilon \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, por el sombreado a futuro existe $\delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ tal que para cualquier $\{x_n\}$ δ-pseudo órbita y $k \in \mathbb{Z}$, existe $y_k \in X$ tal que $d(x_n, f^n(y_k)) \leq \varepsilon(x_n)$ si $n \geq k$.

Dada $\{x_n\}$ una δ-pseudo órbita:
Para $k = 0$, existe y_0 tal que $d(x_n, f^n(y_0)) \leq \varepsilon(x_n)$ para todo $n \geq 0$, en particular $y_0 \in \bar{B}(x_0, \varepsilon(x_0))$.
Para $k = -1$, existe y_{-1} tal que $d(x_n, f^n(f(y_{-1}))) \leq \varepsilon(x_n)$, para todo $n \geq -1$, en particular $f(y_{-1}) \in \bar{B}(x_0, \varepsilon(x_0))$.
Razonando de la misma forma para $-k$, $k \in \mathbb{N}$, se tiene que existe y_{-k} tal que $d(x_n, f^n(f^k(y_{-k}))) < \varepsilon(x_n)$, para todo $n \geq -k$, y $f^k(y_{-k}) \in \bar{B}(x_0, \varepsilon(x_0))$.

Consideramos entonces la sucesión $\{f^k(y_{-k})\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \bar{B}(x_0, \varepsilon(x_0))$ y tomamos $\tilde{y}$ punto de acumulación de $\{f^k(y_{-k})\}$. Afirmamos que $d(f^n(\tilde{y}), x_n) \leq \varepsilon(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$:
Sea $n \in \mathbb{Z}$ fijo,

$$d(x_n, f^n(\tilde{y})) = d(x_n, f^n(\lim_{k_i\to\infty} f^{k_i}(y_{-k_i}))) = \lim_{k_i\to\infty} d(x_n, f^n(f^{k_i}(y_{-k_i})))$$

y como $k_i \to +\infty$, para todo k_i tal que $-k_i \leq n$, se tiene que $d(x_n, f^n(f^{k_i}(y_{-k_i}))) \leq \varepsilon(x_n)$, por lo que $d(x_n, f^n(\tilde{y})) \leq \varepsilon(x_n)$. Esto concluye la afirmación.

Por tanto $\tilde{y}$ es un punto que sombrea la δ-pseudo órbita $\{x_n\}$. ∎

4.1 Homotecia

En lo que sigue mostraremos que el mapa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x) = 2x$ es expansivo y tiene la propiedad del sombreado topológico. Con esto, tendremos que es Anosov Topológico.

Ejemplo 4.1 (Homotecia en el Plano). *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x) = 2x$. f es Anosov Topológico.*

Expansividad:
El mapa f es expansivo topológico ya que es expansivo métrico.

Propiedad del sombreado:
Contemos inicialmente la idea del sombreado topológico sin ser muy formales. Vamos a dividir la prueba en dos etapas.
Lo que vamos a hacer en una primera etapa es construir un $\delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ para que las δ-pseudo órbitas tengan sólo dos tipos de comportamiento. Las llamaremos de **Tipo** a y de **Tipo** b. Las de **Tipo** a se encontrarán en una bola centrada en el origen para todo $n \in \mathbb{Z}$. Las de **Tipo** b serán aquellas que a futuro tienden a infinito.
En la segunda etapa ajustaremos el δ para que, además de que las δ-pseudo órbitas sean de estos dos tipos, sean sombreadas a futuro. Por último aplicaremos el Lema (4.1) para obtener el sombreado.

Pasemos entonces a probar el sombreado topológico:
Dado $\varepsilon \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Sea $r_0 = \varepsilon(0)$, llamemos

$$m = \min_{x \in \bar{B}(0,r_0)} \{\varepsilon(x)\}$$

Como dijimos en el párrafo anterior, dividiremos la prueba en dos etapas.

Primera Etapa
Vamos a tomar $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\delta(x) < \begin{cases} m & \text{si } x \in \bar{B}(0, r_0) \\ \frac{\|x\|}{4} & \text{si } x \in \bar{B}(0, r_0)^c \end{cases},$$

Con estas restricciones se puede considerar sin problemas δ continua, por ejemplo, si $m < \|(r_0, 0)\|$ consideramos δ constante en $\bar{B}(0, r_0)$ y podemos extenderla de forma continua al complemento hasta que deje de ser menor que los valores que toma en el complemento de la bola.
Para este δ, afirmamos que las δ-pseudo órbitas tendrán sólo dos tipos de comportamientos. Llamaremos de **Tipo** a a las δ-pseudo órbitas que se encuentran contenidas en $\bar{B}(0, r_0)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y de **Tipo** b a las δ-pseudo órbitas que tienden a infinito.
Probemos esto; si una δ-pseudo órbita esta siempre dentro de la bola $\bar{B}(0, r_0)$ será de de **Tipo** a, en caso contrario, es decir, si algún término de la δ-pseudo órbita esta fuera de la bola, será del otro tipo.

Afirmamos que existen estos tipos δ-pseudo órbitas:

Tipo a**.** Efectivamente el conjunto de este tipo de δ-pseudo órbitas es no vacío. Intuitivamente, como δ en 0 es positivo, si tomamos puntos muy cercanos a 0, un siguiente término de la pseudo órbita puede volver a estar cerca de 0. Siendo un poco más formales, como $\delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, $\delta(0) = k_0 > 0$. Si tomamos x_0 suficientemente cercano a 0, se cumple que $\|f(x_0)\| < \delta(f(x_0))$, entonces $B(f(x_0), \delta(f(x_0)))$ contiene a x_0. Podemos tomar $x_1 = x_0$. De esta forma repitiendo el argumento podemos considerar $x_n = x_0$ para todo $n > 0$, para el pasado podemos considerar $f^n(x_0)$, si $n < 0$ y con esto $x_n \in \bar{B}(0, \varepsilon(0))$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Tipo b. Efectivamente si tomamos una δ-pseudo órbita que no es del **Tipo** a, existe un término de la δ-pseudo órbita que no esta en la bola $\bar{B}(0, r_0)$. Nombramos $x_0 \in \bar{B}(0, r_0)^c$ como primer término de la δ-pseudo órbita.

Mostraremos que este tipo de δ-pseudo órbitas cumplen que para $n > 0$, $\left(\frac{3}{2}\right)^n \|x_0\| < \|x_n\|$ y esto implica que $\|x_n\| \to +\infty$ si $n \to +\infty$.
Veamos esto:
Como $\delta(x) < \frac{\|x\|}{4}$ en $x \in \bar{B}(0, r_0)^c$ y $f(x) = 2x$,

$$x_1 \in B(f(x_0), \delta(f(x_0))) \subset B\left(f(x_0), \frac{\|f(x_0)\|}{4}\right) = B\left(2x_0, \frac{\|x_0\|}{2}\right)$$

Por lo que $\frac{3}{2}\|x_0\| < \|x_1\|$. En particular $x_1 \in \bar{B}(0, r_0)^c$. Plantenado lo mismo

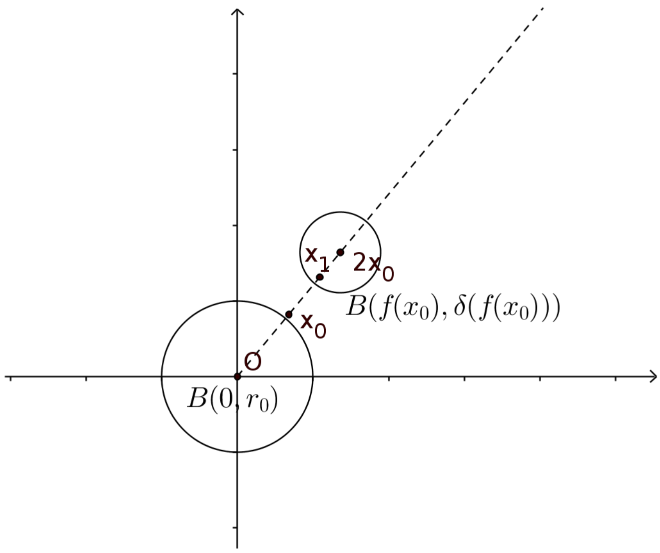

Figura 3: En $\bar{B}(0, r_0)^c$, $\delta(x) < \|x\|/4$

para $x_n \in \bar{B}(0, r_0)^c$, llegamos a que $\frac{3}{2}\|x_n\| < \|x_{n+1}\|$ y $x_{n+1} \in \bar{B}(0, r_0)^c$. Por último, con estas desigualdades obtenemos que $\left(\frac{3}{2}\right)^n \|x_0\| < \|x_n\|$ y entonces $\|x_n\| \to +\infty$.

Segunda Etapa

Ajustaremos el δ definido en $\mathbb{R}^2$ para que los dos tipos de δ-pseudo órbitas construídas en la etapa anterior sean ε sombreadas a futuro para el ε dado inicialmente:

Sombreado de las δ-pseudo órbitas de **Tipo** a:
Este tipo de δ-pseudo órbitas cumplen entonces que $d(0, x_n) \leq r_0$ y por tanto son sombreadas por el 0.

Sombreado de las δ-pseudo órbitas de **Tipo** b:
Intentaremos deducir las condiciones adicionales que necesitamos para ε-sombrear este tipo de δ-pseudo órbitas.
Primero hallemos explícitamente los términos a futuro de una δ-pseudo órbita de este tipo:
Sea x_0 un término de una δ-pseudo órbita de este tipo, como $d(f(x_0), x_1) < \delta(f(x_0))$, se tiene $x_1 \in B(f(x_0), \delta(f(x_0)))$, con lo que

$$x_1 = 2x_0 + r_1, \quad \text{donde } \|r_1\| < \delta(f(x_0)).$$

Para el siguiente término vemos que $f(x_1) = 2^2x_0 + 2r_1$ y $x_2 \in B(f(x_1), \delta(f(x_1)))$, con lo que

$$x_2 = 2^2x_0 + 2r_1 + r_2 \quad \text{donde } \|r_2\| < \delta(f(x_1))$$

Siguiendo con este razonamiento obtenemos una expresión explícita para x_n,

$$x_n = 2^n x_0 + 2^{n-1}r_1 + \ldots 2r_{n-1} + r_n \quad \text{donde } \|r_i\| < \delta(f(x_{i-1})).$$

Para ver que se puede sombrear a futuro estas δ-pseudo órbitas, traeremos los términos a tiempo 0 dividiendo entre 2^n cada término x_n. La sucesión obtenida $\{\frac{x_n}{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy:
Sea $n > m$, entonces

$$\left\|\frac{x_n}{2^n} - \frac{x_m}{2^m}\right\| = \left\|\sum_{i=m+1}^{n} \frac{r_i}{2^i}\right\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\|r_i\|}{2^i} \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\|r_i\|}{2^i}$$

Por tanto, si δ esta acotada en $\mathbb{R}^2$, $\|r_i\|$ también lo estará y lo que nos queda es la cola de una serie convergente. Con esto para un m suficientemente grande, $\left\|\frac{x_n}{2^n} - \frac{x_m}{2^m}\right\|$ es arbitrariamente pequeño.

Tomamos a continuación $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{2^n}$, y lo reescribimos como $y = x_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{2^i}$

Mostremos que es un punto que ε-sombrea la δ-pseudo órbita $\{x_n\}$ a futuro. Para ello discutiremos nuevamente dos casos.

i. El primer término de la δ-pseudo órbita x_0 se encuentra en $\bar{B}(0, r_0)$

ii. El primer término de la δ-pseudo órbita x_0 se encuentra en $\bar{B}(0, r_0)^c$.

En el caso *i.* la δ-pseudo órbita se encontrará dentro de la bola por una cantidad finita de tiempos.
Entonces

$$\begin{aligned}
d(f^n(y), x_n) &= \|(2^n x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{2^{i-n}}) - (2^n x_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{2^{j-n}})\| \\
&= \| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{r_j}{2^{j-n}} \| \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\|r_j\|}{2^{j-n}} \\
&< \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\delta(f(x_{j-1}))}{2^{j-n}} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Buscamos que $d(f^n(y), x_n) \leq \varepsilon(x_n)$ tanto para n tal que $x_n \in \bar{B}(0, r_0)$ como para n tal que $x_n \in \bar{B}(0, r_0)^c$. Definimos $j_0 = \text{mín}\{i \in \mathbb{N} : x_i \in \bar{B}(0, r_0)^c\}$.

Para $0 \leq n < j_0$, se tiene $x_n \in \bar{B}(0, r_0)$, y entonces $\varepsilon(x_n) \geq m$. Pidiendo que $\delta(x) < m$, si retomamos la desigualdad (1)

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\delta(f(x_{j-1}))}{2^{j-n}} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{m}{2^{j-n}} \leq m \leq \varepsilon(x_n)$$

con lo que $d(f^n(y), x_n) \leq \varepsilon(x_n)$.

Para $n \geq j_0$, si pedimos que δ sea decreciente en norma, es decir $\delta(x) > \delta(y)$ para $\|x\| < \|y\|$, tenemos que $\delta(f(x_{j-1})) < \delta(x_{j-1})$ y además como $\|x_n\|$ es creciente para $n > j_0$, tenemos también que $\delta(x_n) > \delta(x_m)$ si $n < m$.
Entonces retomando la desigualdad (1)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\delta(f(x_{j-1}))}{2^{j-n}} &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\delta(x_{j-1})}{2^{j-n}} \\
&\leq \delta(x_n) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \right) \\
&\leq \varepsilon(x_n)
\end{aligned}$$

con lo que también logramos que $d(f^n(y), x_n) \leq \varepsilon(x_n)$.

En el caso *ii.*, como el primer término de la sucesión $x_0 \in \bar{B}(0, r_0)^c$ para todo $n > 0$, lo visto en la última etapa del paso anterior sirve para justificar el sombreado a futuro.
De esta forma, hemos visto que también las δ-pseudo órbitas del **Tipo** b son sombreadas a futuro.

Hasta ahora el δ considerado cumple que los dos tipos de δ-pseudo órbitas son sombreadas a futuro, necesitamos además que sea continuo. Tomando

$$q_0 = \min_{\|x\|=r_0} \{\frac{\|x\|}{4}, m, \varepsilon(x)\},$$

reescribimos δ como

$$\delta(x) < \begin{cases} q_0 & \text{si } x \in \bar{B}(0, r_0) \\ \min\{\frac{\|x\|}{4}, \varepsilon(x), q_0\} & \text{si } x \in \bar{B}(0, r_0)^c \end{cases}$$

Entonces con estas restricciones δ se puede tomar continuo en $\mathbb{R}^2$ y positivo; por ejemplo, se puede tomar $\delta = q_0/2$ en la bola y luego extenderlo al complemento continuamente respentando simplemente las condiciones dadas anteriormente.

Hasta aquí ambos tipos de δ-pseudo órbitas son sombreadas a futuro; aplicando el Lema 4.1 garantizamos la propiedad del sombreado topológico.

Por tanto, para el ε dado inicialmente, hemos construido $\delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ tal que toda δ-pseudo órbita es ε-sombreada por un punto y. $\diamond$

4.2 Lineal con valores propios 2 y 1/2.

Veamos ahora que el otro tipo de lineal hiperbólico, con una dirección que expande y otra dirección que contrae no es Anosov topológico, aunque si sea expansivo y tenga la propiedad del sombreado métrico.

Ejemplo 4.2. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y)$. Entonces f no es Anosov Topológico.*

La idea en este ejemplo es mostrar que no se cumple la propiedad del sombreado topológico, el procedimiento es similar a lo trabajado en el Ejemplo 3.1, como la contracción es uniforme en la dirección del eje $\vec{y}$, si tomamos ε que decrezca más rápido que $1/2^n$, las únicas δ-pseudo órbitas ε-sombreadas van a ser sólamente órbitas.

Denotemos $X = (x, y)$. Tomemos $\varepsilon \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\varepsilon(X) < 2^{-\|X\|}$, si $\|X\| \geq 1$. Fijemos $X_0 = (x_0, 0)$, dado $\delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ tomemos $\tilde{X}_0 = (x_0, y_0)$, $y_0 > 0$, tal que $d(\tilde{X}_0, X_0) < \delta(X_0)$.
De esta forma construimos la δ-pseudo órbita $\{X_n\}$ tal que

$$X_n = \begin{cases} f^n(X_0) & \text{si } n \geq 0 \\ f^n(\tilde{X}_0) & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Supongamos que $Y = (x, y)$ es un punto que sombrea la δ-pseudo órbita, por tanto sombrea la δ-pseudo órbita a futuro, esto es:

$$d(X_n, f^n(Y)) < \varepsilon(X_n), \;\; \forall \, n > 0$$

Como $X_n = 2^n X_0$, $d(X_n, f^n(Y)) = d(2^n X_0, f^n(Y)) = \sup\{2^n|x_0 - x|, \frac{1}{2^n}|y|\}$.

Discutamos el valor de esta distancia. Si $x \neq x_0$, existe n_0 tal que si $n > n_0$, $d(X_n, f^n(Y)) = 2^n|x - x_0|$.

Por otro lado, como habíamos tomado $\varepsilon(X) < 2^{-\|X\|}$, $\varepsilon(2^n X_0) < \frac{1}{2^{2^n|x_0|}}$ se tiene que $2^n|x - x_0| < \frac{1}{2^{2^n|x_0|}}$ para todo $n > n_0$, y esto se cumple sólo si $x = x_0$.
Entonces $x = x_0$ y $d(X_n, f^n(Y)) = \frac{1}{2^n}|y|$, con esto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n}|y| &= d(X_n, f^n(Y)) \\ &< \varepsilon(2^n X_0) < \frac{1}{2^{2^n\|X_0\|}}, \;\; \forall n > 0 \end{aligned}$$

Con lo que $|y| < \frac{2^n}{2^{2^n\|X_0\|}}$ $\forall n > 0$. Nuevamente esto se cumple solamente si $y = 0$. Concluímos que la única órbita que sombrea esta δ-pseudo órbita a futuro es la órbita de X_0.

Para el pasado, $f^n(X_0) \to 0$, mientras que X_n es tal que $\|X_n\| \to \infty$ y se tiene que X_0 no sombrea esta δ-pseudo órbita, por tanto encontramos una δ-pseudo órbita que no es sombreada y esto implica que f no es Anosov Topológico. $\diamond$

Con esto, en el caso del ejemplo anterior, que tiene una dirección que contrae y otra dirección que expande de forma uniforme no es Anosov Topológico. Esto muestra un comportamiento totalmente distinto a lo que sucede con la propiedad del sombreado métrico en este tipo de homeomorfismos.

Observar que utilizando que las propiedades del sombreado topológico y la expansividad topológica son propiedades dinámicas tenemos que cualquier conjugado de un Anosov Topológico es Anosov Topológico. Por tanto, los dos ejemplos vistos nos generan una familia de homeomorfismos que son Anosov Topológicos, los conjugados al $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y no ejemplos de Anosov Topológicos, los conjugados al $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Terminemos esta sección mencionando un resultado inmediato que es consecuencia de lo anteriormente dicho y del Teorema de Kerekjarto sobre homeomorfismos del plano con un punto fijo globalmente asintóticamente estable

Proposición 4.1. *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homeomorfismo que preserva orientación, con un único punto fijo globalmente asintóticamente estable, entonces f es Anosov Topológico*

La prueba es sencilla utilizando el teorema de Kerekjarto, si f tiene un punto fijo globalmente asintóticamente estable, entonces es conjugado a $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $A(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$ [GGM16] Teorema 1.3, y como A es Anosov Topológico, se tiene que f también.

5 Resultado principal: Existencia de punto fijo

En esta sección probaremos la existencia de punto fijo para Anosov Topológicos que preservan orientación en el Plano. La intuición nos lleva en una primera instancia a conjeturar este resultado dado que las traslaciones no son Anosov Topológicos y que según la teoría de Brouwer, los homeomorfismos del plano sin punto fijo hacen que el plano se descomponga en regiones abiertas invariantes donde hay conjugación con una traslación.

Comencemos mostrando que las traslaciones no son Anosov Topológicos.

Proposición 5.1. *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + 1, y)$, entonces T no tiene la propiedad del sombreado topológico.*

Tenemos que probar que existe un entorno de la diagonal E tal que para cualquier otro entorno de la diagonal D, existe una D-pseudo órbita que no es E sombreada. Intuitivamente, si tomamos un entorno E que se pege asintóticamente a la diagonal, las únicas D-pseudo órbitas que van a ser sombreadas serán las propias órbitas. Pensándolo con bolas en cada punto, si nos tomamos una bola en cada punto tal que el radio tienda a 0 a medida que los puntos se encuentran cada vez más lejos del origen, si se eligen δ-pseudo órbitas que tengan un solo salto en una etapa fija, logramos encontrar una δ-pseudo órbita que no es sombreada.

Demostración:
Tomemos $\varepsilon \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\varepsilon(x, y) \to 0$ si $\|(x, y)\| \to \infty$, dado $\delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ arbitrario, consideramos $X_0 = (0, 0)$ y $\tilde{X}_0 = (0, y_0)$ tal que $d(X_0, \tilde{X}_0) < \delta(X_0)$. Construimos la δ-pseudo órbita $\{X_i\}$ como

$$X_i = \begin{cases} f^i(X_0) & \text{si } i \geq 0 \\ f^i(\tilde{X}_0) & \text{si } i < 0 \end{cases}$$

Entonces, para $n > 0$, si un punto $Y = (x_Y, y_Y)$ sombrea a X_n, se tiene que $d(f^n(Y), X_n) = d((x_Y + n, y_Y), (n, 0)) = \|Y\| < \varepsilon(n, 0) \to 0$. Por tanto $Y = (0, 0) = X_0$.
Análogamente, para $n < 0$, si un punto $Y = (x_Y, y_Y)$ sombrea a X_n, se tiene que $Y = \tilde{X}_0$.

Por tanto, no existe Y que sombre la δ-pseudo órbita y T no tiene la propiedad del sombreado topológico. ∎

Recordemos también un resultado sobre extensión de funciones continuas que nos será de utilidad para poder definir un ε adecuado en $\mathbb{R}^2$ a partir de tenerlo definido en dos conjuntos cerrados.

Teorema 5.1 (Tietze)**.** *Si X es un espacio métrico y $f : A \subset X \to \mathbb{R}$ es un mapa continuo, donde A es cerrado. Entonces existe $F : X \to \mathbb{R}$ continuo tal que $F(a) = f(a)$ para todo $a \in A$.*
En este caso se dice que F es una extensión continua de f.

Observación 5.1. *Si f además cumple que es positiva, entonces la extensión continua se pude tomar positiva pues se adaptan las construcciones de la prueba a este contexto.*

5.1 Homeomorfismos de Brouwer

A continuación presentaremos algunos resultados de la teoría de Brouwer sobre homeomorfismos del plano que preservan orientación, sin puntos fijos. El resultado que usaremos es que si un homeomorfismo del plano que preserva orientación no tiene puntos fijos, entonces el plano se descompone en regiones abiertas invariantes donde hay conjugación con una traslación [Br12]. Con esto último, usando que las traslaciones no son Anosov Topológicos y usando que la propiedad del sombreado se conserva por conjugaciones llegaremos a que un Anosov Topológico tiene que tener necesariamente un punto fijo.

Se llama *foliación topológica unidimensional* de $\mathbb{R}^2$ a una descomposición del plano en subvariedades topológicas de dimensión 1, disjuntas que verifica que: si llamamos hoja a cada subvariedad de la descomposición, se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}^2$, existe un abierto U_x y un homeomorfismo $h_x : U_x \to \mathbb{R}^2$, $h_x = (h_1, h_2)$ tal que para toda hoja L que intersecta a U_x, existe una constante c_L tal que $L \cap U_x = \{y \in U_x : h_x(y) = (h_1(y), c_L)\}$.

Llamaremos *linea* de $\mathbb{R}^2$ a todo mapa de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ continuo, propio (preimagen de un compacto es compacto) e inyectivo, por tanto una linea separa el plano en dos componentes conexas. Si L es una lineal del plano, se puede construir un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva orientación y además tal que $h \circ L(t) = (0, t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Nombraremos $R(L) = h^{-1}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ y $I(L) = h^{-1}((-\infty, 0] \times \mathbb{R})$. Se tiene que $R(L) \setminus L$ y $I(L) \setminus L$ son las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus L$.

Llamaremos *homeomorfismo de Brouwer* a un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva orientación y no tiene puntos fijos.

Teorema 5.2 (De traslación de Brouwer). *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo de Brouwer. Entonces por todo punto del plano pasa una linea L tal que $f(L) \subset R(L) \setminus L$ y $f^{-1}(L) \subset I(L) \setminus L$.*

Si f es un homeomorfismo de Brouwer, se llama *linea de Brouwer* a toda linea que verifica la tesis del teorema, es decir, que separa su imagen de su preimagen. $U = R(L) \setminus R(f(L))$ se llama *dominio de traslación* y si se toma $W = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \overline{f^n(U)}$,

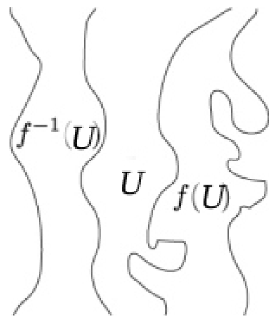

Figura 4: Linea de Brouwer y dominio de traslación

entonces W es abierto, f-invariante y $f|_W$ es conjugado a una traslación en el plano.

5.2 Existencia de punto fijo

Pasemos entonces a probar que los Anosov Topológicos del plano que preservan orientación tienen al menos un punto fijo.

Teorema 5.3. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Anosov Topológico que preserva orientación, entonces f tiene al menos un punto fijo.*

Comentarios previos e idea de la prueba:
Como se mencionó al inicio de la sección, si en el plano un homeomorfismo f que preserva orientación no tiene punto fijo, entonces es un homeomorfismo de Brouwer. Esto implica que existen abiertos invariantes construidos a partir de lineas de Brouwer , donde f restringido a cada abierto es conjugado a una traslación. Como las traslaciones en el plano no tienen la propiedad del sombreado topológico y esta propiedad se conserva por conjugaciones, se llega a que f restringido a estos abiertos no tiene la propiedad del sombreado topológico.

Dicho de forma apresurada, da a pensar que esto es una prueba de que f no tiene la propiedad del sombreado en todo $\mathbb{R}^2$, pero si analizamos en detalle, lo que podemos construir a partir de que una restricción no es Anosov Topológico es un ε en uno de esos abiertos invariantes, para el cual existen δ-pseudo órbitas que no son sombreadas en ese abierto.
Llamando W a este abierto invariante, una pregunta que surge es, si $W \subsetneq \mathbb{R}^2$, ¿puede que las δ-pseudo órbitas sean sombreadas por puntos de ∂W? El problema directamente relacionado con lo anterior es el hecho de que el ε definido en este W puede no extenderse de forma positiva a ε en todo $\mathbb{R}^2$ dado que, en un subconjunto compacto del borde ε puede tender a cero.
Para salvar este inconveniente, no definiremos ε en el abierto invariante W, sino que lo definiremos en dos conjuntos cerrados y disjuntos.
El primero de estos conjuntos cerrados será una linea de Brouwer L, ¿por qué razón L es cerrada? Por ser L un encaje propio de $\mathbb{R}$:
Si no fuera cerrada existe un punto límite $x' \notin L$, de esta forma tomando una sucesión en L que tienda a x', entonces la misma esta acotada y si tomamos la preimagen de esta sucesión por el encaje tendremos que ésta no esta acotada, lo cual es absurdo.
Y el segundo conjunto cerrado será la órbita futura de un punto, que se encontrará en otro abierto invariante (construido a partir de otra linea de Brouwer L').

Demostración:
Supongamos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es Anosov topológico que preserva orientación y que no tiene punto fijo. Entonces f es un homeomorfismo de Brouwer.
Tomemos L una linea de Brouwer, $U = R(L) \setminus R(f(L))$ y $W = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$.

Si $W = \mathbb{R}^2$, entonces f es globalmente conjugado a una traslación T que por la Proposición 5.1 no tiene la propiedad del sombreado topológico, por último por la Proposición 2.1 f tampoco tiene la propiedad del sombreado topológico, entonces no es Anosov Topológico.

Si $W \subsetneq \mathbb{R}^2$, entonces $\partial W \neq \varnothing$, y los iterados de la linea L acumulan a futuro o pasado.
Supongamos sin pérdida de generalidad que los iterados de la linea L acumulan a futuro, y llamemos ∂W^+ a dicho conjunto. El borde a futuro ∂W^+ es no vacío, entonces como L separa el plano, ∂W^+ se encuentra en una componente determinada por L.
Sea $y_0 \in \partial W^+$, existe L' otra linea de Brouwer tal que $y_0 \in L'$.
Veamos algunas consideraciones:

1. ∂W es f-invariante:
   Sea $y \in \partial W$, supongamos existe n_0 tal que $f^{n_0}(y) \notin \partial W$.
   Si $f^{n_0}(y) \in W$, como W es abierto y f invariante, existe $r > 0$ tal que $B(f^n(y), r) \subset W$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, sin embargo $f^0(y) = y \in \partial W$, y esto es absurdo.
   Si $f^{n_0}(y) \in \overline{W}^c$, razonamos de forma análoga al caso anterior y encontramos $r > 0$ tal que $B(f^n(y), r) \subset \overline{W}^c$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y esto es absurdo.

2. $f^n(y_0) \to \infty$ si $n \to \pm\infty$:
   Esto es consecuencia directa de que f es un homeomorfismo de Brouwer. Todo punto es errante. Este hecho implica que $\{f^n(y_0)\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$.

3. $f^n(y_0) \in V$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, donde V se construye de igual forma que W pero al considerar la hoja L'.

Existe pues $h_V : V \to \mathbb{R}^2$ homeomorfismo tal que $h_V \circ f|_V = T \circ h_V$ con $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + 1, y)$.
Consideramos $\{h_V(f|_V^n(y_0))\} = \{T^n(h_V(y_0))\} \subset \mathbb{R}^2$ la órbita de y_0 llevada por medio de la conjugación a todo el plano. Como T es una traslación en $\mathbb{R}^2$, no tiene la propiedad del sombreado topológico, con lo cual tomamos $\tilde{\varepsilon}_V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, tal que $\tilde{\varepsilon}(T^n(h_V(y_0))) \to 0$ si $n \to +\infty$. De esta forma, la única órbita que sombrea a $\{h_V(f|_V^n(y_0))\}$ a futuro es la propia $\{h_V(f|_V^n(y_0))\}_{n \geq 0}$.

Definimos ε en $\{f^n(y_0)\}_{n\geq 0}$ como un radio r para que la bola que éste determina quede contenida en la preimagen de las bolas definidas para T. Esto es

$$\varepsilon(f^n(y_0)) := \sup\{r : B(f^n(y_0), r) \subset h^{-1}\left(B(h(f^n(y_0)), \tilde{\varepsilon}(h(f^n(y_0)))\ )\right)\}$$

Por otro lado, vamos a definir ε en L:
Como L es una linea de Brouwer, la misma no acumula y entonces es cerrada; con esto estamos habilitados a considerar ε de forma que sea continua y positiva en L y además $B(x, \varepsilon(x)) \cap \partial W^+ = \varnothing$ para todo $x \in L$. (Ver Figura 5).

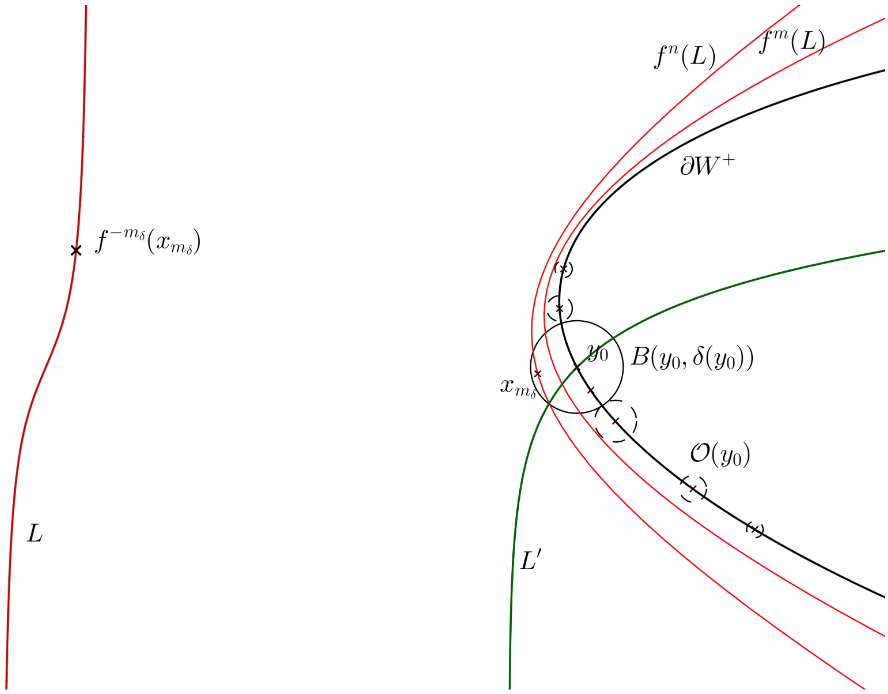

Figura 5: Idea gráfica de la prueba

De esta manera, tenemos definido ε en $\{f^n(y_0)\}_{n\geq 0}$ que es cerrado, y en la linea L que también es cerrada en $\mathbb{R}^2$, por tanto tenemos definido ε en el cerrado $A = \{f^n(y_0)\}_{n\geq 0} \cup L$. Aplicando el Teorema 5.1 y la Observación 5.1, extendemos ε a todo $\mathbb{R}^2$ de forma continua y positiva.

Por último, con este ε definido en $\mathbb{R}^2$ encontraremos que para cualquier $\delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ existe una δ-pseudo órbita que no es ε-sombreada. La misma la construiremos a partir del punto y_0, donde consideraremos su órbita futura; y al pasado consideraremos la órbita de un punto que se encuentra en W y muy cercano a y_0. Mostremos esto formalmente:

Dado $\delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, consideramos $B(y_0, \delta(y_0))$, como $y_0 \in \partial W^+$, existe $m_\delta > 0$ tal que $B(y_0, \delta(y_0)) \cap f^{m_\delta}(L) \neq \varnothing$. Sea $x_{m_\delta} \in B(y_0, \delta(y_0)) \cap f^{m_\delta}(L)$, construimos la δ-pseudo órbita $\{x_n\}$ siendo $x_n = \begin{cases} f^n(y_0) & \text{si } n \geq 0 \\ f^n(x_{m_\delta}) & \text{si } n < 0 \end{cases}$. Si $n > 0$, por cómo tenemos definido ε en $\{f^n(y_0)\}_{n\geq 0}$, la única órbita que ε-sombrea a x_n es la propia órbita futura de y_0. Si tomamos $-m_\delta$, se tiene que $f^{-m_\delta}(x_{m_\delta}) \in L$, y $B(f^{-m_\delta}(x_{m_\delta}), \varepsilon(f^{-m_\delta}(x_{m_\delta}))) \cap \partial W^+ = \varnothing$. Como $f^n(y_0) \in \partial W^+$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que la órbita de y_0 no sombrea la δ-pseudo órbita considerada.
En resumen, hemos construido $\varepsilon \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ tal que para cualquier $\delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, existe una δ-pseudo órbita que no es ε-sombreada, con esto concluimos que f no es Anosov topológico. Y esto es Absurdo.
El absurdo parte de suponer que f no tiene punto fijo. ∎

Corolario 5.1. *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es Anosov Topológico que no preserva orientación y no tiene punto fijo, entonces tiene un punto periódico de período 2.*

Demostración:
Si f no preserva orientación, entonces f^2 preserva orientación. Por otro lado, si f es Anosov Topológico, por la Proposición 2.1, f^2 también lo es. Con estas dos cosas, aplicando el teorema anterior se tiene que f^2 tiene un punto fijo y por tanto f tiene un punto periódico de período 2. ∎

6 Caminos a seguir

Este modesto trabajo deja preguntas abiertas para seguir investigando respecto a los Anosov Topológicos.

Sin irnos del plano,

- Si se pide expansividad infinita, esto es, cualquier entorno propio de la diagonal es entorno de expansividad; ¿un Anosov topológico es conjugado al $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?
- Si simplemente existe un entorno de expansividad, ¿puede haber más de un punto fijo?, si esto es posible, ¿que tipo de dinámica puede haber?
- Si existiera un Anosov topológico que no preserva orientación, este debe tener un punto periódico de período 2, ¿existen Anosov topológicos de este tipo?
- Análisis de la existencia de puntos periódicos, y sus períodos.

Más en general,

- Dado un Anosov Topológico en $\mathbb{R}^n$, ¿será cierto el resultado principal de esta tesis? ¿Tendrá un punto fijo?

Referencias

[Ak93] Ethan Akin, *The general topology of dynamical systems*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[AHK03] Ethan Akin, Mike Hurley, Judy Kennedy, *Dynamics of topologically generic homeomorphisms*, Memoirs of the American Mathematical Society 783, (2003), pag 130.

[AH94] N. Aoki y Koichi Hiraide, *Topological theory of dynamical systems*, North-Holland Mathematical Library, vol. 52, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1994.

[Br12] L.E.J. Brouwer, *Beweis des ebenen Translationssatzes*, Math. Ann. 72 (1912), 37-54.

[DLRW13] Tarun Das, Keonhee Lee, David Richeson y Jim Wiseman, *Spectral decomposition for topologically Anosov homeomorphisms on noncompact and non-metrizable spaces* J. Topology Appl. 160, no. 1 (2013) 149-158.

[GGM16] Armengol Gasull, Jorge Groisman y Francesc Mañosas, *Linearization of planar homeomorphisms with a compact attractor*, Topological Methods in Nonlinear Analysis (2016).

[Gr11] Jorge Groisman, *Expansive homeomorphisms of the plane*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 29 (2011), no.1, 213-239.

[Le89] Lewowicz, *Expansive homeomorphisms of surfaces*, J. Bol. Soc. Bras. Mat (1989) 20: 113. doi:10.1007/BF02585472

[Om86] Jerzy Ombach, *Equivalent conditions for hyperbolic coordinates*, Topology Appl. 23 (1986), 87-90.

[Om94] Jerzy Ombach, *The shadowing lemma in the linear case*, Univ. Iagell. Acta Math., (1994).

[Om97] Jerzy Ombach, *Consequences of the pseudo-orbits tracing property and expansiveness*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 43 (1987), no. 3, 301-313.

[RW07] David Richeson y Jim Wiseman, *Positively expansive dynamical systems*, Topology Appl. 154 (2007), no.3, 604-613.

[Sc52] S. Schwartzman, *On transformation groups*, Ph.D. thesis, Yale University, Connecticut, 1952.

[Utz50] W.R. Utz, *Unstable Homeomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 769-774.

[Ya01] Run-sheng Yang, *Topological Anosov maps of non-compact metric spaces*, Northeast. Math. J. 17 (2001), no. 1, 120-126.