

TRABAJO MONOGRÁFICO

**Fines primos, continuos
indescomponibles, y un
resultado sobre dinámica de
cubrimientos**

Elena Gomes

2022

Orientador:

Dr. Álvaro Rovella

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
MONTEVIDEO, URUGUAY

Índice general

Introducción	3
Capítulo 1. Preliminares	7
1. Teoría de Carathéodory	7
2. Continuos indescomponibles	10
3. Cubrimientos ramificados	12
3.1. Definiciones	12
3.2. Geometría de los cubrimientos ramificados	14
Capítulo 2. Teorema de Rutt	19
1. Segundo Teorema de Rutt	19
2. Otros resultados y ejemplos	24
Capítulo 3. Teorema J	27
1. Composants	27
2. Enunciado y lemas previos	29
3. Prueba del Teorema J	32
4. Prueba del Teorema K	34
5. Referencias a ejemplos y preguntas	36
Bibliografía	37

Introducción

En el contexto de un espacio topológico, un *continuo* es un compacto conexo. En este trabajo estudiaremos continuos planares, para lo cual aplicaremos dos teorías poderosas: la de Carathéodory y la de indescomponibilidad. Buscamos relacionar resultados de ambas teorías para luego aplicarlos al estudio de continuos dinámicamente definidos por cubrimientos ramificados de la esfera. Estos últimos son una clase de mapas que definiremos más adelante.

Si un continuo planar J es el borde de una región simplemente conexa U , esta región es conformemente equivalente al disco \mathbb{D} gracias al Teorema del Mapa de Riemann. La teoría de Carathéodory, introducida en 1913 en [2], surge en respuesta a la pregunta acerca de en qué circunstancias este mapa $\varphi : U \rightarrow \mathbb{D}$ se puede extender a un homeomorfismo de la clausura de U en el disco compacto. Carathéodory encontró que una condición equivalente a que exista tal extensión es que J sea una curva de Jordan. Por otra parte, la teoría provee una manera natural de extender la topología de U a otro espacio mayor, llamado la *completación de Carathéodory* de U , al que notaremos \widehat{U} , para el cual se cumple que todo mapa de Riemann $\varphi : U \rightarrow \mathbb{D}$ se extiende a un homeomorfismo de \widehat{U} en $\overline{\mathbb{D}}$. En grandes líneas, la completación de Carathéodory se obtiene “añadiendo” convenientemente una copia de S^1 a U , de manera que la frontera de \widehat{U} es topológicamente un círculo. Los puntos de esta frontera $\partial\widehat{U}$ se denominan *finés primos* de U y su definición formal, que expondremos en el Capítulo 1, se hace a partir de sucesiones de arcos simples dentro de U cuyos diámetros tienden a cero con la distancia usual en el plano. Llamamos la *impresión* de un fin primo a la intersección de las regiones de \overline{U} delimitadas por los arcos que lo definen. Se puede ver que la impresión de un fin primo siempre es un subcontinuo de J .

Decimos que un continuo es *indescomponible* cuando no es unión de dos subcontinuos propios. En otro caso, el continuo es *descomponible*. Observemos que un segmento, un polígono, cualquier continuo con interior, son descomponibles. El primer ejemplo de continuo indescomponible no trivial fue construido en 1922 por B. Knaster en [6]. En la siguiente figura se puede ver una representación del continuo de Knaster.

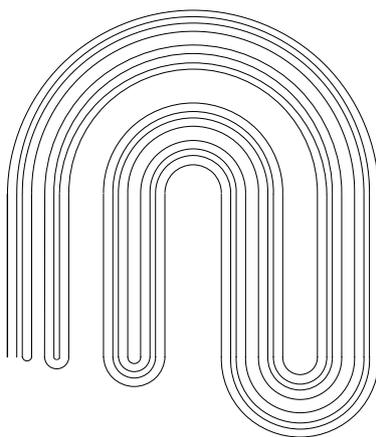


FIGURA 1. El continuo de Knaster.

En el Capítulo 1 estudiaremos algunas propiedades de los continuos indescomponibles.

En el Capítulo 2 estudiaremos un teorema de E. Rutt, que fue demostrado en 1935 en [11]. En ese artículo, Rutt prueba que, si J es el borde de un abierto U simplemente conexo del plano, y es indescomponible, entonces U tiene un fin primo cuya impresión es todo J . El recíproco de este resultado, sin embargo, no es cierto. De hecho, Rutt prueba un segundo teorema, que será para nuestro trabajo uno de los resultados centrales, según el cual, si J es el borde de U y existe un fin primo de U cuya impresión es J , entonces o bien J es indescomponible o bien es unión de dos subcontinuos indescomponibles. Uno de los objetivos de esta monografía es presentar la prueba de este teorema usando un lenguaje más accesible y actual que el del artículo original.

Si $f : S^2 \rightarrow S^2$ es un polinomio complejo de grado mayor o igual a 2, se llama conjunto de *Julia* de f a la frontera de la cuenca de atracción de ∞ , que se puede probar que es una región simplemente conexa si y solo si el conjunto de Julia es un continuo. Una pregunta que permanece abierta hasta el momento es si existen conjuntos de Julia indescomponibles. En 1993¹, C. Mayer y J. T. Rogers probaron que, si f es un polinomio complejo de grado mayor que 1, $J(f)$ es el conjunto de Julia de f y R es la cuenca de ∞ , entonces J es indescomponible si y solo si hay un fin primo de R cuya impresión es J .

En el Capítulo 3 relacionaremos los resultados vistos con conceptos definidos dinámicamente por cubrimientos ramificados de la esfera. Un cubrimiento ramificado de la esfera es un mapa de grado mayor que 1, cuyos puntos críticos son equivalentes” a los puntos críticos de funciones holomorfas, aunque son mapas apenas de clase C^0 . Así como en el caso polinomial, bajo ciertas condiciones un cubrimiento ramificado deja completamente invariante un continuo J que constituye el borde de una región

¹[13], Theorem 3.2.

simplemente conexa que contiene a ∞ , a la que llamaremos R . En tal caso diremos que f es *polynomial like*. Una pregunta que nos haremos será cuándo un mapa polinomial like puede tener J indescomponible. En particular, conjeturamos que para f polynomial like de grado $d \geq 2$, se cumple que f es indescomponible si y solo si existe un fin primo de R cuya impresión es J . Otro aporte de esta monografía será demostrar un resultado en esta dirección, al que llamaremos Teorema J.

Dado un continuo X definimos la *composant* de un punto $x \in X$ como la unión de todos los subcontinuos propios de X que contienen a x . A mediados del siglo XX, J. Krasinkiewicz estudió las propiedades de las composants de continuos indescomponibles². En [9] introdujo el concepto de composant *interna* y probó varias de sus propiedades, entre ellas que la unión de las composants internas de un continuo indescomponible X es un conjunto residual en X . En 1993 Mayer y Rogers atribuyen a Krasinkiewicz un resultado³ que usaremos en la demostración del Teorema J, al cual llamaremos Teorema K. Sin embargo, este teorema no se encuentra explícitamente en los artículos citados de Krasinkiewicz. En la última parte de este trabajo brindaremos una prueba detallada del Teorema K, apoyándonos en los resultados de Krasinkiewicz.

²Ver [9] y [8]

³[13], Theorem 3.1.

Preliminares

1. Teoría de Carathéodory

El objetivo de esta sección es introducir la noción de *fin primo* de un abierto simplemente conexo de la esfera. Si bien en la literatura es posible encontrar maneras ligeramente distintas de definir los fines primos, aquí seguiremos la construcción del libro [1]. En lo que sigue U será un abierto simplemente conexo de la esfera cuyo borde consiste en más de un punto. Denotaremos por \mathbb{D} al disco abierto

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

El Teorema del Mapa de Riemann garantiza que existe un isomorfismo conforme ψ de U en \mathbb{D} . En algunos casos, este mapa se puede extender a un homeomorfismo de \overline{U} en el disco compacto, de modo que la frontera de U es homeomorfa a $S^1 = \partial\mathbb{D}$. Más aún, vale el siguiente resultado¹.

TEOREMA 1.1. (Carathéodory) Un isomorfismo conforme $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow U$ se extiende a un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{D}}$ en \overline{U} si y solo si ∂U es una curva de Jordan.

La compactificación de U a través de sus fines primos consistirá en añadir convenientemente a U un círculo, de modo que en este nuevo espacio el mapa de Riemann sí se extienda a un homeomorfismo en $\overline{\mathbb{D}}$.

DEFINICIÓN 1.2. (Crosscut) Por *crosscut* nos referiremos a un subconjunto de U homeomorfo al intervalo $(0, 1)$, cuya clausura es homeomorfa al intervalo cerrado y corta exactamente dos puntos al borde de U .

LEMA 1.3. Todo crosscut de U separa U en dos componentes conexas.

DEMOSTRACIÓN. Sea H un crosscut de U . Se cumple que el cociente $\overline{U}/\partial U$, donde identificamos todo el borde de U con un punto, es homeomorfo a la esfera². Sea $\pi : \overline{U} \rightarrow \overline{U}/\partial U \simeq S^2$ la proyección al cociente. La proyección $\pi(\overline{H})$ es una curva cerrada simple en la esfera, de modo que, por el Teorema de la Curva de Jordan, esta separa la esfera en dos componentes. Por otra parte, la restricción de π a U es un homeomorfismo sobre su imagen, de modo que $U - H$ es homeomorfo a $S^2 - \pi(H)$. Es decir que H también separa U en dos componentes conexas. \square

Llamaremos *entorno crosscut* a cada una de tales componentes conexas.

¹[1] §17, Theorem 17.6.

²En efecto, llamemos p al punto con el que identificamos el borde de U en el cociente, y fijemos $\varphi : U \rightarrow S^2 - \{\infty\}$ cualquier homeomorfismo. Definimos la función $f : \overline{U}/\partial U \rightarrow S^2$ de modo que $f(p) = \infty$ y para todo $x \in U$ vale $f(x) = \varphi(x)$. Se cumple que f es continua e inyectiva y su dominio es compacto, con lo cual f es un homeomorfismo.

DEFINICIÓN 1.4. (Cadena fundamental) Una *cadena fundamental* en U será una familia $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de entornos crosscut de U , junto con la familia $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de sus respectivos crosscuts, con las siguientes propiedades:

- Para cada i se tiene $R_{i+1} \subseteq R_i$.
- Las clausuras $\overline{A_i}$ de los crosscuts son disjuntas dos a dos y su diámetro $\text{diam}(\overline{A_i})$ tiende a cero con la distancia usual en la esfera.

Diremos que dos cadenas fundamentales $\{R_i\}$ y $\{R'_i\}$ son *equivalentes* si para cada índice i existe j tal que $R'_j \subseteq R_i$ y recíprocamente.

DEFINICIÓN 1.5. (Fin primo) Llamaremos *fin primo* de U a cada clase de equivalencia de cadenas fundamentales de U .

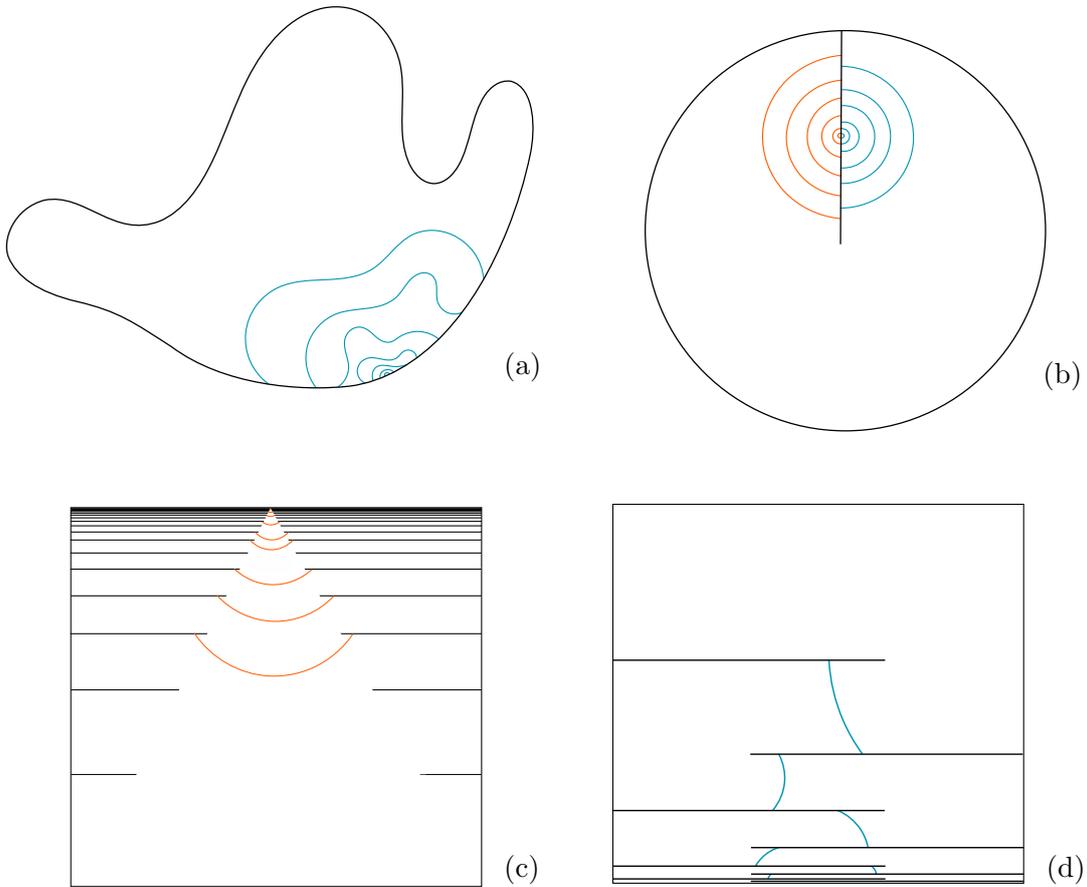


FIGURA 1. Discos topológicos en el plano y algunos de sus fines primos.

DEFINICIÓN 1.6. (Completación de Carathéodory) Llamaremos la *completación de Carathéodory* de U al espacio $\widehat{U} = U \cup \{\varepsilon : \varepsilon \text{ fin primo de } U\}$ con la siguiente topología. Dado un entorno crosscut R de U , sea $\widetilde{R} \subseteq \widehat{U}$ la unión de R con todos

los fines primos de U que tienen alguna cadena representante $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con cada R_i contenido en R . Una base de la topología que buscamos consiste en estos entornos \tilde{R} junto con los abiertos de U .

Una posible motivación de tal construcción se resume en el siguiente resultado.

TEOREMA 1.7. ³ Todo isomorfismo conforme $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow U$ se extiende de manera única a un homeomorfismo del disco compacto $\overline{\mathbb{D}}$ en \widehat{U} con la topología definida antes.

DEFINICIÓN 1.8. Llamaremos *impresión* de una cadena fundamental, o del fin primo que esta representa, a la intersección $\cap_i \overline{R_i}$ de las clausuras de sus regiones crosscut.

PROPOSICIÓN 1.9. La impresión de cualquier cadena fundamental en U es un compacto conexo no vacío contenido en ∂U .

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{R_i\}_i$ una cadena fundamental en U y $\{H_i\}_i$ su cadena de crosscuts asociados. Afirmamos que la intersección $\cap_i R_i$ es vacía. Para ver esto, fijemos un punto $p \in U$. Tomemos un punto $p_0 \in U - R_0$ y un camino $\gamma \subseteq U$ que una p_0 con p . Sean δ la distancia de γ al borde de U y j un índice tal que el diámetro de H_j es menor que δ . Es claro que $\overline{H_j}$ no corta γ , de modo que p y p_0 están en la misma componente de $U - H_j$. Como p_0 no está en R_j , p tampoco. Esto prueba que la impresión $\cap_i \overline{R_i}$ es un subconjunto de ∂U . Al ser intersección de compactos conexos encajados no vacíos, también tenemos que es un compacto conexo no vacío. \square

En la Figura 1 podemos ver las fronteras de cuatro abiertos simplemente conexos del plano y cadenas de crosscuts representantes de algunos de sus fines primos. Como en el caso del ejemplo 1.(a), siempre que el borde de U sea una curva de Jordan, la impresión de todo fin primo de U será solamente un punto. En 1.(b) tenemos un caso en que dos fines primos distintos tienen la misma impresión, mientras que los ejemplos 1.(c) y 1.(d) muestran fines primos cuyas impresiones son segmentos.

Diremos que una cadena de crosscuts $\{H_i\}_i$ de U *converge* a un punto $p \in \overline{U}$ si, dado cualquier entorno N de p , existe j tal que H_i está contenido en N para todo $i \geq j$.

DEFINICIÓN 1.10. (Conjunto principal) Dado ε un fin primo de U diremos que su *conjunto principal* es el conjunto de aquellos puntos $p \in \partial U$ para los cuales existe una cadena de crosscuts representante de ε que converge a p .

Observemos que el conjunto principal del fin primo representado en la Figura 1.(c) es solo un punto, a pesar de que su impresión es más grande, mientras que, en el caso del ejemplo 1.(d) el conjunto principal es un segmento contenido estrictamente en la impresión.

PROPOSICIÓN 1.11. ⁴ Para todo ε fin primo de U , el conjunto principal de ε es un compacto conexo no vacío contenido en su impresión.

³[1] §17, Theorem 17.12.

⁴[3] §15, Corollary 15.

2. Continuos indescomponibles

En el contexto de esta sección X será un espacio topológico cualquiera.

DEFINICIÓN 1.12. (Continuo) Diremos que un conjunto $C \subseteq X$ es un *continuo* si es compacto y conexo. A todo continuo K contenido en C le llamaremos un *subcontinuo* de C , y diremos que un continuo K es un *subcontinuo propio* de C si está estrictamente contenido en C .

DEFINICIÓN 1.13. (Continuo indescomponible) Diremos que un continuo C es *indescomponible* si no es unión de dos subcontinuos propios. En caso contrario, diremos que C es *descomponible*.

Observamos que un conjunto con solo un punto es un continuo indescomponible. Para evitar inconvenientes, en ocasiones diremos que un continuo es *no degenerado* si tiene al menos dos puntos.

A continuación haremos la construcción de un continuo indescomponible que servirá de ejemplo para ilustrar los resultados que veremos más adelante. Este fue descrito por primera vez en 1922 por B. Knaster en [6]. En la Figura 2 hay una representación de los primeros pasos de su construcción inductiva, que también se puede describir de la siguiente manera.

Sea $\mathcal{C} \subseteq [0, 1] \times 0$ el conjunto de Cantor ternario estándar en \mathbb{R}^2 . Construimos el continuo de Knaster siguiendo este procedimiento.

- I. Unimos todo par de puntos de \mathcal{C} simétricos con respecto a $(\frac{1}{2}, 0)$ por una semicircunferencia en el semiplano superior centrada en $(\frac{1}{2}, 0)$.
- II. Para cada $n \geq 1$, unimos todo par de puntos de \mathcal{C} en el intervalo $[\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}] \times \{0\}$ a través de una semicircunferencia en el semiplano inferior con centro en $(\frac{5}{2 \cdot 3^n}, 0)$.

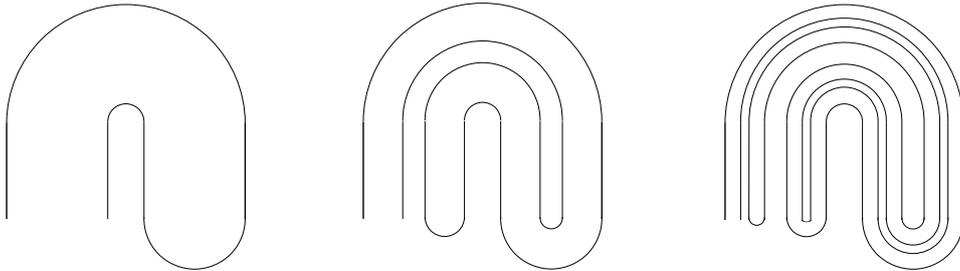


FIGURA 2. Primeros pasos de la construcción del Continuo de Knaster.

Una prueba de que este es un continuo indescomponible se puede encontrar en [4] (Cap. V).

Veamos ahora algunas propiedades sobre indescomponibilidad que usaremos en el último capítulo.

PROPOSICIÓN 1.14. Supongamos que $C \subseteq X$ es conexo y $K \subseteq C$ es un continuo. Si $C - K$ es disconexo, entonces existen $C_1, C_2 \subseteq C$ conexos, no densos en C , cuya unión es C .

DEMOSTRACIÓN. Sean A, B abiertos no vacíos disjuntos cuya unión da $C - K$. Es claro que $B \cup K = (C - A) \cup K$.

Afirmamos que $K \cup B$ es conexo. Para probarlo supongamos por absurdo que $\{A_1, A_2\}$ es una partición abierta de $K \cup B$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $K \cap A_1 \neq \emptyset$. Hay dos posibilidades: Si K está contenido en A_1 , entonces A_2 está contenido en B , de modo que $A \cap A_2 = \emptyset$, con lo cual $(A \cup A_1) \cap A_2 = \emptyset$ y $A \cup A_1 \cup A_2 = C$. Es decir que en ese caso C sería disconexo. La alternativa sería que $K \cap A_2 \neq \emptyset$ y, entonces $\{A_1 \cap K, A_2 \cap K\}$ particiona K , o sea que K es disconexo. Esto prueba la afirmación.

Por otra parte, como A es abierto no contenido en K , y K es compacto, existe un abierto $U \subseteq A - K$. Luego $U \cap (B \cup K) = \emptyset$, de modo que $B \cup K$ no es denso en C .

Concluimos que $C_1 = A \cup K$ y $C_2 = B \cup K$ son conexos no densos en C cuya unión da C , como buscábamos. \square

COROLARIO 1.15. Si $C \subseteq X$ es un continuo y K_1, \dots, K_n son subcontinuos disjuntos dos a dos, tales que $C - \bigcup_{j=1}^n K_j$ es disconexo, entonces C es descomponible.

DEMOSTRACIÓN. Sea i el primer índice para el cual $C - \bigcup_{j=1}^i K_j$ es disconexo, y sea $A = \bigcup_{j=1}^{i-1} K_j$. Por la proposición anterior, como $C - A$ es conexo pero $(C - A) - K_i$ no lo es, existen C_1 y C_2 dos conexos no densos en $C - A$, cuya unión es $C - A$. Luego $\overline{C_1}$ y $\overline{C_2}$ son subcontinuos propios de C y se cumple que $A \cup \overline{C_1} \cup \overline{C_2} = C$, de modo que C es descomponible. \square

PROPOSICIÓN 1.16. Dado $C \subseteq X$ un continuo y K un subcontinuo propio de C , si K tiene interior en C , entonces C es descomponible.

DEMOSTRACIÓN. Sea K un subcontinuo propio de C con interior no vacío en C . Si K separa C , entonces C es descomponible por la proposición anterior. Si no, el complemento $C - K$ es conexo y no es denso en C , de modo que $\overline{C - K}$ es un subcontinuo propio de C . Así que C es descomponible por ser C la unión de K y $\overline{C - K}$. \square

En particular, ningún continuo indescomponible en la esfera S^2 tiene interior.

DEFINICIÓN 1.17. (Irreducibilidad) Dados $C \subseteq X$ un continuo y A un subconjunto de C , diremos que C es *irreducible* con respecto a A si ningún subcontinuo propio de C contiene a A .

La siguiente propiedad será de utilidad en el siguiente capítulo. Su demostración se puede encontrar en [7], p. 433.

PROPOSICIÓN 1.18. Dado un continuo $C \subseteq X$ y un subconjunto $A \subseteq C$ cualquiera, existe un subcontinuo C' de C irreducible con respecto a A .

3. Cubrimientos ramificados

En esta sección hablaremos por primera vez de nociones dinámicas. En el Capítulo 3 relacionaremos conjuntos dinámicamente definidos con los conceptos topológicos estudiados en secciones anteriores.

3.1. Definiciones.

DEFINICIÓN 1.19. (Cubrimiento) Dados X e Y espacios topológicos, se dice que un mapa $f : X \rightarrow Y$ es un *cubrimiento* si para todo $y \in Y$ existe un entorno abierto $V \subseteq Y$ de y tal que f^{-1} es unión de abiertos disjuntos en cada uno de los cuales f es un homeomorfismo sobre V . Diremos que tal entorno V es un abierto *bien cubierto*.

DEFINICIÓN 1.20. (Cubrimiento ramificado) Dados A y B abiertos de la esfera, un mapa $f : A \rightarrow B$ es un *cubrimiento ramificado* si existe un conjunto finito $X \subseteq A$ tal que

$$f|_{A-X} : A - X \rightarrow B - f(X)$$

es un cubrimiento, y para cada $y \in f(X)$ existen un punto $c \in X$, un entorno $U \subseteq A$ de c , un entorno $V \subseteq B$ de $y = f(c)$, y un entero k , tales que f restringido a $U - \{c\}$ es un cubrimiento k a 1 de $V - y$. Diremos que tal punto c es un *punto crítico* de f .

Notaremos por $\text{Crit}(f)$ al conjunto de puntos críticos de f , y llamaremos *valores críticos* a las imágenes de estos. Los valores que no son críticos se llaman *regulares*. Para cada $c \in \text{Crit}(f)$, definimos el *orden* de c como $\text{ord}(c) = k - 1$.

Un primer ejemplo de cubrimiento ramificado de la esfera son los polinomios complejos. Si $f : S^2 \rightarrow S^2$ es un polinomio de grado n , entonces sus puntos de derivada cero son sus puntos críticos como cubrimiento ramificado. Además, ∞ es un punto crítico de orden $n - 1$ y el orden de cualquier otro $c \in \text{Crit}(f)$ es la multiplicidad de c como raíz de f' . En general, toda función racional $f = p/q$, donde p y q son polinomios, es un cubrimiento ramificado. Notemos que si d es el máximo entre el grado de p y el grado de q , entonces todo valor regular de f tiene d preimágenes.

Para construir un ejemplo de cubrimiento ramificado que no sea racional podemos considerar cualquier mapa $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ creciente y sobreyectivo. Si definimos en coordenadas polares $f(re^{i\theta}) = \varphi(r)e^{i2\theta}$, resulta que f es un cubrimiento ramificado con dos puntos críticos de orden 1.

Mencionemos algunas propiedades útiles de estos mapas. Una primera observación es que todo cubrimiento ramificado es una función abierta.

Para el caso en que f es cubrimiento ramificado en la esfera tenemos lo siguiente.

PROPOSICIÓN 1.21. Para todo cubrimiento ramificado $f : S^2 \rightarrow S^2$ existe un entero positivo d tal que todo valor regular tiene exactamente d preimágenes.

Decimos que el número d de la proposición anterior es el *grado* del cubrimiento ramificado.

Dado $U \subseteq S^2$ abierto tal que $S^2 - U$ tiene finitas componentes conexas, decimos que la *conectividad* de U es la cantidad de componentes de $S^2 - U$. Si U y V son abiertos de la esfera cuyo complemento tiene finitas componentes, se cumple la siguiente fórmula.

TEOREMA 1.22. ⁵ (Riemann-Hurwitz) Si $f : U \rightarrow V$ es un cubrimiento ramificado de grado d , entonces

$$2 - n = d(2 - m) - \sum_{c \in \text{Crit}(f)} \text{ord}(c),$$

donde n es la conectividad de U y m la de V .

Una consecuencia del teorema de Riemann-Hurwitz es que, si $f : S^2 \rightarrow S^2$ es un cubrimiento ramificado de grado d , entonces la suma de los órdenes de los puntos críticos de f en toda la esfera es $2d - 2$.

Retomando el ejemplo que consideramos antes, si f es un polinomio de grado d , entonces el orden de ∞ como punto crítico es $d - 1$ y la derivada de f tiene $d - 1$ raíces contadas con multiplicidad, donde el orden de un punto crítico coincide con su multiplicidad como raíz de f' . De modo que f verifica la fórmula anterior.

Por otra parte, si f es un cociente de polinomios, digamos $f = \frac{p}{q}$, entonces su grado como cubrimiento ramificado es el máximo entre el grado de p y el grado de q .

Dado un mapa f en S^2 , decimos que un conjunto $K \subseteq S^2$ es *f-invariante* si $f(K) \subseteq K$, y que K es *completamente f-invariante* si $f^{-1}(K) = K$. Observemos que $f^{-1}(K) = K$ es equivalente a que $f^{-1}(S^2 - K) = S^2 - K$.

Otra consecuencia del Teorema de Riemann-Hurwitz es que, si $f : S^2 \rightarrow S^2$ es un cubrimiento ramificado de grado d y $R \subseteq S^2$ es una región completamente invariante y simplemente conexa, entonces

$$(1) \quad \sum_{c \in \text{Crit}(f) \cap R} \text{ord}_f(c) = d - 1,$$

donde $\text{ord}_f(c)$ es el orden de c como punto crítico de f .

Sea f un polinomio complejo de grado $d \geq 2$. Para $N \in \mathbb{N}$, si definimos $V_N = \{z : |z| > N\} \cup \{\infty\}$, entonces V_N es entorno de ∞ en S^2 y se cumple que existe N_0 tal que, para todo $N' > N_0$, se tiene $f(V_{N'}) \subseteq V_{2N'}$. Definiendo $f^k = f \circ f^{k-1}$, tenemos que $f^k(z) \xrightarrow[k]{} \infty$ siempre que $z \in V_N$. En otras palabras, cualquier punto cercano a ∞ tiende a ∞ cuando se lo itera por f sucesivamente. Se dice que ∞ es un *atractor* y se define su *cuenca de atracción* como

$$B_\infty = \{z : f^k(z) \xrightarrow[k]{} \infty\}.$$

⁵Ver [10].

De lo anterior se obtiene que $B_\infty = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(V_N)$, de lo cual se sigue que B_∞ es una región completamente invariante. Algo no tan inmediato es que el complemento de B_∞ en la esfera es un compacto no numerable. Además es fácil ver que B_∞ es simplemente conexo si y solo si el único punto crítico de f en B_∞ es ∞ ⁶.

En el caso polinomial descrito arriba el *conjunto de Julia* de f es $J_f = \partial B_\infty$. Para f racional en general, el Julia se define como el conjunto de los puntos inestables a futuro. Resulta que J_f es un compacto completamente invariante no numerable⁷.

Por otra parte, cuando f es apenas un cubrimiento ramificado, las propiedades de las funciones holomorfas no se cumplen en general. El concepto de *polynomial like*, que definiremos a continuación, fue introducido por Douady-Hubbard⁸ y ha sido usado extensamente para el estudio de las propiedades topológicas de los polinomios complejos.

DEFINICIÓN 1.23. (Polynomial-like) Sea $f : S^2 \rightarrow S^2$ un cubrimiento ramificado. Diremos que f es *polynomial like* si existe una región $R \subseteq S^2$ simplemente conexa completamente invariante, con $\infty \in R$, ∞ punto crítico fijo de orden $d - 1$, y tal que su complemento $S^2 - R$ es no numerable.

Si f es *polynomial like*, se denota J o J_f al borde de R , y J se llama el *Julia* de f . El complemento de R en S^2 se llama el *Julia relleno* de f y se denota \hat{J} . Observemos que, de la ecuación 1 se sigue que hay $d - 1$ puntos críticos de f en \hat{J} contados con sus órdenes.

Cabe mencionar que no es realmente importante que $\infty \in R$ en la definición de *polynomial like*. Lo pedimos únicamente por la posibilidad de que hubiese más de una región completamente invariante y así asegurar que el Julia esté bien definido.

PROPOSICIÓN 1.24. Si $f : S^2 \rightarrow S^2$ es *polynomial like*, entonces el Julia de f es un continuo completamente f -invariante.

DEMOSTRACIÓN. Sea J el Julia de f . Es claro que J es conexo, ya que R es simplemente conexo, así que J es un continuo. Al ser f continua y abierta se cumple que

$$f^{-1}(J) = f^{-1}(\partial R) = \partial f^{-1}(R) = \partial R = J.$$

□

3.2. Geometría de los cubrimientos ramificados.

Consideremos $f : S^2 \rightarrow S^2$ un cubrimiento ramificado de grado 2. En este caso f tiene exactamente dos puntos críticos y sus imágenes son distintas⁹. Esto implica

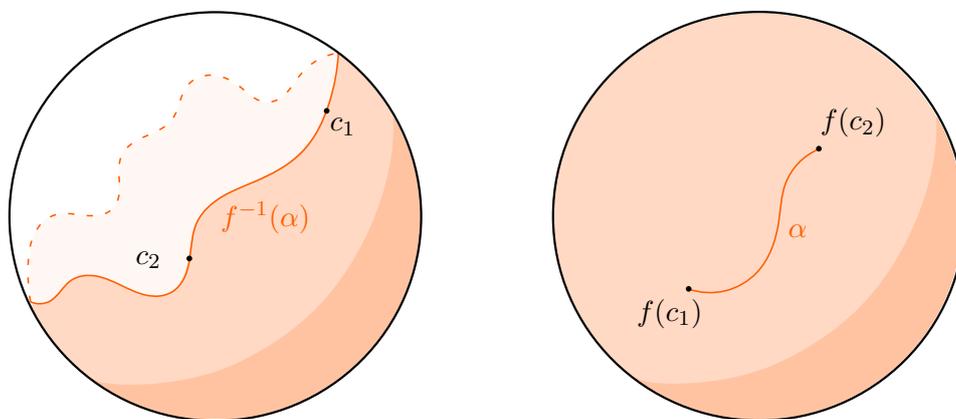
⁶Recordar que f tiene exactamente $d - 1$ puntos críticos aparte de ∞ .

⁷Ver [1], Lemma 4.8 y Corollary 4.14.

⁸Ver [12].

⁹Como la suma de todos los órdenes debe ser $2d - 2 = 2$ y los valores regulares tienen dos preimágenes, necesariamente hay dos puntos críticos, cada uno de orden 1. Si las imágenes de ambos puntos coincidieran, digamos $f(c_1) = f(c_2) = x$, entonces habría un entorno de x donde los puntos tendrían 4 preimágenes.

que $f^{-1}(f(\text{Crit}(f))) = \text{Crit}(f)$. Llamemos c_1 y c_2 a los puntos críticos de f , y sea α una curva simple en la esfera que conecta $f(c_1)$ con $f(c_2)$. Si $\hat{\alpha}$ es la imagen de α sin sus extremos, entonces $f^{-1}(\hat{\alpha})$ tiene dos componentes conexas, α_1 y α_2 , cada una de las cuales debe tener un extremo en c_1 y el otro en c_2 . De modo que $f^{-1}(\alpha)$ separa la esfera en dos componentes.

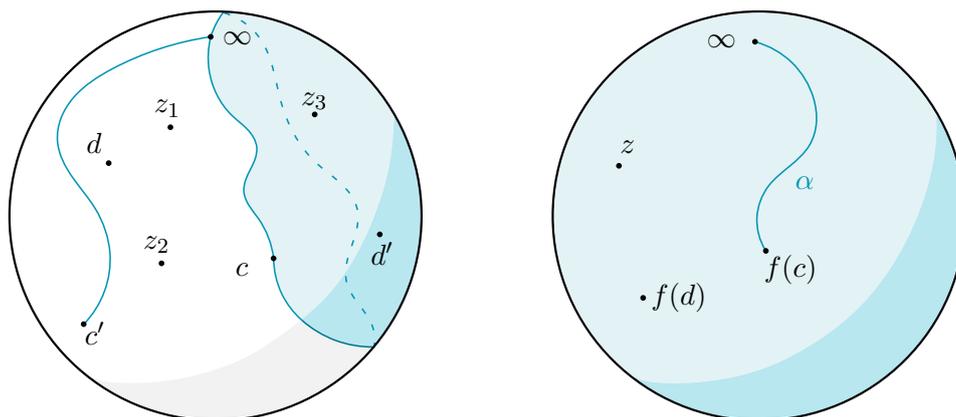


Como cada una de las componentes conexas de $S^2 - f^{-1}(\alpha)$ es simplemente conexa y no contiene puntos críticos de f , resulta que la restricción de f a cada una de tales regiones es un homeomorfismo sobre $S^2 - \alpha$.

En el último capítulo usaremos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.25. Sean $f : S^2 \rightarrow S^2$ un mapa polynomial like y $c \neq \infty$ un punto crítico de f . Dado $L \neq S^2$ un continuo que no separa la esfera y que contiene a $f(c)$ e ∞ , se tiene que $f^{-1}(L)$ separa la esfera y cada punto de $S^2 - L$ tiene al menos una preimagen en cada componente conexa de $S^2 - f^{-1}(L)$.

A modo de ejemplo consideremos un mapa $f : S^2 \rightarrow S^2$ polynomial like de grado 3, con tres puntos críticos: ∞ , c y d , de órdenes 2, 1 y 1 respectivamente.

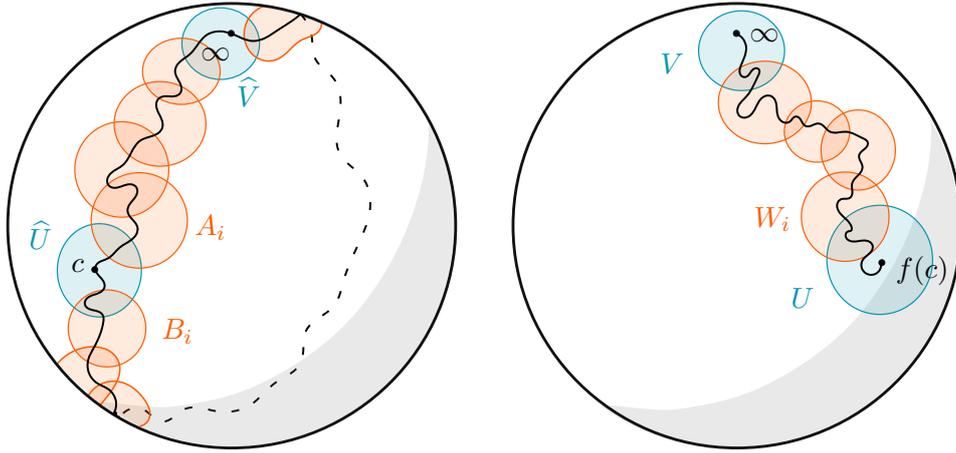


Mientras que ∞ tiene una sola preimagen, $f(c)$ y $f(d)$ tienen dos preimágenes cada uno. Sean d y d' las de $f(d)$. Si α es una curva simple que conecta $f(c)$ con ∞

sin pasar por $f(d)$, entonces $f^{-1}(\alpha)$ separa la esfera en dos regiones. Sin embargo, una de ellas contiene a d , con lo cual cada valor regular de f fuera de α tendrá dos preimágenes en esa región. Por ejemplo, si z es valor regular cerca de $f(d)$, z tiene dos preimágenes cerca de d y una cerca de d' .

DEMOSTRACIÓN. (Proposición 1.25) Sean \widehat{U} y \widehat{V} entornos de c e ∞ , y U y V entornos de $f(c)$ e ∞ , tales que $\widehat{U} - \{c\}$ cubre k a 1 a $U - \{f(c)\}$ y $\widehat{V} - \{\infty\}$ cubre k a 1 a $V - \{\infty\}$. Para cada punto $x \in L - \{\infty, f(c)\}$, sea W_x un entorno bien cubierto de x . Luego $L' = L - (U \cup V)$ es compacto y está cubierto por $\bigcup_{x \in L'} W_x$, de modo que con finitos de tales W_x también se cubre L' . Llamémosles W_1, \dots, W_n .

Sea i tal que $W_i \cap U \neq \emptyset$. Como $f|_{\widehat{U}}$ es cubrimiento k a 1 de U , y W_i es bien cubierto, existen dos¹⁰ abiertos disjuntos, A_i y B_i , tales que $f|_{A_i} : A_i \rightarrow W_i$ y $f|_{B_i} : B_i \rightarrow W_i$ son homeomorfismos y además $A_i \cap \widehat{U} \neq \emptyset \neq B_i \cap \widehat{U}$. A continuación tomamos algún $j \neq i$ tal que $W_j \cap (U \cup W_i) \neq \emptyset$. Entonces definimos A_j y B_j abiertos disjuntos que se mapean 1 a 1 a W_j , de modo que $A_j \cap (\widehat{U} \cup A_i) \neq \emptyset$ y $B_j \cap (\widehat{U} \cup B_i) \neq \emptyset$.



Inductivamente, para cada nuevo índice k tal que W_k intersecciona U o alguno de los W_i que ya consideramos, encontramos dos abiertos disjuntos, A_k y B_k , donde f es un homeomorfismo sobre W_k , tales que A_k intersecciona \widehat{U} o alguno de los A_i anteriores, y B_k intersecciona \widehat{U} o alguno de los B_i anteriores.

AFIRMACIÓN 1. $(\bigcup_{i=1}^n A_i) \cap (\bigcup_{i=1}^n B_i) = \emptyset$.

Para probar la afirmación, supongamos que, para dos índices i, j , A_i corta a B_j . Luego $f(A_i \cap B_j) = W_i \cap W_j \neq \emptyset$. Pero entonces, dado un punto $y \in W_i \cap W_j$, hay dos preimágenes de y en A_i , una en $A_i \cap A_j$ y otra en $A_i \cap B_j$. Esto contradice que f es 1 a 1 en A_i .

¹⁰Si el orden de c es mayor a 1, habrá más de dos abiertos que cumplan las condiciones que pedimos para A_i y B_i . Sin embargo, no necesitaremos considerar más de dos de tales entornos para concluir que $f^{-1}(L)$ separa S^2 .

Definamos

$$L_A = f^{-1}(L) \cap (\widehat{U} \cup \widehat{V} \cup \bigcup_{i=1}^n A_i)$$

$$\text{y } L_B = f^{-1}(L) \cap (\widehat{U} \cup \widehat{V} \cup \bigcup_{i=1}^n B_i).$$

Se cumple que L_A y L_B son conexos, ya que L es conexo. Sea $\widehat{L} = L_A \cup L_B$.

AFIRMACIÓN 2. \widehat{L} separa S^2 .

En efecto, tenemos que ni L_A ni L_B separan S^2 , y ambos son conexos. Así que su unión L separa si y solo si su intersección $L_A \cap L_B$ no es conexa. Por la Afirmación 1 sabemos que L_A y L_B se intersectan solo en \widehat{U} y \widehat{V} , con lo cual $L_A \cap L_B$ es desconexo, probando la afirmación.

Es claro que \widehat{L} podría no ser todo $f^{-1}(L)$, como es el caso en el ejemplo anterior, donde f es de grado 3. Sin embargo, si $K = f^{-1}(L) - \widehat{L}$, K no puede contener completamente una componente conexa de $S^2 - \widehat{L}$, ya que, por ejemplo, K no toca A_i ni B_i para ningún i . Con esto concluimos que $f^{-1}(L)$ separa la esfera.

Por último, dada una componente R de $S^2 - f^{-1}(L)$, es claro que su borde ∂R está contenido en $f^{-1}(L)$. Se cumple que $\partial f(R) \subseteq f(\partial R)$, de manera que $\partial f(R)$ está contenido en L . Así que $\partial f(R) = L$, con lo cual $f|_R : R \rightarrow S^2 - L$ es sobreyectiva. \square

Teorema de Rutt

En este capítulo U será un abierto simplemente conexo de la esfera cuyo borde consiste en más de un punto. Nos basaremos en el artículo de E. Rutt [11], en el que se da una condición necesaria para que el borde de U sea indescomponible, y luego una condición necesaria para que U tenga un fin primo¹ cuya impresión es todo su borde. En particular nos interesará el segundo resultado, del que veremos una demostración en detalle.

1. Segundo Teorema de Rutt

TEOREMA 2.1. (Segundo Teorema de Rutt) Sea $\Gamma = \partial U$. Si existe un fin primo de U cuya impresión es Γ , entonces Γ es indescomponible o es unión de dos indescomponibles.

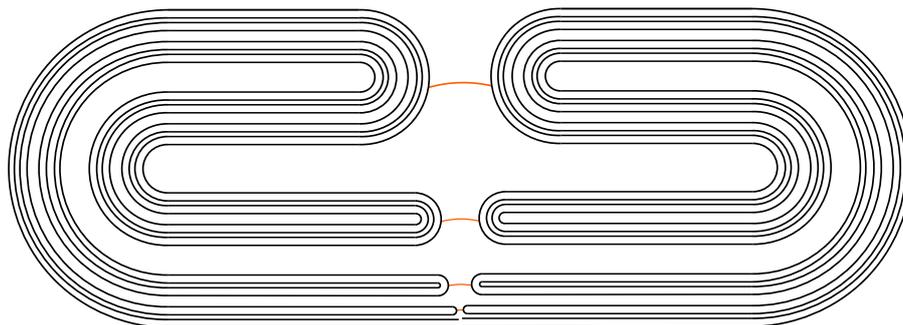


FIGURA 1. Un fin primo cuya impresión es el *Doble Knaster*.

Un ejemplo de que las hipótesis de este teorema no son suficientes para que Γ sea indescomponible es el de la figura 1, donde podemos identificar dos subcontinuos propios, cada uno homeomorfo al continuo de Knaster, cuya unión da todo el continuo.

Es fácil construir un ejemplo que muestre que no vale el recíproco del teorema anterior. En la figura 2 se muestra un continuo que es unión de dos subcontinuos indescomponibles, pero su complemento en la esfera no tiene ningún fin primo cuya impresión sea todo el borde.

¹Ver Capítulo 1. §1

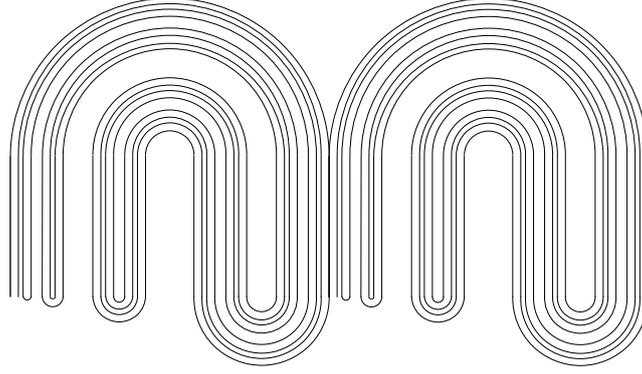


FIGURA 2

Antes de demostrar el teorema anterior probaremos algunos lemas que serán de utilidad.

LEMA 2.2. Sean $\Gamma = \partial U$ y ε un fin primo de U cuya impresión llamaremos $P \subseteq \Gamma$. Supongamos que ε está definido por una cadena de crosscuts $\{H_i\}_i$. Entonces, dado $Q \subseteq P$ cualquier subcontinuo propio de P , hay infinitos puntos que son extremos de algún H_i y no están en Q . Es decir, el conjunto $(\Gamma - Q) \cap \bigcup_i \overline{H_i}$ es infinito.

DEMOSTRACIÓN. Haremos la prueba por absurdo. Supondremos que el conjunto $(\Gamma - Q) \cap \bigcup_i \overline{H_i}$ es finito. De hecho, a menos de tomar una subsucesión de crosscuts con ambos extremos en Q , podemos suponer que $(\Gamma - Q) \cap \bigcup_i \overline{H_i}$ es vacío. Es decir que nuestro supuesto será que todos los extremos de los crosscuts H_i están en Q .

Sea δ la componente conexa de $S^2 - Q$ que contiene todos los crosscuts H_i . Al ser Q compacto, se cumple que δ es abierto, y además es simplemente conexo pues su complemento en la esfera es conexo. Además se tiene que el borde de δ está contenido en Q y, como los extremos de todos los H_i están en Q , resulta que $\{H_i\}_i$ es una cadena de crosscuts de δ cuya impresión está contenida en Q . Veremos que esta impresión contiene a P , lo cual es absurdo.

De las dos regiones crosscut en que H_0 separa δ , sea δ_0 la que contiene H_1 . Si $\{R_i\}_i$ son las regiones crosscut de U definidas por $\{H_i\}_i$, entonces R_0 está contenida en δ_0 . Inductivamente, habiendo definido δ_{n-1} , tenemos que H_n es un crosscut de δ_{n-1} . De las dos componentes de $\delta_{n-1} - H_n$, sea δ_n la que contiene H_{n+1} (Ver figura 3).

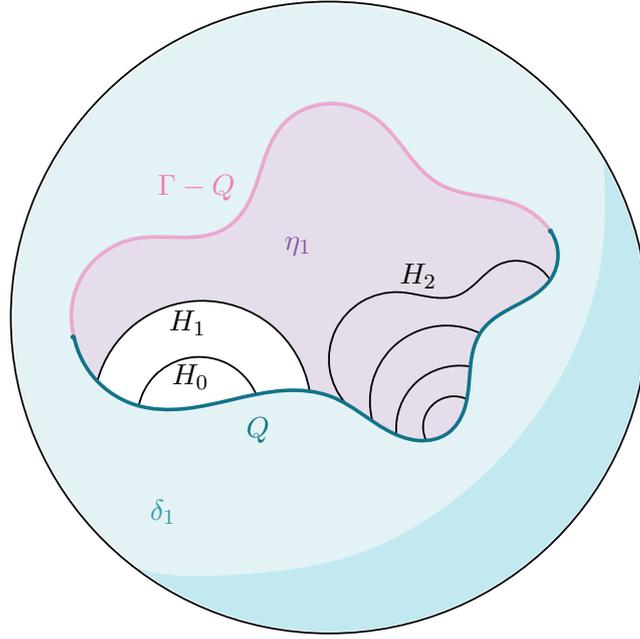


FIGURA 3

Por construcción, $\{\delta_i\}_i$ junto con $\{H_i\}_i$ forman una cadena fundamental en δ , de modo que su impresión es $\cap_i \bar{\delta}_i \subseteq Q$.

Luego, como cada R_n está contenida en δ_n , tenemos que

$$P = \cap_i \bar{R}_i \subseteq \cap_i \bar{\delta}_i \subseteq Q.$$

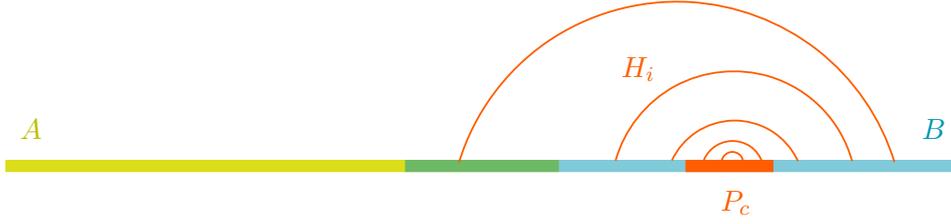
□

LEMA 2.3. Sean $\Gamma = \partial U$ y ε un fin primo de U con P y P_c su impresión y su conjunto principal respectivamente. Entonces, dado cualquier $Q \subseteq P$ subcontinuo propio de P contenido en P_c , se cumple $\Gamma = \overline{\Gamma - Q}$.

DEMOSTRACIÓN. Solo hay que probar que $Q \subseteq \overline{\Gamma - Q}$. Sea $q \in Q$ cualquiera. Como $q \in P_c$, existe una cadena de crosscuts $\{H_i\}_i$ representante de ε que converge a q . Como Q está estrictamente contenido en P , está en las hipótesis del Lema 2.2, de modo que el conjunto $(\Gamma - Q) \cap \cup_i \bar{H}_i$ es infinito. Como los H_i convergen a q , necesariamente q es punto de acumulación de $(\Gamma - Q) \cap \cup_i \bar{H}_i$. Así que $q \in \overline{\Gamma - Q}$. □

LEMA 2.4. Si U tiene un fin primo ε cuya impresión es igual a Γ , y P_c es el conjunto principal de ε , entonces, para todo par de subcontinuos propios K_1 y K_2 de Γ tales que $\Gamma = K_1 \cup K_2$, se cumple que P_c intersecciona a K_1 y a K_2 .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que P_c no intersecciona a K_1 . Entonces P_c está contenido en $\Gamma - K_1$, que es abierto en Γ , con lo cual existe un índice i_0 tal que, para todo $i > i_0$, ambos extremos de H_i están en $\Gamma - K_1 \subseteq K_2$. Pero esto significa que el conjunto de puntos que son borde de algún H_i y no están en K_2 es finito, lo cual contradice el Lema 2.2. Análogamente concluimos que P_c corta a K_2 . □



DEMOSTRACIÓN. (Segundo Teorema de Rutt) Supongamos que ε es fin primo de U cuya impresión es Γ , y sea $\{H_i\}_i$ una cadena de crosscuts de U que define a ε . Sea $P_c \subseteq \Gamma$ el conjunto principal de ε .

AFIRMACIÓN 3. Si $P_c = \Gamma$, entonces Γ es indescomponible.

Si $P_c = \Gamma$, entonces para todo $Q \subseteq \Gamma$ subcontinuo propio tenemos, por 2.3, que $Q \subseteq \overline{\Gamma - Q}$. De modo que, si $\Gamma = Q \cup K$, con K otro subcontinuo de Γ , entonces $\overline{\Gamma - Q} \subseteq K$. Pero esto implica $Q \subseteq K$, o sea que $K = \Gamma$. Luego Γ es indescomponible.

Supongamos entonces que $P_c \neq \Gamma$ y que podemos escribir $\Gamma = A \cup B$, donde A y B son dos subcontinuos propios. A priori ni A ni B son necesariamente indescomponibles, como es el caso en la figura 4. Por 2.3, tenemos que $\overline{\Gamma - P_c} = \Gamma$.

En virtud del Lema 2.4 tenemos que P_c interseca tanto a A como a B . Afirmamos que, sin embargo, P_c no contiene a A ni a B . En efecto, si fuera $A \subseteq P_c$, entonces $\Gamma - P_c \subseteq B$. Luego $\Gamma = \overline{\Gamma - P_c} \subseteq B$, así que $B = \Gamma$, lo cual es absurdo. Entonces A no está totalmente contenido en P_c . Análogamente se llega a que B tampoco.

Nuestro siguiente objetivo será encontrar un continuo indescomponible $X \subseteq A$ tal que $\Gamma = X \cup P_c \cup B$. De manera que, si A es indescomponible, tomamos $X = A$. Asumiendo que A no es indescomponible, supongamos que $A = A_1 \cup A_2$, donde A_1 y A_2 son dos subcontinuos propios de A (Ver Figura 4).

Tenemos que B no contiene a $\Gamma - P_c^2$, con lo cual el conjunto $Q_A = \Gamma - (P_c \cup B)$ es no vacío y está contenido en A .

²Porque, si $\Gamma - P_c \subseteq B$, otra vez es $\Gamma = \overline{\Gamma - P_c} \subseteq B$, que es absurdo.

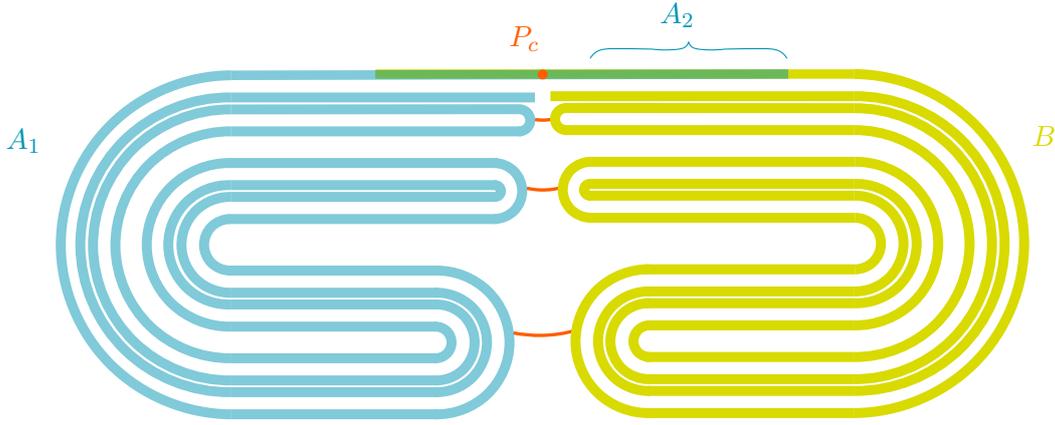


FIGURA 4

AFIRMACIÓN 4. Q_A está contenido en A_1 o en A_2 .

Supongamos por absurdo que ni A_1 ni A_2 contienen a Q_A y definamos

$$\begin{aligned} C_1 &= P_c \cup A \\ C_2 &= P_c \cup A_2 \cup B \\ C_3 &= P_c \cup A_1 \cup B \end{aligned}$$

Probaremos que estos son subcontinuos propios de Γ . En primer lugar observe-mos que, de ser $C_1 = \Gamma$, sería $\Gamma - P_c \subseteq A$ y, por lo tanto, $\Gamma = A$. Por otra parte, si fuese $C_2 = \Gamma$, entonces Q_A estaría contenido en A_2 , contradiciendo nuestro supuesto. Por la misma razón, no puede ser $C_3 = \Gamma$. De modo que C_1 , C_2 y C_3 son compactos estrictamente contenidos en Γ . Además, ya sabemos que C_1 es conexo, pues P_c interseca A . De la misma forma, para concluir que C_2 y C_3 también son conexos, veremos que P_c también interseca A_1 y A_2 . Hay dos posibilidades: $A_1 \cap B \neq \emptyset$ ó $A_2 \cap B \neq \emptyset$. Asumamos el primer caso sin pérdida de generalidad. Luego $A_1 \cup B$ es un subcontinuo propio³ de Γ . Por lo tanto, $K_1 = A_1 \cup B$ y $K_2 = A_2$ están en las hipótesis del Lema 2.4, de donde se sigue que P_c interseca A_2 . Con esto podemos afirmar que C_2 es un continuo (de hecho, un subcontinuo propio de Γ). Por último, usando nuevamente el Lema 2.4 con $K_1 = C_2$ y $K_2 = A_1$ concluimos que P_c también corta a A_1 . Así que C_3 también es conexo.

Hemos probado que C_1 , C_2 y C_3 son subcontinuos propios de Γ . Si alguno de ellos, llamémosle Q , contiene ambos extremos de H_i para infinitos índices i , entonces podemos considerar la subcadena de crosscuts que consiste en tales infinitos H_i , y obtener una cadena que define el mismo fin primo ε . Sin embargo, no hay extremos de los arcos de esta cadena que no estén en Q , lo cual contradice el Lema 2.2. Veamos ahora que la alternativa: ninguno de los continuos C_1 , C_2 y C_3 contiene ambos extremos de H_i para infinitos índices i , también nos lleva a una contradicción.

³Es propio ya que está contenido en C_3 y $C_3 \neq \Gamma$.

Primero notamos que, en tal caso, hay algún índice i para el que ni C_1 ni C_2 ni C_3 contiene ambos extremos de H_i . Otra observación es que la unión de cualquier par de los tres subcontinuos C_1 , C_2 y C_3 es todo Γ . De modo que, si llamamos a y b a los extremos de H_i , tenemos que a no puede estar en $C_1 \cap C_2 \cap C_3$, ya que, de ser así, b no podría estar en ninguno de los tres continuos. Supongamos entonces que $a \notin C_1$. Luego, como $C_1 \cup C_2 = \Gamma$, $a \in C_2$ y, por lo tanto, $b \notin C_2$. Análogamente, como $a \notin C_1$ y $C_1 \cup C_3 = \Gamma$, $a \in C_3$. De modo que $b \notin C_3$, pero esto implica que $b \notin C_2 \cup C_3 = \Gamma$. El mismo tipo de absurdo se obtiene al suponer que a no está en C_2 o en C_3 . Esto prueba la Afirmación 4.

AFIRMACIÓN 5. Existe un continuo indescomponible $X \subseteq A$ tal que $\Gamma = X \cup P_c \cup B$.

Sabemos por la afirmación anterior que $Q_A \subseteq A_1$ ó $Q_A \subseteq A_2$. Asumamos sin pérdida de generalidad que $Q_A \subseteq A_1$. Gracias a la proposición 1.18, podemos tomar $X \subseteq A_1$ subcontinuo irreducible con respecto a Q_A . Afirmamos que X es indescomponible. En efecto, si fuera $X = X_1 \cup X_2$, con X_1 y X_2 subcontinuos propios de X , entonces, por el mismo argumento que antes, $Q_A \subseteq X_1$ ó $Q_A \subseteq X_2$, lo cual contradice la irreducibilidad de X con respecto a Q_A . De modo que X es indescomponible y tenemos que $\Gamma = X \cup P_c \cup B$.

AFIRMACIÓN 6. Existe un continuo indescomponible $Y \subseteq B$ tal que $\Gamma = X \cup P_c \cup Y$.

Igual que antes, si B es indescomponible, no hay más que buscar. Si no, escribimos $B = B_1 \cup B_2$ con B_1 y B_2 subcontinuos propios. Definimos $Q'_B = \Gamma - (P_c \cup X) \subseteq B$ y, argumentando como antes, llegamos a que Q'_B es no vacío y está contenido en B_1 ó en B_2 . Asumiendo que $Q'_B \subseteq B_1$, elegimos $Y \subseteq B_1$ subcontinuo irreducible con respecto a Q'_B . Luego Y es indescomponible y tenemos $\Gamma = X \cup P_c \cup Y$ como queríamos.

Finalmente, observamos que, como $X \cup Y$ es compacto y $\Gamma - P_c \subseteq X \cup Y$, entonces $\Gamma = \overline{\Gamma - P_c} \subseteq X \cup Y$. Por lo tanto, $\Gamma = X \cup Y$. □

2. Otros resultados y ejemplos

TEOREMA 2.5. (Primer Teorema de Rutt) Si el borde de U es indescomponible, entonces existe un fin primo de U cuya impresión es ∂U .

No incluiremos aquí la prueba del Primer Teorema. En lugar de esto, veamos lo que sucede en el caso de nuestro indescomponible de cabecera. Observamos que, si U es el complemento del continuo de Knaster en la esfera, entonces U es simplemente conexo y su borde es el propio indescomponible. El teorema anterior nos dice que U tiene que tener un fin primo cuya impresión es todo su borde. En la Figura 5 se muestra cómo encontrarlo.

Observemos que el Lema 2.3 implica el siguiente resultado, interesante por sí mismo, que ya probamos al principio de la demostración del Teorema 2.1.

TEOREMA 2.6. (Tercer Teorema de Rutt) Sea $\Gamma = \partial U$. Si existe un fin primo de U cuyo conjunto principal es Γ , entonces Γ es indescomponible.

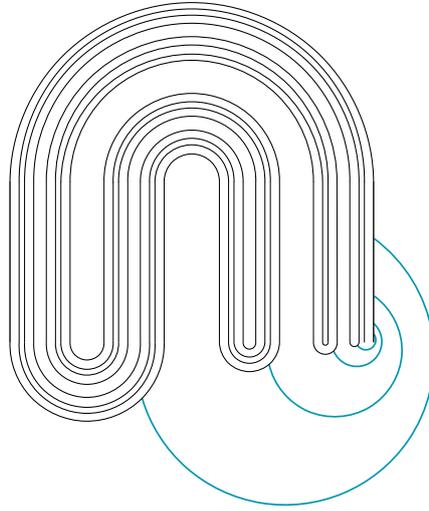


FIGURA 5. Un fin primo cuya impresión es el continuo de Knaster.

Teorema J

Recordemos que, dado f un polinomio complejo, se define el conjunto de Julia de f como la frontera de la cuenca de atracción de ∞ , y el Julia relleno \widehat{J} como el complemento de la cuenca de ∞ . Dijimos también que un cubrimiento ramificado $f : S^2 \rightarrow S^2$ de grado d se dice *polynomial like* cuando existe una región $R \subseteq S^2$ simplemente conexa, completamente invariante, que contiene a ∞ , punto crítico fijo de orden $d - 1$, y cuyo complemento $S^2 - R$ es no numerable. Llamaremos también, por analogía, J al borde de R y \widehat{J} al complemento de R en S^2 . Observemos que de Riemann-Hurwitz se deduce que el único punto crítico de f en R es ∞ , o sea, \widehat{J} contiene $d - 1$ puntos críticos contados con sus órdenes.

En [13] y [14] D. K. Childers, J. C. Mayer y J.T. Rogers probaron que, para f polinomio complejo de grado mayor que 1, se cumple que si la cuenca de ∞ tiene un fin primo cuya impresión es todo el conjunto de Julia de f , entonces el Julia es indescomponible. Con el objetivo puesto en extender este resultado a los mapas *polynomial like*, veremos en este capítulo que, con una hipótesis adicional sobre J , obtenemos la misma conclusión que para los polinomios. De ese modo vincularemos finalmente el concepto de fines primos con los cubrimientos ramificados, recurriendo a los teoremas de Rutt vistos en el Capítulo 2.

Al final del capítulo mencionaremos un ejemplo de cubrimiento ramificado que admite un continuo indescomponible completamente invariante.

1. Composants

Supondremos ahora que X es un continuo indescomponible contenido en un espacio métrico, aunque en ocasiones menos hipótesis serían suficientes.

DEFINICIÓN 3.1. (Composant) Dado un punto x en X , llamaremos *composant* de x a la unión de todos los subcontinuos propios de X que contienen a x .

Usaremos los siguientes dos resultados en la demostración del Teorema J.

TEOREMA 3.2. ¹ Toda composant de X es unión numerable de subcontinuos de X .

Se deduce que X tiene una cantidad no numerable de composants. Para ver esto, observamos que, como los subcontinuos propios de X no tienen interior en X , toda composant es unión numerable de cerrados con interior vacío. De modo que, por

¹[4], §48, VI, Theorem 1.

Teorema de Baire, una unión numerable de composants no puede tener interior en X .

TEOREMA 3.3.² Toda composant de X es densa.

En [9] J. Krasinkiewicz introdujo el concepto de *composant interna*.

DEFINICIÓN 3.4. (Composant interna/externa) Dado un continuo X , una composant C de X se llama *externa* si existe un continuo L que intersecta tanto a X como a su complemento, tal que $L \cap X$ está contenido en C . De lo contrario, decimos que C es *interna*. Diremos que C es *fuertemente externa* si existe un continuo L que intersecta tanto a X como a su complemento, tal que $L \cap X$ es un conexo contenido en C .

Dada U una componente conexa de $S^2 - X$, diremos que una composant C de X es U -externa si existe un continuo L que interseca a X y a U , y tal que $L \cap X$ está contenido en C . Análogamente, diremos que C es fuertemente U -externa si existe un continuo L que intersecta tanto a X como a U , de modo que la intersección $L \cap X$ es un conexo contenido en C .

Notemos que toda composant fuertemente externa es externa. Si bien en [9] Krasinkiewicz demostró que no se cumple en general el recíproco, este sí es cierto para la mayoría de los indescomponibles más usuales que se presentan en dinámica, como son los solenoides, el continuo de Knaster, los lagos de Wada.

Para ilustrar la definición anterior podemos pensar cómo son las composants del continuo de Knaster. Es claro que la composant del punto $(1, 0)$ es externa, ya que se puede conectar este punto con el complemento del continuo por un segmento L como en la Figura 1. De hecho, en nuestras representaciones del continuo de Knaster solamente se ve esta composant. En [8], Krasinsiewicz probó que todas las demás composants de este continuo son internas. Vale la pena observar que en este ejemplo la única composant externa es fuertemente externa.

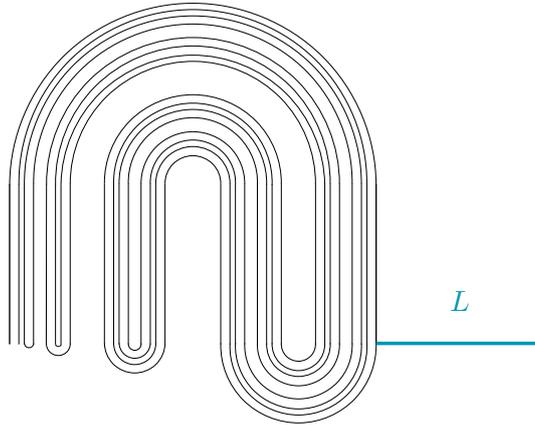


FIGURA 1

El siguiente resultado también se debe a Krasinkiewicz y su prueba está en [9].

²[4], §48, VI, Theorem 2.

TEOREMA 3.5. Dado X un continuo indescomponible, la unión de las composants internas de X es un conjunto de segunda categoría en X .

Para nuestros propósitos será suficiente saber que en todo continuo indescomponible hay alguna composant interna.

Dado $L \subseteq S^2$ un compacto que separa la esfera, y $A \subseteq S^2$ conexo, diremos que L separa A si hay puntos de A en al menos dos componentes de $S^2 - L$.

Al ser L compacto, las componentes conexas de su complemento son abiertas. Notemos que, si L separa \overline{A} , entonces, si U_1 y U_2 son componentes conexas de $S^2 - L$ que contienen puntos de \overline{A} , entonces U_1 y U_2 también contienen puntos de A . Esto se resume en la siguiente observación.

OBSERVACIÓN 3.6. Si L separa \overline{A} , entonces separa A .

Probaremos el siguiente resultado en la última sección de este capítulo.

TEOREMA 3.7. (Teorema K) Sean $X \subseteq \mathbb{R}^2$ un continuo que no separa el plano e Y un continuo indescomponible contenido en el borde de X . Si existen Y_i , una composant interna de Y , y Z un subcontinuo de X que interseca Y_i y además Z no está contenido en Y , entonces Y está contenido en Z .

2. Enunciado y lemas previos

Recordemos que, para f polynomial like, notamos por R a una región simplemente conexa completamente invariante con $\infty \in R$, y J a su borde.

Dado un continuo X , diremos que X se descompone en indescomponibles si se escribe como la unión finita $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$, donde cada A_j es un subcontinuo propio indescomponible de X y ninguno de ellos está contenido en la unión de los restantes. En tal caso diremos que $\{A_1, \dots, A_n\}$ es una descomposición en indescomponibles de X .

TEOREMA 3.8. (Teorema J) Sea $f : S^2 \rightarrow S^2$ polynomial like de grado $d \geq 2$. Si $\{A_1, \dots, A_n\}$ es una descomposición de J en indescomponibles, entonces todo punto crítico $c \neq \infty$ de f cumple lo siguiente.

1. Si $c \notin J$ y V es la componente de $\widehat{J} - J$ que contiene $f(c)$, entonces $\partial V \neq J$.
2. Si $c \in J$, entonces $f(c)$ está en todos los A_k y la composant C de $f(c)$ en A_k es externa, pero no fuertemente R -externa. Además, si V es una componente de $S^2 - J$ tal que C es fuertemente V -externa, entonces $\partial V \neq J$.

Decimos que un continuo $X \subseteq S^2$ es *cofrontera* si es el borde de todas las componentes de $S^2 - X$. Observemos que, en el caso particular en que J no separa la esfera, J es cofrontera.

COROLARIO 3.9. Sea $f : S^2 \rightarrow S^2$ polynomial like de grado $d \geq 2$, tal que J es cofrontera y no es indescomponible. Si existe un fin primo de R cuya impresión es J , entonces $J = A \cup B$, donde A y B son indescomponibles, además f no tiene puntos

críticos en $\widehat{J} - J$, y todo punto crítico $c \in J$ cumple que su imagen está en A y en B , y en ambos la composant de $f(c)$ es externa pero no fuertemente externa.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.5 sabemos que J es indescomponible o es unión de dos indescomponibles. Suponiendo entonces que J no es indescomponible tenemos que J se descompone como $J = A \cup B$, donde A y B son dos subcontinuos propios indescomponibles.

Por otra parte, como ∞ es punto crítico de f de orden $d-1$, en \widehat{J} hay $d-1$ puntos críticos contados con sus órdenes. Esto implica que f tiene algún punto crítico c en J o en $\widehat{J} - J$. Si fuera $c \notin J$, por el Teorema J, la componente de $S^2 - J$ que contiene a $f(c)$ no tendría como borde a J , lo cual contradice que J es cofrontera.

De modo que $c \in J$ y, por el Teorema J tenemos que $f(c) \in A \cap B$ y la composant de $f(c)$ en ambos es externa. Sea C la composant de $f(c)$ en A , y sea V una componente de $S^2 - J$ tal que C es V -externa. Suponiendo que C es fuertemente V -externa, el Teorema J también garantiza que $\partial V \neq J$, lo cual contradice que J es cofrontera. \square

Lo siguiente se deduce inmediatamente del corolario anterior.

COROLARIO 3.10. Sea $f : S^2 \rightarrow S^2$ polynomial like de grado $d \geq 2$, tal que J es cofrontera y f tiene algún punto crítico en $\widehat{J} - J$. Si existe un fin primo de R cuya impresión es J , entonces J es indescomponible.

LEMA 3.11. Sea $f : S^2 \rightarrow S^2$ polynomial like. Si $J = A_1 \cup \dots \cup A_n$ es una descomposición en indescomponibles de J , entonces para todo k se cumple que ningún A_j toca una composant interna de A_k si $j \neq k$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición, los A_k son continuos indescomponibles y ninguno de ellos está contenido en la unión de los demás. Supongamos que A_j interseca A_k^i una composant interna de A_k , y sean $X = \overline{R}$, $Y = A_k$ y $Z = A_j$. Tenemos que tanto Y como Z son subcontinuos de J que es el borde de X . Además A_j no está contenido en A_k , así que, en particular, $A_j \cap (\partial X - A_k^i)$ no es vacío. De modo que, por el Teorema K, llegamos al absurdo de que $A_k \subseteq A_j$. \square

LEMA 3.12. Sea $f : S^2 \rightarrow S^2$ polynomial like de grado $d \geq 2$. Si $J = A_1 \cup \dots \cup A_n$ es una descomposición de J en indescomponibles, entonces para todo j existe un único k tal que $f^{-1}(A_j) = A_k$.

DEMOSTRACIÓN. Observemos que, si algún A_k no tuviese interior en J , la unión de los demás sería densa en J y por lo tanto igual a J , de modo que A_k estaría contenido en ella. Así que todos los A_k tienen interior en J .

Separaremos la prueba del lema en un par de afirmaciones intermedias.

AFIRMACIÓN 7. Para todo j , toda composant C de A_j cumple que su imagen $f(C)$ no tiene interior en J .

Para verlo alcanza con probar que $f(C - \text{Crit}(f))$ no tiene interior en J . Para simplificar denotemos $C' = C - \text{Crit}(f)$. En virtud del Teorema 3.2, C es unión numerable de subcontinuos propios de A_j , con lo cual, como f tiene finitos puntos críticos, también C' es unión numerable de compactos. Para cada punto $x \in C'$, sea B_x un entorno abierto de x tal que f restringido a $\overline{B_x}$ es un homeomorfismo. Como C' es unión numerable de compactos, podemos quedarnos con una cantidad numerable de tales abiertos que cubren C' . Renombrémoslos como $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Tenemos que, para cada i , $\overline{B_i} \cap C'$ es compacto sin interior en A_j , con lo cual, al ser $f|_{\overline{B_i}}$ un homeomorfismo sobre su imagen, $f(\overline{B_i} \cap C')$ es compacto sin interior en J . Como $f(C') = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(C' \cap \overline{B_i})$, por el Teorema de Baire se sigue que $f(C')$ no tiene interior en J .

AFIRMACIÓN 8. Para todos j y k , si un punto $x \in A_j$ cumple que $f(x)$ está en A_k^i , una composant interna de A_k , entonces $f(A_j) \subseteq A_k$.

Sea $\mathcal{C}_x^{A_j}$ la composant de x en A_j . Veremos que $f(\mathcal{C}_x^{A_j}) \subseteq A_k$. Dado cualquier $K \subseteq \mathcal{C}_x^{A_j}$ subcontinuo propio de A_j que contiene a x , defino $Z = f(K)$, $Y = A_k$ y $X = \widehat{J}$. Tenemos que X , Y y Z cumplen todas las hipótesis del Teorema K, salvo quizás la condición de que $Z \cap (\partial X - Y_i) \neq \emptyset^3$. Si valiera la última hipótesis del teorema, tendríamos que $A_k \subseteq f(K)$, lo cual es absurdo ya que, por la afirmación anterior, $f(K)$ no tiene interior en J , mientras que A_k sí lo tiene. De modo que necesariamente $f(K) \subseteq A_k$. Es decir que la imagen de todo subcontinuo propio de A_j que contiene a x está contenida en A_k . Por lo tanto, $f(\mathcal{C}_x^{A_j}) \subseteq A_k$. Como las composants de un continuo son densas, esto implica que $f(A_j) \subseteq A_k$, como queríamos.

AFIRMACIÓN 9. Para todo j , si

$$H_j = \{k : f(A_k) \text{ corta una composant interna de } A_j\},$$

entonces $f^{-1}(A_j) = \bigcup_{k \in H_j} A_k$.

La inclusión $\bigcup_{k \in H_j} A_k \subseteq f^{-1}(A_j)$ se sigue de la afirmación anterior. Para la otra, sea $x \in J$ tal que $f(x) = y \in A_j$, y supongamos que x no pertenece a ningún A_k con $k \in H_j$. El Teorema 3.5 garantiza que existe A_j^i una composant interna de A_j . Recordemos que A_j^i es densa en A_j . Dado V un abierto que contiene a x tal que $V \cap \bigcup_{k \in H_j} A_k = \emptyset$, como f es abierta, $f(V)$ es un entorno de y , de modo que $f(V) \cap A_j^i \neq \emptyset$. Es decir que existe $z \in V$ tal que $f(z)$ está en una composant interna de A_j , lo cual contradice la definición de H_j . Esto prueba la afirmación.

Finalmente, tenemos que $f^{-1}(A_j) = \bigcup_{k \in H_j} A_k$. En particular, H_j es no vacío para todo j . Para probar el lema alcanza con ver que, si $j \neq k$, entonces $H_j \cap H_k = \emptyset$. Si existiera $l \in H_j \cap H_k$, entonces $f(A_l) \subseteq A_j \cap A_k$. Sin embargo, $f(A_l)$ también cortaría una composant interna de A_j , con lo cual tendríamos que A_k toca una composant interna de A_j , lo que contradice el Lema 3.11. \square

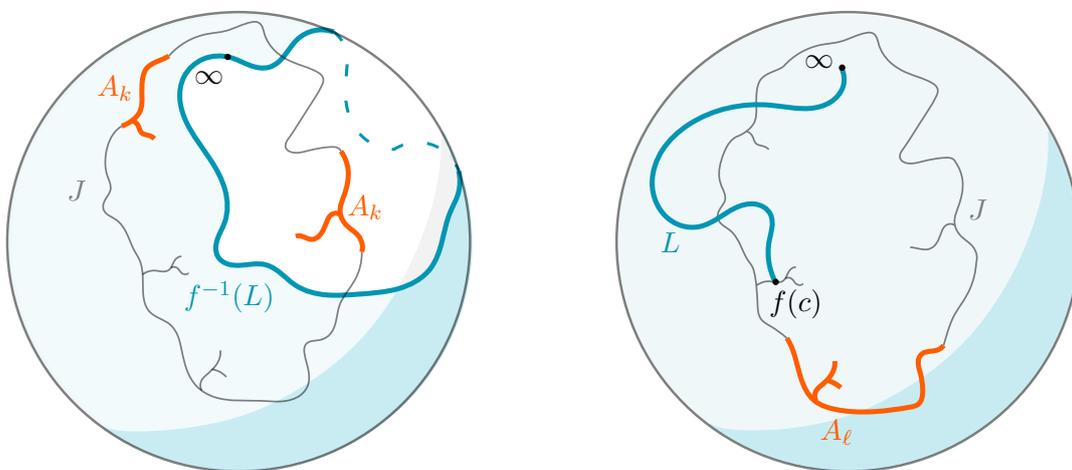
³Es claro que \widehat{J} no separa la esfera y que A_k está contenido en el borde de \widehat{J} . Además, como $f(x) \in f(K) = Z$, Z también corta $Y_i = A_k^i$.

3. Prueba del Teorema J

DEMOSTRACIÓN. (Teorema J)

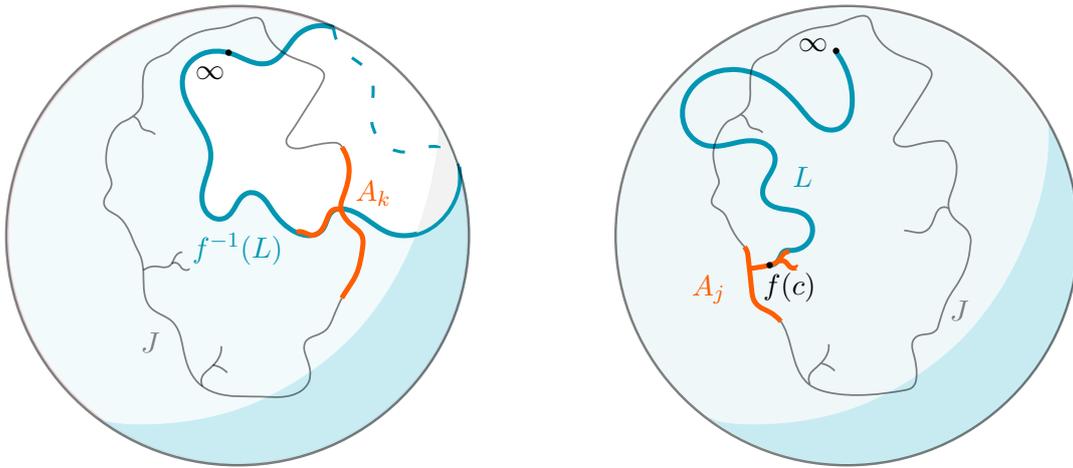
Supongamos que $J = A_1 \cup \dots \cup A_n$, donde los A_k son subcontinuos propios indecomponibles, y ninguno de ellos está contenido en la unión de los restantes.

Sea $c \neq \infty$ un punto crítico de f y empecemos suponiendo que $c \in J$. Queremos probar que $f(c)$ está en todos los A_k . Supongamos que para algún ℓ , $f(c)$ no está en A_ℓ . Al ser J el borde de R , existe un continuo L que no separa la esfera, que une $f(c)$ con ∞ sin pasar por A_ℓ . Por la Proposición 1.25, tenemos que $f^{-1}(L)$ separa la esfera y hay preimágenes de A_ℓ en cada componente conexa de $S^2 - f^{-1}(L)$. Pero, si $A_k = f^{-1}(A_\ell)$, entonces $f^{-1}(L)$ no corta A_k , de modo que A_k es disconexo.

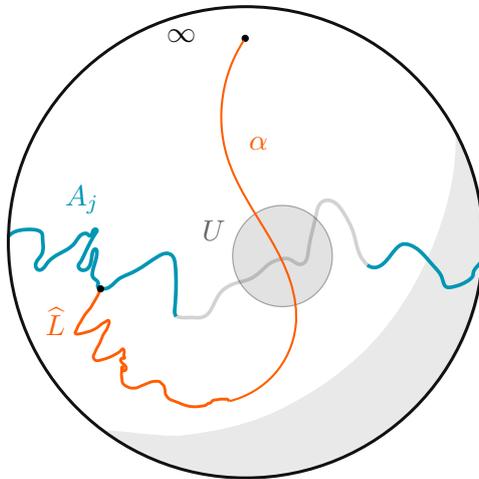


Esto nos permite concluir que $f(c)$ tiene que estar en todos los A_j . Para cada j llamemos C_j a la composant de $f(c)$ en A_j . Observemos que, por el Lema 3.11, sabemos que para todo j , C_j es composant externa de A_j .

Veamos ahora que ninguna C_j es fuertemente R -externa. Supongamos que C_j es fuertemente R -externa para cierto j . Entonces existe un continuo $L \subseteq S^2$ que une $f(c)$ con ∞ sin separar la esfera, tal que $L \cap A_j$ es conexo y está contenido en C_j . Sea $A_k = f^{-1}(A_j)$. Como $L \cap A_j$ es conexo, $f^{-1}(L) \cap A_k = f^{-1}(L \cap A_j)$ tiene finitas componentes conexas. Usando otra vez la Proposición 1.25 tenemos que $f^{-1}(L)$ separa la esfera y en cada componente conexa de $S^2 - f^{-1}(L)$ hay alguna preimagen de cada punto de $S^2 - L$. Sabemos que A_j no está contenido en L , pues $L \cap A_j$ está dentro de C_j . Así que $S^2 - L$ contiene puntos de A_j , con lo cual $f^{-1}(L)$ separa A_k . Como $f^{-1}(L) \cap A_k$ es unión de finitos subcontinuos de A_k cuya unión separa A_k , gracias al Corolario 1.15 obtenemos que A_k es descomponible.



Fijado cualquier j , consideremos entonces una componente conexa V de $S^2 - J$ tal que C_j es V -externa. Supongamos que C_j es fuertemente V -externa y sea \widehat{L} un continuo que contiene a $f(c)$, toca V e intersecta A_j en un conexo contenido en C_j . Queremos concluir que $\partial V \neq J$. Veremos que, de hecho, el borde de V está contenido en A_j . Supongamos por absurdo que hay un punto $x \in \partial V - A_j$, y sea U un entorno abierto de x que no toca A_j . Como $\partial V \subseteq J$ y J es el borde de R , U intersecta tanto a R como a V . Así que podemos conectar \widehat{L} con ∞ por una curva α , pasando por U , sin tocar A_j .



La existencia del continuo $L = \widehat{L} \cup \alpha$ muestra que C_j es también fuertemente R -externa, ya que $(\widehat{L} \cup \alpha) \cap A_j = \widehat{L} \cap A_j$ es conexo, lo cual ya vimos que lleva a un absurdo.

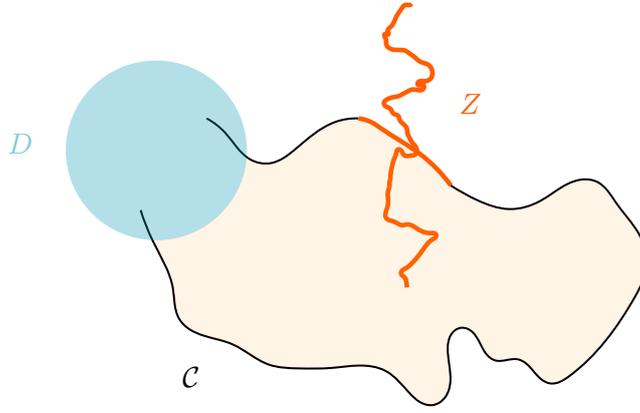
Para terminar resta considerar el caso en que c no está en J . Para probar que $\partial V \neq J$, simplemente observamos que, de no ser así, otra vez podríamos conectar

$f(c)$ con ∞ sin tocar alguno de los A_k , de modo que la preimagen de este sería disconexa. □

4. Prueba del Teorema K

Para la prueba de este teorema recurriremos al siguiente teorema, que se debe a Krasinkiewicz; su prueba se encuentra en [8].

TEOREMA 3.13. Sean X un continuo indescomponible, C una composant interna de X y Z un continuo que intersecta C . Supongamos que $Z \cap (X - C) \neq \emptyset$ y que C no está contenida en Z , y sea D un disco que corta $C - Z$. Entonces existe un continuo $A \subseteq C$ tal que $A \cup D$ separa S^2 y separa Z .



COROLARIO 3.14. En las hipótesis del teorema anterior, Z corta toda composant interna de X .

DEMOSTRACIÓN. (Teorema K)

En primer lugar afirmamos que podemos suponer que Z no separa la esfera. En efecto, supongamos probado el resultado para el caso en que Z no separa, y supongamos que Z separa. Consideramos entonces \widehat{Z} , la unión de Z con las componentes conexas de su complemento que están contenidas en X . Es decir,

$$\widehat{Z} = Z \cup \bigcup \{U : U \text{ componente conexa de } S^2 - Z \text{ tal que } U \subseteq X\}.$$

Entonces, como X no separa la esfera, tenemos que \widehat{Z} tampoco la separa y $\widehat{Z} \subseteq X$. Así que \widehat{Z} está en las hipótesis de lo que suponemos probado, de donde se concluye que Y está contenido en \widehat{Z} . Pero $\widehat{Z} - Z$ está contenido en el interior de X y, como $Y \subseteq \partial X$, necesariamente Y está contenido en Z .

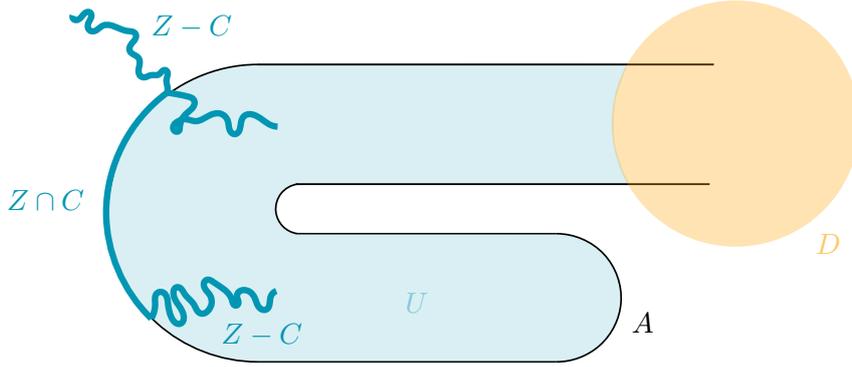
Por comodidad llamaremos C a Y_j . Usaremos la afirmación anterior para concluir que $Z \cap C$ es conexo. Por absurdo supongamos que $Z \cap C$ no es conexo y sean x e y puntos en componentes conexas distintas de $Z \cap C$. Sea C' un continuo contenido en C que contiene a x y a y . Luego $C' \cap Z$ no es conexo, de modo que $C' \cup Z$ separa el

plano. Como Z no separa el plano, hay alguna componente conexa U de $S^2 - (C' \cup Z)$ tal que

- (a) $U \subseteq X$,
- (b) $\partial U \subseteq C' \cup Z$ y
- (c) ∂U no está contenido en Z .

Sean $y \in \partial U - Z$ y V un entorno de y que no interseca Z . Tenemos que V interseca U , así que podemos tomar $u \in U \cap V$ y α un arco contenido en $V \cap \bar{U}$ que une u con un punto $y' \in \partial U$ (y' podría ser y). Por (b) y (c), tenemos que $y' \in C' \subseteq C$. Pero U es abierto, así que, por (a), U está contenido en el interior de X , de modo que no toca Y . Con esto se tiene que ningún punto de α excepto y' está en Y , lo cual contradice que C es una composant interna. Esto prueba la afirmación.

Asumamos entonces que Z no separa el plano, de modo que $Z \cap C$ es conexo, y supongamos ahora por absurdo que Y no está contenido en Z . Luego tampoco C está contenido en Z , ya que C es denso en Y . Sea D un disco que toca C y no toca Z . Como Z no está contenido en C , por el Teorema 3.13 hay un continuo $A \subseteq C$ tal que $A \cup D$ separa S^2 y separa Z .



Hay dos posibilidades. O bien $\overline{C \cap Z} = Y$, y entonces

$$Y = \overline{C \cap Z} \subseteq \overline{C} \cap Z = Y \cap Z,$$

con lo cual $Y \subseteq Z$ como queríamos. O bien $\overline{C \cap Z} \neq Y$, y en este caso, como $C \cap Z$ es conexo, $\overline{C \cap Z}$ es un subcontinuo propio de Y que toca C , de modo que, por definición de composant, $\overline{C \cap Z}$ está contenido en C . Claramente también $\overline{C \cap Z}$ está contenido en Z , así que $\overline{C \cap Z} \subseteq C \cap Z$, con lo cual $C \cap Z$ es compacto.

Podemos suponer entonces que $C \cap Z$ es compacto. Sea $B = A \cup D \cup (C \cap Z)$. Luego B es un compacto que separa S^2 . En efecto, observemos que $A \cup D$ está contenido en B y, como Y no tiene interior en la esfera, $\overline{C \cap Z}$ no puede contener una componente conexa de $S^2 - (A \cup D)$. Como Z no está contenido en Y , alguna componente de $S^2 - B$ tiene puntos de Z . Sea U tal componente, y sea Z_0 una componente conexa de $Z \cap U$. Luego la clausura $\overline{Z_0}$ toca el borde de U , ya que Z es conexo. Así que $\overline{Z_0}$ es un continuo que corta C , composant interna de Y , y no está

contenido en C , con lo cual, otra vez por el Teorema 3.13, existe un continuo $L \subseteq C$ tal que $L \cup D$ separa S^2 y separa $\overline{Z_0}$.

Afirmamos que $L \cap Z_0$ es no vacío. Sabemos que $L \cup D$ separa $\overline{Z_0}$, pero, por la Observación 3.6, esto implica que $L \cup D$ separa Z_0 . Como U no toca D , Z_0 tampoco. De esto se concluye que, si $L \cap Z_0 = \emptyset$, entonces $Z_0 \cap (L \cup D) = \emptyset$, y esto contradice que Z_0 es conexo.

Hemos llegado a que $L \cap Z_0 \neq \emptyset$. Pero esto también es absurdo, pues Z_0 no tiene puntos de C , mientras que $L \cap Z_0$ está contenido en $C \cap Z$. \square

5. Referencias a ejemplos y preguntas

En el trabajo de Childers, Mayer y Rogers [14] se prueba que para todo polinomio complejo el Julia es indescomponible si y solo si un fin primo de B_∞ tiene impresión igual a J . Sin embargo, está abierta la pregunta sobre si existe algún Julia indescomponible.

Existe un ejemplo, de J. Iglesias, A. Portella, Á. Rovella y J. Xavier⁴ de un cubrimiento ramificado f , que no es polynomial like, para el que existe una región invariante R donde f es un homeomorfismo, cuyo borde es un continuo indescomponible con infinitos lagos de Wada en el que f es 2 a 1.

Una pregunta que dejaremos planteada es si se cumple lo siguiente.

CONJETURA 3.15. Para todo $f : S^2 \rightarrow S^2$ polynomial like, J no se descompone en indescomponibles.

En caso de ser cierto este resultado, se concluiría el siguiente, que generalizaría el teorema de Childers, Mayer y Rogers.

CONJETURA 3.16. Para todo $f : S^2 \rightarrow S^2$ polynomial like vale que J es indescomponible si y solo si existe un fin primo de R cuya impresión es igual a J .

⁴[15].

Bibliografía

- [1] J. Milnor (2006) *Dynamics in one complex variable, Third edition*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press
- [2] C. Carathéodory (1913) *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete*, Math. Ann., 73 (323 - 370)
- [3] J. N. Mather (1982) *Topological proofs of some purely topological consequences of Carathéodory's theory of prime ends*, Selected Studies: Physics - astrophysics, mathematics, history of science (225 - 255)
- [4] K. Kuratowski (1968) *Topology vol. 2*, Academic Press and PWN, New York, London and Warszawa
- [5] J. G. Hocking, G. S. Young (1961) *Topology*, Addison-Wesley Publishing Company
- [6] B. Knaster (1922) *Un continu dont tout sous-continu est indécomposable*, Fund. Math., 3 (247)
- [7] W. A. Wilson (1925) *On the oscillation of a continuum at a point*, Trans. Amer. Math. Soc., 27 (429 - 440)
- [8] J. Krasinkiewicz (1974) *On internal composants of indecomposable plane continua*, Fund. Math., 85 (255 - 263)
- [9] J. Krasinkiewicz (1972) *On the composants of indecomposable plane continua*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. Astronom. Phys., 20 (935 - 940)
- [10] A. Hurwitz (1891) *Über Riemann'sche Fläche mit gegebenen Verzweigungspunkten.*, Math. Ann., 39 (1-61)
- [11] N. E. Rutt (1935) *Prime ends and indecomposability*, Bulletin of the American Mathematical Society, Bull. Amer. Math. Soc., 41(4) (265 - 273)
- [12] A. Douardy, J. H. Hubbard (1985) *On the dynamics of polynomial-like mappings*, Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tomo 18, n° 2 (287 - 343)
- [13] J. C. Mayer, J. T. Rogers (1993) *Indecomposable continua and the Julia sets of polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 117, Num. 3 (795 - 802)
- [14] D. K. Childers, J. C. Mayer, J. T. Rogers (2004) *Indecomposable continua and the Julia sets of polynomials, II*, Topology and its Applications, Elsevier
- [15] J. Iglesias, A. Portela, Á. Rovella, J. Xavier (2022) *Branched coverings of the sphere having a completely invariant indecomposable continuum with infinitely many Wada Lakes*, <https://arxiv.org/abs/2006.10617v2>