

TRABAJO MONOGRÁFICO

SOMETIDO A EVALUACIÓN PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

UNA PRUEBA ANALÍTICA DEL _____

TEOREMA DEL H-COBORDISMO

_____ Y ALGUNAS DE SUS CONSECUENCIAS

POR

MATÍAS AMOROSO BOUZA

ORIENTADOR

MARTÍN REIRIS ITHURRALDE

CENTRO DE MATEMÁTICA



FACULTAD DE
CIENCIAS

UDELAR | fcien.edu.uy



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Resumen

Esta monografía está basada en las notas de curso de un seminario de topología diferencial de John Milnor de 1963, "Lectures on the h-cobordism theorem". En estas se usa la teoría de Morse para dar una prueba de uno de los más importantes resultados de la topología diferencial: el teorema del h-cobordismo, debido a Stephen Smale. En este trabajo nos enfocaremos en reproducir y expandir los pasos de dicha prueba. Luego, probaremos algunas consecuencias importantes, entre ellas la Conjetura de Poincaré para $n \geq 6$ en la categoría **Top**.

Índice

INTRODUCCIÓN	4
1 PRELIMINARES SOBRE COBORDISMOS	12
2 TEORÍA DE MORSE	17
3 COBORDISMOS ELEMENTALES	29
4 REORDENAMIENTO DE COBORDISMOS	42
5 UN TEOREMA DE CANCELACIÓN	50
6 UN TEOREMA DE CANCELACIÓN MÁS FUERTE	62
7 CANCELACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS INTERMEDIOS	78
8 CANCELACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS EXTREMALES	93
9 EL TEOREMA DEL H-COBORDISMO Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES	99
APÉNDICE: TOPOLOGÍA ALGEBRAICA	104
REFERENCIAS	108

INTRODUCCIÓN

La topología y la geometría frecuentemente buscan invariantes (en la categoría que corresponda) para distinguir entre los objetos sobre los que trabajan. Por ejemplo, el grupo fundamental de \mathbb{T}^n es \mathbb{Z}^n , mientras que el de \mathbb{S}^n es trivial. Como el grupo fundamental es invariante por homeomorfismos, esto prueba que \mathbb{T}^n y \mathbb{S}^n son distintas en la categoría **Top**. Sin embargo, el grupo fundamental no caracteriza a una variedad, ni siquiera tomando en cuenta su dimensión. Por ejemplo, $\mathbb{C}P^n$ tiene grupo fundamental trivial, pero no es homeomorfo a \mathbb{S}^{2n} si $n \neq 1$. Más trivialmente, lo mismo es cierto para $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$.

Como consecuencia de esto, frecuentemente se buscan resultados de caracterización y clasificación: cierta invariante (o cierta combinación de invariantes) que logre caracterizar a cierto grupo de objetos matemáticos, parcial o totalmente. Quizás el ejemplo más clásico sea el de la clasificación de superficies: basta con saber el geno y la orientabilidad de dos superficies para saber si hay un homeomorfismo entre ellas.

El objetivo de esta monografía es presentar una prueba de una caracterización topológica de \mathbb{S}^n con $n \geq 6$. Es decir, daremos condiciones sobre ciertas invariantes topológicas de manera que si una variedad M las cumple, entonces M es homeomorfa a una esfera. Por supuesto, este tipo de resultado son de mayor interés cuanto más débiles sean las condiciones exigidas y cuanto más acotado sea el conjunto de objetos caracterizado. El resultado a presentar, conocido como la Conjetura de Poincaré Generalizada (en la categoría **Top**), exige condiciones débiles y extrae conclusiones fuertes sobre un objeto excepcionalmente relevante, \mathbb{S}^n , por lo que es de los más importantes del siglo pasado, llegando inclusive a valerle una Medalla Fields a su autor, Stephen Smale.

No seguiremos la prueba original de Stephen Smale (ver [Sma61a]) en este trabajo, optando en su lugar por la prueba que da John Milnor en [Mil65]. La prueba de Milnor es, de fondo, la misma que la de Smale, pero utilizando un punto de vista distinto: Milnor utiliza la teoría de Morse para llevar a cabo los mismos pasos que Smale lleva a cabo de forma puramente topológica.

La teoría de Morse es un ejemplo del estudio de invariantes topológicas (en **Diff**): en esta se busca distinguir entre variedades diferenciables mediante las funciones de Morse (ver **Definición 2.1**) que admiten. Hay, aunque nunca la explicitaremos, una forma de ver los entornos de los puntos críticos de estas funciones como las *handlebodies* de Smale, y de

hecho también las diferentes operaciones que lleva a cabo en su prueba.

En este trabajo se asumirá que el lector tiene un buen dominio del cálculo en variedades. También se asumirá cierta familiaridad con la topología algebraica, aunque se ha proporcionado un apéndice para usar como referencia.

Para deducir la caracterización buscada, nos dedicaremos a probar el siguiente teorema:

Teorema del h-cobordismo

Sea W^n un cobordismo entre M_1 y M_2 con $n \geq 6$ tal que $H_*(W, M_1) = 0$ y tanto W como M_1 y M_2 son simplemente conexas. Entonces existe un difeomorfismo entre W y $M_1 \times [0, 1]$.

Estrategia de demostración. Los pasos a seguir serán los siguientes:

1. Probar que W admite una función de Morse (**Teorema 2.7**).
2. Probar que si W una función de Morse sin puntos críticos, es difeomorfa a un cobordismo producto (**Teorema 3.3**).
3. Probar que se pueden reordenar los valores críticos por el índice de su punto crítico correspondiente (**Teorema 4.5**).
4. Probar un teorema que nos permite cancelar puntos críticos de índice λ y $\lambda + 1$ siempre y cuando cumplan una cierta propiedad geométrica (**Teorema 5.8**).
5. Introducir las hipótesis de dimensión y de conexión simple y con ellas probar una versión más fuerte del teorema anterior, que facilita el uso de homología para analizar la estructura de W (**Teorema 6.3**).
6. Introducir la hipótesis $H_*(W, M_1) = 0$ y usar herramientas de homología para probar que se pueden cancelar todos los puntos críticos de dimensión distinta a $0, 1, n - 1$ y n (**Teorema 7.9**).
7. Probar que los puntos críticos de orden 0 y 1 pueden ser o bien eliminados o reemplazados por puntos críticos de dimensión 3 . Dando vuelta el cobordismo, esto también cubre los casos $n - 1$ y n ya que tenemos $3 < n - 1$ (**Lema 8.1** y **Teorema 8.4**).

□

Si un cobordismo cumple las condiciones de este teorema excepto la conexión simple de M_1 y M_2 , lo denominaremos h -cobordismo. Estos son de interés más general, aunque no trataremos con ellos más allá de su limitado uso en el último capítulo. Por ejemplo, la existencia de un h -cobordismo entre dos variedades M_1 y M_2 de dimensión mayor o igual a 5 implica que $M_1 \times \mathbb{S}^1$ y $M_2 \times \mathbb{S}^1$ son difeomorfas (lo mismo aplica si uno reemplaza \mathbb{S}^1 por \mathbb{R}).

Este teorema dice, en esencia, que todo cobordismo simplemente conexo entre dos variedades simplemente conexas M_1 y M_2 que cumple que M_1 expresa toda la homología de W es un cobordismo de la forma $M_1 \times [0, 1]$ (denominado cobordismo producto), al menos siempre que la dimensión sea alta. A modo de digresión, cabe destacar que la única condición que es claramente necesaria en este enunciado es la conexión simple de W (ya que $V \times [0, 1]$ es necesariamente simplemente conexa). Relajar el resto de las condiciones da lugar a resultados de interés como el teorema del s -cobordismo (donde no se asume conexión simple de M_1 y M_2) o el Disc Embedding Theorem (que prueba el caso $n = 4$ relajando la conclusión al pedir solo un homeomorfismo) de Michael Freedman.

El teorema del h -cobordismo es fundamental en el estudio de variedades en dimensiones altas, más allá de que tenga la Conjetura Generalizada de Poincaré para **Top** como consecuencia en ese contexto, por lo que probarlo es de interés independiente. Para mostrar su fuerza, a continuación probaremos un resultado importante, del cual luego el resultado principal de la monografía se deducirá en una cuestión de unos pocos párrafos:

Teorema 0.1 (Caracterización de \mathbb{D}^n , $n \geq 6$)

Sea W^n una variedad suave, compacta y simplemente conexa con $n \geq 6$ tal que ∂W es simplemente conexo. Entonces W es difeomorfa a \mathbb{D}^n si y solo si $H_(W) = H_*(\mathbb{D}^n)$.*

Demostración. Como la homología es invariante por difeomorfismos, la primera implicación es inmediata. Por otro lado, si $H_*(W) = H_*(\mathbb{D}^n)$, consideremos un encaje $\varphi : \mathbb{D}^n \rightarrow W$, (basta con tomar la inclusión a \mathbb{R}^n y componer con una carta de W). Aplicando el **teorema de excisión**, $H_*(W - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ), \varphi(\mathbb{D}^n) - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ)) \cong H_*(W, \varphi(\mathbb{D}^n)) \cong 0$, donde el último isomorfismo se deduce de la sucesión exacta larga de la homología relativa. Además $W - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ)$ y $\varphi((\mathbb{D}^n)^\circ)$ son simplemente conexas porque $n \geq 3$, mientras que la otra componente de borde es simplemente conexa por hipótesis. Con esto, aplicando el

teorema del h-cobordismo tenemos que $W - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ)$ es difeomorfa a $\mathbb{D}^n \times [0, 1]$. Por lo tanto, rellenando el $\varphi((\mathbb{D}^n)^\circ)$ que habíamos removido y teniendo cuidado con la diferenciabilidad en el borde (ver **Teorema 1.1**), tenemos que W es difeomorfa a \mathbb{D}^n (ya que estamos, al fin y al cabo, simplemente alargando el radio de la bola). \square

Habiendo caracterizado \mathbb{D}^n , podemos explotar que \mathbb{S}^n son dos \mathbb{D}^n pegados por su borde para caraterizar a \mathbb{S}^n , como haremos a continuación:

Teorema 0.2 (Conjetura de Poincaré para $n \geq 6$)

Sea W^n una variedad cerrada y simplemente conexa con $n \geq 6$ que cumple $H_*(W) = H_*(\mathbb{S}^n)$. Entonces W es homeomorfa a \mathbb{S}^n .

Demostración. Consideremos un encaje $\varphi : \mathbb{D}^n \rightarrow W$ y una vez más consideremos $W - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ)$ como cobordismo, esta vez de la forma $(W - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ), \emptyset, \partial\mathbb{D}^n)$. Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} H_\lambda(W - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ)) &= H^{n-\lambda}(W - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ), \partial\varphi(\mathbb{D}^n)) && \text{(Dualidad de Poincaré)} \\ &= H^{n-\lambda}(W, \varphi(\mathbb{D}^n)) && \text{(Excisión)} \\ &= H_\lambda(\varphi(\mathbb{D}^n)) && \text{(Sucesión exacta larga)} \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos la sucesión exacta larga de la cohomología relativa, a saber:

$$\dots \rightarrow H^k(X, A) \rightarrow H^k(X) \rightarrow H^k(A) \rightarrow H^{k+1}(X, A) \rightarrow \dots$$

y los grupos de homología de W (que sabemos por hipótesis) y de $\varphi(\mathbb{D}^n)$ (que sabemos por ser contractible y, por lo tanto, tener la cohomología de un punto).

Usando la caracterización de \mathbb{D}^n para $n \geq 6$, tenemos un difeomorfismo $h : \mathbb{D}^n \rightarrow W - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ)$. Por lo tanto, W es homeomorfa a dos copias de \mathbb{D}^n pegadas por el borde mediante $h|_{\partial\mathbb{D}^n}$. Usando esto, podemos describir el siguiente homeomorfismo con \mathbb{S}^n :

Viendo a \mathbb{S}^n como subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} , podemos fácilmente enviar la primer copia de \mathbb{D}^n a $\mathbb{S}^n \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} \leq 0\}$ mediante un mapa p (usando una proyección estereográfica, por ejemplo). Para la segunda copia de \mathbb{D}^n , notemos que $h|_{\partial\mathbb{D}^n}$ puede ser extendida a un mapa de toda la bola mediante $g(x) = \|x\| h|_{\partial\mathbb{D}^n}(\frac{x}{\|x\|})$ para $x \neq 0$ y $h(0) = 0$. Además,

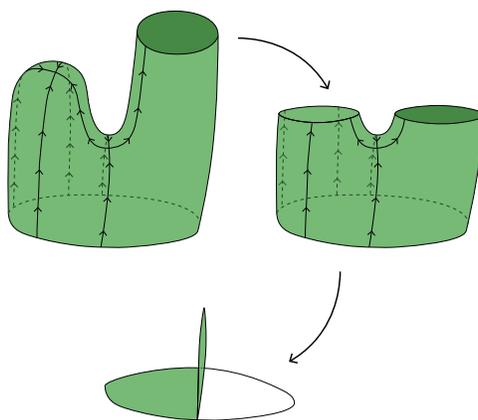
es fácil ver que se da $g^{-1} = \|x\| h_{|\partial\mathbb{D}^n}^{-1}(\frac{x}{\|x\|})$ y que ambas funciones son continuas. Por lo tanto, h es en realidad un homeomorfismo. Enviando entonces la segunda copia de \mathbb{D}^n a \mathbb{S}^n mediante $-p(-g(x))$ tenemos un homeomorfismo entre $W \cong \mathbb{D}^n \cup_{h|\partial\mathbb{D}^n} \mathbb{D}^n$ y \mathbb{S}^n . \square

A continuación detallaremos la estructura de la prueba del teorema del h -cobordismo que seguiremos en esta monografía.

El **Capítulo 1** servirá como una introducción a la categoría de los cobordismos y sus propiedades básicas.

El **Capítulo 2** desarrollará la maquinaria básica de la teoría de Morse, que se trata del estudio de las características topológicas de una variedad mediante el estudio de las funciones de Morse (ver **Definición 2.2**) que admite. Se probará que todo cobordismo admite una función de Morse (ver **Teorema 2.7**). Luego se probará que todo cobordismo puede ser descompuesto en cobordismos elementales (ver **Definición 2.5**).

En el **Capítulo 3** probaremos que un cobordismo que admite una función de Morse sin puntos críticos es un cobordismo producto. Luego definiremos el proceso de cirugía y estableceremos la conexión de este con las funciones de Morse (ver **Teorema 3.6**, **Teorema 3.7**). Usando la estructura desarrollada a lo largo del capítulo, luego obtendremos información topológica sobre cobordismos elementales mediante una retracción explícita a un subespacio conveniente (ver **Teorema 3.8**, **Corolario 3.8.1**). Esta retracción será particularmente relevante en el **Capítulo 7**. Se proporciona la siguiente ilustración a modo de ejemplo, ya que, si uno la generaliza bien a dimensiones más altas, puede resultar conveniente para la visualización del teorema:



En el **Capítulo 4** nos enfocaremos en la manipulación de campos tipo gradiente (ver **Corolario 3.8.1**) mediante isotopías, obteniendo así un grado de control sobre cómo se llevan a cabo las cirugías en un cobordismo. El resultado fundamental en este respecto es el **Lema 4.3**, que será utilizado múltiples veces en capítulos posteriores. Este resultado tendrá como consecuencia inmediata (teorema de Sard mediante) un orden canónico para los cobordismos elementales en los que se descompone un cobordismo dado; específicamente, con un simple argumento de dimensión, tenemos que los podemos ordenar por índice (ver **Teorema 4.5**).

El **Capítulo 5** será dedicado a establecer la manera de cancelar dos cirugías de índice λ y $\lambda + 1$. Una sustancial parte del capítulo es dedicada a lemas técnicos sobre isotopías, culminando en el **Lema 5.7**, que trata de una condición técnica con la cual es sencillo probar el **Teorema 5.8**, que establece la cancelación buscada bajo condiciones restrictivas. Este resultado subyace a todos los resultados de cancelación posteriores. Sin embargo, para entenderlo no es necesario tener un entendimiento profundo de los lemas previos. Entender estos lemas sí puede resultar útil para desarrollar un mejor entendimiento cuando se use posteriormente el **Teorema 5.9** en el **Capítulo 8**, ya que se prueba (aunque no en este trabajo) con técnicas similares a las de los lemas.

En el **Capítulo 6** usaremos el famoso truco de Whitney para relajar sustancialmente las hipótesis bajo las cuales aplica el **Teorema 5.8**. Es en este capítulo que surgen la mayoría de las obstrucciones topológicas: el **Teorema 6.3**, que es la razón de ser del capítulo, impone que W , V y V' sean simplemente conexas, además de imponer condiciones de dimensión. La prueba se basa en la construcción de un modelo conveniente para la intersección de dos variedades de dimensión complementaria que se intersectan transversalmente en dos puntos con signo opuesto. Una vez tenemos el modelo, la prueba es directa, pero la construcción es sutil y requiere de técnicas diversas.

En el **Capítulo 7** buscaremos pasar a un punto de vista más global. Específicamente, queremos cancelar puntos críticos para todos los niveles simultáneamente, obteniendo así un cobordismo producto. Para esto impondremos una condición topológica más: $H_*(W, V) = 0$. El resultado medular de este capítulo es el **Teorema 7.6** (que, de hecho, es más general de lo que necesitamos), el cual nos permite elegir los lugares de λ -cirugía con la única restricción de que formen una base de $H_\lambda(W, V)$. Esto nos permitirá usar la

condición $H_*(W, V) = 0$ junto con la expresión del mapa de borde asociado para aplicar el **Teorema 6.3** siempre y cuando no tengamos puntos críticos de índice 0, 1, $n - 1$ o n . En este capítulo es fundamental tener un buen entendimiento de topología algebraica, y específicamente de homología (y cohomología) singular entera.

En el **Capítulo 8** nos desharemos de los casos patológicos $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ (los casos $\lambda = n - 1$ y $\lambda = n$ son análogos dando vuelta el cobordismo). La razón por la que existe este capítulo es que el teorema de cancelación del **Capítulo 6** introduce una hipótesis de dimensión que estas cirugías no cumplen, por lo que les tendremos que dar un trato más individual.

Finalmente, el **Capítulo 9** comenzará probando el teorema del h-cobordismo en un solo párrafo, ya que todo el trabajo fue llevado a cabo en los capítulos anteriores. Luego, se probarán algunas consecuencias relevantes (entre ellas, las ya probadas en esta introducción) y se citarán sin prueba algunas otras. Esto da cierre a la monografía.

Con respecto a los aportes personales del autor de este trabajo monográfico: es muy difícil explicar mejor que John Milnor [Mat09], al menos cuando las explicaciones de Milnor asumen los mismos prerrequisitos que las de uno. Por lo tanto, los aportes en líneas generales se dividen en dos:

Primero están los casos en los que se expanden algunos de los detalles que Milnor opta por omitir. Estos aportes en general se encuentran intercalados a lo largo del trabajo, aunque en mucha menor densidad en los primeros tres capítulos y mucha mayor densidad en los capítulos 7 y 8. Los casos más importantes (y más fácilmente divisibles si uno contrasta con el texto en el que se basa este trabajo) de este tipo de aporte son:

1. La verificación de las propiedades de g en **Teorema 4.1**.
2. El enunciado y la parte final del **Lema 6.2**.
3. El **Corolario 7.1.1** (más que nada en forma de una ilustración).
4. El **Teorema 7.2**, en forma de dos lemas análogos (el **Lema 7.3** y el **Lema 7.4**), aparte de algunas aclaraciones sobre el diagrama conmutativo.

El otro tipo de aporte en este trabajo se da en la forma de pruebas alternativas a las que proporciona Milnor en sus notas. Todas resultan ser bastante parecidas conceptualmente

a las pruebas originales, aunque ocasionalmente con sustanciales divergencias en algunos puntos clave. Los aportes de este tipo son los siguientes:

1. El **Lema 7.4** (al igual que en los detalles del **Teorema 7.2**, en este caso lo que se prueba es algo para lo cual Milnor simplemente referencia uno de sus trabajos).
2. El **Lema 7.7** (y por lo tanto el **Lema 7.8**)
3. El **Lema 8.1**
4. El **Lema 8.2**
5. El **Teorema 9.3** (aunque la prueba resultó ser esencialmente completamente idéntica a la original; el único aporte relevante es la aclaración sobre la sucesión exacta larga en cohomología)

1. PRELIMINARES SOBRE COBORDISMOS

En este capítulo estableceremos las definiciones más elementales para entender el teorema; lo principal será establecer qué es un cobordismo en su noción más general, y probar algunas propiedades básicas de estos.

Definición 1.1

Si $V \subseteq \mathbb{R}^n$, diremos que $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ es suave si puede ser extendida a $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $V \subseteq U$, U abierto, tal que existen y son continuas todas las derivadas parciales de g de todos los órdenes en todos los puntos de U .

Definición 1.2

M es una variedad suave de dimensión n si es una variedad topológica W con una base numerable y una estructura suave \mathfrak{S} sobre M , que es una colección de pares (U, h) que cumple lo siguiente:

1. Cada (U, h) consiste de un abierto $U \subseteq W$ y un homeomorfismo h que lleva a U a un abierto de \mathbb{R}^n o de \mathbb{R}_+^n .
2. Los U en \mathfrak{S} cubren W .
3. Si (U_1, h_1) y (U_2, h_2) pertenecen a \mathfrak{S} , entonces: $h_1(h_2^{-1}) : h_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es suave. Si la intersección toca el borde, la función irá a \mathbb{R}_+^n .
4. Si se agrega un nuevo par (U, h) a \mathfrak{S} , entonces la propiedad 3 falla.

El borde de W , que denotaremos ∂W , es el conjunto de los puntos de W para los que no existe un entorno homeomorfo a \mathbb{R}^n (ver [Mun63]).

Definición 1.3

(W, V_0, V_1) es una tríada de variedades suaves si W es una variedad suave y compacta y $\partial W = V_0 \sqcup V_1$ con V_0 y V_1 simultáneamente abiertos y cerrados en ∂W .

Si (W, V_0, V_1) y (W', V'_0, V'_1) son dos tríadas suaves, y existe un difeomorfismo h entre V_1 y V'_0 , entonces $(W \cup_h W', V_0, V'_1)$ también es una tríada suave, identificando los puntos de V_1 con su imagen a través de h . El siguiente teorema, que será probado en el Capítulo 3, ilustrará cómo:

Teorema 1.1

Existe una estructura suave \mathfrak{S} en $W \cup_h W'$ tal que \mathfrak{S} es compatible con las estructuras suaves de W y W' . Es decir, los mapas de inclusión $i : W \rightarrow W \cup_h W'$ e $i' : W' \rightarrow W \cup_h W'$ son difeomorfismos sobre $Im(i)$ e $Im(i')$ respectivamente. \mathfrak{S} es única a menos de un difeomorfismo que deje fijos a V_0 , $h(V_1) = V'_0$ y V'_1 .

Definición 1.4

Dadas dos variedades suaves y cerradas M_0 y M_1 , un cobordismo de M_0 en M_1 es una quintupla (W, V_0, V_1, h_0, h_1) tal que (W, V_0, V_1) es una tríada suave y $h_i : V_i \rightarrow M_i$ es un difeomorfismo. Dos cobordismos (W, V_0, V_1, h_0, h_1) y $(W', V'_0, V'_1, h'_0, h'_1)$ son equivalentes si existe un difeomorfismo $\Phi : W \rightarrow W'$ tal que $\Phi(V_0) = V'_0$, $\Phi(V_1) = V'_1$ y el siguiente diagrama conmuta con $i = 0, 1$:

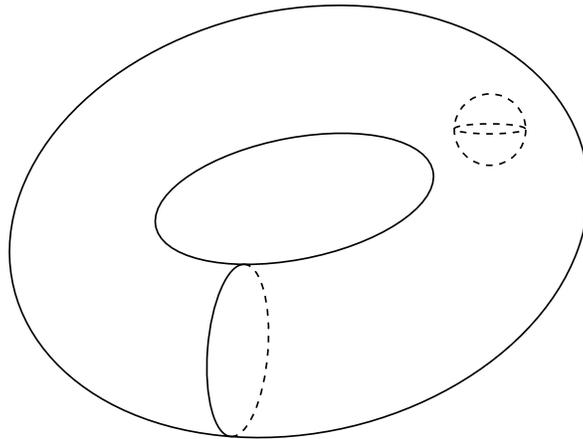
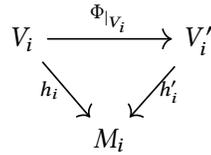


Figura 1: Un cobordismo entre \mathbb{S}^2 y \mathbb{T}^2 .

En el Capítulo 3 probaremos que los cobordismos satisfacen las siguientes condiciones:

1. Si existe un cobordismo c entre V_0 y V_1 y un cobordismo c' entre V_1 y V_2 , entonces está bien definido el cobordismo cc' entre V_0 y V_2 , y este producto es asociativo. Esto se deduce del **Teorema 1.1**.
2. Existe el cobordismo identidad i_M , definido como la clase de equivalencia de $(V \times [0, 1], V \times 0, V \times 1, p_0, p_1)$, donde $p_i(x, i) = x$ para $i = 0, 1$. Se cumple $i_{V_0}c = c = ci_{V_1}$.

Nótese que $cc' = i_{V_0}$ no implica que $c = i_{V_0}$, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

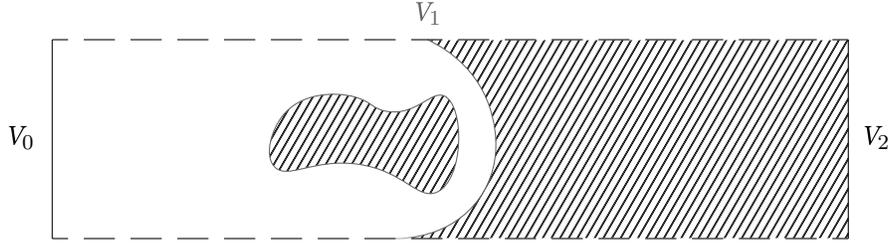


Figura 2: Un cobordismo producto (es decir, i_{V_0}) que surge como producto entre $V_0 \cong (0, 1)$ y $V_1 \cong (0, 1) \sqcup \mathbb{S}^1$ compuesto con un cobordismo entre V_1 y $V_2 \cong (0, 1)$.

Dado un difeomorfismo $h : V \rightarrow V'$, definimos c_h como el cobordismo $(V \times I, V \times 0, V \times 1, j, h_1)$ donde $j(x, 0) = x$ y $h_1(x, 1) = h(x)$.

Teorema 1.2

Sean $h : V_0 \rightarrow V_1$ y $h' : V_1 \rightarrow V_2$ difeomorfismos. Entonces $c_h c_{h'} = c_{h'h}$

Demostración. Sean $j_h : V_0 \times I \rightarrow (V_0 \times I \cup_h V_1 \times I)$ y $j_{h'} : V_1 \times I \rightarrow (V_0 \times I \cup_h V_1 \times I)$ las dos inclusiones que define $c_h c_{h'}$ (referirse al **Teorema 1.1**). Definimos $g : V_0 \times I \rightarrow (V_0 \times I \cup_h V_1 \times I)$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} j_h(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ j_{h'}(h(x), 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Para ver si g está bien definida, se observa que los únicos puntos potencialmente problemáticos son los de $V_0 \times 1/2$. Debido a que es mediante h que se identifica a $V_0 \times 1$ con $V_1 \times 0$ en $(V_0 \times I \cup_h V_1 \times I)$, estos puntos no generan problemas.

Probaremos que g es una equivalencia entre los cobordismos $(V_0 \times I, V_0 \times 0, V_0 \times 1, j, h'h_1)$ y $(V_0 \times I \cup_h V_1 \times I, V_0 \times 0, V_1 \times 1, j', h'_1)$ (es decir, entre $c_{h'h}$ y $c_h c_{h'}$).

Es claro que g es un difeomorfismo fuera de $t = \frac{1}{2}$. Es un difeomorfismo en $t = \frac{1}{2}$ por cómo definiremos \mathfrak{S} para la prueba del **Teorema 1.1**. A la vez:

$$g(V_0 \times 0) = j_h(V_0, 0) = V_0 \times 0$$

$$g(V_0 \times 1) = j_{h'}(h(V_0), 1) = j_{h'}(V_1, 1) = V_1 \times 1$$

Para confirmar que conmuta el diagrama de la definición de cobordismos equivalentes tenemos lo siguiente para todo x_0 en V_0 y x_1 en V_1 :

$$j'(g|_{(V_0 \times 0)}(x_0, 0)) = j'(x_0, 0) = x_0 = j(x_0, 0)$$

$$h'_1(g|_{(V_0 \times 1)}(x_0, 1)) = h'_1(h(x_0), 1) = h'(h(x_0))$$

Con esto concluimos que g es una equivalencia entre los dos cobordismos, y queda probado el teorema. \square

Definición 1.5

Dos difeomorfismos $h_0, h_1 : M \rightarrow M'$ son isotópicos si existe $f : M \times I \rightarrow M'$ suave tal que f_t , definida por $f_t(x) = f(x, t)$, es un difeomorfismo para todo t , $f_0 = h_0$, $f_1 = h_1$.

Lema 1.3

La isotopía es una relación de equivalencia.

Demostración. La reflexividad se obtiene tomando $f(x, t) = h_0(x)$ para todo t . Sea f una isotopía entre h_0 y h_1 . Entonces $f'(x, t) = f(x, 1-t)$ es una isotopía entre h_1 y h_0 , probando la simetría. Sean h_0, h_1 isotópicos y h_1, h_2 isotópicos. Sean f_0, f_1 isotopías para estos. Sea $m : I \rightarrow I$ suave, creciente y tal que $m(t) = 0$ si $t \leq \frac{1}{3}$ y $m(t) = 1$ si $t \geq \frac{2}{3}$. Definimos f de la siguiente manera:

$$\begin{cases} f_0(x, m(2t)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_1(x, m(2t-1)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

f cumple claramente todas las condiciones necesarias para ser una isotopía entre h_0 y h_2 . La única condición que no es inmediatamente evidente es la suavidad. Para esto es que introdujimos a m : para $t = \frac{1}{2}$, el único valor que podría presentar problemas, tenemos la suavidad gracias a que $f(x, t) = h_1(x)$ para todo t entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.

□

Lema 1.4

Si h y h' son isotópicos, entonces $c_h = c_{h'}$.

Demostración. Sea f una isotopía entre h y h' . Sea $g : V_0 \times I \rightarrow V_0 \times I$ definida por $g(x, t) = (h^{-1}(f(x, t)), t)$. Esta función es suave por ser composición de funciones suaves. Además:

$$g(V_0, 0) = (h^{-1}(h(V_0)), 0) = V_0 \times 0$$

$$g(V_0, 1) = (h^{-1}(h'(V_0)), 1) = (h^{-1}(V_0), 1) = V_0 \times 1$$

$$j(g(x, 0)) = j(h^{-1}(h(x)), 0) = j(x, 0) = (x, 0) = j'(x, 0)$$

$$h_1(g(x, 1)) = h_1(h^{-1}(h'(x)), 1) = h'(x) = h'_1(x, 1)$$

Por lo que se cumple el resto de la definición de equivalencia de cobordismos.

□

2. TEORÍA DE MORSE

Definición 2.1

Sean W^n una variedad suave y $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Decimos que $p \in W$ es un **punto crítico** si existen coordenadas x_1, \dots, x_n tales que $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$. Diremos que un punto crítico es no degenerado si $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0$.

Definición 2.2

Sean (W, V_0, V_1) una tríada suave y $f : W \rightarrow [a, b]$ una función suave. Decimos que f es una **función de Morse** si $f^{-1}(a) = V_0$, $f^{-1}(b) = V_1$ y todos sus puntos críticos son no degenerados y pertenecen a $W - \partial W$.

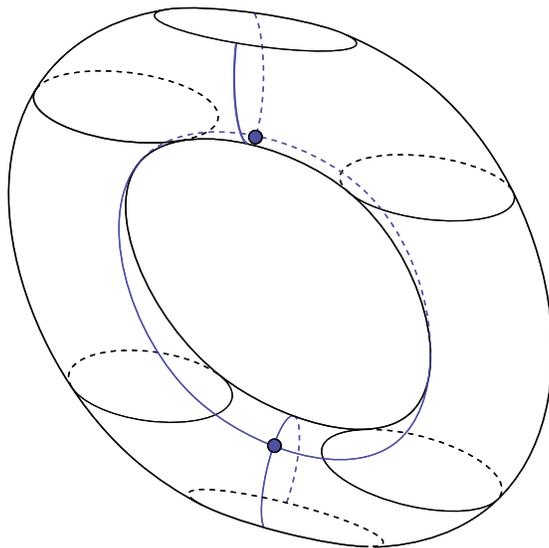


Figura 3: Una función de Morse definida en un cobordismo entre dos círculos. Los arcos azules marcan las trayectorias que nacen o mueren en los puntos críticos.

Definición 2.3

El **número de Morse** μ de una tríada suave (W, V_0, V_1) es el mínimo de puntos críticos que puede tener una función de Morse definida en ella. Es decir, el mínimo de puntos críticos de f tomado sobre todas las f simultáneamente.

A priori, el número de Morse podría ser infinito. Gracias a la compacidad de W (por definición de tríada suave) y al siguiente lema, podremos cerciorarnos de que este no es el caso.

Lema 2.1 (Ver [Mil63])

Si p es un punto no degenerado de f , entonces existen coordenadas x_1, \dots, x_n alrededor de p tales que

$$f(x) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$$

para algún $\lambda \in \{0, \dots, n\}$. A λ le llamaremos el **índice** de f .

Demostración. Consideremos coordenadas y_1, \dots, y_n tales que p corresponda al origen de \mathbb{R}^n . Sin perder generalidad, asumiremos que $f(0) = 0$

Primero buscaremos expresar a f en función de las coordenadas, tomando un entorno convexo de p para el primer paso:

$$\begin{aligned} f(y_1, \dots, y_n) &= f(0) + \int_0^1 \frac{\partial f(ty_1, \dots, ty_n)}{\partial t} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f}{\partial y_i}(ty_1, \dots, ty_n) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 y_i \frac{\partial f}{\partial y_i}(ty_1, \dots, ty_n) dt \end{aligned}$$

Para facilitar la notación, tomemos $g_i(y) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y_i}(ty_1, \dots, ty_n) dt$ (donde la dirección y magnitud de derivación de $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ no dependen de y , como se puede deducir de cómo calculamos las derivadas en las igualdades anteriores). Como p es crítico, $g_i(0) = 0$ para todo i . Entonces, aplicando el mismo razonamiento a cada g_i :

$$f(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(y_1, \dots, y_n) y_i y_j$$

Donde h_{ij} es una función suave para i y j cualesquiera. Cambiando los h_{ij} por $\frac{h_{ij}+h_{ji}}{2}$ podemos asumir que h_{ij} es igual a h_{ji} ya que el resultado de la sumatoria no se altera, ya que $y_i y_j = y_j y_i$, por lo que podemos sacar factor común. Además, $\det(h_{ij}(0)) = \det(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_i \partial y_j}(0)) \neq 0$, por lo que $(h_{ij}(0))$ es una matriz no singular.

Llegaremos por inducción a las coordenadas que buscamos para que f se exprese como en la conclusión del lema. Supongamos que tenemos unas coordenadas u_1, \dots, u_n tales que:

$$f(u_1, \dots, u_n) = \pm u_1 \pm \dots \pm u_{r-1} + \sum_{i,j \geq r}^n u_i u_j h_{ij}(u_1, \dots, u_n)$$

También asumamos que $(h_{ij}(0))$ es simétrica y no es singular. Entonces, tomando una combinación lineal en las últimas $n - r + 1$ coordenadas si es necesario, podemos asumir $h_{rr}(0) \neq 0$. Sea $g(u_1, \dots, u_n) = \sqrt{|h_{rr}|}$. Esta función será suave y distinta de 0 en cierto entorno de 0, posiblemente más chico que el de las coordenadas actuales. Consideremos ahora coordenadas v_1, \dots, v_n definidas de la siguiente manera:

$$v_i = u_i \text{ si } i \neq r$$

$$v_r(u_1, \dots, u_r) = g(u_1, \dots, u_r) \left(u_r + \sum_{i,j > r}^n u_i \frac{h_{ir}(u_1, \dots, u_n)}{h_{rr}(u_1, \dots, u_n)} \right)$$

Calculemos ahora el valor de v_r^2 , expandiendo como cuadrado de binomio y desarrollando:

$$v_r^2 = g^2 u_r^2 + 2g^2 \left(\sum_{i,j > r}^n u_i u_r \frac{h_{ir}}{h_{rr}} \right) + g^2 \left(\sum_{i,j > r}^n u_i u_j \frac{h_{ir} h_{jr}}{h_{rr}^2} \right)$$

Ahora reescribamos f de la siguiente manera, separando la sumatoria de manera conveniente:

$$f = \pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{r-1}^2 + u_r^2 h_{rr} + \left(\sum_{i \geq r}^n u_i u_r h_{ir} \right) + \left(\sum_{j \geq r}^n u_r u_j h_{rj} \right) + \left(\sum_{i,j > r}^n u_i u_j h_{ij} \right)$$

Entonces, como $g^2 = \pm h_{rr}$, combinando las dos igualdades anteriores, si escribimos f según las coordenadas v_1, \dots, v_n obtenemos:

$$f(v_1, \dots, v_n) = \pm v_1^2 \pm \dots \pm v_r^2 + \left(\sum_{i,j > r}^n v_i v_j \left[h_{ij} - \frac{h_{ir} h_{jr}}{h_{rr}} \right] (\Phi(v_1, \dots, v_n)) \right)$$

Donde Φ es el cambio de coordenadas de v_1, \dots, v_n a u_1, \dots, u_n . Como el cambio de coordenadas de u_1, \dots, u_n a v_1, \dots, v_n fue elegido de manera que no fuera singular en p (por eso tomamos g positiva en 0), aplicando el teorema de la función inversa y reeligiendo una vez más el entorno de p , tenemos que la matriz de las funciones que multiplican a $v_i v_j$ cumple

ser no degenerada. Además, ya es simétrica, por lo que se cumple la hipótesis de inducción. Esto completa la inducción.

Finalmente, el índice λ está bien definido porque, de otra manera, tendríamos dos descomposiciones de $(\frac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j})$ en subespacios con valores propios -2 y 2 tales que la dimensión no coincide. \square

Corolario 2.1.1

Una función de Morse definida sobre una variedad M compacta tiene solamente finitos puntos críticos.

Demostración. Aplicando el lema de Morse para cada punto crítico, podemos cubrir M con entornos tales que en ninguno haya más de un punto crítico. Por compacidad, este cubrimiento tiene un subcubrimiento finito, lo cual implica que hay finitos puntos críticos. \square

Ahora que ya probamos que el número de Morse debe ser finito para toda tríada suave, nos resta probar que el número de Morse existe; podría pasar que exista una tríada suave para la cual no exista ninguna función de Morse. Por lo tanto, ahora nos enfocaremos en probar que toda tríada suave admite una función de Morse.

Primero probaremos que existe una función suave cuyos puntos críticos están “lejos” del borde:

Lema 2.2

Existe $f : W \rightarrow [0, 1]$ suave tal que $f^{-1}(0) = V_0$, $f^{-1}(1) = V_1$ y existe un entorno U de ∂W tal que los puntos críticos de f están todos en $W - U$.

Demostración. Cubramos W con abiertos U_1, \dots, U_n , tales que ningún U_i intersekte tanto a V_0 como a V_1 . Podemos asumir que las cartas h_i mandan a los U_i que intersektan a ∂W a la bola unidad en \mathbb{R}_+^n . Sea $L : \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección de la coordenada x_n a \mathbb{R} .

Definamos $f_i : U_i \rightarrow [0, 1]$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \frac{1}{2} \text{ si } U_i \text{ no intersecta a } \partial W \\ f_i(x) &= L(h_i(x)) \text{ si } U_i \text{ intersecta a } V_0 \\ f_i(x) &= 1 - L(h_i(x)) \text{ si } U_i \text{ intersecta a } V_1 \end{aligned}$$

Tomemos una partición de unidad $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ subordinada a $\{U_1, \dots, U_n\}$ (ver [Mun63]) y definamos $f : W \rightarrow [0, 1]$ de la siguiente manera:

$$f = \varphi_1 f_1 + \dots + \varphi_n f_n$$

Cabe aclarar que se extiende a toda f_i para que valga 0 fuera de U_i . Como los productos y las sumas de funciones suaves son suaves, f es suave. Es claro por la definición de las f_i que $f^{-1}(0) = V_0$ y $f^{-1}(1) = V_1$. Por lo tanto, solo resta probar que no hay puntos críticos en ∂W .

Tomemos $q_0 \in V_0$ ($q_1 \in V_1$ respectivamente). Entonces, existe φ_i tal que $\varphi_i(q_0) > 0$ y $q_0 \in U_i$ (φ_j y U_j respectivamente para q_1). Sea $h_i(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$. Es decir, tomemos las coordenadas determinadas por h_i (respectivamente h_j). Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x^n} = \sum_{m=1}^k f_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} + \sum_{m=1}^k \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \varphi_m$$

$f_m(q_i)$ es constante (es igual a 0 para q_0 y a 1 para q_1) para todo m , y además tenemos que:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{j=1}^k \varphi_j = 0$$

Donde la última igualdad se da porque $\sum_{j=1}^k \varphi_j = 1$ por definición de partición de unidad.

A la vez, $\frac{\partial f_i(q_0)}{\partial x_n} = 1$ (respectivamente $\frac{\partial f_j(q_1)}{\partial x_n} = -1$). Cualquier otra f_m alcanza un mínimo (respectivamente máximo) en q_0 (respectivamente q_1), por lo que tenemos $\frac{\partial f_m(q_0)}{\partial x_n} \geq 0$ (respectivamente $\frac{\partial f_m(q_1)}{\partial x_n} \leq 0$) para todo m .

Juntando todo:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x^n} \right| &= \left| \sum_{m=1}^k f_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} + \sum_{m=1}^k \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \varphi_m \right| \\ &= \left| \sum_{m=1}^k \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \varphi_m \right| \\ &\geq \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right| |\varphi_i| \\ &> 0 \end{aligned}$$

El mismo razonamiento con f_j para la igualdad final aplica para q_1 . Por lo tanto, $df \neq 0$ en todo ∂W , y por lo tanto también en un entorno de ∂W . \square

Ahora resta probar que existe una f que cumple estas condiciones y además no tiene puntos críticos degenerados.

Lema 2.3

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con U abierto, es C^2 , entonces el conjunto de los mapas lineales $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f + L$ tiene puntos críticos degenerados tiene medida 0, con la medida que tiene $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ al ser isomorfo a \mathbb{R}^n .

Demostración. Consideremos la variedad $U \times \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Esta tiene una subvariedad $M = \{(x, L) : d(f(x) + L(x)) = 0\}$. M es una subvariedad porque $x \mapsto (x, -df(x))$ es un difeomorfismo de U a M , ya que $d(f(x) + L(x)) = 0$ si y solo si $df(x) = -L(x)$. La diferenciabilidad (y la de la inversa) se deducen de que df , al ser lineal, es diferenciable.

Cada $(x, L) \in M$ corresponde a un punto crítico de $f + L$. Este punto crítico es degenerado si y solo si $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ es singular, ya que el sumar una función lineal no afecta a las segundas derivadas.

Tomemos la proyección $\pi : M \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definida por $(x, L) \mapsto L$. Por lo ya dicho, este mapa en realidad es simplemente $(x, L) \mapsto -df(x)$. Por lo tanto, $x \in M$ es punto crítico de π si y solo si la matriz $\left(-\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ es singular.

Con los dos párrafos anteriores hemos establecido que $f + L$ tiene un punto crítico degenerado si y solo si L es la imagen de un punto crítico de π . Como π es suave, podemos aplicar el teorema de Sard (ver [Lee02]), por lo que tenemos que el conjunto de los puntos críticos de π tiene medida 0. □

Lema 2.4

Sea K un subconjunto compacto de U abierto. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^2 y tal que en K no tiene puntos críticos degenerados, entonces existe δ tal que si $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ cumple:

$$1. \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| < \delta$$

$$2. \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \delta$$

Para todo $i, j = 1, \dots, n$. Entonces, g tampoco tiene puntos críticos degenerados en K .

Demostración. Sea $|df| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2}$. Entonces $|df| + |\det(\frac{\partial f}{\partial x_i x_j})|$ es estrictamente positiva en K por la ausencia de puntos críticos degenerados. Al ser K compacto, podemos elegir un mínimo μ .

Elijamos δ suficientemente chico como para que si se cumplen las dos desigualdades de la hipótesis entonces también se cumpla:

$$\| |df| - |dg| \| < \frac{\mu}{2}$$

$$\left\| \left| \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_i x_j} \right) \right| - \left| \det \left(\frac{\partial g}{\partial x_i x_j} \right) \right| \right\| < \frac{\mu}{2}$$

Entonces $|dg| + |\det(\frac{\partial g}{\partial x_i x_j})| > |df| + |\det(\frac{\partial f}{\partial x_i x_j})| - \mu \geq 0$ en todos los puntos de K , por lo que g tampoco tiene ningún punto degenerado en K . \square

Lema 2.5

Sea $h : U \rightarrow U'$ un difeomorfismo de un abierto de \mathbb{R}^n a otro que lleva un compacto K en K' . Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe δ tal que si $f : U' \rightarrow \mathbb{R}$ cumple en K' :

1. $|f| < \delta$

2. $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| < \delta$

3. $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i x_j} \right| < \delta$

Para todo $i, j = 1, \dots, n$. Entonces $f \circ h$ cumple en K :

1'. $|f \circ h| < \varepsilon$

2'. $\left| \frac{\partial f \circ h}{\partial x_i} \right| < \varepsilon$

3'. $\left| \frac{\partial f \circ h}{\partial x_i x_j} \right| < \varepsilon$

Para todo $i, j = 1, \dots, n$.

Demostración. $|f \circ h|$, $\left| \frac{\partial f \circ h}{\partial x_i} \right|$ y $\left| \frac{\partial f \circ h}{\partial x_i x_j} \right|$ son polinomios de las derivadas parciales de f y h de grados 0, 1 y 2 que se anulan cuando f es 0. Por lo tanto, si f y sus derivadas de orden 1 y 2 tienden a 0 y las derivadas de h están acotadas, tendremos el resultado buscado. Lo primero

lo obtenemos por hipótesis. Lo segundo se obtiene porque consideramos las derivadas de h solo dentro de un compacto, por lo que están acotadas. \square

Sean $F(M, \mathbb{R})$ las funciones suaves que van de una M compacta con borde a \mathbb{R} . Sea $\{U_\alpha\}$ un conjunto finito de coordenadas que cubre M (existe por compacidad), con mapas $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, y sea $\{C_\alpha\}$ un refinamiento compacto (es decir, C_α es compacto para todo α , $C_\alpha \subseteq U_\alpha$ y la unión de los C_α cubre todo M). Para cada $\delta > 0$, definimos $N(\delta) \subseteq F(M, \mathbb{R})$, que consiste de las g tales que, para todo α :

$$1. \quad |g_\alpha| < \delta$$

$$2. \quad \left| \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i} \right| < \delta$$

$$3. \quad \left| \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \delta$$

En todos los puntos de $h_\alpha(C_\alpha)$, donde $g_\alpha = g \circ h_\alpha^{-1}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$. Si tomamos los conjuntos $N(\delta)$ como entornos de 0 en el espacio vectorial topológico $F(M, \mathbb{R})$, entonces tenemos definida la topología C^2 .

Los conjuntos de la forma $f + N(\delta)$ forman una base local de f , para cualquier f . Las g en este conjunto cumplen:

$$1. \quad |f_\alpha - g_\alpha| < \delta$$

$$2. \quad \left| \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i} \right| < \delta$$

$$3. \quad \left| \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \delta$$

En todos los puntos de $h(C_\alpha)$ y para todo $i, j = 1, \dots, n$.

Se T' una topología C^2 definida de forma análoga pero con otro cubrimiento. Para que nuestra definición sea relevante, queremos $T = T'$. Aplicando el **Lema 2.5** con los cambios de coordenadas entre los dos cubrimientos, conseguimos encajar $N(\delta)$ en $N'(\delta)$ y viceversa. Por lo tanto, $T = T'$.

Decimos que una variedad es cerrada si es compacta y su borde es vacío. Probaremos ahora que en este contexto las funciones de Morse son genéricas desde el punto de vista de la topología C^2 .

Teorema 2.6

Si M es una variedad cerrada, entonces las funciones de Morse son abiertas y densas en $F(M, \mathbb{R})$ con la topología C^2 .

Demostración. Sea $\{(U_i, h_i)\}$ un cubrimiento finito de M por entornos coordenados. Tomemos $\{C_i\}$ tales que $C_i \subseteq U_i$ para todo i y los C_i son compactos y cubren todo M (es decir, un refinamiento compacto).

Diremos que f es “buena” en $S \subseteq M$ si no tiene puntos degenerados en S .

Primero probaremos que las funciones de Morse son abiertas. Usando el **Lema 2.4** tenemos que existe δ_i tal que todas las funciones en $f + N(\delta_i)$ son buenas en C_i . Tomando $N = \bigcap_{1 \leq i \leq n} N(\delta_i)$ tenemos un entorno de funciones de Morse.

Ahora probaremos que las funciones de Morse son densas. Sea N un entorno de f . Definimos $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lambda = 1$ en un entorno de C_1 y $\lambda = 0$ en un entorno de $M - U_1$. Para $L \in \text{Hom}(M, \mathbb{R})$ definimos $f_1(p) = f(p) + \lambda(p)L(h_1(p))$.

f_1 y f coinciden por completo, excepto en un compacto contenido en U_1 . Para que f_1 pertenezca a N , alcanzará con lo siguiente (tomamos $L(x) = L(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \ell_k x_k$):

$$1. \quad |\lambda(h_1^{-1}(x)) \sum_{k=1}^n \ell_k x_k| < \delta$$

$$2. \quad \left| \frac{\partial(\lambda(h_1^{-1}(x)) \sum_{k=1}^n \ell_k x_k)}{\partial x_i} \right| < \delta$$

$$3. \quad \left| \frac{\partial(\lambda(h_1^{-1}(x)) \sum_{k=1}^n \ell_k x_k)}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \delta$$

Donde tomamos δ tal que $N(\delta) \subseteq N$. Al estar en un compacto, las derivadas de $\lambda(h_1^{-1}(x))$ están acotadas. Las derivadas de $\sum_{k=1}^n \ell_k x_k$ pueden ser tan chicas como queramos. Por lo tanto, usando un razonamiento análogo al de la prueba del **Lema 2.5**, tenemos que podemos elegir ℓ_k de tal forma que $f_1 \in N(\delta) \subseteq N$ y f_1 no tenga puntos degenerados en C_1 (por el **Lema 2.3**).

Por el **Lema 2.4** podemos encontrar $N(\delta_1)$ tal que $f_1 + N(\delta_1) \subseteq N$ no contiene ninguna función con puntos degenerados en C_1 . Aplicando el razonamiento a $f + N(\delta_1)$, podemos encontrar una función f_2 que no tenga puntos degenerados ni en C_1 ni en C_2 y un entorno $f_2 + N(\delta_2)$ tal que todas las funciones en él también cumplan esto. Aplicando este razonamiento sucesivamente, como los C_i cubren toda M , llegamos a la función f deseada. \square

Con esto finalmente nos encontramos en condiciones de probar lo siguiente:

Teorema 2.7

Toda tríada suave (W, V_0, V_1) admite una función de Morse.

Demostración. Por el **Lema 2.2**, tenemos una función $f : W \rightarrow [0, 1]$ suave que cumple $f^{-1}(0) = V_0$, $f^{-1}(1) = V_1$ y tal que existe un entorno U de ∂W tal que los puntos críticos de f están todos en $W - U$.

Como W es normal, tenemos que existe V abierto tal que $\overline{V} \subseteq U$. Tomemos un cubrimiento $\{U_i\}$ finito tal que todo U_i pertenezcan o bien a U o a $W - V$. Tomemos un refinamiento compacto C_i y llamémosle C_0 a la unión de todos los C_i contenidos en U .

Aplicando a C_0 un razonamiento análogo al del teorema anterior, podemos encontrar un entorno N tal que $f + N$ no contiene ninguna función con puntos degenerados en C_0 . Además, existen a, b tales que $0 < a < f(p) < b < 1$ para todo p en el compacto $W - V$. Tomemos entonces un entorno N' de f tal que ninguna función en N' tome los valores 0 ni 1 en $W - V$. Sea $N_0 = N \cap N'$.

Sin perder generalidad, supongamos que U_1, \dots, U_k cubren $W - V$. Arrancando con f y procediendo como en el teorema anterior, llegamos a una función f_k sin puntos degenerados en M que cumple $f_k|_V = f|_V$. Por lo tanto, f_k es una función de Morse en (W, V_0, V_1) . \square

Lema 2.8

Sea f una función de Morse sobre (W, V_0, V_1) con puntos críticos p_1, \dots, p_k . Entonces f puede ser aproximada por g una función de Morse con los mismos puntos críticos y tal que $g(p_i) \neq g(p_j)$ si $i \neq j$.

Demostración. Tomemos dos entornos U_1, U'_1 de p_1 tales que $U_1 \subseteq U'_1$, $\overline{U'_1} \subseteq W - \partial W$ y ningún p_i diferente a p_1 pertenece a U'_1 .

Definamos $\lambda : W \rightarrow [0, 1]$ de manera que sea suave y valga 1 en U_1 y 0 fuera de U'_1 . Tomemos $\varepsilon_1 > 0$ tal que $f_0 := f + \varepsilon_1 \lambda \in [0, 1]$ y $f_0(p_1) \neq f_0(p_i)$ si $i \neq 1$. Démosle una métrica Riemanniana a W (ver [Mun63]) y elijamos c, c' de tal manera que $0 \leq c \leq \|\nabla f\|$ y $\|\nabla \lambda\| \leq c'$.

Sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \frac{c}{c'}\}$. Entonces, $f_1 = f + \varepsilon \lambda$ cumple $f_1(p_1) \neq f_1(p_i)$ si $i \neq 1$ y también cumple ser de Morse con los mismos puntos críticos. Lo primero lo tenemos por cómo

definimos ε_1 , mientras que lo segundo se debe a que en $K = \overline{\{x \in W : 0 < \lambda(x) < 1\}}$:

$$\begin{aligned} \|\nabla f + \varepsilon\lambda\| &\geq \|\nabla f\| - \varepsilon\|\nabla\lambda\| \\ &\geq c - \varepsilon c' \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Como en $W - U'_1$ tenemos $f = f_1$, y en U_1 tenemos que f_1 es igual a f sumada a una constante, tenemos lo que buscábamos. Aplicando esta construcción sucesivamente para los de más p_i , obtenemos la función deseada. \square

Gracias a las funciones de Morse podemos, en cierto sentido, cumplir el objetivo del capítulo expresando a todos los cobordismos como productos de cobordismos más simples, como detallamos a continuación.

Definición 2.4

Un valor crítico de $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ suave es la imagen de un punto crítico.

Lema 2.9

Sean $f : (W, V_0, V_1) \rightarrow [0, 1]$ y c tal que $0 < c < 1$ y c no es un valor crítico de f . Entonces $f^{-1}([0, c])$ y $f^{-1}([c, 1])$ son variedades suaves con borde.

Demostración. Dado que W ya es una variedad suave, el único lugar donde podría surgir un problema para que $f^{-1}([0, c])$ y $f^{-1}([c, 1])$ sean variedades suaves es en $f^{-1}(c)$. Sin embargo, por el teorema de la función implícita, si $w \in f^{-1}(c)$, entonces existen coordenadas x_1, \dots, x_n en un entorno de w tales que f se ve localmente como la proyección sobre x_n . Como c no es un valor crítico, entonces la preimagen de w será una variedad. \square

Con esto podemos decir que el cobordismo (W, V_0, V_1, Id, Id) se puede expresar como el producto de un cobordismo de V_0 a $f^{-1}(c)$ y un cobordismo de $f^{-1}(c)$ a V_1 . Teniendo en mente el **Lema 2.8**, introducimos la siguiente definición, que será muy important en el capítulo siguiente:

Definición 2.5

Un **cobordismo elemental** es una tríada (W, V, V') que posee una función de Morse con un único punto crítico.

Podemos entonces concluir lo siguiente:

Corolario 2.9.1

Todo cobordismo se puede expresar como producto de cobordismos elementales.

3. COBORDISMOS ELEMENTALES

En la siguiente definición tomamos $|x|^2 = \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2$ y, análogamente, $|y|^2 = \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2$.

Definición 3.1

Sea f una función de Morse en una tríada (W, V_0, V_1) . Un **campo de tipo gradiente** de f es un campo ξ que cumple lo siguiente:

1. $\langle \xi(p), \nabla_p f \rangle > 0$ si p no es un punto crítico.
2. Dado un punto crítico p de f , existe un entorno U de p que admite coordenadas $(x_1, \dots, x_{\lambda}, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$ tales que se cumplen $f = f(p) - |x|^2 + |y|^2$ y $\xi = (-x_1, \dots, -x_{\lambda}, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$

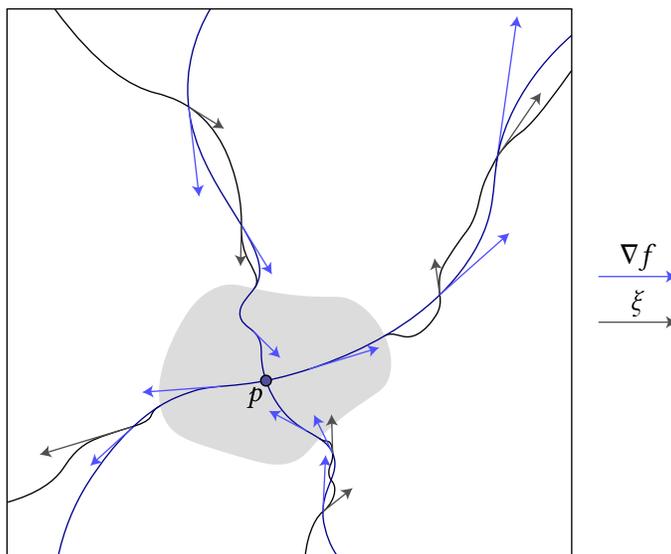


Figura 4: Un ejemplo de un campo de tipo gradiente ξ para f . p es un punto crítico de f .

La motivación para definir los campos de tipo gradiente es que estos podrán reemplazar ∇f en todos los razonamientos que nos serán relevantes, a pesar de ser estrictamente más flexibles. Específicamente, la ventaja que tienen los campos de tipo gradiente es que, fijada f , hay muchos campos de tipo gradiente (en contraste con el caso del gradiente, que es único), lo cual nos permitirá manipularlos para que cumplan ciertas propiedades.

Citamos sin prueba el siguiente teorema:

Teorema 3.1 (Teorema del flujo tubular)

Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad suave de dimensión m , $X \in \mathcal{X}^r(M) = \{F : M \rightarrow \mathbb{R}^n : F(x) \in T_x M, \forall x \in M \text{ y } F \text{ es una función } C^r\}$, y $p \in M$ un punto regular de X . Sea $C = \{(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m; |x^i| < 1\}$ y sea X_C el campo vectorial en C definido por $X_C(x) = (1, 0, \dots, 0)$. Entonces existe un difeomorfismo C^r , $h : V_p \rightarrow C$, para algún entorno V_p de p en M , el cual lleva trayectorias de X a trayectorias de X_C .

Lema 3.2

Para toda función de Morse f definida en una tríada (W, V_0, V_1) existe un campo de tipo gradiente ξ .

Demostración. Sean p_1, \dots, p_k los puntos críticos de f . Por el lema de Morse, existen alrededor de cada p_i coordenadas $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1^i, \dots, x_\lambda^i, x_{\lambda+1}^i, \dots, x_n^i)$ en un abierto U_i tales que $f = f(p) - |x|^2 + |y|^2$. Sea V_i un entorno de p tal que $\bar{V}_i \subseteq U_i$, y sean $U_0 = \bigcup_{i=1}^k U_i$ y $V_0 = \bigcup_{i=1}^k V_i$, donde k es el número de puntos críticos de f .

Ningún $p' \in W - U_0$ es un punto crítico. Por lo tanto, podemos elegir coordenadas x'_1, \dots, x'_n en un abierto U' tales que $f(x'_1, \dots, x'_n) = f(p') + x'_1$. Esto lo hacemos aplicando el teorema del flujo tubular a ∇f en un entorno suficientemente chico de p' y tomando como coordenadas las del campo X_C .

Como $W - U_0$ es compacto, podemos encontrar entornos U'_1, \dots, U'_m tales que:

1. $W - U_0 \subseteq U'_1 \cup \dots \cup U'_m$
2. $V_0 \cap U'_i = \emptyset$ para todo i
3. U'_i tiene coordenadas $x_1^{i'}, \dots, x_n^{i'}$ tales que $f(x_1^{i'}, \dots, x_n^{i'}) = c + x_1^{i'}$ en U'_i

En cada $U_i \subseteq U_0$ tenemos un campo vectorial $(-x_1^i, \dots, -x_\lambda^i, x_{\lambda+1}^i, \dots, x_n^i)$, y en cada U'_i tenemos el campo vectorial $\frac{\partial}{\partial x_1^{i'}} = (1, 0, \dots, 0)$. Combinando estos campos mediante una partición de unidad, llegamos al campo vectorial ξ deseado. Este cumple la segunda condición de la definición de campo de tipo gradiente gracias a que $V_0 \cap U'_i = \emptyset$. La primera se cumple gracias a que el producto interno es lineal en la primera variable y que los campos vectoriales que usamos para crear ξ todos cumplen la condición por construcción. \square

De ahora en más identificamos la tríada (W, V_0, V_1) con el cobordismo (W, V_0, V_1, i_0, i_1) , donde $i_0 : V_0 \rightarrow V_0$ e $i_1 : V_1 \rightarrow V_1$ son las funciones identidad.

Definición 3.2

Una tríada es un cobordismo producto si es difeomorfa a $(V_0 \times [0, 1], V_0 \times \{0\}, V_0 \times \{1\})$

Teorema 3.3

Si (W, V_0, V_1) tiene número de Morse 0, entonces es un cobordismo producto.

Demostración. Sea f una función de Morse en (W, V_0, V_1) que carece de puntos críticos. Por el **Lema 3.2**, podemos tomar un campo de tipo gradiente ξ para f . Este campo nunca será nulo, gracias a la ausencia de puntos críticos (de otra manera no cumpliría la primera condición de la definición). Dividiendo $\xi(p)$ entre $\langle \xi(p), \nabla_p f \rangle$ obtenemos ξ' tal que $\langle \xi'(p), \nabla_p f \rangle = 1$ para todo p .

Si p pertenece a ∂W , tomando coordenadas x_1, \dots, x_n podemos extender a f (vista en \mathbb{R}^n a través de una carta y aplicando la **Definición 1.1**) a una función g definida en un abierto de \mathbb{R}^n . De esta manera extendemos a ξ' expresado en estas mismas coordenadas. Con esto nos encontramos en condiciones para aplicar el teorema de existencia para ecuaciones diferenciales ordinarias localmente en todo W (ver [Lan64]).

Sea $\varphi : [0, 1] \rightarrow W$ una curva integral de ξ' . Luego tenemos $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial t} = \langle \xi'(\varphi), \nabla_{\varphi} f \rangle = 1$ idénticamente. Por lo tanto, $(f \circ \varphi)(t) = t + c$, con $c \in \mathbb{R}$. Haciendo un cambio de variable, $\psi(s) = \varphi(t - c)$, obtenemos una curva integral que satisface $f(\psi(s)) = s$.

Cada curva integral puede ser extendida de forma única a un intervalo maximal, que debe ser $[0, 1]$ porque W es compacta. De otra manera, tendríamos un punto de acumulación donde f tendería a infinito, lo cual es absurdo. El intervalo es $[0, 1]$ porque $f(\psi(s)) = s$, y el intervalo maximal solo puede detenerse en los bordes porque ξ' no se anula en ningún punto. Por lo tanto, para cada $y \in W$ existe $\psi_y : [0, 1] \rightarrow W$ tal que $f(\psi_y(s)) = s$ y ψ_y pasa por y . Tenemos que $\psi_y(s)$ es diferenciable en y por la diferenciabilidad con respecto a las condiciones iniciales y en s por la diferenciabilidad de la solución en sí. En ambos casos podemos concluir esto gracias a la diferenciabilidad de ξ' ; esta, a su vez, se debe a que ξ' lo construimos combinando finitos campos diferenciables linealmente.

El difeomorfismo que buscamos entonces está dado por $h : V_0 \times [0, 1] \rightarrow W$ tal que $h(v, t) = \psi_v(t)$, con h^{-1} dada por $h^{-1}(y) = (\psi_y(0), f(y))$. La suavidad de h se deduce de

la suavidad de ψ en ambas variables y la suavidad de h^{-1} se deduce de la misma suavidad junto con la suavidad de f . \square

Corolario 3.3.1

Sea W una variedad compacta sin borde. Existe un entorno de ∂W (llamado **entorno collar**) difeomorfo a $\partial W \times [0, 1]$.

Demostración. Por el **Lema 2.2** existe f tal que todos los puntos críticos están fuera de un entorno de ∂W . Por lo tanto, restringiendo f y aplicando el teorema, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f^{-1}([0, \varepsilon])$ es difeomorfo a $\partial W \times [0, 1]$, de lo que se deduce rápidamente el corolario. \square

Definición 3.3

Una subvariedad conexa y cerrada $M^{n-1} \subseteq W^n - \partial(W^n)$ se dice **bilateral** cuando existe un entorno U de M en W tal que $U - M$ tiene dos componentes conexas.

Corolario 3.3.2

Sea M una subvariedad de W tal que todas sus componentes son bilaterales. Entonces existe un entorno de M (llamado **entorno bicollar**) difeomorfo a $M \times (-1, 1)$ tal que $M \times 0$ corresponde a M .

Demostración. Como cada componente de M puede ser cubierta por abiertos disjuntos, podemos considerar el caso en el que M tiene una sola componente conexa.

Sea U un entorno de M contenido en un entorno que se separa en dos componentes conexas al remover M . Entonces podemos ver a U como dos subvariedades U_1 y U_2 tales que $U = U_1 \cup U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \partial U_1 = \partial U_2 = M$.

Procediendo como en el **Lema 2.2**, construimos una función suave $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que φ no tiene puntos críticos en M , $\varphi < 0$ en $\bar{U} - U_1$, $\varphi = 0$ en M y $\varphi > 0$ en $\bar{U} - U_2$. La única diferencia sustancial en el método está en la definición de las f_i tales que U_i intersecta a M (notar que estos U_i no guardan relación alguna con los U_1 y U_2 de esta prueba). En ese caso, definimos las coordenadas x_1, \dots, x_n de forma que todo $x \in h_i(U_i \cap M)$ tiene coordenada n -ésima igual a 0, lo cual puede requerir haber tomado un U_i de la forma correcta. Específicamente, vamos a querer uno que surja como unión de dos entornos coordinados, uno en U_1 y otro en U_2 . Una vez tenemos las coordenadas deseadas, definimos

$L(x) = x_n$ y procedemos de la misma manera que en el resto del lema. Teniendo a φ , podemos elegir un abierto V de M tal que $\overline{V} \subseteq U$ tal que φ no tiene puntos críticos en V .

Sean $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ tales que -2ε es el ínfimo en $\overline{U_2} - V$ y $2\varepsilon'$ es el supremo en $\overline{U_1} - V$. Entonces, $\varphi^{-1}([- \varepsilon, \varepsilon'])$ es una subvariedad compacta de V de dimensión n con borde $\varphi^{-1}(-\varepsilon) \cap \varphi^{-1}(\varepsilon')$, y φ es una función de Morse en ella. Aplicando el teorema, obtenemos el resultado. \square

Volvemos a un teorema de la sección 1, que nos permite pegar dos tríadas con bordes difeomorfos.

Teorema 3.4

Sean (W, V_0, V_1) y (W', V'_1, V'_2) dos tríadas suaves y $h : V_1 \rightarrow V'_1$ un difeomorfismo. Entonces existe una estructura suave \mathfrak{S} en $W \cup_h W'$ tal que \mathfrak{S} es compatible con las estructuras suaves de W y W' . Es decir, los mapas de inclusión $i : W \rightarrow W \cup_h W'$ e $i' : W' \rightarrow W \cup_h W'$ son difeomorfismos sobre $Im(i)$ e $Im(i')$ respectivamente. \mathfrak{S} es única a menos de un difeomorfismo que deje fijos a $V_0, h(V_1) = V'_1$ y V'_2 .

Demostración. Primero probaremos la existencia de \mathfrak{S} . Por el **Corolario 3.3.1**, tenemos que existen U_1, U'_1 entornos collar de V_1 y V'_1 y difeomorfismos $g_1 : V_1 \times (0, 1] \rightarrow U_1$, $g_2 : V'_1 \times [1, 2) \rightarrow U'_1$ tales que $g_1(x, 1) = x$ y $g_2(x', 1) = x'$.

Definamos $g : V_1 \times (0, 2) \rightarrow W \cup_h W'$ de la siguiente manera:

$$g(x, t) = \begin{cases} i(g_1(x, t)) & \text{si } t \in (0, 1] \\ i'(g_2(h(x), t)) & \text{si } t \in [1, 2) \end{cases}$$

Para definir \mathfrak{S} alcanza con definir estructuras diferenciables compatibles en abiertos que cubran a $W \cup_h W'$. Tenemos que $j(W - V_1)$, $j'(W' - V'_1)$ y $g(V_1 \times (0, 2))$ son abiertos que cubren a $W \cup_h W'$, y las estructuras que definen son compatibles por construcción de g .

Ahora probaremos la unicidad. Sea \mathfrak{S} una estructura diferenciable para $W \cup_h W'$. Por el **Corolario 3.3.2** existen un entorno bicollar U de V_1 en $W \cup_h W'$ y un difeomorfismo $g : V_1 \times (-1, 1) \rightarrow U$ con respecto a \mathfrak{S} tales que $g(x, 0) = i(x)$. $j^{-1}(U \cap j(W))$ y $j'^{-1}(U \cap j'(W))$ son entornos collar de V_1 y V'_1 en W y W' . Con esto tenemos que \mathfrak{S} surge como pegado

de dos entornos collar de la misma manera que probamos la existencia. Usando [Mun63, pág. 63] obtenemos el resultado. \square

Supongamos ahora que tenemos tríadas (W, V_0, V_1) y (W', V'_1, V'_2) con funciones de Morse f y f' que van a $[0, 1]$ y $[1, 2]$ respectivamente. Construyamos campos de tipo gradiente ξ, ξ' en W, W' respectivamente, normalizados de manera que $\langle \xi, \nabla f \rangle = 1, \langle \xi', \nabla f' \rangle = 1$ excepto en un entorno pequeño de cada punto crítico.

Lema 3.5

Dado un difeomorfismo $h : V_1 \rightarrow V'_1$, existe una única estructura diferencial \mathfrak{S} en $W \cup_h W'$ que hace compatibles a f con f' y a ξ con ξ' (preservando diferenciabilidad en ambos casos) y manteniendo las estructuras diferenciales de W y W' .

Demostración. La prueba es análoga a la del teorema anterior, con la salvedad de que la estructura diferencial correspondiente a $g(V_1 \times (0, 2))$ la elegimos de manera que las curvas integrales que surgen como concatenación de las curvas integrales de ξ y ξ' sean suaves, lo cual se puede hacer con un homeomorfismo a un entorno producto de 0 en \mathbb{R}^n , donde n es la dimensión de W . Esta condición es necesaria, ya que de lo contrario el campo resultante de combinar ξ y ξ' sería suave sin que sus soluciones sean suaves. Como esto define la estructura diferencial por completo (antes teníamos libertad solamente a la hora de elegir la estructura diferencial sobre $g(V_1 \times (0, 2))$), se deduce la unicidad. \square

Corolario 3.5.1

$$\mu(W \cup_h W', V_0, V'_2) \leq \mu(W, V_0, V_1) + \mu(W', V'_1, V'_2)$$

Sean (W, V, V') una tríada y $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse en ella. Consideremos c un valor crítico con un único punto crítico. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < c < b$ y no hay valores críticos distintos de c en $[a, b]$. Tomemos $V_L = f^{-1}(a)$ y $V_R = f^{-1}(b)$.

Sea p el punto crítico que corresponde a c . Por ser f una función de Morse, existe un entorno difeomorfo a $B(p, 2\varepsilon)$ tal que se cumplen $f = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$ y $\xi = (-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$ dada una carta apropiada, la cual llamaremos g .

Definimos $V_{-\varepsilon} := f^{-1}(c - \varepsilon^2)$ y $V_\varepsilon := f^{-1}(c + \varepsilon^2)$. Podemos tomar ε suficientemente chico para que $V_{-\varepsilon}$ esté entre V_L y $f^{-1}(c)$, y V_ε esté entre $f^{-1}(c)$ y V_R . También podemos definir coordenadas (v, θ) en el disco abierto $(\mathbb{D}^n)^\circ$, donde $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $\theta \in [0, 1)$.

Definimos el encaje característico $\varphi : \mathbb{S}^{\lambda-1} \times (\mathbb{D}^{(n-\lambda)})^\circ \rightarrow V_{-\varepsilon}$ de la siguiente manera:

$$\varphi(u, \theta v) = g(\varepsilon u \cosh(\theta), \varepsilon v \sinh(\theta))$$

Uno puede verificar sin mucha dificultad que el encaje característico es efectivamente un encaje.

Ahora, cada $x \in V_{-\varepsilon}$ puede ser llevado a V_L mediante las curvas integrales, ya que no hay puntos críticos entre a y $c - \varepsilon^2$. Esta función compuesta con φ se llamará φ_L . Definimos $S_L := \varphi_L(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \{0\})$. Definimos D_L tomando todas las trayectorias de S_L a p y uniéndolas a S_L . Notemos que todos los puntos de S_L tienden a p al fluir por ξ , ya que $\varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \{0\})$ tiene coordenadas no nulas solo hasta el índice λ .

Definimos un encaje característico análogo $\varphi : (\mathbb{D}^\lambda)^\circ \times \mathbb{S}^{(n-\lambda)-1} \rightarrow V_{-\varepsilon}$ por $\varphi(\theta u, v) = g(\varepsilon u \sinh(\theta), \varepsilon v \cosh(\theta))$. Luego procedemos análogamente para definir S_R y D_R . Resumiendo:

Definición 3.4

Definimos los siguientes conjuntos para un campo de tipo gradiente ξ y un punto crítico p dados, denotando por Ξ_t al flujo de ξ y asumiendo el contexto de los párrafos anteriores:

1. $S_L(p) = \{x \in f^{-1}(a) : \lim_{t \rightarrow \infty} = p\}$, la **esfera a izquierda** de p .
2. $D_L(p) = \{x \in f^{-1}[a, p] : \lim_{t \rightarrow \infty} = p\}$, el **disco a izquierda** de p .
3. $S_R(p) = \{x \in f^{-1}(b) : \lim_{t \rightarrow -\infty} = p\}$, la **esfera a derecha** de p .
4. $D_R(p) = \{x \in f^{-1}[p, b] : \lim_{t \rightarrow -\infty} = p\}$, el **disco a derecha** de p .

Definición 3.5

Sean V una variedad de dimensión $n - 1$, $\varphi : \mathbb{S}^{\lambda-1} \times \mathbb{D}^{n-\lambda} \rightarrow V$ un encaje y $\chi(V, \varphi)$ la variedad que surge de cocientar $V - \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \{0\}) \sqcup (\mathbb{D}^\lambda)^\circ \times \mathbb{S}^{n-\lambda-1}$ mediante la relación de equivalencia $\varphi(u, \theta v) = (\theta u, v)$. Si V' es difeomorfa a $\chi(V, \varphi)$, decimos que puede ser obtenida mediante cirugía en V de tipo $(\lambda, n - \lambda)$.

$\chi(V, \varphi)$ tiene una base numerable porque $V - \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \{0\})$ y $(\mathbb{D}^\lambda)^\circ \times \mathbb{S}^{n-\lambda-1}$ tienen bases numerables. Es una variedad topológica porque pegamos dos variedades topológicas mediante un homeomorfismo (en particular, un difeomorfismo). Finalmente, es una

variedad suave porque podemos definir una estructura diferencial en ambas, y hacerlas compatibles porque φ es un difeomorfismo.

Una cirugía en una variedad M de dimensión $n-1$ lo que hace, en definitiva, es remover una esfera de dimensión $\lambda-1$ y reemplazarla por una esfera de dimensión $n-\lambda-1$. Con los dos resultados siguientes comprobaremos que esto es equivalente a hacer que M “atravesarse” un cobordismo elemental (ver **Definición 2.5**):

Teorema 3.6

Si $V' = \chi(V, \varphi)$ puede ser obtenida a partir de V mediante una cirugía de tipo $(\lambda, n-\lambda)$, entonces existe un cobordismo elemental (W, V, V') y una función de Morse $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ con exactamente un punto crítico, de índice λ .

Demostración. Sea L_λ el conjunto de puntos (\vec{x}, \vec{y}) en $\mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^{n-\lambda}$ que satisfacen $-1 \leq -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 \leq 1$ y $|\vec{x}||\vec{y}| < \sinh(1) \cosh(1)$. L_λ es una variedad diferenciable. Le llamaremos borde izquierdo a los puntos que cumplen $-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = -1$. Es difeomorfo a $\mathbb{S}^{\lambda-1} \times (\mathbb{D}^{n-\lambda})^\circ$ mediante el mapa $(u, \theta v) \mapsto (u \cosh(\theta), v \sinh(\theta))$, $0 \leq \theta < 1$. Análogamente, el borde derecho serán los puntos que cumplen $-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = 1$, y será difeomorfo a $(\mathbb{D}^\lambda)^\circ \times \mathbb{S}^{n-\lambda-1}$ mediante el mapa $(\theta u, v) \mapsto (u \sinh(\theta), v \cosh(\theta))$.

Consideremos las trayectorias ortogonales a las superficies $-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = c$ con $c \in \mathbb{R}$. Como el gradiente de $g(\vec{x}, \vec{y}) = -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$ es perpendicular a estas superficies, podemos tomar las soluciones a la ecuación diferencial que definen (\vec{x}, \vec{y}) como condición inicial y $\frac{\nabla g}{2}$ como campo. De esta manera, la trayectoria que pasa por el punto (\vec{x}, \vec{y}) puede ser parametrizada mediante el mapa $t \mapsto (t\vec{x}, t^{-1}\vec{y})$. Si \vec{x} o \vec{y} son 0 esta trayectoria es una línea recta tendiendo al origen. Si \vec{x} e \vec{y} son distintos de 0, al seguir las trayectorias podemos definir un mapa del borde izquierdo al borde derecho mediante $(u \cosh(\theta), v \sinh(\theta)) \mapsto (u \sinh(\theta), v \cosh(\theta))$.

Ahora construiremos una n -variedad que llamaremos $\omega(V, \varphi)$. Empezaremos con la unión disjunta $(V - \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0)) \times D^1 \sqcup L_\lambda$. Para cada $u \in \mathbb{S}^{\lambda-1}$, $v \in \mathbb{S}^{n-\lambda-1}$, $\theta \in (0, 1)$, $c \in D^1$ identificaremos el punto $(\varphi(u, \theta v), c)$ con el único punto $(\vec{x}, \vec{y}) \in L_\lambda$ tal que:

$$-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = c \tag{1}$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \text{ yace en la trayectoria ortogonal que pasa por } (u \cosh(\theta), v \sinh(\theta)) \tag{2}$$

Por la dependencia diferencial con respecto a las condiciones iniciales, la diferenciabilidad de las soluciones y la diferenciabilidad de φ , esta correspondencia define un difeomorfismo entre $\varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times ((\mathbb{D}^{n-\lambda})^\circ - 0)) \times D^1$ y $L_\lambda \cap (\mathbb{R}^\lambda - 0) \times (\mathbb{R}^{n-\lambda} - 0)$. Por lo tanto, $\omega(V, \varphi)$ es una variedad suave por las mismas razones que en la **Definición 3.5**.

$\omega(V, \varphi)$ tiene, de forma análoga a L_λ , un borde izquierdo ($-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = -1$) y un borde derecho ($-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = 1$). El borde izquierdo puede ser identificado con V de la siguiente manera (tomando $z \in V$):

$$\begin{cases} (z, -1) \in (V - \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0)) \times D^1 & \text{si } z \notin \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0) \\ (u \cosh(\theta), v \sinh(\theta)) \in L_\lambda & \text{si } z = \varphi(u, \theta v) \end{cases}$$

El borde derecho puede ser identificado con $\chi(V, \varphi)$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} (z, 1) \in (V - \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0)) \times D^1 & \text{para } z \in V - \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0) \\ (u \sinh(\theta), v \cosh(\theta)) \in L_\lambda & \text{para } (\theta u, v) \in (\mathbb{D}^\lambda)^\circ \times \mathbb{S}^{n-\lambda-1} \end{cases}$$

Definimos $f : \omega(V, \varphi) \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} f(z, c) = c & \text{si } (z, c) \in (V - \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0)) \times D^1 \\ f(\vec{x}, \vec{y}) = -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 & \text{si } (\vec{x}, \vec{y}) \in L_\lambda \end{cases}$$

Supongamos que $w_0 \in \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times ((\mathbb{D}^{n-\lambda})^\circ - 0)) \times D^1$ y tomemos $w_0 = (z_0, c_0)$ y $w_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Entonces, $f(z_0, c_0) = c_0 = -|x_0|^2 + |y_0|^2$, donde la última igualdad se da por cómo definimos φ . Por lo tanto, f está bien definida.

f es de Morse porque derivar según c nunca dará 0, y el único punto crítico de $-|x|^2 + |y|^2$ es $(0, 0)$, que es claramente no degenerado y de índice λ . \square

A partir de este momento, $\omega(V, \varphi)$ denotará la variedad construida en la demostración anterior.

Teorema 3.7

Sea (W, V, V') un cobordismo elemental con encaje característico $\varphi_L : \mathbb{S}^{\lambda-1} \times (\mathbb{D}^{n-\lambda})^\circ \rightarrow V$. Entonces (W, V, V') es difeomorfa a la tríada $(\omega(V, \varphi_L), V, \chi(V, \varphi_L))$.

Demostración. Usando la notación de la definición de cirugía con $V = V_0$ y $V' = V_1$, tenemos por el **Teorema 3.3** que $(f^{-1}([c_0, c-\varepsilon^2]), V, V_{-\varepsilon})$ y $(f^{-1}([c+\varepsilon^2, c_1]), V_{\varepsilon}, V')$ son cobordismos producto. Primero probaremos que (W, V, V') es difeomorfa a $(W_{\varepsilon}, V_{-\varepsilon}, V_{\varepsilon})$ y luego también que $(\omega(V, \varphi_L), V, \chi(V, \varphi_L))$ es difeomorfa a $(\omega(V_{-\varepsilon}, \varphi), V_{-\varepsilon}, \chi(V_{-\varepsilon}, \varphi))$, con lo que bastará probar que $(W_{\varepsilon}, V_{-\varepsilon}, V_{\varepsilon})$ es difeomorfa a $(\omega(V_{-\varepsilon}, \varphi), V_{-\varepsilon}, \chi(V_{-\varepsilon}, \varphi))$

Notemos que podemos tomar $|\xi(p)| = 1$ si $f(p) < c - \varepsilon^2$ o $f(p) > c + \varepsilon^2$ gracias a la construcción del **Teorema 3.3**. Definamos $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suave que cumpla $h([a, c - \varepsilon^2]) = c - \varepsilon^2 - a$ idénticamente y $h([c + \varepsilon^2, b]) = b - c - \varepsilon^2$ idénticamente. Definimos un campo X sobre W mediante $X(p) = h(f(p))\xi(p)$. Este campo es suave porque h, f y ξ son suaves, por lo que su flujo X_t es un difeomorfismo sobre su imagen para todo t . En particular, X_1 es el difeomorfismo entre (W, V, V') y $(W_{\varepsilon}, V_{-\varepsilon}, V_{\varepsilon})$ que buscamos.

Notando que X_1 lleva $\varphi_L(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0)$ a $\varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0)$, podemos llevar $V - \varphi_L(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0)$ a $V_{-\varepsilon}(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0)$ mediante X_1 . Extendiendo a L_{λ} como la identidad, tenemos entonces definido un difeomorfismo entre $(\omega(V, \varphi_L), V, \chi(V, \varphi_L))$ y $(\omega(V_{-\varepsilon}, \varphi), V_{-\varepsilon}, \chi(V_{-\varepsilon}, \varphi))$.

Definamos un difeomorfismo $k : \omega(V_{\varepsilon}, \varphi) \rightarrow W_{\varepsilon}$ de la siguiente manera:

Si $(z, t) \in (V_{-\varepsilon} - \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0)) \times D^1$ entonces definimos $k(z, t)$ como el único punto de W_{ε} tal que $k(z, t)$ yace en la curva integral que pasa por z y $f(k(z, t)) = \varepsilon^2 t + c$. Si $(\vec{x}, \vec{y}) \in L_{\lambda}$ definimos $k(\vec{x}, \vec{y}) = g(\varepsilon\vec{x}, \varepsilon\vec{y})$.

Como g manda trayectorias ortogonales en L_{λ} a curvas integrales en W_{ε} , k está bien definido. k es un difeomorfismo sobre $(V_{-\varepsilon} - \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0)) \times D^1$ por la diferenciabilidad con respecto a las condiciones iniciales y la diferenciabilidad de las soluciones. k es un difeomorfismo sobre L_{λ} porque g lo es. \square

Corolario 3.7.1

Un cobordismo elemental no puede ser un cobordismo producto.

Definición 3.6

*Un **retracto de deformación** de un espacio topológico W es un subespacio A de W tal que existe una homotopía $F : W \times [0, 1] \rightarrow W$ tal que para todo $x \in X$ y para todo $a \in A$ tenemos $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) \in A$ y $F(a, 1) = a$. F será llamada **retracción** de W en A .*

Intuitivamente, un retracto de deformación es un subespacio al que podemos reducir a W continuamente, preservando así en el proceso todas sus invariantes homotópicas.

Teorema 3.8

Sea (W, V, V') un cobordismo elemental que posee una función de Morse con un único punto crítico, de índice λ . Consideremos el D_L asociado a un campo de tipo gradiente fijo ξ . Entonces $V \cup D_L$ es un retracto de deformación de W .

Demostración. Por el teorema anterior podemos asumir que para el encaje característico $\varphi_L : \mathbb{S}^{\lambda-1} \times (\mathbb{D}^{n-\lambda})^\circ \rightarrow V$ tenemos:

$$W = \omega(V, \varphi_L) = (V - \varphi_L(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0)) \times D^1 \sqcup L_\lambda$$

La segunda igualdad es módulo las identificaciones ya especificadas. Ahora D_L es el disco

$$\{(\vec{x}, \vec{y}) \in L_\lambda : |\vec{y}| = 0\}$$

Sea $C = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in L_\lambda : |\vec{y}| \leq \frac{1}{10}\}$ un entorno cilíndrico de D_L .

Definimos retracciones de deformación r_t de W a $V \cup C$ y r'_t de $V \cup C$ a $V \cup D_L$. Al componer estas dos obtendremos la retracción que buscamos.

Primero definiremos r_t . Para cada $(v, c) \in (V - \varphi_L(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times (\mathbb{D}^{n-\lambda})^\circ)) \times D^1$ definimos $r_t(v, c) = (v, c - t(c + 1))$. Para cada $(\vec{x}, \vec{y}) \in L_\lambda$ definimos r_t de la siguiente manera:

$$\begin{cases} (\vec{x}, \vec{y}) & \text{si } |\vec{y}| \leq \frac{1}{10} \\ (\frac{\vec{x}}{\rho}, \rho\vec{y}) & \text{si } |\vec{y}| \geq \frac{1}{10} \end{cases}$$

donde $\rho = \rho(\vec{x}, \vec{y}, t)$ es el máximo de $\frac{1}{10|\vec{y}|}$ y la solución real positiva para ρ de la ecuación

$$-\frac{|\vec{x}|^2}{\rho^2} + \rho^2|\vec{y}|^2 = (-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2)(1 - t) - t$$

Para $|\vec{y}| \geq \frac{1}{10}$ la ecuación tiene una única solución positiva, la cual varía continuamente. Es claro que $r_1(c) = c$ si $c \in C$ (de hecho, $r_t(c) = c$ para todo t). También es claro que r_0 es la identidad, ya que en ese caso $\rho = 1$. Finalmente, si $t = 1$ y $(\vec{x}, \vec{y}) \notin C$, tenemos $-\frac{|\vec{x}|^2}{\rho^2} + \rho^2|\vec{y}|^2 = -1$. Esto significa que $r(\vec{x}, \vec{y}) = (\frac{\vec{x}}{\rho}, \rho\vec{y})$ pertenece a V . Por lo tanto, r_t es una retracción bien definida de W a $V \cup C$.

Ahora definiremos r'_t . Fuera de C será la identidad (este caso no es de interés). Si $(\vec{x}, \vec{y}) \in C$ definimos a $r'_t(\vec{x}, \vec{y})$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} (\vec{x}, (1-t)\vec{y}) & \text{si } |\vec{x}|^2 \leq 1 \\ (\vec{x}, \alpha\vec{y}) & \text{si } 1 < |\vec{x}|^2 \leq 1 + \frac{1}{100} \end{cases}$$

donde $\alpha = \alpha(\vec{x}, \vec{y}, t) = 1 - t + t\sqrt{\frac{|\vec{x}|^2 - 1}{|\vec{y}|^2}}$. Claramente, r'_0 es la identidad y $r'_1(c) = c$ si $c \in C$ (una vez más, se da que $r'_t(c) = c$). Tomemos un (\vec{x}, \vec{y}) genérico. Si $|\vec{x}|^2 \leq 1$, entonces $r'_1(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, 0) \in D_L$. Si $1 \leq |\vec{x}|^2 \leq 1 + \frac{1}{100}$, entonces $r'_1(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \sqrt{\frac{|\vec{x}|^2 - 1}{|\vec{y}|^2}}\vec{y})$, que pertenece a V , ya que $-|\vec{x}|^2 + (\sqrt{\frac{|\vec{x}|^2 - 1}{|\vec{y}|^2}}|\vec{y}|)^2 = -1$.

Tomemos una sucesión (\vec{x}_n, \vec{y}_n) tal que $|\vec{x}_n|^2 > 1$ para todo n y $\lim_{n \rightarrow \infty} |\vec{x}_n|^2 = 1$. Entonces, si $\lim_{n \rightarrow \infty} |\vec{y}_n| > 0$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} r'_t(\vec{x}_n, \vec{y}_n) = (\vec{x}, (1-t)\vec{y})$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |\vec{y}_n| = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha\vec{y}_n|^2 \leq (|1-t| + |t\sqrt{\frac{|\vec{x}|^2 - 1}{|\vec{y}_n|^2}}|)^2 |\vec{y}_n|^2$. Ignorando $|1-t|$ por ser constante, tenemos $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha\vec{y}_n|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} t\sqrt{\frac{|\vec{x}|^2 - 1}{|\vec{y}_n|^2}} |\vec{y}_n|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} |t\sqrt{|\vec{x}|^2 - 1}|^2 = 0$. Por lo tanto, r'_t es continua, ya que la definimos por casos con dos funciones continuas, y probamos que es continua en los puntos que cumplen $|\vec{x}|^2 = 1$, que son los únicos que no son interiores a donde definimos las funciones. Concluimos que r'_t es la retracción que, compuesta con r_t , nos permite obtener el resultado. \square

Corolario 3.8.1

$H_*(W, V)$ es isomorfo a \mathbb{Z} en dimensión λ y trivial en el resto. Un generador para $H_\lambda(W, V)$ es representado por D_L

Demostración.

$$\begin{aligned} H_*(W, V) &\cong H_*(V \cup D_L, V) \\ &\cong H_*(D_L, S_L) \end{aligned}$$

donde el segundo isomorfismo es por el teorema de excisión.

$$H_*(D_L, S_L) \cong \mathbb{Z} \text{ si la dimensión es } \lambda \text{ y es trivial si no.} \quad \square$$

Ahora hablaremos de cómo expandir los resultados anteriores a casos con más de un punto crítico.

Supongamos que (W, V, V') es una tríada y $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse con puntos críticos p_1, \dots, p_k todos en el mismo nivel y de índices $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ respectivamente. Eligiendo un campo de tipo gradiente, obtenemos encajes característicos disjuntos $\varphi_i : \mathbb{S}^{\lambda_i-1} \times (\mathbb{D}^{n-\lambda_i})^\circ \rightarrow V$. Construimos $\omega(V, \varphi_1, \dots, \varphi_k)$ de la siguiente manera: empezamos con la unión disjunta

$$\left(V - \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(\mathbb{S}^{\lambda_i-1} \times 0) \right) \times D^1 \bigsqcup \bigcup_{i=1}^k L_{\lambda_i}$$

Para cada $u \in \mathbb{S}^{\lambda_i-1}, v \in \mathbb{S}^{n-\lambda_i-1}, \theta \in (0, 1), c \in D^1$ identificamos el punto $(\varphi_i(u, \theta v), c)$ en el primer sumando con el único punto $(\vec{x}, \vec{y}) \in L_{\lambda_i}$ tal que

$$-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = c \quad (3)$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \text{ yace en la trayectoria ortogonal que pasa por } (u \cosh(\theta), v \sinh(\theta)) \quad (4)$$

Como en el **Teorema 3.7**, probamos que W es difeomorfa a $\omega(V, \varphi_1, \dots, \varphi_k)$. De esto se deduce, como en el **Teorema 3.8**, que $V \cup D_1 \cup \dots \cup D_k$ es un retracto de deformación de W , donde D_i es el D_L correspondiente a p_i . Finalmente, si $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda$ entonces $H_*(W, V)$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}$ en dimensión λ y trivial en el resto. Los generadores de $H_\lambda(W, V)$ están representados por D_1, \dots, D_k .

4. REORDENAMIENTO DE COBORDISMOS

De ahora en más usaremos c para denotar un cobordismo, en lugar de una clase de cobordismos. Si un producto de cobordismos elementales cc' es equivalente a un producto de cobordismos elementales dd' de manera que se da que c y d' tienen el mismo índice y c' y d también (con un índice potencialmente distinto al de c y d'), entonces decimos que el cobordismo cc' puede ser reordenado. El objetivo de este capítulo será probar que todo cobordismo puede ser reordenado de manera conveniente.

Recordemos que en la tríada (W, V_0, V_1) para cc' existe una función de Morse $f : W \rightarrow [0, 1]$ con dos puntos críticos p y p' tales que el índice de c es el de p y el de c' el de p' y $f(p) < \frac{1}{2} < f(p')$. Dado un campo de tipo gradiente ξ para f , las trayectorias que nacen en p intersectan a $V = f^{-1}(\frac{1}{2})$ en S_R , y las trayectorias que mueren en p' intersectan a V en S'_L . Ahora probaremos que cc' puede ser reordenado si $S_R \cap S'_L = \emptyset$

Teorema 4.1

Sea (W, V_0, V_1) una tríada con función de Morse f con puntos críticos p, p' . Supongamos que para una elección de campo de tipo gradiente ξ el conjunto compacto K_p de los puntos pertenecientes a trayectorias que nacen o mueren en p es disjunto del conjunto análogo $K_{p'}$. Si $f(W) = [0, 1]$ y $a, a' \in (0, 1)$, entonces existe una función de Morse g tal que:

1. ξ es un campo de tipo gradiente para g .
2. Los puntos críticos de g siguen siendo p, p' , y además $g(p) = a$ y $g(p') = a'$.
3. g es igual a f cerca de $V_0 \cup V_1$ y es igual a $f + c$ con $c \in \mathbb{R}$ en algún entorno de p y en algún entorno de p' .

Demostración. Claramente todas las trayectorias que pasan por puntos fuera de $K = K_p \cup K_{p'}$ van de V_0 a V_1 . La función $\pi : W - K \rightarrow V_0$ que asigna a cada punto $q \in W - K$ la única intersección de su trayectoria con V_0 es suave, ya que el difeomorfismo que construimos en el **Teorema 3.3** lo es, y π es la primera coordenada de $h^{-1}|_{W-K}$. Además, cuando q está suficientemente cerca de K tenemos que $\pi(q)$ está cerca de K en V_0 . Se deduce que si $\mu : V_0 \rightarrow [0, 1]$ es una función suave igual a 0 cerca de $K_p \cap V_0 = S_R$ e igual a 1 cerca de $K_{p'} \cap V_0$,

entonces μ se extiende de forma única a una función suave $\bar{\mu} : W \rightarrow [0, 1]$ que es constante en cada trayectoria, 0 cerca de K_p y 1 cerca de $K_{p'}$.

Definamos una nueva función de Morse $g : W \rightarrow [0, 1]$ mediante $g(q) = G(f(q), \bar{\mu}(q))$ donde $G(x, y) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función suave con las siguientes propiedades:

- a. Para todo x e y , $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) > 0$
- b. $G(f(p), 0) = a$ y $G(f(p'), 1) = a'$
- c. $G(x, y) = x$ si x está cerca de 0 o de 1
- d. $\frac{\partial G}{\partial x}(x, 0) = 1$ si x está en un entorno de $f(p)$
- e. $\frac{\partial G}{\partial x}(x, 1) = 1$ si x está en un entorno de $f(p')$

Ahora verificaremos que g es la función que buscamos. $g = f$ cerca de $V_0 \cup V_1$ se debe a la propiedad c. $g = f + c$ en algún entorno de p y en algún entorno de p' se debe a las propiedades d y e y a que $\bar{\mu}$ es idénticamente 0 en un entorno de p y de p' . En rigor, para $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial G(f, \bar{\mu})}{\partial x_i} = \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Por lo tanto, f y g coinciden a menos de una constante. Con esto tenemos que g cumple la condición 3).

A continuación probaremos que se cumple la condición 1). Lo que haremos es probar $\langle \hat{\xi}, \nabla g \rangle > 0$, donde $\hat{\xi}$ es un campo que usamos para construir ξ en el **Lema 3.2**, ya que, en un entorno de cualquier punto, ξ es una combinación lineal de estos. Primero, si $\hat{\xi}$ es uno de los campos definidos en los U_i (donde estos son, una vez más, los del **Lema 3.2**):

$$\begin{aligned} \langle \hat{\xi}, \nabla G(f, \bar{\mu}) \rangle &= \langle (-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n), \nabla G(f, \bar{\mu}) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\lambda} -x_i \frac{\partial G(f, \bar{\mu})}{\partial x_i} + \sum_{i=\lambda+1}^n x_i \frac{\partial G(f, \bar{\mu})}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Calculemos el valor de $\frac{\partial G(f, \bar{\mu})}{\partial x_i}$, usando que $\bar{\mu}$ es idénticamente 0 en el entorno de p donde está definido $\hat{\mu}$ (esto podemos hacerlo porque los entornos de p y p' no pueden intersec-

tarse), y tomando $i \leq \lambda$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(f, \bar{\mu})}{\partial x_i} &= \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= -2cx_i\end{aligned}$$

donde $c > 0$ por la propiedad *a*. Notar que este cálculo prueba, también, que p es un punto crítico, y que es el único en el entorno, por lo que solo nos quedaría probar que no hay puntos críticos fuera de los entornos de p y p' con los que estamos trabajando. Análogamente, si $i \geq \lambda + 1$, el resultado será $2cx_i$. Juntando todo:

$$\langle \hat{\xi}, \nabla G(f, \bar{\mu}) \rangle = \sum_{i=1}^n 2(x_i)^2 > 0$$

Ahora, si $\hat{\xi}$ es de los campos definidos en los U'_i :

$$\begin{aligned}\langle \hat{\xi}, \nabla G(f, \bar{\mu}) \rangle &= \langle (1, \dots, 0), \nabla G(f, \bar{\mu}) \rangle \\ &= \frac{\partial G(f, \bar{\mu})}{\partial x_1} \\ &= \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_1} \\ &= \frac{\partial G}{\partial x} \\ &> 0\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1$ por construcción y $\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_1} = 0$ porque las soluciones de $\hat{\xi}$ se mantienen siempre en la misma trayectoria, también por construcción. Por lo tanto, g cumple la propiedad 1 si g es una función de Morse. Esto además prueba que g no tiene puntos críticos distintos a p y p' . Usando *b*, concluimos que g cumple la propiedad 2.

Finalmente, resta verificar que g efectivamente es una función de Morse. Ya tenemos que los puntos críticos son aislados y no están en el borde, por lo que solo resta verificar que son no degenerados. Anteriormente habíamos obtenido:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(f, \bar{\mu})}{\partial x_i} &= -2cx_i && \text{si } i \leq \lambda \\ \frac{\partial G(f, \bar{\mu})}{\partial x_i} &= 2cx_i && \text{si } \lambda < i\end{aligned}$$

con $c > 0$, por lo que $\det\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right) = (-2)^\lambda 2^{n-\lambda} c^n \neq 0$. \square

Este teorema se puede extender a una función de Morse f con un conjunto de puntos críticos en un mismo nivel $p = \{p_1, \dots, p_\ell\}$ y otro $p' = \{p'_1, \dots, p'_m\}$. La prueba es completamente análoga; la única modificación relevante es que K_p se define como los puntos que pertenecen a la trayectoria de algún p_i . $K_{p'}$ se define análogamente.

Tomemos ahora λ igual al índice de c y λ' igual al índice de c' y $n = \dim(W)$. Si $\dim(S_R) + \dim(S'_L) < \dim(V)$, entonces probaremos que podemos alterar ξ para que no se intersecten. Notar que esta condición es equivalente a $\lambda \geq \lambda'$.

Definición 4.1

Un entorno abierto U de una subvariedad $M^m \subseteq V^v$ que es difeomorfo a $M^m \times \mathbb{R}^{v-m}$ de manera que M^m corresponda a $M^m \times 0$ se llama **entorno producto** de M^m en V^v .

Lema 4.2

Sea V^v una variedad con dos subvariedades, M^m y N^n . Si M tiene un entorno producto en V y $m + n < v$, entonces existe un difeomorfismo $h : V \rightarrow V$ suavemente isotópico a la identidad tal que $h(M)$ es disjunto de N .

Demostración. Sea $k : M \times \mathbb{R}^{v-m} \rightarrow U \subseteq V$ un difeomorfismo con U un entorno producto de M en V tal que $k(M \times 0) = M$. Sea $N_0 = U \cap N$ y consideremos el mapa $g = \pi \circ k^{-1}|_{N_0}$ donde $\pi : M \times \mathbb{R}^{v-m} \rightarrow \mathbb{R}^{v-m}$ es la proyección natural.

La variedad $k(M \times \vec{x}) \subseteq V$ intersectará a N si y solo si $\vec{x} \in g(N_0)$. Si N_0 no es vacío, entonces $\dim(N_0) = n < v - m$. Por lo tanto, el teorema de Sard (ver [Lee02]) muestra que $g(N_0)$ tiene medida 0 en \mathbb{R}^{v-m} . Por lo tanto, podemos elegir un punto $\vec{u} \in \mathbb{R}^{v-m} - g(N_0)$.

Construiremos un difeomorfismo de V en sí mismo que llevará M a $k(M \times \vec{u})$ y será isotópico a la identidad. Construimos un campo vectorial suave $\xi(\vec{x})$ en \mathbb{R}^{v-m} tal que $\xi(\vec{x}) = \vec{u}$ si $|\vec{x}| \leq |\vec{u}|$ y $\xi(\vec{x}) = 0$ si $|\vec{x}| \leq 2|\vec{u}|$. Como ξ tiene soporte compacto (es decir,

$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^{v-m} : \xi \vec{x} = \vec{0}\}$ es compacto) y \mathbb{R}^{v-m} no tiene borde, las curvas integrales $\psi(t, \vec{x})$ están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ por el teorema de escape de compactos. Entonces $\psi(0, \vec{x})$ es la identidad en \mathbb{R}^{v-m} , $\psi(1, \vec{x})$ es un difeomorfismo que lleva 0 a \vec{u} y $\psi(t, \vec{x})$, $0 \leq t \leq 1$, da una isotopía suave de $\psi(0, \vec{x})$ a $\psi(1, \vec{x})$, donde la suavidad se debe a la suavidad de las soluciones y a la suavidad con respecto a las condiciones iniciales, que se debe a la suavidad de ξ .

Como esta isotopía deja fijos a todos los puntos fuera de un conjunto acotado en \mathbb{R}^{v-m} , podemos usarla para definir una isotopía $h_t : V \rightarrow V$ de la siguiente manera:

$$h_t(w) \begin{cases} k(q, \psi(t, \vec{x})) & \text{si } w = k(q, \vec{x}) \in U \\ w & \text{si } w \in V - U \end{cases}$$

La suavidad se debe a que k , ψ y la identidad son suaves, y a que en un entorno del borde de U tenemos que h_t es la identidad. Claramente h_0 es la identidad, y $h_1(M) \cap N = \emptyset$, ya que por construcción $w = k(q, \vec{0})$, por lo que $h_1(w) = k(q, \vec{u})$, que es disjunto a N porque \vec{u} no pertenece a N_0 . Entonces $h = h_1$ es el difeomorfismo que buscamos. \square

Recordemos que si tenemos una tríada (W, V, V') con una función de Morse sin puntos críticos con un campo de tipo gradiente ξ , entonces, dados a y b con $a < b$, las curvas integrales de $\hat{\xi} = \frac{\xi}{\langle \xi, \nabla f \rangle}$ determinan un difeomorfismo

$$\psi : [a, b] \times V \rightarrow f^{-1}[a, b]$$

tal que $f(\psi(t, q)) = t$, y $\psi(b, q) = q \in V$, donde estamos identificando V con $f^{-1}(b)$ debido a que estamos en un cobordismo producto.

Lema 4.3

Sea una tríada (W, V_0, V_1) con una función de Morse f , un campo de tipo gradiente ξ , un nivel no crítico $V = f^{-1}(b)$ y un difeomorfismo $h : V \rightarrow V$ que es isotópico a la identidad. Si $f^{-1}[a, b]$, $a < b$, no contiene puntos críticos, entonces es posible construir un nuevo campo de tipo gradiente $\bar{\xi}$ para f tal que:

1. $\bar{\xi}$ coincide con ξ fuera de $f^{-1}(a, b)$
2. $\bar{\varphi} = h \circ \varphi$, donde φ y $\bar{\varphi}$ son los difeomorfismos de $f^{-1}(a)$ a V que surgen de seguir las trayectorias de ξ y $\bar{\xi}$ respectivamente.

Demostración. Definamos un difeomorfismo H de $[a, b] \times V$ en sí mismo mediante $H(t, q) = (t, h_t(q))$, donde $h_t(q)$ es una isotopía suave entre $[a, b] \times V$ y V de la identidad a h , ajustada de manera que h_t sea la identidad para todo t cerca de a y $h_t = h$ para todo t cerca de b . Sea:

$$\xi' = (\psi \circ H \circ \psi^{-1})_* \hat{\xi}$$

ξ' coincide con $\hat{\xi}$ en $f^{-1}(a)$ y $f^{-1}(b) = V$, porque en ese caso localmente estamos tomando un pullback por la identidad. Además, $\langle \xi', \nabla f \rangle = 1$ idénticamente porque por definición el pullback preserva la métrica Riemanniana. Por más que, en rigor, el pullback define una nueva métrica, esto es irrelevante ya que a la hora de aplicar razonamientos sobre campos de tipo gradiente no nos es relevante cuál métrica Riemanniana se está usando. Con esto hemos probado que el campo vectorial $\bar{\xi}$ en W que coincide con $\langle \xi, \nabla f \rangle \xi'$ en $f^{-1}[a, b]$ y con ξ en $W - f^{-1}[a, b]$ es un nuevo campo de tipo gradiente de f .

Ahora, para cada $q \in V$ fijo, $\psi(t, h_t(q))$ describe una curva integral de $\bar{\xi}$ de $\psi(a, q)$ en $f^{-1}(a)$ a $\psi(b, h(q)) = h(q)$ en $f^{-1}(b) = V$. \square

Reemplazando f por $-f$ deducimos una proposición similar en que ξ es alterado en $f^{-1}[b, c]$, $b < c$, que es un entorno a la derecha en vez de a la izquierda.

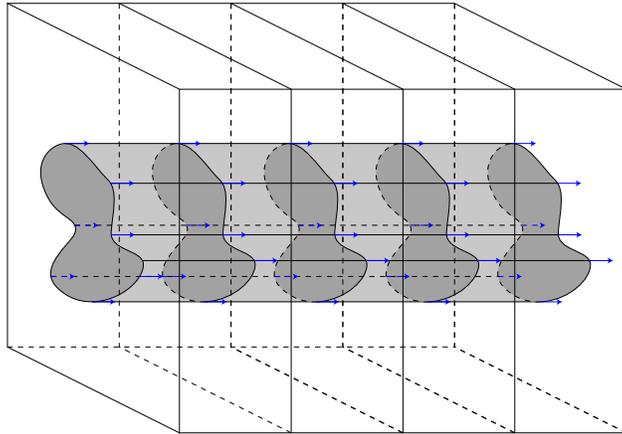


Figura 5: Representación de $f^{-1}[a, b]$ como $f^{-1}(b) \times [0, 1]$, junto con una subvariedad $M \times [0, 1]$, donde M es una subvariedad de $f^{-1}(b)$.

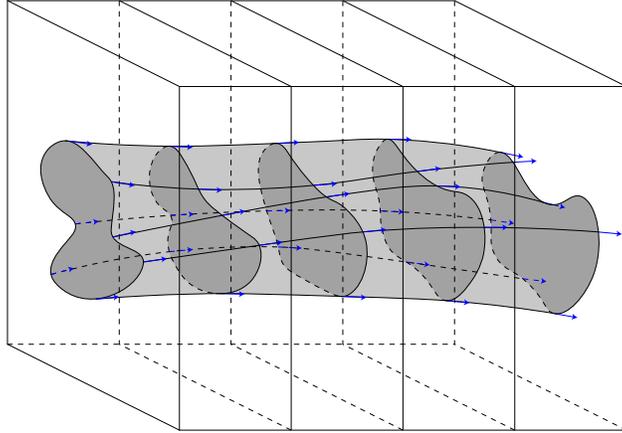


Figura 6: $M \times [0, 1]$ luego de la modificación que nos proporciona $h : f^{-1}(b) \rightarrow f^{-1}(b)$ usando el **Lema 4.2**.

Volvemos ahora al contexto del principio del capítulo.

Teorema 4.4

Si $\lambda \geq \lambda'$, entonces podemos alterar el campo de tipo gradiente para f en un entorno de V de manera que las nuevas esferas correspondientes, \overline{S}_R y \overline{S}'_L en V no se intersecten. Más generalmente, si c es un cobordismo con puntos críticos p_1, \dots, p_k de f con índice λ de f y c' es un cobordismo con puntos críticos p'_1, \dots, p'_l de f con índice λ' de f , entonces es posible alterar el campo de tipo gradiente de f en un entorno de V de manera que las nuevas esferas en V sean disjuntas dos a dos.

Demostración. Como S_R tiene un entorno producto en V por la definición de encaje característico, el **Lema 4.2** provee un difeomorfismo $h : V \rightarrow V$ suavemente isotópico a la identidad, para el cual $h(S_R) \cap S_L = \emptyset$. La isotopía es usada de la siguiente manera para alterar ξ .

Sea $a < \frac{1}{2}$ tal que $f^{-1}[a, \frac{1}{2}]$ pertenece a un entorno de V que no incluya puntos críticos. Sea $\overline{\xi}$ el campo que surge de aplicar el lema anterior con $b = \frac{1}{2}$.

Tenemos por la condición 2) del lema que $\psi(a \times S_R)$ en $f^{-1}(a)$ va a $h(S_R)$ en V . Por lo tanto, $h(S_R)$ es la \overline{S}_R de p cuando tomamos $\overline{\xi}$ como campo de tipo gradiente. Claramente S_L no se vio alterada, por lo que se concluye el teorema. □

Recordemos que cualquier cobordismo c puede ser expresado como composición de finitos cobordismos elementales (**Corolario 2.9.1**). Aplicando el **Teorema 4.1**, el **Lema 4.2** y el **Teorema 4.4** obtenemos:

Teorema 4.5

Cualquier cobordismo c puede ser expresado como una composición

$$c = c_0 c_1 \dots c_n, \text{ con } n = \dim(c)$$

donde cada cobordismo c_k admite una función de Morse con solo un nivel crítico con todos sus puntos críticos de índice k .

Este teorema se debe a Smale [[Sma61b](#)] y Wallace [[Wal60](#)].

Definición 4.2

Dada una tríada (W, V_0, V_1) con una función de Morse f , una función autoindexada será una función de Morse g que cumpla:

1. *Los puntos críticos de g son los mismos que los de f , de mismo índice.*
2. *$g(V_0) = -\frac{1}{2}$ y $g(V_1) = n + \frac{1}{2}$.*
3. *$g(p)$ es igual al índice de p , en cada punto crítico p de g .*

Con esto podemos enunciar un teorema inmediatamente equivalente al **Teorema 4.5**:

Teorema 4.6

Dada una tríada (W, V_0, V_1) con una función de Morse, existe una función autoindexada.

5. UN TEOREMA DE CANCELACIÓN

Del teorema final de reordenamiento surge naturalmente una pregunta: ¿cuándo es que una composición de cobordismos elementales con c de índice λ y c' de índice $\lambda + 1$ es equivalente a un cobordismo producto?

Sea f una función de Morse en una tríada (W^n, V_0, V_1) para cc' , teniendo puntos críticos p, p' de índice $\lambda, \lambda + 1$ tales que $f(p) < \frac{1}{2} < f(p')$. Un campo de tipo gradiente ξ para f determina en $V = f^{-1}(\frac{1}{2})$ una esfera S_R de p y una esfera S'_L de p' . Notemos que $\dim(S_R) + \dim(S'_L) = (n - \lambda - 1) + \lambda = n - 1 = \dim(V)$.

Definición 5.1

Dadas dos subvariedades M^m y N^n de V^v , diremos que tienen **intersección transversal** si en cada punto $q \in M \cap N$ el espacio tangente a V en q es generado por los vectores tangentes a M y los vectores tangentes a N .

Lema 5.1

Si M tiene un entorno producto en V , entonces existe un difeomorfismo h de V en si misma suavemente isotópico a la identidad tal que $h(M)$ tiene intersección transversal con N .

La prueba es análoga a la del **Lema 4.2**.

Teorema 5.2

El campo de tipo gradiente ξ puede ser elegido de manera que S_R tenga intersección transversal con S'_L en V .

Demostración. El lema anterior nos provee con un difeomorfismo $h : V \rightarrow V$ suavemente isotópico a la identidad tal que $h(S_R)$ interseca a S'_L transversalmente. Usando el **Lema 4.3** se concluye el resultado. \square

Por el resto del capítulo asumiremos que S_R tiene intersección transversal con S'_L . Como $\dim(S_R) + \dim(S'_L) = \dim(V)$, la intersección consistirá de finitos puntos aislados. Esto se debe a que si $q_0 \in S_R \cap S'_L$ entonces existen coordenadas x^1, \dots, x^{n-1} en un entorno U de q_0 en V tales que $x^i(q_0) = 0$ para todo i y $U \cap S_R$ son los puntos que cumplen $x^1(q) = \dots = x^\lambda(q) = 0$ mientras que $U \cap S'_L$ son los puntos que cumplen $x^{\lambda+1}(q) = \dots = x^{n-1}(q) = 0$.

Claramente el único punto en $S_R \cap S'_L \cap U$ es q_0 . Una consecuencia de esto es que solo hay finitas trayectorias de p a p' , una por cada punto de $S_R \cap S'_L$.

Pasaremos la mayor parte del resto del capítulo desarrollando una serie de lemas técnicos que eventualmente nos permitirán probar el teorema principal del capítulo.

Sea $n = a + b$. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ puede ser escrito $x = (u, v)$ con $u \in \mathbb{R}^a, v \in \mathbb{R}^b$.

Lema 5.3

Sea $\Lambda \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las transformaciones lineales L de \mathbb{R}^n tales que $L(\mathbb{R}^a)$ tiene intersección transversal positiva con \mathbb{R}^b , es decir el conjunto de las transformaciones lineales con matrices de la forma $\begin{pmatrix} A & * \\ * & * \end{pmatrix}$, donde A es una matriz $a \times a$, $\det(L) > 0$ y $\det(A) > 0$. Entonces, para cada $L \in \Lambda$ existe una isotopía suave $L_t, 0 \leq t \leq 1$, tal que $L_0 = L, L_1 = Id$ y $L_t \in \Lambda$. Equivalentemente, existe un camino suave en Λ de L a Id .

Demostración. La adición de un múltiplo escalar de una de las primeras a filas a una de las últimas b filas claramente puede ser realizada como una deformación suave en Λ (solo es cuestión de multiplicar al escalar por $t \in [0, 1]$). Un número finito de estas operaciones reducirán la matriz L a la forma $L' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, donde B es una matriz $b \times b$. Como $\det(A) \neq 0$, un número finito de operaciones elementales en la matriz A , todas realizables mediante una deformación en $GL(a, \mathbb{R})$, logra reducir a A a la matriz identidad. Como $\det(A) \det(B) = \det(L) > 0$, tenemos $\det(B) > 0$, por lo que esto también es cierto de B . Por lo tanto, existen deformaciones suaves $A_t, B_t, 0 \leq t \leq 1$, de A y B a matrices identidad con $\det(A_t) > 0$ y $\det(B_t) > 0$. Esto nos provee con una deformación en Λ de L' a la identidad. \square

Lema 5.4

Sea $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un encaje que preserva orientación y cumple lo siguiente:

- a. $h(0) = 0$.
- b. $h(\mathbb{R}^a) \cap \mathbb{R}^b = \{0\}$. La intersección en 0 es transversal y con número de intersección +1 (tomamos el número de intersección entre \mathbb{R}^a y \mathbb{R}^b como +1).

Entonces existe una isotopía suave $h_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq 1$, tal que:

- 1. $h_0 = h$ y $h_1 = Id$.
- 2. $h_t(\mathbb{R}^a) \cap \mathbb{R}^b = \{0\}$ para todo $t \in [0, 1]$, y la intersección es transversal.

Demostración. Como $h(0) = 0$, $h(x)$ puede ser expresado de la forma $h(x) = x_1 h^1(x) + \dots + x_n h^n(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, donde $h^i(x)$ es una función vectorial suave de x y (consecuentemente) $h^i(0) = \frac{\partial h}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ (referirse al principio del **Lema 2.1**). Si definimos h_t de la siguiente manera:

$$h_{1-t}(x) = \frac{h(tx)}{t} = x_1 h^1(tx) \dots + x_n h^n(tx), 0 \leq t \leq 1$$

entonces $h_t(x)$ es claramente una isotopía suave de h a la transformación lineal:

$$h_1(x) = x_1 h^1(0) + \dots + x_n h^n(0)$$

Tenemos que $h(\mathbb{R}^a)$ y $h_t(\mathbb{R}^a)$ tienen precisamente la misma base orientada $h^1(0), \dots, h^n(0)$ de vectores tangente en $0 \in \mathbb{R}^n$, ya que el razonamiento para encontrar la base de $h(x)$ no se ve afectado por introducir el parámetro t si $t > 0$, y es trivial que h_1 también tiene la misma base orientada. Se deduce que para todo t , $0 \leq t \leq 1$, $h_t(\mathbb{R}^a)$ tiene intersección positiva y transversal con \mathbb{R}^b en 0. Claramente $h_t(\mathbb{R}^a) \cap \mathbb{R}^b = \{0\}$.

Consideremos el conjunto $\Lambda \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ del lema previo. Claramente $h_1 \in \Lambda$. Usando el lema, podemos modificar a h_t para que h_1 sea la identidad, $h_t(\mathbb{R}^a) \cap \mathbb{R}^b = \{0\}$ para todo $t \in [0, 1]$ y la intersección sea transversal. \square

La isotopía que surge de este lema puede ser escrita de la forma

$$h_t(x) = x_1 h^1(t, x) + \dots + x_n h^n(t, x) \tag{5}$$

donde cada $h^i(t, x)$ es una función suave de t y x , $i = 1, \dots, n$ y (consecuentemente) $h^i(t, 0) = \frac{\partial h_t}{\partial x_i}(0)$. Notemos que en el principio de la prueba del **Lema 2.1** nunca entraría en juego el nuevo parámetro t . Para esta h_t , tenemos el siguiente resultado:

Lema 5.5

Existen constantes positivas K, k tales que para todo x en un entorno del origen en \mathbb{R}^n y todo $t \in [0, 1]$:

1. $|\frac{\partial h_t}{\partial t}| < K|x|$.
2. $|\pi_a \circ h_t(x)| > k|x|$ para $x \in \mathbb{R}^a$, donde $\pi_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^a$ es la proyección canónica.

Demostración. La propiedad 1) se deduce de diferenciar la ecuación (1). La propiedad 2) se deduce de que $h_t(\mathbb{R}^a)$ es transversal a \mathbb{R}^b para todo $t \in [0, 1]$ (por lo que las derivadas de $|\pi_a \circ h_t(x)|$ según x_1, \dots, x_a no se anulan en $x = 0$) y de que $[0, 1]$ es un intervalo compacto. \square

Teorema 5.6

Sea h como en el **Lema 5.4**. Entonces, dado un entorno N del origen, existe una isotopía suave $h'_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 \leq t \leq 1$, con $h'_0 = h$ tal que:

1. $h'_t(x) = h(x)$ para $x = 0$ y para $x \in \mathbb{R}^n - N$, $0 \leq t \leq 1$.
2. $h'_1(x) = x$ para x en un entorno N_1 de 0.
3. $h'_1(\mathbb{R}^a) \cap \mathbb{R}^b = \{0\}$.

Demostración. Sea h_t , $0 \leq t \leq 1$ la isotopía del **Lema 5.4**. Sea $E \subseteq N$ una bola abierta alrededor de 0 y sea d la distancia de 0 a $\mathbb{R}^n - h(E)$. Como $h_t(0) = 0$ y el intervalo $[0, 1]$ es compacto, existen E_1 una bola abierta alrededor de 0 con $\overline{E_1} \subseteq E$ tal que $|h_t(x)| < d$ para todo $x \in \overline{E_1}$ y para todo $t \in [0, 1]$.

Ahora definamos

$$\overline{h}_t(x) = \begin{cases} h_t(x) & \text{si } x \in \overline{E_1} \\ h(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^n - E \end{cases}$$

Esto define una isotopía de $h|_{\overline{E_1} \cup (\mathbb{R}^n - E)}$. Primero extenderemos \overline{h}_t a una isotopía de h que cumpla las condiciones 1) y 2).

Observemos que a cualquier isotopía h_t , $0 \leq t \leq 1$ de h corresponde un encaje suave

$$H : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}^n$$

que preserva niveles. Esta correspondencia está dada por:

$$H(t, x) = (t, h_t(x))$$

El encaje H determina en su imagen un campo vectorial

$$\vec{\tau}(t, y) = H(t, x)_* \frac{\partial}{\partial t} = \left(1, \frac{\partial h_t}{\partial t}\right)$$

donde $(t, y) = H(t, x)$, es decir $y = h_t(x)$. Este campo vectorial, junto con h_0 , determina completamente a h_t y, por lo tanto, a H . De hecho

$$\psi(t, y) = (t, h_t \circ h_0^{-1}(y))$$

es la única familia de curvas integrales con valores iniciales $(0, y) \in 0 \times h_0(\mathbb{R}^n)$.

Ahora extenderemos la isotopía $\overline{h_t}$ a todo $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$, extendiendo primero $\tau(t, y)$ a todo $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$. Tenemos que $\overline{h_t}$ admite una extensión a un entorno abierto de su dominio cerrado, por la **Definición 1.1**. Esto da lugar a una extensión $\vec{\tau}'$ de $\vec{\tau}(t, y)$ a un entorno U del entorno cerrado en el que está definido. Sea φ una función suave que es idénticamente igual a 1 en el dominio cerrado original e idénticamente igual a 0 en el complemento de U . Entonces

$$\xi(t, y) = (1, \vec{\tau}'(t, y))$$

es la extensión de $\tau(t, y)$ que buscamos.

Notemos que una familia de curvas integrales $\psi(t, y)$ está definida para $y \in \mathbb{R}^n$ y para todo $t \in [0, 1]$. Para $y \in \mathbb{R}^n - h(E)$ esto es trivial. Para $y \in h(E)$ esto se deduce de que la curva integral debe mantenerse en el conjunto compacto $[0, 1] \times h(\overline{E})$.

La familia ψ entonces nos da un encaje suave que preserva niveles

$$\psi : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}^n$$

Por lo que la ecuación

$$\psi(t, y) = (t, \overline{h_t} \circ h^{-1}(y))$$

nos permite definir una extensión de $\overline{h_t}$ a una isotopía suave de h que satisface las condiciones 1) y 2).

Llamemos ahora $\overline{h_t}$ a esta nueva extensión. La condición 3) no se cumplirá si $\overline{h_t}(\mathbb{R}^a)$ y \mathbb{R}^b se intersectan fuera de 0, lo cual, por construcción (**Lema 5.4**), solo podrá darse en donde extendimos la isotopía. Por lo tanto, podemos usar $\overline{h_t}$ solo para valores pequeños de t , $t \leq t'$, en los que no ocurre ninguna nueva intersección. Existe t' por la continuidad de $\overline{h_t}$ y la compacidad de $\overline{h(E)} - h(E_1)$.

Supongamos que hemos obtenido un encaje $\hat{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ isotópico a h tal que:

- A. Para algún t_0 , $0 \leq t_0 \leq 1$, $\hat{h}(x)$ coincide con $h_{t_0}(x)$ para todo x cerca de 0 y con $h(x)$ para todo x fuera de N .

$$\boxed{\text{B.}} \quad \hat{h}(\mathbb{R}^a) \cap \mathbb{R}^b = 0.$$

Tomando \hat{h} en lugar de h y $[t_0, 1]$ en lugar de $[0, 1]$, llevamos a cabo la misma construcción que para \bar{h}_t , con las siguientes consideraciones:

$\boxed{\text{a.}}$ Debemos tomar la bola $E \subseteq N$ de manera que para todo $x \in E$ se de que $\hat{h}(x) = h_{t_0}(x)$ y las desigualdades del **Lema 5.5** se cumplan.

$\boxed{\text{b.}}$ Debemos elegir $\vec{\tau}'$ de manera que $\|\vec{\tau}'\| < Kr$, donde r es el radio de E .

La consideración a la podemos tener trivialmente por la condición A de \hat{h} y por el mismo **Lema 5.5**. Notemos que en el conjunto $[t_0, 1] \times (\bar{E}_1 \cup (\mathbb{R}^n - E))$ donde está originalmente definida \bar{h}_t tenemos

$$\left| \frac{\partial h_t(x)}{\partial t} \right| < Kr \quad (6)$$

Ahora, $\frac{\partial h_t(x)}{\partial t}$ es el segundo componente de ξ (es decir $\vec{\tau}'$). Si al extender \bar{h}_t elegimos φ correctamente, podemos lograr que se mantenga esta desigualdad para $\vec{\tau}'$, por lo que tenemos que no hay problemas para tener la consideración b .

Tenemos entonces que \bar{h}_t satisface (6) en $[t_0, 1] \times \mathbb{R}^n$.

Afirmamos que \bar{h}_t no introducirá ninguna nueva intersección de $\bar{h}_t(\mathbb{R}^a)$ y \mathbb{R}^b para $t \in [t_0, t_0 + \frac{k}{K}]$. De hecho, si $x \in \mathbb{R}^a \cap (E - E_1)$, la distancia de $\bar{h}_{t_0}(x)$ a \mathbb{R}^b es

$$|\pi_a \circ \bar{h}_{t_0}(x)| = |\pi_a \circ h_{t_0}(x)| > kr$$

Por lo que (6) prueba que si $t \in [t_0, t_0 + \frac{k}{K}]$ entonces tenemos

$$|\pi_a \circ \bar{h}_t(x)| > kr - (t - t_0)Kr \geq 0$$

Finalmente, podemos ajustar el parámetro t de manera que la isotopía \bar{h}_t , $t_0 \leq t \leq t'_0 = \min\{1, t_0 + \frac{k}{K}\}$, satisfaga

$$\bar{h}_t(x) = \begin{cases} \hat{h}(x) & \text{si } t \text{ está cerca de } t_0 \\ \bar{h}_{t'_0}(x) & \text{si } t \text{ está cerca de } t'_0 \end{cases}$$

Como la constante $\frac{k}{K}$ depende solamente de h_t , la isotopía suave que buscamos surgirá de una composición finita de isotopías construidas de esta manera. \square

Lema 5.7

Sea T una trayectoria de p a p' de ξ . Si S_R y S'_L tienen una sola intersección, y esta es transversal, entonces existen un entorno U_T de T y una carta de coordenadas $g : U_T \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que:

1. p y p' corresponden a $(0, \dots, 0)$ y $(1, 0, \dots, 0)$ respectivamente.
2. $g_*\xi(q) = \vec{\eta}(\vec{x}) = (v(x_1), -x_2, \dots, -x_\lambda, -x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \dots, x_n)$, donde $g(q) = \vec{x}$ y $v(x_1)$ es una función suave de x_1 , positiva en $(0, 1)$, que se anula en 0 y en 1, negativa en cualquier otro caso, y que cumple $|\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1)| = 1$ cerca de $x_1 = 0$ y de $x_1 = 1$.

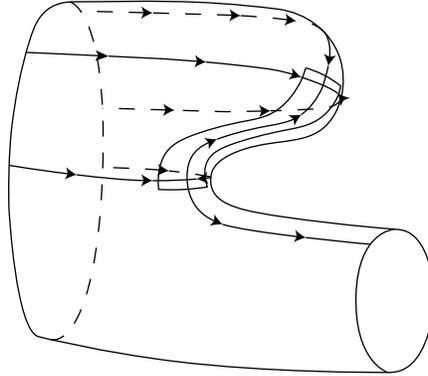


Figura 7: Un cobordismo en el que podemos encontrar U_T .

Demostración. Sea $\vec{\eta}(\vec{x})$ un campo vectorial en \mathbb{R}^n que cumple la condición 2) del teorema (ignorando la igualdad con $g_*(\xi)$, ya que no tiene sentido la expresión todavía al no establecer una g). La función

$$F(\vec{x}) = f(p) + 2 \int_0^{x_1} v(t) dt - x_2^2 - \dots - x_{\lambda+1}^2 + x_{\lambda+2}^2 + \dots + x_n^2$$

es una función de Morse en \mathbb{R}^n , ya que la derivada de $v(t)$ no se anula ni cerca de 0 ni cerca de $x_1 = 1$, que son los dos puntos críticos. Además, $\vec{\eta}(\vec{x})$ es un campo de tipo gradiente para F , ya que $v(t)$ es idénticamente la identidad (o menos la identidad) módulo una constante en un entorno de los puntos críticos. También tenemos $\langle \vec{\eta}(\vec{x}), \nabla F \rangle = v(x_1)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$.

Eligiendo correctamente la función v podemos tomar $F(1, 0, \dots, 0) = f(p')$. De hecho, es solo cuestión de tomar $2 \int_0^{x_1} v(t) = f(p') - f(p)$.

Tomemos ahora coordenadas (x_1, \dots, x_n) como en la definición de campo de tipo gradiente ξ de f . Afirmamos que existen b_1, b_2 tales que $a_1 = f(p) < b_1 < b_2 < f(p') = a_2$ y difeomorfismos g_1, g_2 de entornos disjuntos L_1, L_2 de 0 y $(1, 0, \dots, 0)$ a entornos de p y p' respectivamente tales que:

- a. Los difeomorfismos llevan $\vec{\eta}$ a ξ, F a f y puntos del segmento $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 \in [0, 1], x_i = 0 \text{ si } i = 2, \dots, n\}$ a puntos de T .
- b. Sea $p_i := T \cap f^{-1}(b_i), i = 1, 2$. La imagen de L_1 es un entorno en $f^{-1}[a_1, b_1]$ del segmento que va de p a p_1 en T , mientras que la imagen de L_2 es un entorno en $f^{-1}[b_2, a_2]$ del segmento que va de p_2 a p' en T .

La condición a es trivial de cumplir, ya que p tiene el mismo índice que 0 y p' tiene el mismo índice que $(1, 0, \dots, 0)$, y podemos tomar los puntos de T en el entorno como una de las coordenadas ya que f crece en T por definición.

La condición b es también trivial de cumplir, ya que es solo cuestión de reducir el entorno donde están definidas g_1 y g_2 en las coordenadas que no van a T .

Observemos que las trayectorias de $\vec{\eta}(\vec{x})$ con puntos iniciales en un entorno pequeño U_1 (en $g_1^{-1}(f^{-1}(b_1))$, no en \mathbb{R}^n) de $g_1^{-1}(p_1)$ van a puntos en $g_2^{-1}(f^{-1}(b_2))$ que forman una imagen difeomorfa U_2 de U_1 , trazando un conjunto L_0 en el proceso, que es difeomorfo a $U_1 \times [0, 1]$ (referirse al **Teorema 3.3**) tal que $L_0 \cup L_1 \cup L_2$ es un entorno del segmento que va de 0 a $(1, 0, \dots, 0)$. Hay una única extensión de g_1 a un encaje suave \bar{g}_1 de $L_1 \cup L_0$ en W tal que trayectorias de $\vec{\eta}$ vayan a trayectorias de ξ y niveles de F vayan a niveles de f .

Supongamos por el momento que dos encajes de U_2 en $f^{-1}(b_2)$ dados por \bar{g}_1 y g_2 coinciden al menos en un pequeño entorno de $g_2^{-1}(p_2)$ en U_2 . Entonces g_1 y g_2 dan un difeomorfismo \bar{g} de un pequeño entorno V del segmento que va de 0 a $(1, 0, \dots, 0)$ a un entorno de T en W que preserve trayectorias y niveles. Esto implica que existe una función real, suave y positiva k definida en $\bar{g}(V)$ tal que para todos los puntos en $\bar{g}(V)$ tenemos

$$\bar{g}_* \vec{\eta} = k \xi$$

Eligiendo un entorno V del segmento suficientemente pequeño podemos asumir que

la función k está definida y es suave y positiva en todo W . Entonces $\xi' = k\xi$ sería el campo de tipo gradiente que buscamos si se cumpliera nuestra suposición.

En el caso general, ξ determina un difeomorfismo $h : f^{-1}(b_1) \rightarrow f^{-1}(b_2)$ y el campo vectorial $\vec{\eta}$ determina un difeomorfismo $h' : U_1 \rightarrow U_2$. Claramente la suposición anterior se da si y solo si h coincide con $h_0 = g_2 \circ h' \circ g_1^{-1}$ cerca de p_1 . Ahora, por el **Lema 4.3** cualquier difeomorfismo isotópico a h corresponde a un nuevo campo de tipo gradiente que difiere de ξ solo en $f^{-1}(b_1, b_2)$. Por lo tanto, obtendremos el resultado si H puede ser deformada a un difeomorfismo \bar{h} que coincida con h_0 cerca de p_1 y para el cual la nueva esfera $\bar{h}(S_R(b_1))$ en el nivel b_2 todavía tenga una sola intersección transversal con $S'_L(b_2)$, que será p_2 (en este caso, b_1 y b_2 indican el nivel en el que yacen las esferas).

Especificaremos la deformación de h requerida dando una isotopía apropiada de $h_0^{-1}h$ que deforma a $h_0^{-1}h$ en un entorno pequeño de p_1 para que coincida con la identidad en un entorno todavía más pequeño de p_1 . Observemos que, dada una alteración preliminar de g_2 si es necesario, $h_0^{-1}h$ preserva orientación en $p_1 = h_0^{-1}h(p_1)$ y además $h_0^{-1}h(S_R(b_1))$ y $S_R(b_1)$ tienen el mismo número de intersección (1 o -1) con $S_L(b_1)$ en p_1 . Aplicando el **Teorema 5.6** obtenemos el resultado.

□

Teorema 5.8

Si la intersección de S_R y S'_L es transversal y consiste de un solo punto, entonces el cobordismo es un cobordismo producto. De hecho, es posible alterar el campo de tipo gradiente ξ en un entorno arbitrariamente chico de una sola trayectoria T de p a p' , produciendo un campo vectorial ξ' que nunca se anula y cuyas trayectorias empiezan en V_0 y terminan en V_1 . Además, ξ' es un campo de tipo gradiente para una función de Morse f' sin puntos críticos que coincide con f en un entorno de $V_0 \cup V_1$.

Demostración. Primero probaremos que dado un entorno abierto U de T uno siempre puede encontrar en U un entorno U' de T tal que ninguna trayectoria pasa de estar en U' a estar fuera de U para luego volver a U' .

Asumamos que existe una trayectoria que cumple esto. Entonces existe una sucesión de trayectorias parciales $\{T_i\}$ donde T_k va de un punto r_k a un punto t_k , pasando por un punto s_k en el complemento de U en el proceso, y tanto $\{r_i\}$ como $\{t_i\}$ se acercan a T . Como

$W - U$ es compacto podemos asumir que s_k converge a $s \in W - U$. La curva integral $\psi(t, s)$ a través de s debe venir de V_0 y/o ir a V_1 , ya que de otra manera sería una segunda trayectoria uniendo p a p' . Supongamos, sin perder generalidad, que viene de V_0 . Entonces, usando la dependencia continua de $\psi(t, s')$ sobre el valor inicial s' deducimos que las trayectorias a través de todos los puntos cerca de s originan en V_0 . La trayectoria parcial $T_{s'}$, de V_0 a un punto cualquiera s' cerca de s , es compacta. Por lo tanto, la distancia entre T y $T_{s'}$ (en cualquier métrica) depende continuamente de s' y será mayor a $c > 0$ para todo s' en algún entorno de s . Como $r_k \in T_{s_k}$, el punto r_k no puede acercarse a T cuando k tiende a ∞ , lo cual es una contradicción.

Sea U cualquier entorno abierto de T tal que $\bar{U} \subseteq U_T$ (donde U_T es el abierto del lema anterior) y sea U' un entorno como los que acabamos de probar que siempre existen. Ahora probaremos que es posible alterar a ξ en un subconjunto compacto de U' , produciendo un campo vectorial ξ' que nunca se anula tal que para toda curva integral de ξ' que pasa por un punto en U está fuera de U para algún $t' < 0$ y para algún $t'' > 0$.

Sea $g_*\xi(q) = \vec{\eta}(\vec{x}) = (v(x_1), -x_2, \dots, x_n)$ como en el lema anterior. Reemplazaremos a $\vec{\eta}$ por un campo vectorial $\vec{\eta}'(\vec{x}) = (v'(x_1, \rho), -x_2, \dots, x_n)$, donde $\rho = \sqrt{x_2^2 + \dots + x_n^2}$ y:

1. $v'(x_1, \rho(\vec{x})) = v(x_1)$ fuera de un entorno compacto de $g(T)$ en $g(U')$.

2. $v'(x_1, 0)$ es negativa para todo x_1 .

Esto determina un campo vectorial ξ' en W que nunca se anula. En nuestras coordenadas locales, las ecuaciones diferenciales que satisfacen las curvas integrales de ξ' en U_T son

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= v'(x_1, \rho) \\ \frac{\partial x_i}{\partial t} &= -x_i && \text{si } i = 2, \dots, \lambda + 1 \\ \frac{\partial x_i}{\partial t} &= x_i && \text{si } i = \lambda + 2, \dots, n \end{aligned}$$

Consideremos la curva integral $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ con valor inicial (x_1^0, \dots, x_n^0) .

Si alguno de $x_{\lambda+2}^0, \dots, x_n^0$ es distinto de 0, asumamos sin perder generalidad que se trata de x_n^0 , entonces $|x_n(t)| = |x_n^0 e^t|$ crece exponencialmente y $\vec{x}(t)$ eventualmente abandona $g(U)$, ya que $g(\bar{U})$ es compacto y por lo tanto finito. Si no se da esta suposición, entonces $\rho(\vec{x}(t)) = e^{-t} \sqrt{(x_2^0)^2 + \dots + (x_{\lambda+}^0)^2}$ decrece exponencialmente. Supongamos que $\vec{x}(t)$ permanece en $g(U)$. Como $v'(x_1, \rho(\vec{x}))$ es negativo en x_1 , existe $\delta > 0$ tal que $v'(x_1, \rho(\vec{x}))$ es negativo en el conjunto compacto $K_\delta = \{\vec{x} \in g(\bar{U}) : \rho(\vec{x}) \leq \delta\}$. Entonces $v'(x_1, \rho(\vec{x}))$ es menor a $-\alpha < 0$ en K_δ . Eventualmente $\rho(\vec{x}(t)) \leq \delta$, y a partir de ese momento tenemos

$$\frac{\partial x_1(t)}{\partial t} \leq -\alpha$$

Por lo tanto, $\vec{x}(t)$ debe eventualmente abandonar el conjunto acotado $g(U)$.

El siguiente paso será probar que toda trayectoria del campo vectorial ξ' va de V_0 a V_1 . Como acabamos de probar, cualquier curva integral de ξ' que está en algún momento en U' en algún momento debe estar fuera de U . Al salir de U' sigue trayectorias de ξ' , por lo que al estar fuera de U permanecerá fuera de U' permanentemente, como ya probamos. Consecuentemente, deberá seguir una trayectoria de ξ' que hasta V_1 . Un argumento análogo muestra que proviene de V_0 . Si una curva integral de ξ' nunca está en U' es una curva integral de ξ que va de V_0 a V_1 .

Finalmente, probaremos que ξ' es un campo de tipo gradiente para una función de Morse g en W (sin puntos críticos) que coincide con f en un entorno de $V_0 \cup V_1$.

Como ξ' determina naturalmente un difeomorfismo φ entre (W, V_0, V_1) y $([0, 1] \times V_0, 0 \times V_0, 1 \times V_0)$ (referirse a la prueba del **Teorema 3.3**), bastará con encontrar una función de Morse $g : [0, 1] \times V_0 \rightarrow [0, 1]$ tal que $\frac{\partial g}{\partial t} > 0$ y g coincida con $f_1 = f \circ \varphi$ cerca de $(0 \times V_0) \cup (1 \times V_0)$ (asumimos que $V_0 = f^{-1}(0)$ y $V_1 = f^{-1}(1)$). Claramente existe $\delta > 0$ tal que para todo $q \in V_0$ se da $\frac{\partial f_1}{\partial t}(t, q) > 0$ si $t < \delta$ o $t > 1 - \delta$. Sea $\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función suave que se anula en $[\delta, 1 - \delta]$ y que es igual a 1 en un entorno de 0 y de 1. Consideremos la función

$$g(u, q) = \int_0^u \left[\lambda(t) \frac{\partial f_1}{\partial t}(t, q) + [1 - \lambda(t)] k(q) \right] dt$$

donde

$$k(q) = \frac{1 - \int_0^1 \lambda(t) \frac{\partial f_1}{\partial t}(t, q) dt}{\int_0^1 [1 - \lambda(t)] dt}$$

Eligiendo δ suficientemente pequeño podemos asumir $k(q) > 0$ para todo $q \in V_0$. Con una verificación sencilla tenemos $g(0, q) = 0$ y $g(1, q) = 1$ para todo $q \in V_0$. Derivando según u tenemos que la derivada de g será positiva, porque la expresión dentro de la integral es positiva en $[0, 1]$ por construcción. Entonces g es la función de Morse que buscamos. \square

Finalmente, citamos el siguiente resultado debido a René Thom, que se prueba con argumentos similares a los empleados en este capítulo:

Teorema 5.9

Sea M una subvariedad suave y compacta de una variedad suave N sin borde. Si h_t , $0 \in [0, 1]$ es una isotopía suave de la inclusión de M en N , entonces h_t es la restricción de una isotopía suave de la identidad en N que fija puntos fuera de un compacto de N .

Para una prueba completa, ver [Tho56].

6. UN TEOREMA DE CANCELACIÓN MÁS FUERTE

Usaremos homología singular con coeficientes enteros a lo largo de la monografía a no ser que se explicita lo contrario.

Sean M y M' subvariedades suaves de dimensión r y s en una variedad suave V de dimensión $r + s$ que se intersectan transversalmente en los puntos p_1, \dots, p_k . Supongamos que tanto M como el haz normal $\nu(M')$ están orientados. En p_i elegimos un r -marco ξ_1, \dots, ξ_r de vectores linealmente independientes que generen $T_{p_i}M$. Como la intersección en p_i es transversal, los vectores ξ_1, \dots, ξ_r representan una base de la fibra de $\nu(M')$ en p_i .

Definición 6.1

El número de intersección de M y M' en p_i se define como $+1$ (respectivamente -1) si los vectores ξ_1, \dots, ξ_r representan una base positivamente (respectivamente negativamente) orientada para la fibra en p_i de $\nu(M')$. El número de intersección $M' \cdot M$ de M y M' es la suma de los números de intersección en los puntos p_i (es decir, en los puntos donde se intersectan). En la expresión $M' \cdot M$ escribiremos siempre primera a la variedad con haz normal orientado.

Notemos que si V está orientada, una subvariedad N es orientable si y solo si su haz normal es orientable. De hecho, dada una orientación para N hay una forma natural de dar una orientación a $\nu(N)$ y viceversa. Lo que se hace es requerir que en cualquier punto de N una frame tangente positivamente orientada “completada” por una frame positivamente orientada en $\nu(N)$ sea una frame positivamente orientada en V .

Por lo tanto, si V está orientada existe una forma natural de orientar $\nu(M)$ y M' . Con estas orientaciones tenemos:

$$M \cdot M' = (-1)^{rs} M' \cdot M$$

Esto se debe a que, si denotamos por (ξ'_1, \dots, ξ'_s) la base de M' en p_i y acomodamos los haces normales para que sus bases coincidan con las bases de la otra variedad en p_i , queremos comparar las orientaciones de $(\xi_1, \dots, \xi_r, \xi'_1, \dots, \xi'_s)$ y $(\xi'_1, \dots, \xi'_s, \xi_1, \dots, \xi_r)$. Es claro que en este caso con rs trasposiciones se llega de una base a la otra.

Si la orientación y la orientación del haz normal no están relacionadas de esta manera, de todas formas seguimos teniendo $M \cdot M' = \pm M' \cdot M$ dado que V es orientable.

Ahora asumamos que M , M' y V son variedades compactas, conexas y sin borde. Citamos ahora el siguiente corolario del teorema del isomorfismo de Thom (ver [MS62]) y del **Teorema 3.1**.

Lema 6.1

Con M' y V como establecimos, hay un isomorfismo natural $\psi : H_0(M') \rightarrow H_r(V, V - M')$.

Las isotopías de ambiente de M' dan naturalmente una isotopía de M' con su imagen final, por lo que $H_0(M')$ se preserva bajo estas. Tenemos que M' es una variedad diferenciable conexa, por lo que $H_0(M') \cong \mathbb{Z}$. Sea α el generador canónico de $H_0(M') \cong \mathbb{Z}$. Como α es un generador, debe ser 1 o -1 bajo un isomorfismo a \mathbb{Z} . Por lo tanto, también debe serlo $\psi(\alpha)$.

Como M es orientable, $H_r(M) \cong \mathbb{Z}$. Sea $[M] \in H_r(M)$ el generador canónico. Las isotopías preservan $H_r(M)$ y $[M]$ de la misma manera.

Por lo tanto, el siguiente lema prueba que $M' \cdot M$ es invariante con respecto a isotopías del encaje de M e isotopías del ambiente de M' . Esto implica que, si M y M' son cerradas y conexas, de dimensión complementaria, podemos definir $M' \cdot M$ inclusive si las intersecciones no son todas transversales.

Lema 6.2

Si $A \cap M' = \emptyset$, en la sucesión

$$H_r(M) \xrightarrow{g_1} H_r(V, A) \xrightarrow{g_2} H_r(V, V - M')$$

donde g_1 y g_2 son inducidos por inclusión, tenemos $g_2 \circ g_1([M]) = (M' \cdot M)\psi(\alpha)$.

Demostración. Primero probaremos el lema para el caso $A = \emptyset$. Elijamos r -celdas abiertas y disjuntas U_1, \dots, U_k en M que contengan a p_1, \dots, p_k respectivamente. La naturalidad del isomorfismo de Thom implica que el mapa inducido por la inclusión

$$H_r(U_i, U_i - p_i) \rightarrow H_r(V, V - M')$$

es un isomorfismo dado por $\gamma_i \rightarrow \varepsilon_i \psi(\alpha)$, donde γ_i es el generador de orientación de $H_r(U_i, U_i - p_i)$ y ε_i es el número de intersección de M y M' en p_i . El siguiente diagrama conmutativo, en el cual el isomorfismo h surge mediante excisión y el hecho de que las

U_i son disjuntas y los de más homomorfismos son inducidos por la inclusión, completará la prueba:

$$\begin{array}{ccccc}
 H_r(M) & \xrightarrow{g_1} & H_r(V) & \xrightarrow{g_2} & H_r(V, V - M') \\
 g'_1 \downarrow & & \nearrow g'_2 & & \uparrow m \\
 H_r(M, M - M \cap M') & \xrightarrow{h} & \Sigma_{i=1}^k H_r(U_i, U_i - p_i) & &
 \end{array}$$

El diagrama conmuta porque $g_2 \circ g_1 = g'_2 \circ g'_1$ por estar inducidos todos los homomorfismos por inclusión y porque $g'_2 = m \circ h$ ya que h es un isomorfismo y m y g'_2 están inducidos por inclusión. Entonces $g_2 \circ g_1([M]) = m(h(g'_1)) = m(\sum_{i=1}^k \varepsilon_i \gamma_i) = (M' \cdot M)\psi(\alpha)$.

Si $A \neq \emptyset$, basta con notar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_r(V) & & \\
 & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\
 H_r(M) & \longrightarrow & H_r(V, A) & \longrightarrow & H_r(V, V - M')
 \end{array}$$

Esto se debe a que las proyecciones que inducen los homomorfismos del diagrama conmutan de la misma manera. \square

Ahora podemos reforzar el **Teorema 5.8**. Volviendo a la hipótesis del teorema, sea $(W; V_0, V_1)$ una tríada con una función de Morse f con un campo de tipo gradiente ξ y p, p' tales que $f(p) < \frac{1}{2} < f(p')$ los dos puntos críticos de f , de índices $\lambda, \lambda + 1$ respectivamente. Supongamos que le hemos dado una orientación a la esfera S'_L en $V = f^{-1}(\frac{1}{2})$ y al haz normal en V de la esfera S_R .

Teorema 6.3

*Supongamos que W, V_0 y V_1 son simplemente conexas y $\lambda \geq 2, \lambda + 1 \leq n - 3$ (notar que esto implica $n \geq 6$). Si $S_R \cdot S'_L = \pm 1$, entonces ξ puede ser alterado cerca de V de manera que las nuevas esferas se intersecten en un solo punto, de manera transversal, lo cual nos permite aplicar el **Teorema 5.8**.*

Probar este teorema será el objetivo del resto del capítulo.

Primero observaremos que $V = f^{-1}(\frac{1}{2})$ es simplemente conexa:

Aplicando el teorema de van Kampen (ver el Apéndice) con $X = V \cup D_R^{n-\lambda}(p)$, $U_1 = V$, $U_2 = D_R^{n-\lambda}(p)$ tenemos $\pi_1(V \cup D_R^{n-\lambda}(p)) \cong \pi_1(D_R^{n-\lambda}(p)) *_{\pi_1(S_R^{n-\lambda}(p))} \pi_1(V) \cong \pi_1(V)$, donde usamos $\pi_1(D_R^{n-\lambda}(p)) = 1$ y $\pi_1(S_R^{n-\lambda}(p)) = 1$, en este último caso porque $n - \lambda \geq 4 > 2$.

Aplicando el teorema una segunda vez de manera completamente análoga, tenemos $\pi_1(V) \cong \pi_1(D_R^{n-\lambda}(p) \cup V \cup D_L^{\lambda+1}(q))$. Por el **Teorema 3.8** la inclusión $D_R^{n-\lambda}(p) \cup V \cup D_L^{\lambda+1}(q) \subseteq W$ es una equivalencia homotópica. Por lo tanto, como W es simplemente conexa por hipótesis, $\pi_1(V) = 1$.

Notemos también que la conclusión del teorema se cumple trivialmente si $\lambda = 0$ o $\lambda = n - 1$.

Dando vuelta la tríada obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 6.3.1

Si las condiciones para λ las reemplazamos por $\lambda \geq 3$, $\lambda + 1 \leq n - 2$, el resultado sigue siendo cierto.

Demostración. Orientando a S_R y a $\nu S'_L$ en V , como W es orientable (por ser simplemente conexa), V es orientable, y por lo tanto, como ya detallamos anteriormente, se deduce $S'_L \cdot S_R = \pm S_R \cdot S'_L = \pm 1$. Aplicando el teorema a la función de Morse $-f$ con el campo de tipo gradiente $-\xi$ obtenemos el resultado (notar que con $-f$ los diferenciales de los puntos se multiplican por -1 , y por lo tanto un punto de índice k se convierte en un punto de índice $n - k$). \square

La prueba del **Teorema 6.3** se basará en el siguiente teorema, esencialmente debido a Whitney (ver [Whi44]):

Teorema 6.4

Sean M y M' subvariedades cerradas y suaves de dimensiones r y s que se intersectan transversalmente en una variedad V (sin borde) de dimensión $r + s$. Supongamos que M está orientada y que el haz normal de M' en V está orientado. Además, supongamos que $r + s \geq 5$, $s \geq 3$ y, si $r = 1$ o $r = 2$, supongamos que el mapa inducido por la inclusión $\pi_1(V - M') \rightarrow \pi_1(V)$ es inyectivo.

Sean $p, q \in M \cap M'$ puntos con números de intersección opuestos tales que existe un lazo L contractible en V que consiste de un arco suavemente encajado en M de p a

q seguido de otro encajado en M' de q a p , donde ninguno de los dos arcos intersectan a $M \cap M' - \{p, q\}$.

Con estas asunciones, existe una isotopía $h_t, 0 \leq t \leq 1$, de la identidad $i : V \rightarrow V$ tal que:

1. La isotopía deja fija a i cerca de $M \cap M' - \{p, q\}$.
2. $h_1(M) \cap M' = M \cap M' - \{p, q\}$.

Demostración del Teorema 6.3. Por el **Teorema 5.2** podemos ajustar a ξ para que S_R y S'_L se intersecten transversalmente. Si $S_R \cap S'_L$ no es un solo punto, entonces $S_R \cdot S'_L = \pm 1$ implica que existe un par de puntos p_1, q_1 en $S_R \cap S'_L$ con números de intersección opuestos. Aplicando el **Teorema 6.4**, luego de ajustar ξ usando el **Lema 4.3**, S_R y S'_L tendrán dos puntos de intersección menos. Por lo tanto, solo hay que repetir el proceso finitas veces para que S_R y S'_L se intersecten transversalmente en un solo punto, con lo que la prueba estaría completa.

Como V es simplemente conexa, es claro que en el caso $\lambda \geq 3$ todas las condiciones del **Teorema 6.4** se cumplen. Si $\lambda = 2$, quedaría mostrar que $\pi_1(V - S_R) \rightarrow \pi_1(V)$ es inyectiva (es decir, que $\pi_1(V - S_R)$ es trivial). Ahora, las trayectorias de ξ determinan un difeomorfismo entre $V_0 - S_L$ y $V - S_R$, donde S_L denota la 1-esfera a izquierda de p en V_0 . Sea N un entorno producto de S_L en V_0 . Como $n - \lambda - 1 = n - 3 \geq 3$, tenemos $\pi_1(N - S_L) \cong \pi_1((\mathbb{R}^n - 0) \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$. Por lo tanto, tenemos:

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(V_0) = 1 & \\
 \nearrow & & \nwarrow \\
 \pi_1(V_0 - S_L) & & \pi_1(N) = \mathbb{Z} \\
 \nwarrow & & \nearrow \\
 & \pi_1(V_0 - S_L \cap N) = \pi_1(N - S_L) = \mathbb{Z} &
 \end{array}$$

Aplicando el teorema de van Kampen (ver el Apéndice) tenemos que el producto libre con amalgamación de $\pi_1(N - S_L)$ entre $\pi_1(V_0 - S_L)$ y $\pi_1(N)$ es trivial. A la vez, la inclusión de $\pi_1(N - S_L)$ en $\pi_1(N)$ es un isomorfismo. Por lo tanto, tenemos que $\pi_1(V_0 - S_L)$ (y por lo tanto $\pi_1(V - S_R)$) es trivial. \square

Demostración del Teorema 6.4. Supongamos que los números de intersección en p y q son $+1$ y -1 respectivamente. Sean C y C' arcos suavemente encajados en M y M' de p a q extendidos (arbitrariamente poco) en los extremos. Sean C_0 y C'_0 arcos abiertos en el plano encerrando un disco D (con dos vértices), como en la figura 1. Luego, elijamos un encaje $\varphi_1 : C_0 \cup C'_0 \rightarrow M \cup M'$ tal que $\varphi_1(C_0)$ y $\varphi_1(C'_0)$ son los arcos C y C' , con a y b correspondientes a p y q . El teorema se deducirá del siguiente lema:

Lema 6.5

Para algún entorno U de D podemos extender $\varphi_1|_{U \cap (C_0 \cup C'_0)}$ a un encaje $\varphi : U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1} \rightarrow V$ tal que $\varphi^{-1}(M) = (U \cap C_0) \times \mathbb{R}^{r-1} \times 0$ y $\varphi^{-1}(M') = (U \cap C'_0) \times 0 \times \mathbb{R}^{s-1}$.

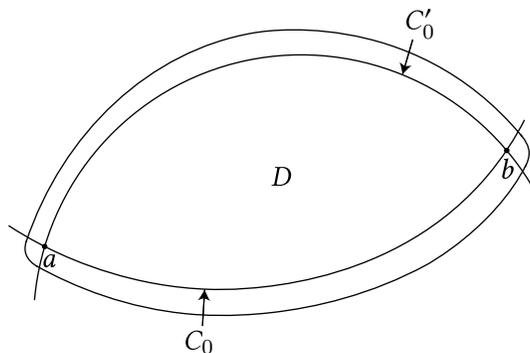


Figura 8: Dibujo esquemático de U

Asumiendo este lema por el momento, construiremos una isotopía $F_t : V \rightarrow V$ tal que F_0 es la identidad, $F_1(M) \cap M' = M \cap M' - \{p, q\}$, y F_t es la identidad fuera de la imagen de φ , $0 \leq t \leq 1$.

Sea $W = \varphi(U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1})$ y definamos F_t como la identidad en $V - W$. Para definir F_t en W , primero elijamos una isotopía suave $G_t : U \rightarrow U$ de nuestro modelo plano tal que:

1. G_0 es la identidad.
2. G_t es la identidad en un entorno del borde $\bar{U} - U$ de U , $0 \leq t \leq 1$.
3. $G_1(U \cap C_0) \cap C'_0 = \emptyset$.

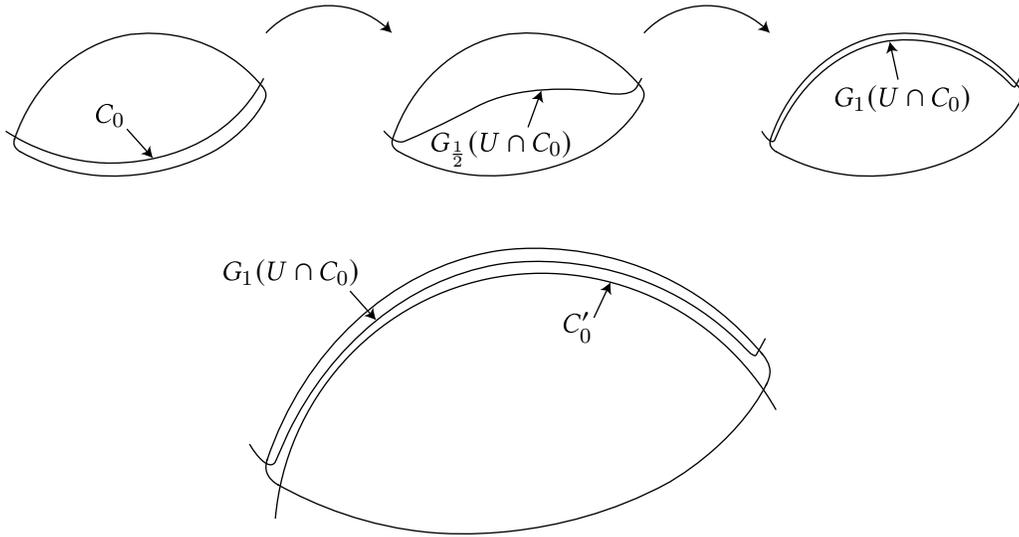


Figura 9: Dibujo esquemático de G .

Sea $\rho : \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1} \rightarrow [0, 1]$ una función suave tal que para $x \in \mathbb{R}^{r-1}$, $y \in \mathbb{R}^{s-1}$:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 \geq 2 \end{cases}$$

Definamos una isotopía $H_t : U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1} \rightarrow U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1}$ mediante

$$H_t(u, x, y) = (G_{t\rho(x,y)}(u), x, y)$$

donde $u \in U$. Definamos $F_t(w) = \varphi \circ H_t \circ \varphi^{-1}(w)$, con $w \in W$, y recordemos que F_t está definida como la identidad fuera de W , para $t \in [0, 1]$.

$H_t(u, x, y)$ es la identidad si $|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 \geq 2$. A la vez, H_t es la identidad cerca del borde de \bar{U} . Por lo tanto, no surgen problemas de regularidad para H_t en ∂W para ningún $t \in [0, 1]$. Es claro que H_t es suave dentro de W por ser composición de funciones suave. Además, los únicos puntos de $M \cap M'$ que pertenecen a W son p y q , ya que $\varphi^{-1}(M) \cap \varphi^{-1}(M') = U \cap C_0 \cap C'_0 \times 0 \times 0 = \{a, b\}$ y φ es inyectiva. Si nos restringimos a W :

$$\varphi(H_1(\varphi^{-1}(M))) \cap M' = \varphi(G_1(U \cap C_0) \times 0 \times 0) \cap \varphi((U \cap C'_0) \times 0 \times 0) = \emptyset$$

donde la última igualdad se da porque φ es inyectiva y $G_1(U \cap C_0) \cap (C'_0 \cap U) = \emptyset$ por construcción. Como F es la identidad fuera de W , $F_1(M) \cap M' = M \cap M' - \{p, q\}$. por lo que F es la isotopía que buscábamos. \square

Para demostrar el **Lema 6.5** precisaremos el siguiente lema:

Lema 6.6

Existe una métrica Riemanniana en V tal que:

1. En la conexión asociada (ver [Mil63]), M y M' son subvariedades totalmente geodésicas de V .
2. Existen entornos coordenados N_p y N_q de p y q en los cuales la métrica es la métrica euclidiana y tales que $N_p \cap C$, $N_p \cap C'$, $N_q \cap C$ y $N_q \cap C'$ son segmentos de recta (perpendiculares en los casos en que se intersecten).

Demostración. Sabemos que M intersecta a M' transversalmente en los puntos p_1, \dots, p_k con $p = p_1$ y $q = p_2$. Cubramos $M \cup M'$ con entornos coordenados W_1, \dots, W_m en V con difeomorfismo de coordenada $h_i : W_i \rightarrow \mathbb{R}^{r+s}$, $i = 1, \dots, m$, tales que:

- a. Existen entornos coordenados disjuntos N_1, \dots, N_k con $p_i \in N_i \subseteq \overline{N_i} \subseteq W_i$ y $N_i \cap W_j = \emptyset$ para $i = 1, \dots, k$ y $j = k + 1, \dots, m$.
- b. $h_i(W_i \cap M) \subseteq \mathbb{R}^r \times 0$ y $h_i(W_i \cap M') \subseteq 0 \times \mathbb{R}^s$ para $i = 1, \dots, k$.
- c. $h_i(W_i \cap C)$ y $h_i(W_i \cap C')$ son segmentos de recta en \mathbb{R}^{r+s} , $i = 1, 2$.

Construyamos una métrica Riemanniana $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ en el conjunto abierto $W_0 = W_1 \cup \dots \cup W_m$ con las métricas en los W_i inducidas por las h_i , $i = 1, \dots, m$, usando una partición de la unidad. Notemos que por **a** esta métrica es euclidiana en los N_i .

Con esta métrica construyamos entornos tubulares abiertos T y T' de M y M' en W_0 usando el mapa exponencial (ver [Lan64]). Eligiéndolos suficientemente finos podemos asumir que $T \cap T' \subseteq N_1 \cup \dots \cup N_k$ y que

$$h_i(T \cap T' \cap N_i) = (\mathbb{D}_\varepsilon^r)^\circ \times (\mathbb{D}_\varepsilon^s)^\circ \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s = \mathbb{R}^{r+s}$$

para $i = 1, \dots, k$ y para algunos $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ dependiendo de i .

Sea $A : T \rightarrow T$ la involución ($A^2 = A \circ A = Id$) suave que es el mapa antipodal en cada fibra de T . Definimos una nueva métrica Riemanniana $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_A$ en T mediante $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_A = \frac{1}{2}(\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle A_*\vec{v}, A_*\vec{w} \rangle)$.

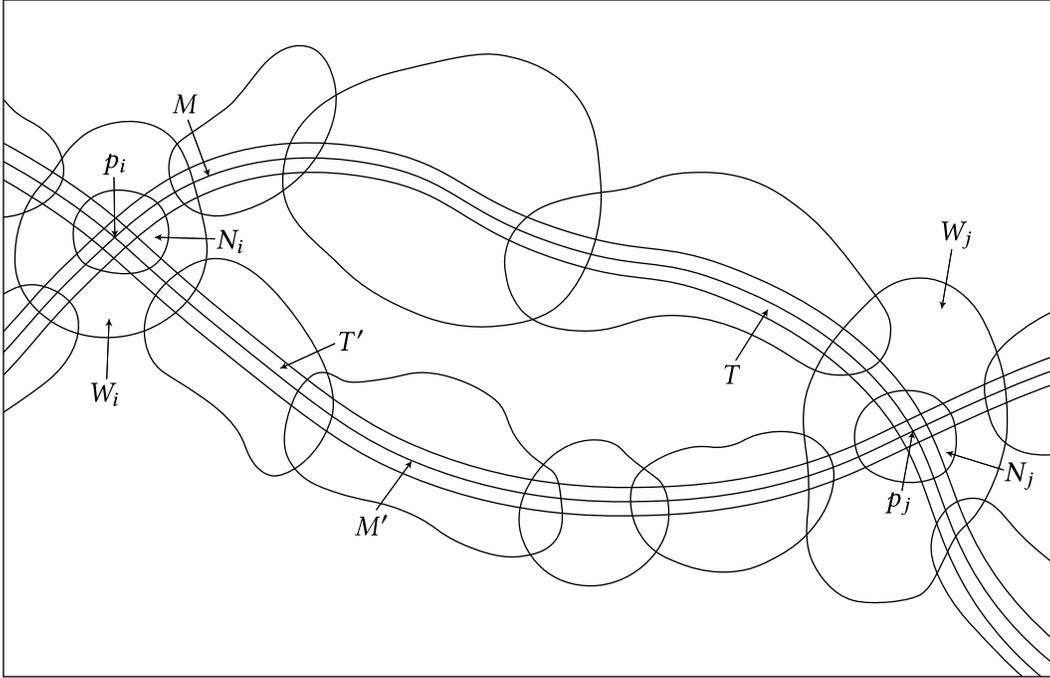


Figura 10: Dibujo esquemático de la construcción de la métrica Riemanniana.

Con respecto a esta nueva métrica, M es una subvariedad completamente geodésica de T . Para ver esto, sea ω una geodésica en T tangente a M en algún punto $z \in M$. Como tenemos por construcción $A^2 = Id$, A es una isometría de T en la nueva métrica ($\langle dAv, dAw \rangle = \langle d(A^{-1})v, d(A^{-1})w \rangle$, por lo que $\langle d(A^2)v, d(A^2)w \rangle = \langle v, w \rangle$), y por lo tanto manda geodésicas en geodésicas. Como M es el conjunto de puntos fijos de A , se deduce que $A(\omega)$ y ω son geodésicas con el mismo vector tangente en $A(z) = z$. Por la unicidad de geodésicas, A es la identidad en ω . Por lo tanto, $\omega \subseteq M$, por lo que M es totalmente geodésica.

Definamos de forma análoga una nueva métrica $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_{A'}$ en T' . Se deduce de la propiedad **b** y la forma de $T \cap T'$ que estas dos nuevas métricas coinciden con la vieja métrica en $T \cap T'$ y por lo tanto definen juntas una métrica en $T \cup T'$. Extendiendo a toda V la

restricción de esta métrica a un abierto O , con $M \cup M' \subseteq O \subseteq \overline{O} \subseteq T \cup T'$, completamos la construcción de una métrica en V que satisface las condiciones **1** y **2**. \square

Demostración del Lema 6.6. Usemos el **Lema 6.6** para elegir una métrica Riemanniana en V . Sean $\tau(p), \tau(q), \tau'(p), \tau'(q)$ los vectores unitarios tangentes a los arcos C y C' (orientados de p a q) en p y q . Como C es un espacio contractible, el haz sobre C de vectores ortogonales a M es trivial. Usando esto construimos un campo de vectores unitarios a lo largo de C ortogonal a M e igual a los transportes paralelos de $\tau'(p)$ y de $-\tau'(q)$ a lo largo de $N_p \cap C$ y $N_q \cap C$ respectivamente. Construyamos un campo vectorial correspondiente en el modelo.

Usando el mapa exponencial, vemos que existen entornos de C_0 en el plano y una extensión de $\varphi_1|_{C_0}$ a un encaje de este entorno en V . En realidad, el mapa exponencial nos da un encaje local, y luego usamos el siguiente lema (que citamos sin prueba; ver [Mun63, pág. 49]):

Lema 6.7

Sea A_0 un subconjunto cerrado de un espacio métrico compacto A . Sea $f : A \rightarrow B$ un homeomorfismo local tal que $f|_{A_0}$ es inyectiva. Entonces existe un entorno W de A_0 tal que $f|_W$ es inyectiva.

Similarmente extendamos $\varphi_1|_{C'_0}$ a un encaje de un entorno de C'_0 usando un campo de vectores unitarios a lo largo de C' ortogonal a M' que a lo largo de $N_p \cap C'$ y $N_q \cap C'$ consiste de los transportes paralelos de $\tau(p)$ y $-\tau(q)$ respectivamente. Cuando $r = 1$ esto es posible solo porque los números de intersección en p y q son opuestos.

Usando la propiedad **2** de la métrica en V vemos que los encajes coinciden en un entorno de $C_0 \cup C'_0$ (ya que en la geometría euclidiana los transportes paralelos que usamos conmutan) y por lo tanto definen un encaje

$$\varphi_2 : N \rightarrow V$$

del entorno anular cerrado N de ∂D tal que $\varphi_2^{-1}(M) = N \cap C_0$ y $\varphi_2^{-1}(M') = N \cap C'_0$. Sea S el borde interno de N y sea $D_0 \subseteq D$ el disco que encierra S en el plano.

Como L es homotópico al lazo $\varphi_2(S)$, este último es contractible en V . De hecho, $\varphi_2(S)$ es contractible en $V - (M \cup M')$, como mostrará el siguiente lema:

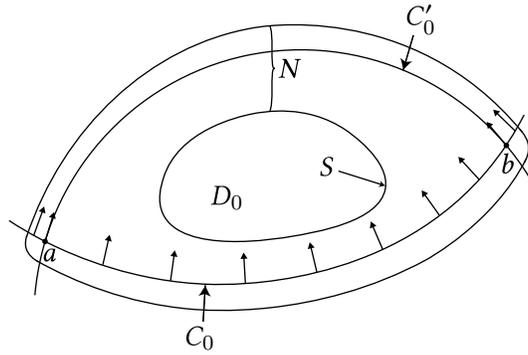


Figura 11: Dibujo esquemático de N , donde podemos definir el encaje ayudados por la métrica Riemanniana construida previamente.

Lema 6.8

Si V_1^n , $n \geq 5$, es una variedad suave, M_1 una subvariedad suave de codimensión al menos 3, entonces un lazo en $V_1 - M_1$ que es contractible en V_1 es también contractible en $V_1 - M_1$.

Para probar este lema, usaremos los siguientes lemas:

Lema 6.9 (ver [Mil58])

Sea $f : M_1 \rightarrow M_2$ una función continua entre variedades suaves que es suave en un conjunto cerrado A de M_1 . Entonces existe una función suave $g : M_1 \rightarrow M_2$ tal que $g \cong f$ (g es homotópico a f) y $g|_A = f|_A$

Lema 6.10 (ver [Whi36] y [Mil58])

Sea $f : M_1 \rightarrow M_2$ una función suave entre variedades suaves que es un encaje de un subconjunto cerrado A de M_1 . Asumamos que $\dim(M_2) \geq 2 \dim(M_1) + 1$. Entonces existe un encaje $g : M_1 \rightarrow M_2$ aproximando f tal que $g \cong f$ y $g|_A = f|_A$.

Demostración del Lema 6.8. Sea $g : (\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1) \rightarrow (V_1, V_1 - M_1)$ una contracción en V_1 de un lazo en $V_1 - M_1$. Como $\dim(V_1 - M_1) \geq 5$, los lemas nos proveen de un encaje suave

$$h : (\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1) \rightarrow (V_1, V_1 - M_1)$$

tal que $g|_{\mathbb{S}^1}$ es homotópica a $h|_{\mathbb{S}^1}$ en $V_1 - M_1$.

El haz normal de $h(\mathbb{D}^2)$ es trivial porque $h(\mathbb{D}^2)$ es contractible. Entonces existe un encaje H de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ en V_1 tal que $H(u, 0) = h(u)$ para $u \in \mathbb{D}^2$. Tomemos $\varepsilon > 0$ suficientemente chico como para que $|\vec{x}| < \varepsilon$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n-2}$ implique $H(\mathbb{S}^1 \times \vec{x}) \subseteq V_1 - M_1$. Como la codimensión de M_1 es mayor o igual a 3, por el **Lema 4.2** existe $x_0 \in \mathbb{R}^{n-2}$, $|\vec{x}_0| < \varepsilon$, tal que $H(\mathbb{D}^2 \times \vec{x}_0) \cap M_1 = \emptyset$. En $V_1 - M_1$ tenemos $g|_{\mathbb{S}^1} \cong h|_{\mathbb{S}^1} = H|_{\mathbb{S}^1 \times 0} \cong H|_{\mathbb{S}^1 \times \vec{x}_0}$, y este último es homotópico a una constante por construcción. \square

Ahora podemos mostrar que $\varphi(S)$ es contractible en $V - M \cup M'$. Es contractible en $V - M'$ por el lema que acabamos de probar si $r \geq 3$, y si $r = 1$ o $r = 2$ porque por hipótesis el mapa inducido por la inclusión $\pi_1(V - M') \rightarrow \pi_1(V)$ es inyectivo. Entonces, como $s \geq 3$, $\varphi(S)$ es también contractible en $(V - M') - M = V - (M \cup M')$, una vez más por el lema recién probado.

Ahora elegimos una extensión continua de φ_2 a $U = N \cup D_0$

$$\varphi'_2 : U \rightarrow V$$

que cumpla que la imagen de D° esté dentro de $V - (M \cup M')$. Aplicando el **Lema 6.9** y el **Lema 6.10** a $\varphi'_2|_{D^\circ}$ obtenemos un encaje suave $\varphi_3 : U \rightarrow V$ que coincide con φ_2 en un entorno de $U - D^\circ$ y tal que $\varphi_3(u) \notin M \cup M'$ para $u \notin C_0 \cup C'_0$.

Solo queda extender φ_3 a $U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1}$. Para esto, primero probaremos dos resultados sobre frames.

Definición 6.2

Una **variedad de Stiefel** es una variedad formada por p -frames ortonormales en \mathbb{R}^n . La denotaremos $V_p(\mathbb{R}^n)$.

Lema 6.11

$\pi_j(V_p(\mathbb{R}^n))$ es trivial para $j = 0, \dots, n - p - 1$.

Demostración. Primero, notemos que el enunciado no implica nada para el caso $n = 1$, por lo que podemos asumir $n \geq 2$. Representaremos cada elemento $v \in V_p(\mathbb{R}^n)$ (y, más generalmente, un conjunto de p vectores cualquiera en \mathbb{R}^n) mediante la matriz $(a_{ij})_{n \times p}$ de las coordenadas en \mathbb{R}^n de cada vector de la p -frame. Denotamos \vec{a}_i al vector (a_{1i}, \dots, a_{ni}) .

Sea $\varphi : \mathbb{S}^j \rightarrow V_p(\mathbb{R}^n)$ un representante de un elemento de $\pi_j(V_p(\mathbb{R}^n))$. Probaremos que existe una isotopía h_t de $\varphi(\mathbb{S}^j)$ en $V_p(\mathbb{R}^n)$ tal que, para todo $v \in \varphi(\mathbb{S}^j)$, si $h_1(v) = (b_{ij})$ entonces $b_{11} = 1$ y $b_{i1} = 0$ para $i = 2, \dots, n$.

Si $v \in \varphi(\mathbb{S}^j)$ y v está representado por (a_{ij}) , definimos h de la siguiente manera: sea P el plano generado por \vec{a}_1 y e_1 (podemos, sin perder generalidad, elegir e_1 de manera que no sea colineal con \vec{a}_1 para ningún v gracias a que $j < n - 1$). Luego descomponemos cada \vec{a}_i como el componente \vec{p}_i del vector en P y el componente \vec{q}_i perpendicular a P . Definimos (p_{ij}) y (q_{ij}) como en el primer párrafo con los conjuntos $\{\vec{p}_i : i = 1, \dots, p\}$ y $\{\vec{q}_i : i = 1, \dots, p\}$ respectivamente. Claramente tenemos $(a_{ij}) = (p_{ij}) + (q_{ij})$.

En el plano P tenemos una isotopía r_t de \vec{a}_1 a e_1 , que es simplemente rotar $t\alpha$, donde α es el ángulo de \vec{a}_1 a e_1 . Definimos $(p_{ij}^t) = r_t((p_{ij}))$, donde se sobreentiende que estamos aplicando r_t a cada vector individualmente. Finalmente, definimos $h_t(v) = (p_{ij}^t) + (q_{ij})$. La continuidad se debe a que todos los pasos de la construcción varían continuamente con v , y el resto de las propiedades son fáciles de verificar.

Tenemos que para todo $v \in h_1(\varphi(\mathbb{S}^j))$ los vectores \vec{b}_i de su representación cumplen $b_{11} = 1$ y $b_{i1} = 0$ para $i = 2, \dots, n$. Sea M el subespacio generado por $\vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p$. Mediante el isomorfismo lineal $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ tal que $f(\vec{b}_i) = e_{i-1}$, tenemos que podemos aplicar el mismo razonamiento sucesivamente hasta llegar al problema para $V_1(\mathbb{R}^{n-p+1})$, que es claramente isomorfo a \mathbb{S}^{n-p} . Llegada esta situación, φ ha inducido una función continua $\hat{\varphi} : \mathbb{S}^j \rightarrow \mathbb{S}^{n-p}$. Esta tiene una isotopía a la identidad si $j \leq n - p - 1$, ya que $\pi_j(\mathbb{S}^{n-p})$ es trivial en ese caso. Por lo tanto, tenemos una isotopía de φ a la identidad, por lo que $\pi_j(V_p(\mathbb{R}^n))$ es trivial. \square

Corolario 6.11.1

$SO(n)$ es conexo.

Demostración. Como las bases ortonormales de $SO(n)$ por definición comparten orientación, podemos ver a $SO(n)$ como el subconjunto de $V_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ de $n - 1$ -frames cuyo primer vector es e_1 . Usando la isotopía del lema pasado, concluimos el resultado (ya que \mathbb{S}^1 es conexo). \square

Sea $U' = \varphi_3(U)$, y por conveniencia escribiremos C, C', C_0 y C'_0 en lugar de $U' \cap C, U' \cap C', U \cap C_0$ y $U \cap C'_0$ respectivamente.

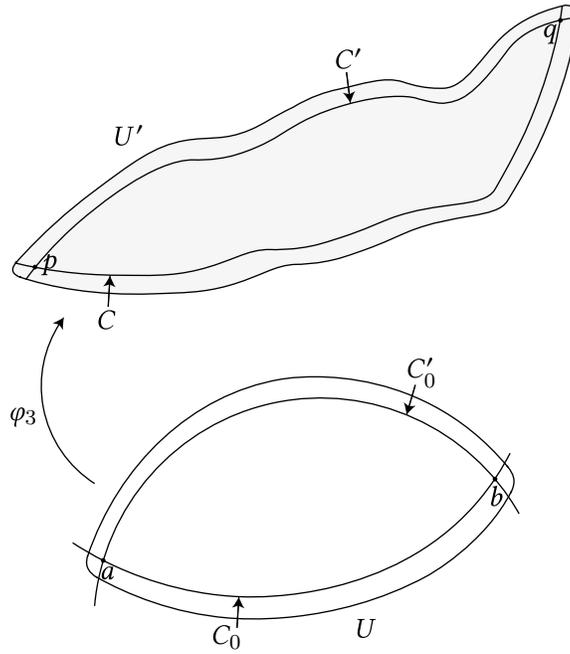


Figura 12: Dibujo esquemático de φ_3 .

Lema 6.12

Existen campos vectoriales $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}, \eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ a lo largo de U' que son ortonormales y ortogonales a U' y tales que ξ_1, \dots, ξ_{r-1} son tangentes a M a lo largo de C y $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ son tangentes a M' a lo largo de C' .

Demostración. La idea es construir ξ_1, \dots, ξ_{r-1} por pasos, primero a lo largo de C por transporte paralelo, luego extendiendo a $C \cup C'$ mediante un argumento de haces, y luego a U' mediante otro argumento de haces.

Sean τ y τ' los vectores de velocidad normalizados a lo largo de C y C' , y sea ν' el campo de vectores unitarios a lo largo de C' que son tangentes a U' y ortogonales hacia adentro con respecto a C' . Entonces, como el número de intersección de C y C' es $+1$ en p y -1 en q , tenemos $\nu'(p) = \tau(p)$ y $\nu'(q) = -\tau(q)$.

Elijamos $r-1$ vectores $\xi_1(p), \dots, \xi_{r-1}(p)$ que son tangentes a M en p , ortogonales a U' y tales que la r -frame $\tau(p), \xi_1(p), \dots, \xi_{r-1}(p)$ está positivamente orientada en $T_p M$. Trasladar paralelamente estos $r-1$ vectores a lo largo de C nos da $r-1$ campos vectoriales suaves

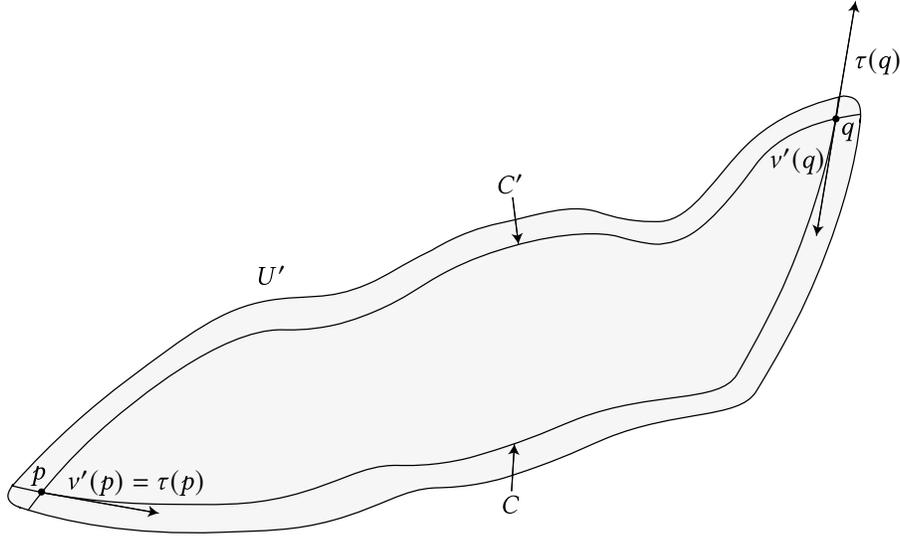


Figura 13: Dibujo esquemático del primer paso de la construcción de los frames.

ξ_1, \dots, ξ_{r-1} a lo largo de C . Estos campos vectoriales son ortonormales entre sí y ortogonales a U' porque el transporte paralelo preserva los productos internos. También son tangentes a M a lo largo de C porque A es una isometría, por lo que tenemos $\nabla_\tau \xi_i = 0 = A_*(0) = A_*(\nabla_\tau \xi_i) = \nabla_{A_*(\tau)} A_*(\xi_i) = \nabla_\tau A_*(\xi_i)$, por lo que el campo $A_*(\xi_i)$ es el transporte paralelo de $A_*(\xi_i(p)) = \xi_i(p)$ a lo largo de C . Por la unicidad del transporte paralelo, $A_*(\xi_i) = \xi_i$ a lo largo de C , por lo que $\xi_i \in M$ a lo largo de C , ya que M es el conjunto de puntos fijos de A . Finalmente, por continuidad la r -frame $\tau, \xi_1, \dots, \xi_{r-1}$ está positivamente orientada en TM (el haz tangente de M) en todo punto de C .

Ahora transportemos paralelamente $\xi_1(p), \dots, \xi_{r-1}(p)$ a lo largo de $N_p \cap C'$ y, simultáneamente, $\xi_1(q), \dots, \xi_{r-1}(q)$ a lo largo de $N_q \cap C'$. Por hipótesis los números de intersección de M y M' en p y q son $+1$ y -1 . Esto significa que $\tau(p), \xi_1(p), \dots, \xi_{r-1}(p)$ está positivamente orientada en $\nu(M')$ en p mientras que $\tau(q), \xi_1(q), \dots, \xi_{r-1}(q)$ está negativamente orientada en $\nu(M')$ en q . Como $v'(p) = \tau(p)$ y $v'(q) = -\tau(q)$, podemos concluir que en todos los puntos de $N_p \cap C'$ y todos los puntos de $N_q \cap C'$ las frames $v', \xi_1, \dots, \xi_{r-1}$ están positivamente orientadas en $\nu(M')$.

El haz sobre C' de $(r - 1)$ -frames ξ_1, \dots, ξ_{r-1} ortogonales a M' y a U' , y tales que $v', \xi_1, \dots, \xi_{r-1}$ está positivamente orientada en $\nu(M')$ es trivial con fibra $SO(r - 1)$, que, como

ya probamos, es conexa. Por lo tanto, podemos extender ξ_1, \dots, ξ_{r-1} a un campo suave de $(r-1)$ -frames en $C \cup C'$ que son tangentes a M a lo largo de C y a M' a lo largo de C' .

El haz sobre U' de $(r-1)$ -frames ortonormales que son ortogonales a U' es un haz trivial con fibra $V_{r-1}(\mathbb{R}^{r+s-2})$. Hasta ahora hemos construido una sección transversal ξ_1, \dots, ξ_{r-1} de este haz en $C \cup C'$. Componiendo ξ_1, \dots, ξ_{r-1} con la proyección a la fibra, obtenemos una función suave de $C \cup C'$ en $V_{r-1}(\mathbb{R}^{r+s-2})$, que es simplemente conexa porque $s \geq 3$. Por lo tanto, existe una extensión continua a U' y por el **Lema 6.9** existe una extensión suave. Entonces podemos definir ξ_1, \dots, ξ_{r-1} sobre todo U' de la manera que buscamos.

Para definir los campos vectoriales restantes, observemos que el haz sobre U' de frames ortonormales $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ en TV tal que cada η_i es ortogonal a U' y a ξ_1, \dots, ξ_{r-1} es un haz trivial ya que U' es contractible. Sea $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ una sección transversal suave de este haz. Entonces $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}, \eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ es un frame ortonormal y es ortogonal a U' . Como ξ_1, \dots, ξ_{r-1} son ortogonales a M' en C' , se deduce que $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ son tangentes a M' en C' . \square

Continuación de la demostración del Lema 6.6. Definamos un mapa $U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1} \rightarrow V$ mediante

$$(u, x_1, \dots, x_{r-1}, y_1, \dots, y_{s-1}) \rightarrow \exp \left(\sum_{i=1}^{r-1} x_i \xi_i(\varphi_3(u)) + \sum_{j=1}^{s-1} y_j \eta_j(\varphi_3(u)) \right)$$

Se deduce del **Lema 6.7** y del hecho que este mapa es un difeomorfismo local que existe un ε -entorno abierto N_ε del origen en $\mathbb{R}^{r+s-2} = \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1}$ tal que si $\varphi_4 : U \times N_\varepsilon \rightarrow V$ denota este mapa restringido a $U \times N_\varepsilon$ entonces φ_4 es un encaje (puede que tengamos que reemplazar a U con un entorno más pequeño, que seguiremos llamando U).

Definamos un encaje $\varphi : U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1} \rightarrow V$ mediante

$$\varphi(u, z) = \varphi_4 \left(u, \frac{\varepsilon z}{\sqrt{1 + |z|^2}} \right)$$

Entonces $\phi(C_0 \times \mathbb{R}^{r-1} \times 0) \subseteq M$ y $\phi(C'_0 \times 0 \times \mathbb{R}^{s-1}) \subseteq M'$ porque M y M' son subvariedades totalmente geodésicas de V . Además, como $\varphi(U \times 0) = U'$ intersecta a M y M' precisamente en C y C' (transversalmente), se deduce que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, la imagen de φ se intersecta con M y M' precisamente en los entornos producto de C y C' anteriores. Esto implica $\varphi^{-1}(M) = C_0 \times \mathbb{R}^{r-1} \times 0$ y $\varphi^{-1}(M') = C'_0 \times 0 \times \mathbb{R}^{s-1}$. Entonces φ es el encaje que buscamos. \square

7. CANCELACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS INTERMEDIOS

Definición 7.1

Supongamos que W^n es una variedad suave, compacta y orientada, y sea $X = \partial W$. Le daremos a X una orientación inducida por la orientación de W , definiéndola de la siguiente manera: una $(n-1)$ -frame $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ de vectores tangentes a X en algún punto $x \in X$ está positivamente orientada si la n -frame $v, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ está positivamente orientada en $T_x W$, donde v es cualquier vector tangente a W , pero no a X , en x y apuntando hacia afuera de W .

Alternativamente, especificamos $[X] \in H_{n-1}(X)$ como el generador de orientación inducido para X , donde $[X]$ es la imagen del generador de orientación $[W] \in H_n(W, X)$ para W bajo el homomorfismo de borde $H_n(W, X) \rightarrow H_{n-1}(X)$ de la sucesión exacta para (W, X) .

Ahora supongamos que tenemos tríadas (W, V, V') , $(W'; V', V'')$, y $(W \cup W'; V, V'')$, todas de dimensión n . Supongamos también que f es una función de Morse definida en $W \cup W'$ con puntos críticos $q_1, \dots, q_\ell \in W$ y $q'_1, \dots, q'_m \in W'$ tales que q_1, \dots, q_ℓ están todos en un mismo nivel y son de índice λ , mientras que q'_1, \dots, q'_m están en otro nivel y son de índice $\lambda + 1$, y V' es un nivel no crítico entre ellos. Elijamos un campo de tipo gradiente para f y orientemos los discos a izquierda $D_L(q_1), \dots, D_L(q_\ell)$ en W y $D'_L(q'_1), \dots, D'_L(q'_m)$ en W' .

La orientación del haz normal $\nu D_R(q_i)$ de un disco derecho de W está entonces determinada si pedimos que $D_L(q_i)$ tenga número de intersección $+1$ con $D_R(q_i)$ en q_i . El haz normal $\nu S_R(q_i)$ de $S_R(q_i)$ en V' es naturalmente isomorfo a la restricción de $\nu D_R(q_i)$ a $S_R(q_i)$. Por lo tanto, la orientación de $\nu D_R(q_i)$ determina una orientación para $\nu S_R(q_i)$.

Combinando la **Definición 7.1** y el párrafo anterior concluimos que una vez que elegimos orientaciones para los discos a izquierda en W y W' , existe una forma natural de orientar las esferas a izquierda en V' y el haz normal de las esferas a derecha en V' . Por lo tanto, los números de intersección $S_R(q_i) \cdot S'_L(q'_j)$ en V' de esferas a izquierda con esferas a derecha están bien definidos en V' .

Ya probamos que $H_\lambda(W, V)$ y $H_{\lambda+1}(W \cup W', W) \cong H_{\lambda+1}(W', V')$ son grupos abelianos libres que tienen como generadores $[D_L(q_2)], \dots, [D_L(q_\ell)]$ y $[D'_L(q'_1)], \dots, [D'_L(q'_m)]$,

respectivamente, representados por los discos a izquierda orientados, en el capítulo 3.

Lema 7.1

Sea M una variedad suave, cerrada y orientada de dimensión λ encajada en V' con $[M] \in H_\lambda(M)$ el generador de orientación, y sea $h : H_\lambda(M) \rightarrow H_\lambda(W, V)$ el mapa inducido por la inclusión. Entonces tenemos $h([M]) = S_R(q_1) \cdot M[D_L(q_1)] + \dots + S_R(q_\ell) \cdot M[D_L(q_\ell)]$ donde $S_R(q_i) \cdot M$ denota el número de intersección de $S_R(q_i)$ y M en V' .

Corolario 7.1.1

Con respecto a las bases representadas por los discos a izquierda orientados, el mapa de borde $\partial : H_{\lambda+1}(W \cup W', W) \rightarrow H_\lambda(W, V)$ para la tripleta $V \subseteq W \subseteq W \cup W'$ está dado por la matriz (a_{ij}) de los números de intersección $a_{ij} = S_R(q_i) \cdot S'_L(q'_j)$ en V' , que están naturalmente determinados por las orientaciones asignadas a los discos a izquierda.

Demostración. Consideremos un elemento de la base, $[D'_L(q'_j)] \in H_{\lambda+1}(W \cup W', W)$. Podemos factorizar el mapa ∂ de la siguiente manera:

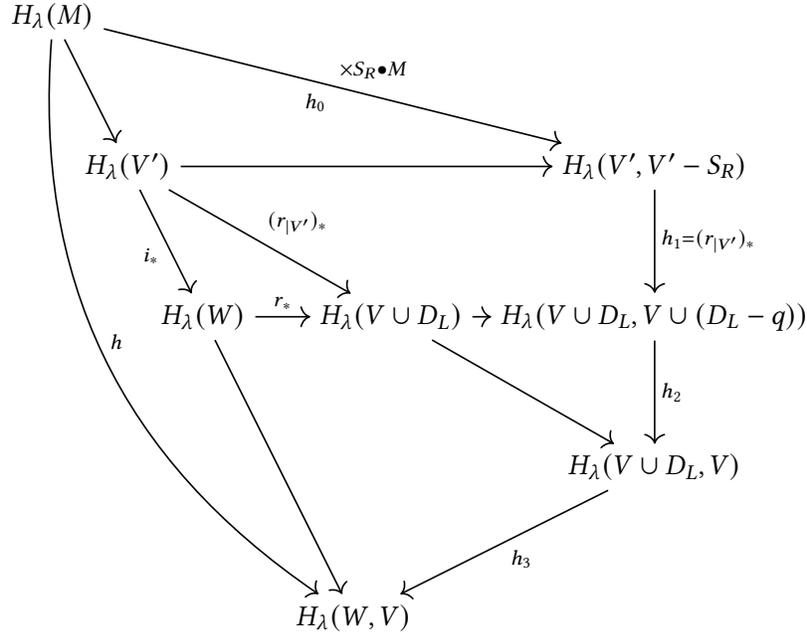
$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & H_\lambda(S'_L(q'_j)) \\
 & & & & \downarrow i_* \\
 H_{\lambda+1}(W \cup W', W) & \xrightarrow{e} & H_{\lambda+1}(W', V') & \xrightarrow{\partial_1} & H_\lambda(V') \\
 & \searrow \partial_2 & & & \downarrow \\
 & & & & H_\lambda(W) \\
 & \searrow \partial & & & \downarrow \\
 & & & & H_\lambda(W, V)
 \end{array}$$

donde e es la inversa del isomorfismo de excisión e i_* es inducida por inclusión, ∂_1 es el mapa de borde asociado a $V' \subseteq W'$ y ∂_2 es el mapa de borde asociado a $W \subseteq W'$.

Por definición tenemos $e([D'_L(q'_j)]) = [D'_L(q'_j)]$. Por definición también tenemos $\partial_1 \circ e([D'_L(q'_j)]) = \pm i_*([S'_L(q'_j)])$. Finalmente, por definición de la orientación de $S'_L(q'_j)$ tene-

mos $\partial_1 \circ e([D'_L(q'_j)]) = i_*([S'_L(q'_j)])$, por lo que el resultado se deduce de tomar $M = S'_L(q'_j)$ en el lema. \square

Demostración del Lema 7.1. Asumiremos $\ell = 1$; la prueba en el caso general es similar. Tomemos $q = q_1, D_L = D_L(q_1), D_R = D_R(q_1)$, y $S_R = S_R(q_1)$. Debemos mostrar $h([M]) = S_R \cdot M \cdot [D_L]$. Consideremos el siguiente diagrama:



El retracts de deformación $r : W \rightarrow V \cup D_L$ construido en el **Teorema 3.8** envía $V' - S_R$ a $V \cup (D_L - q)$, por lo que el homomorfismo h_1 inducido por $r|_{V'}$ está bien definido. El retracts de deformación que surge de seguir las trayectorias hacia atrás en el tiempo en $(D_L - q)$ induce el isomorfismo h_2 . Todos los demás homomorfismos son inducidos por inclusión.

El diagrama conmuta porque h_2 es el inverso del mapa inducido por la inclusión, que a su vez es invertible porque h_2 es inducido por un retracts de deformación, y porque $i_* = (r|_{V'})_*$, ya que i y $r|_{V'} : V' \rightarrow V \cup D_L$ son homotópicas.

Por el **Lema 6.2** tenemos $h_0([M]) = (S_R \cdot M)\psi(\alpha)$, donde $\alpha \in H_0(S_R)$ es el generador canónico y $\psi : H_0(S_R) \rightarrow H_\lambda(V', V' - S_R)$ es el isomorfismo de Thom. Por lo tanto, como el diagrama conmuta, para probar $h([M]) = (S_R \cdot M)[D_L]$ bastará con probar

$$h_3 \circ h_2 \circ h_1(\psi(\alpha)) = [D_L]$$

Sea D^λ un disco orientado que intersekte a S_R en un solo punto transversalmente en V' (notar que las dimensiones son las correctas para esto, ya que $\dim(D^\lambda) + \dim(S_R) = \dim(V')$), con número de intersección $S_R \cdot D^\lambda = +1$. Aplicando el **Lema 6.2**, tenemos $[D^\lambda] = \psi(\alpha)$. Refiriéndonos a las definiciones de r y h_2 y a nuestra convención de orientación para D_R y S_R , podemos ver que la imagen de D^λ por $h_2 \circ h_1$ representa $[D_L] \in H_\lambda(V \cup D_L, V)$, que es un generador. Como h_3 es inducido por la inclusión y $V \cup D_L$ es un retracto de deformación de W , obtenemos $h_3 \circ h_2 \circ h_1(\psi(\alpha)) = [D_L]$, como queríamos.

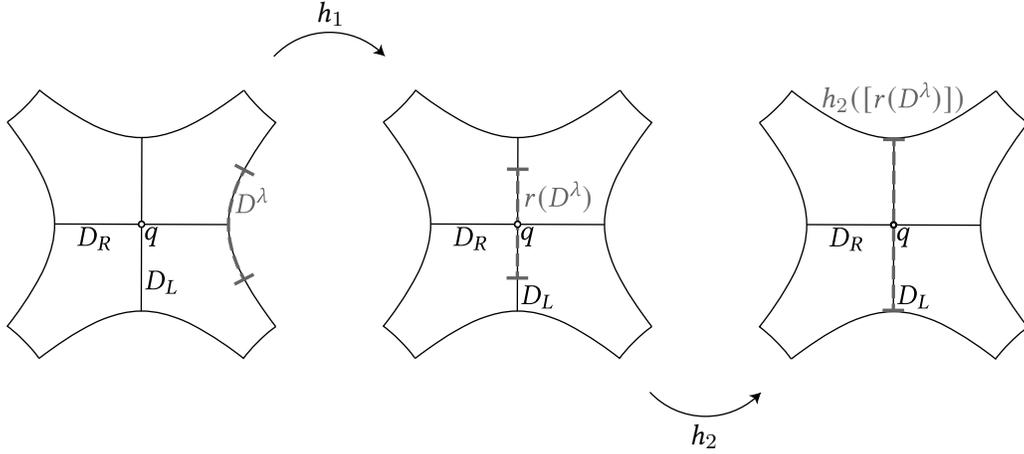


Figura 14: Dibujo esquemático de $h_1 \circ h_2$

□

Dado un cobordismo c representado por la tríada $(W; V, V')$, por el **Teorema 4.5** podemos factorizar a c como un producto $c_0 c_1 \dots c_n$ de manera que, para todo λ , c_λ admita una función de Morse tal que todos los puntos críticos yazcan en un mismo nivel y sean de índice λ . Representemos $c_0 c_1 \dots c_\lambda$ con la variedad $W_\lambda \subseteq W$, $\lambda = 0, 1, \dots, n$ y tomemos $W_{-1} = V$, de manera que

$$V = W_{-1} \subseteq W_0 \subseteq W_1 \subseteq \dots \subseteq W_n = W$$

Además, llamaremos V_i al borde a derecha de cada W_i . Definimos $C_\lambda = H_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-1}) \cong H_*(W_\lambda, W_{\lambda-1})$ y sea $\partial : C_\lambda \rightarrow C_{\lambda-1}$ el homomorfismo de borde para la sucesión exacta de la tripleta $W_{\lambda-2} \subseteq W_{\lambda-1} \subseteq W_\lambda$.

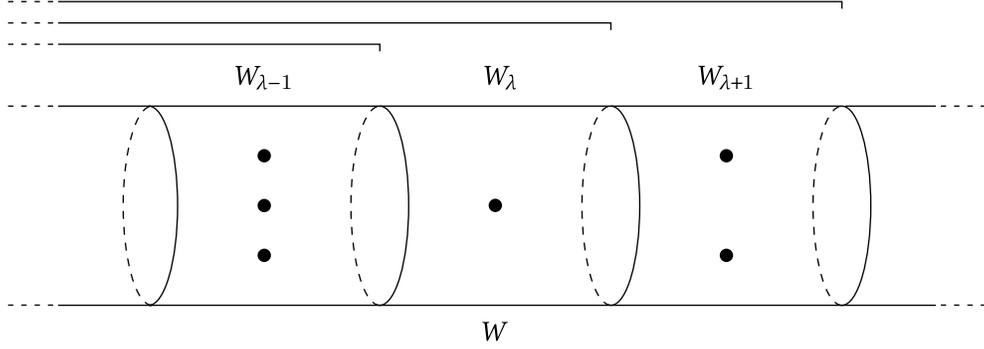


Figura 15: Dibujo esquemático de W unión ascendente de los W_λ .

Teorema 7.2

$C_* = (C_\lambda, \partial)$ es un complejo de cadenas (es decir, $\partial^2 = 0$) y $H_\lambda(C_*) \cong H_\lambda(W, V)$ para todo λ .

Demostración. $\partial^2 = 0$ es inmediato por definición del homomorfismo de borde. Para probar el isomorfismo, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 H_{\lambda+1}(W_{\lambda+1}, W_\lambda) = C_{\lambda+1} & \xrightarrow{h_0} & H_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-2}) & \xrightarrow{h_1} & H_\lambda(W_{\lambda+1}, W_{\lambda-2}) & \rightarrow & 0 \\
 & \searrow \partial_{\lambda+1} & \downarrow h_2 & & & & \\
 & & H_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-1}) = C_\lambda & & & & \\
 & & \downarrow \partial_\lambda & & & & \\
 & & H_{\lambda-1}(W_{\lambda-1}, W_{\lambda-2}) = C_{\lambda-1} & & & &
 \end{array}$$

La sucesión horizontal es la sucesión exacta asociada a la tripleta $(W_{\lambda+1}, W_\lambda, W_{\lambda-2})$ y la sucesión vertical es la sucesión asociada a la tripleta $(W_\lambda, W_{\lambda-1}, W_{\lambda-2})$. Notar que estamos

usando $H_\lambda(W_{\lambda-1}, W_{\lambda-2}) \cong H_\lambda(W_{\lambda+1}, W_\lambda) \cong 0$.

El diagrama conmuta porque las proyecciones $\pi_0 : C_\lambda(W_\lambda) \rightarrow C_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-1})$, $\pi_1 : C_\lambda(W_\lambda) \rightarrow C_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-2})$ y $\pi_2 : C_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-2}) \rightarrow C_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-1})$ cumplen $\pi_0 = \pi_2 \circ \pi_1$ y los mapas que queremos hacer conmutar son inducidos por estas proyecciones. Notar que este es el mismo argumento que en el **Lema 6.2**.

Por la exactitud de la sucesión horizontal, $Im(h_0) = Ker(h_1)$. Por la exactitud de la sucesión vertical, h_2 es inyectiva. Por lo tanto, por la conmutatividad del diagrama $Im(\partial_{\lambda+1}) \cong Im(h_0) = Ker(h_1)$. Por la exactitud de la sucesión vertical y la inyectividad de h_2 , $Ker(\partial_\lambda) = Im(h_2) \cong H_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-2})$. Por la exactitud de la sucesión horizontal, $\frac{H_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-2})}{Ker(h_1)} \cong H_\lambda(W_{\lambda+1}, W_{\lambda-2})$. En conclusión, $H_\lambda(C_*) := \frac{Ker(\partial_\lambda)}{Im(\partial_{\lambda+1})} \cong H_\lambda(W_{\lambda+1}, W_{\lambda-2})$.

Solo resta probar $H_\lambda(W, V) = H_\lambda(W_{\lambda+1}, W_{\lambda-2})$, lo cual se deducirá de los siguientes dos lemas, que se prueban de manera análoga:

Lema 7.3

$$\boxed{\forall \lambda \in \{-1, \dots, n\}, \forall k > \lambda, H_k(W_\lambda, V) \cong 0}$$

Demostración. La prueba será por inducción en λ . Como caso base tenemos el caso $\lambda = -1$: $H_k(W_{-1}, V) = H_k(V, V) \cong 0$ para todo $k > -1$.

Supongamos ahora que se cumple el lema para cierto λ . Probaremos que entonces también se cumple para $\lambda + 1$. Consideremos la sucesión exacta larga asociada a la tripleta $V \subseteq W_\lambda \subseteq W_{\lambda+1}$:

$$\dots \rightarrow H_k(W_\lambda, V) \rightarrow H_k(W_{\lambda+1}, V) \rightarrow H_k(W_{\lambda+1}, W_\lambda) \rightarrow H_{k-1}(W_\lambda, V) \rightarrow \dots$$

Por hipótesis de inducción, si $k > \lambda + 1$ entonces tenemos $H_k(W_\lambda, V) \cong H_{k-1}(W_\lambda, V) \cong 0$, por lo que la exactitud de la sucesión nos permite deducir $H_k(W_{\lambda+1}, V) \cong H_k(W_{\lambda+1}, W_\lambda)$. Por el **Corolario 3.8.1** tenemos entonces $H_k(W_{\lambda+1}, V) \cong 0$ si $k > \lambda + 1$. \square

Lema 7.4

$$\boxed{\forall \lambda \in \{-1, \dots, n\}, \forall k < \lambda + 1, H_k(W, W_\lambda) \cong 0}$$

Demostración. La prueba será por inducción en λ . Como caso base tenemos el caso $\lambda = n$: $H_k(W, W_n) = H_k(W, W) \cong 0$ para todo $k < n + 1$.

Supongamos ahora que se cumple el lema para cierto λ . Probaremos entonces que también se cumple para $\lambda - 1$. Consideremos la sucesión exacta larga asociada a la tripleta $W_{\lambda-1} \subseteq W_\lambda \subseteq W$:

$$\cdots \rightarrow H_k(W, W_\lambda) \rightarrow H_{k-1}(W_\lambda, W_{\lambda-1}) \rightarrow H_{k-1}(W, W_{\lambda-1}) \rightarrow H_{k-1}(W, W_\lambda) \rightarrow \cdots$$

Por hipótesis de inducción, si $k < \lambda + 1$ entonces tenemos $H_k(W, W_\lambda) \cong H_{k-1}(W, W_\lambda) \cong 0$, por lo que la exactitud de la sucesión nos permite deducir $H_{k-1}(W, W_{\lambda-1}) \cong H_{k-1}(W_\lambda, W_{\lambda-1})$. Por el **Corolario 3.8.1** tenemos entonces $H_{k-1}(W, W_{\lambda-1}) \cong 0$ si $k < \lambda + 1$. \square

Probaremos ahora que se cumple $H_k(W, V) \cong H_k(W, W_{\lambda-2})$, $\forall k \geq \lambda$. Consideremos la sucesión exacta larga asociada a la tripleta $(V, W_{\lambda-2}, W)$

$$\cdots \rightarrow H_k(W_{\lambda-2}, V) \rightarrow H_k(W, V) \rightarrow H_k(W, W_{\lambda-2}) \rightarrow H_{k-1}(W_{\lambda-2}, V) \rightarrow \cdots$$

Usando el **Corolario 3.8.1** tenemos $H_k(W_{\lambda-2}, V) \cong H_{k-1}(W_{\lambda-2}, V) \cong 0$ para todo $k \geq \lambda$. Por lo tanto, la exactitud de la sucesión nos permite deducir $H_k(W, V) \cong H_k(W, W_{\lambda-2})$.

Finalmente, probaremos $H_k(W, W_{\lambda-2}) \cong H_k(W_{\lambda+1}, W_{\lambda-2})$, $\forall k \leq \lambda$. Consideremos la sucesión exacta larga asociada a la tripleta $(W_{\lambda-2}, W_{\lambda+1}, W)$:

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(W, W_{\lambda+1}) \rightarrow H_k(W_{\lambda+1}, W_{\lambda-2}) \rightarrow H_k(W, W_{\lambda-2}) \rightarrow H_k(W, W_{\lambda+1}) \rightarrow \cdots$$

Usando el **Corolario 3.8.1** tenemos $H_{k+1}(W, W_{\lambda+1}) \cong H_k(W, W_{\lambda+1}) \cong 0$ para todo $k \leq \lambda$. Por lo tanto, la exactitud de la sucesión nos permite deducir $H_k(W_{\lambda+1}, W_{\lambda-2}) \cong H_k(W, W_{\lambda-2})$.

Juntando todo se deduce $H_\lambda(W, V) \cong H_\lambda(W_{\lambda+1}, W_{\lambda-2})$ para todo $\lambda \in \{0, \dots, n\}$. \square

Teorema 7.5 (Dualidad de Poincaré)

Si $(W; V, V')$ es una tríada de dimensión n y W es orientable, entonces $H_\lambda(W, V)$ es isomorfo a $H^{n-\lambda}(W, V')$ para todo λ .

Demostración. Sean $c = c_0 c_1 \dots c_n$ y $C_* = (C_\lambda, \partial)$ definidos con respecto a una función de Morse f , y tomemos un campo de tipo gradiente ξ para f . Fijando orientaciones, los discos a izquierda de c_λ forman una base de $C_\lambda = H_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-1})$. Por el **Corolario 7.1.1** sabemos que con respecto a esta base el mapa de borde $\partial : C_\lambda \rightarrow C_{\lambda-1}$ está dado por la matriz de números de intersección de las esferas a izquierda orientadas de c_λ con las esferas a derecha de $c_{\lambda-1}$ con haz normal orientado.

Similarmente, tomemos $W'_\mu \subseteq W$ para representar $c_{n-\mu}c_{n-\mu+1} \dots c_n$ para $\mu = 0, 1, \dots, n$ y tomemos $W'_{-1} = V'$. Definamos $C'_\mu = H_\mu(W'_\mu, W'_{\mu-1})$ y $\partial' : C'_\mu \rightarrow C'_{\mu-1}$ como antes. Para cualquier disco a derecha D_R , la orientación dada de $\nu(D_R)$ junto con la orientación de W dan una orientación naturalmente definida para D_R . Entonces $\partial : C'_\mu \rightarrow C'_{\mu-1}$ está dado por la matriz de los números de intersección de esferas a derecha orientadas con esferas a izquierda con haz normal orientado.

Sea $C'^* = (C'^\mu, \delta')$ el complejo de cocadenas dual al complejo de cadenas $C'_* = (C'_\mu, \partial')$ (es decir, $C'^\mu = \text{Hom}(C'_\mu, \mathbb{Z})$ y δ' es el mapa dual inducido). Elijamos como base para C'^μ la base dual a la base de C'_μ determinada por los discos a derecha orientados de $c_{n-\mu}$.

Asignando a cada disco a izquierda orientado el dual del disco a derecha orientado del mismo punto crítico, inducimos un isomorfismo $C_\lambda \rightarrow C'^{n-\lambda}$. Ahora, como ya establecimos, $\partial : C_\lambda \rightarrow C_{\lambda-1}$ está dado por la matriz $(a_{ij}) = (S_R(p_i) \cdot S'_L(p'_j))$. Es fácil ver que $\delta' : C'^{n-\lambda} \rightarrow C'^{n-\lambda+1}$ está dado por la matriz $(b_{ij}) = (S'_L(p'_j) \cdot S_R(p_i))$. Como W está orientada, $b_{ij} = \pm a_{ij}$, y el signo depende solo de λ (de hecho, como comentamos en el capítulo anterior, el signo resulta ser $(-1)^{\lambda-1}$). Por lo tanto, ∂ corresponde a $\pm \delta'$, y se deduce que el isomorfismo de grupos de cadenas induce un isomorfismo $H_\lambda(C_*) \cong H^{n-\lambda}(C'^*)$.

Ahora, el **Teorema 7.2** implica $H_\lambda(C_*) \cong H_\lambda(W, V)$ y $H_\mu(C'_*) \cong H_\mu(W, V')$ para cada λ y μ . Además, este último isomorfismo implica $H^\mu(C'^*) \cong H^\mu(W, V')$ para cada μ , ya que si dos complejos de cadenas tienen homologías isomorfas entonces los complejos de cocadenas duales tienen cohomologías isomorfas, por lo que queda probado el teorema. El hecho de que los grupos de cohomología queden determinados por los grupos de homología es, en esencia, el contenido del teorema del coeficiente universal para cohomología (ver Apéndice). \square

Teorema 7.6

Supongamos que $(W; V, V')$ es una tríada de dimensión n que posee una función de Morse f con todos los puntos críticos de índice λ y en el mismo nivel. Sea ξ un campo de tipo gradiente correspondiente a f . Asumamos $2 \leq \lambda \leq n - 2$ y que W es conexa. Entonces, dada una base de $H_\lambda(W, V)$, existe una función de Morse f' y un campo de tipo gradiente ξ' correspondiente que coinciden con f y ξ en un entorno de $V \cup V'$ y son tales que f' tiene los mismos puntos críticos que f , todos en el mismo nivel, y los discos a izquierda de ξ' forman la base dada si son orientados de forma apropiada.

Demostración. Sea $[D]$ un elemento de $H_\lambda(W, V)$. Tomando un representante para D , tenemos como consecuencia del **Lema 6.2**:

$$[D] = \sum_{m=1}^k (D_R(q_m) \cdot D) [D_L(q_m)]$$

Fijando i , modificaremos f de manera que los nuevos discos a izquierda de los puntos críticos de índice λ sean los mismos para $m \neq i$, y de manera que el disco a izquierda correspondiente a q_i , que denotaremos $D'_L(q_i)$, cumpla $D_R(q_i) \cdot D'_L(q_i) = 1$ y $D_R(q_j) \cdot D'_L(q_i) = 1$ para un j fijo.

Notemos que que todo cambio de base (con la orientación correcta) en \mathbb{Z}^k debe surgir de una matriz con entradas en \mathbb{Z} y determinante 1 (de lo contrario, la matriz inversa tendrá al menos una entrada que no pertenezca a \mathbb{Z}). Como tenemos $H_\lambda(W, V) \cong \mathbb{Z}^k$, y como las matrices asociadas a los cambios de base del párrafo anterior generan estas matrices, podremos construir cualquier base bien orientada usando el procedimiento anterior una cantidad finita de veces. Para generar toda base, independiente de orientación, basta con notar que podemos invertir la orientación de cualquier disco a izquierda para cambiar el signo del elemento de la base correspondiente.

Usando el **Teorema 4.1** podemos obtener una nueva función de Morse f' tal que para $c > 0$ tenemos $f'(q_i) = f(q_i) + c$ en un entorno de q_i , $f'(q_j) = f(q_j)$ si $j \neq i$ y ξ siga siendo un campo de tipo gradiente para f' . Por construcción, no habrá puntos críticos en $f'^{-1}(f(q_i), f(q_i) + c)$. Nuestra intención ahora será aplicar el **Lema 4.3**, para lo cual primero encontraremos una isotopía conveniente para modificar $f'^{-1}(f(q_i), f(q_i) + \frac{c}{2})$ desde la derecha, habiendo definido $S'_L(q_i)$ en el nivel no crítico $f^{-1}(f(q_i) + \frac{c}{2})$. Usando el difeomorfismo entre $f'^{-1}[f(q_i) + \frac{c}{4}, f(q_i) + \frac{c}{2}]$ y $f^{-1}(f(q_i) + \frac{c}{2}) \times [0, 1]$, dada una isotopía h_t de $f^{-1}(f(q_i) + \frac{c}{2})$ podemos definir $h_t(S'_L(q_i)) := (h_t(S'_L(q_i)), t)$, que no es nada más que la esfera a izquierda eligiendo un diferente nivel crítico para definirla, habiendo ya usado h_t para aplicar el **Lema 4.3**.

Lema 7.7

Existe una isotopía h_t de $f'^{-1}(f(q_i) + \frac{c}{2})$ tal que $h_0 = Id$ y $S_R(q_j)$ y $\bigcup_{t \in [0,1]} h_t(S'_L(q_i))$ se intersectan transversalmente y su número de intersección es 1.

Demostración. Como $2 \leq \lambda \leq n - 2$, tenemos que $(f^{-1}(c) - \bigcup_{i=2}^n S_R(p_i))$ es conexo por

caminos, por lo que podemos tomar un camino γ en este conjunto tal que $\gamma(0) = p_1$ y $\gamma(1) = p_2$, donde $p_1 \in S'_L(q_i)$ y $p_2 \in S_R(q_j)$. Asumimos que γ solo interseca a cada esfera una vez, lo cual podemos hacer sin perder generalidad con solo restringirnos al intervalo $[a, \text{mín } \{t \in [a, 1] : \gamma(t) = q_2\}]$ (el cual renormalizaremos para que vuelva a ser $[0, 1]$), donde $a = \text{máx } \{t \in [0, 1] : \gamma(t) = q_1\}$. Además, tomando un entorno tubular localmente en p_1 y en p_2 podemos modificar a γ para que corte a $S'_L(q_i)$ y $S_R(q_j)$ transversalmente sin generar nuevas intersecciones con los discos, extendiendo su dominio al intervalo $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ en el proceso.

Supongamos $\lambda \leq n - \lambda$. Construiremos un entorno tubular T_γ de γ en $f'^{-1}(f(q_i) + \frac{\varepsilon}{2})$ tal que γ corresponda a x_{n-1} , $S_L(q_i) \cap T_\gamma$ esté generado por $\{x_1, \dots, x_{\lambda-1}\}$ y $S_R(q_j) \cap T_\gamma$ esté generado por $\{x_1, \dots, x_{n-\lambda-1}\}$. Inicialmente, tomamos un entorno tubular cualquiera de $\gamma(-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ de manera que si φ son las coordenadas asociadas al entorno tubular entonces $\varphi(\gamma(t)) = \{(0, \dots, 0, t) \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ si $t \in [0, 1]$ y $\varphi(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : x = (0, \dots, 0, x_{n-1})\}$. Llamaremos a este entorno tubular T_γ^1 .

Tomando T_γ^1 suficientemente chico, definamos $\psi : S'_L(q_i) \cap T_\gamma \rightarrow \mathbb{R}^{\lambda-1}$ un difeomorfismo con $\psi(p_1) = 0$. Consideremos la parametrización de $\varphi(S'_L(q_i) \cap T_\gamma)$ dada por $\varphi \circ \psi^{-1}$, y extendámosla a $\psi_1 : \mathbb{R}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ tomando $x'_\lambda, \dots, x'_{n-2}$ direcciones transversales a $\varphi \circ \psi^{-1}(\mathbb{R}^{\lambda-1})$, definiendo $\psi_1(x_i) = x'_i$ para $i = \lambda, \dots, n-2$ y luego extendiendo linealmente. Eligiendo, una vez más, T_γ^1 suficientemente chico tendremos que ψ_1 está bien definido (si el entorno no es suficientemente chico, podrían no existir las coordenadas transversales) y es un difeomorfismo.

Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$, definimos $k_{A,\delta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como cualquier función que cumpla las siguientes condiciones:

1. $k_{A,\delta} \geq 0$ en todo \mathbb{R}^n .
2. $k_{A,\delta} = 1$ en A .
3. $\overline{\text{soporte}(k_{A,\delta})} - A$ es compacto.
4. $\|\nabla k_{A,\delta}\| < \delta$ en todo \mathbb{R}^n .

Definimos ahora una función g_1 en $\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : x_{n-1} \leq \frac{1}{2}\}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g_1(x) = & (k_{(-\infty, \frac{1}{3}), 1}(x_{n-1})\psi_1(x_1, \dots, x_{n-2}), 0) \\ & + (k_{(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), 1}(x_{n-1})d_0\psi_1(x_1, \dots, x_{n-2}), 0) \\ & + \varphi(0, \dots, 0, x_{n-1}) \end{aligned}$$

Tomando T_Y^1 más chico si es necesario, tenemos $\langle \psi_1(x), d_0\psi_1(x) \rangle > 0$ para todo x , por lo que $\|a\psi_1 + bd_0\psi_1\| > 0$ para todo $a, b > 0$ y g_1 es inyectiva. De la misma manera podemos forzar que se cumpla $\|d_p\psi_1 - d_0\psi_1\| < C$ uniformemente para C una constante arbitraria. Como $\|d_0\psi_1\| > 0$, eligiendo correctamente C y usando que γ es transversal a $S'_L(q_i)$ obtenemos que g_1 es un difeomorfismo sobre su imagen, que por construcción es $\mathbb{R}^{n-2} \times (-\infty, \varphi(\frac{1}{2}))$. Además, cumple $\varphi^{-1} \circ g_1(\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : x = (x_1, \dots, x_{\lambda-1}, 0, \dots, 0)\}) = S'_L(q_i) \cap T_Y^1$ y $\varphi^{-1} \circ g_1(\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : x = (0, \dots, 0, x_{n-1})\}) = \gamma$. Observar además que $\varphi^{-1} \circ g_1(0) = p_1$.

Extendemos g_1 a $\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : x_{n-1} \geq \frac{1}{2}\}$ de la siguiente manera: usando el **Lema 6.11**, tenemos un camino diferenciable de $d_0\varphi_1(\{x \in \mathbb{R}^{n-2} : x_\lambda = \dots = x_{n-2} = 0\})$ a $\{x \in \mathbb{R}^{n-2} : x_\lambda = \dots = x_{n-2} = 0\}$. Este camino lo podemos convertir en una isotopía de \mathbb{R}^{n-2} que, teniendo cuidado con la diferenciabilidad en $x_{n-1} = \frac{1}{2}$, podemos usar para extender g_1 a todo \mathbb{R}^{n-1} de manera que $g_1(x_1, \dots, x_{\lambda-1}, 0, \dots, 0, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{\lambda-1}, 0, \dots, 0, \varphi(x_{n-1}))$ siempre que $x_{n-1} \geq \frac{2}{3}$. Como asumimos $\lambda \leq n - \lambda$, completando $d_0\varphi_1(\{x \in \mathbb{R}^{n-2} : x_\lambda = \dots = x_{n-2} = 0\})$ para que sea un subespacio de dimensión $n - \lambda - 1$ podemos, de hecho, tomar g_1 de manera que $g_1(x_1, \dots, x_{n-\lambda-1}, 0, \dots, 0, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-\lambda-1}, 0, \dots, 0, \varphi(x_{n-1}))$ siempre que $x_{n-1} \geq \frac{2}{3}$.

Análogamente, podemos definir un difeomorfismo g_2 que preserva orientación y cumple $\varphi^{-1} \circ g_2(\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : x = (x_1, \dots, x_{n-\lambda-1}, 0, \dots, 1)\}) = S_R(q_2) \cap T_Y^1$, $\varphi^{-1} \circ g_2(\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : x = (0, \dots, 0, x_{n-1})\}) = \gamma$ y $g_2(x_1, \dots, x_{n-\lambda-1}, 0, \dots, 0, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-\lambda-1}, 0, \dots, 0, \varphi(x_{n-1}))$ siempre que $x_{n-1} \leq \frac{4}{5}$. Se cumplirá además que $\varphi^{-1} \circ g_2(0, \dots, 0, 1) = p_2$.

Finalmente, definimos g_3 como g_1 en $\{x_{n-1} \leq \frac{3}{4}\}$ y g_2 en $\{x_{n-1} \geq \frac{3}{4}\}$. Es claro que g_3 es un difeomorfismo siempre y cuando hayamos elegido bien los valores de se comportan g_1 y g_2 en las coordenadas $x_{n-\lambda}, \dots, x_{n-2}$. Tenemos entonces, por las propiedades que g_3 hereda de g_1 y g_2 , que $\varphi^{-1} \circ g_3$ son las coordenadas que buscábamos.

Elijamos $a > 0$ y definamos una isotopía h_t de \mathbb{R}^{n-1} de la siguiente manera:

$$h_t(x) = (x_1, \dots, x_{n-2}, t(1+a)k_{(0,1)^{n-1}, \frac{1}{1+a}}(x) + x_{n-1})$$

donde las coordenadas ahora son las que encontramos en el párrafo anterior. Esta isotopía todavía no es la que necesitamos, ya que $h_t(\mathbb{R}^{\lambda-1} \times 0)$ interseca a $\mathbb{R}^{n-\lambda-1} \times 0$ en múltiples puntos, no transversalmente, en un entorno de $t = 1$. Para corregir esto, buscaremos “colorear” $h_t(\mathbb{R}^{\lambda-1} \times 0)$ (variando según el t) usando las coordenadas $x_{n-\lambda}, \dots, x_{n-2}$ de manera que solo el 0 tenga el mismo color que $0 \times \mathbb{R}^{n-\lambda} \times 1$. Definamos ahora \hat{h}_t , con esto en mente, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{h}_t = & (x_1, \dots, x_{n-2}, 0) \\ & + (0, \dots, 0, \frac{tx_1}{1+a} k_{[-1,1], \frac{1}{1+a}}(x_1), \dots, \frac{tx_{\lambda-1}}{1+a} k_{[-1,1], \frac{1}{1+a}}(x_{\lambda-1}), 0) \\ & + (0, \dots, 0, \left(1 + \frac{1}{1+a}\right) t k_{[-1,1]^{n-1}, \frac{1}{1+a}}(x) + x_{n-1})\end{aligned}$$

Para $i = 1, \dots, \lambda - 1$ tenemos:

$$\frac{\partial \hat{h}_t}{\partial x_i} = e_i + t\varepsilon_i e_{n-\lambda-1+i} + t\varepsilon'_i e_{n-1}$$

y para $i = \lambda - 1, \dots, n - \lambda - 1$ tenemos:

$$\frac{\partial \hat{h}_t}{\partial x_i} = e_i + t\varepsilon'_i e_{n-1}$$

donde ε_i y ε'_i serán funciones acotadas por una constante arbitrariamente chica siempre y cuandoelijamos a suficientemente grande. Finalmente, con el siguiente lema obtendremos que esta isotopía es un difeomorfismo para todo t .

Lema 7.8

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es suave y cumple $\|Jf - Id\| < c < 1$ en todo punto, entonces f es un difeomorfismo.

Demostración. Inicialmente, probemos que $\langle Jf(v), v \rangle \geq (1 - c) \|v\|^2$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, con vistas a probar que f es inyectiva:

$$\begin{aligned}\|(Jf - Id)v\|^2 & \leq c^2 \|v\|^2 \\ \iff \|Jf(v)\|^2 - 2\langle Jf(v), v \rangle + \|v\|^2 & \leq c^2 \|v\|^2 \\ \iff 2\langle Jf(v), v \rangle \geq \|Jf(v)\|^2 + (1 - c^2) \|v\|^2 \\ \implies 2\langle Jf(v), v \rangle & \geq \|Jf(v)\|^2 + (1 - c^2) \|v\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff 2\langle Jf(v), v \rangle \geq \|-v - (Jf(v) - v)\|^2 + (1 - c^2) \|v\|^2 \\
&\implies 2\langle Jf(v), v \rangle \geq (\|v\| - \|Jf(v) - v\|)^2 + (1 - c^2) \|v\|^2 \\
&\implies 2\langle Jf(v), v \rangle \geq (1 - c)^2 \|v\|^2 + (1 - c^2) \|v\|^2 \\
&\implies \langle Jf(v), v \rangle \geq (1 - c) \|v\|^2
\end{aligned}$$

Esto implica que Jf es inyectivo en todo punto. Aplicando el teorema de la función inversa, tenemos que f es un difeomorfismo local.

Sean v_1 y v_2 dos vectores de \mathbb{R}^n . Consideremos la curva $\gamma(t) = (1 - t)v_1 + tv_2$. Tenemos $\gamma'(t) = v_2 - v_1$. Por lo tanto, usando nuestra deducción anterior:

$$\begin{aligned}
\langle f(v_2), v_2 - v_1 \rangle &= \langle f(v_1), v_2 - v_1 \rangle + \int_0^1 \langle Jf(v_2 - v_1), v_2 - v_1 \rangle dt \\
&\geq \langle f(v_1), v_2 - v_1 \rangle + (1 - c) \|v_2 - v_1\|^2
\end{aligned}$$

por lo cual $\langle f(v_2), v_2 - v_1 \rangle = \langle f(v_1), v_2 - v_1 \rangle$ solo si $v_2 = v_1$. En particular, $f(v_1) = f(v_2)$ solo si $v_1 = v_2$, por lo que f es inyectiva.

Probemos ahora que f es sobreyectiva. Como f es un difeomorfismo local, su imagen es abierta. Por lo tanto, basta con probar que $f(\mathbb{R}^n)$ es un conjunto cerrado. Tomemos una sucesión x_i en este conjunto. Como f es inyectiva, podemos considerar la sucesión $v_i = f^{-1}(x_i)$.

Consideremos la misma desigualdad que en nuestra prueba de que f es inyectiva:

$$\begin{aligned}
\langle x_m, v_m - v_n \rangle &= \langle x_n, v_m - v_n \rangle + \int_0^1 \langle Jf(v_m - v_n), v_m - v_n \rangle dt \\
&\geq \langle x_n, v_m - v_n \rangle + (1 - c) \|v_m - v_n\|^2
\end{aligned}$$

lo cual, si $v_m \neq v_n$, es equivalente a:

$$\left\langle x_m, \frac{v_m - v_n}{\|v_m - v_n\|} \right\rangle \geq \left\langle x_n, \frac{v_m - v_n}{\|v_m - v_n\|} \right\rangle + (1 - c) \|v_m - v_n\|$$

En particular, x_i no tiende a infinito solamente cuando v_i es una sucesión de Cauchy. Sea $v = \lim v_i$. Por continuidad de f , $\lim x_i = \lim f(v_i) = f(v) \in f(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $f(\mathbb{R}^n)$ es cerrado y tenemos el resultado buscado. \square

Es claro que podemos tomar los $\varepsilon_{i,j}$ para que se cumplan las hipótesis del lema anterior, por lo que \hat{h}_t es la isotopía que buscábamos, ya que por construcción cumple que \hat{h}_t es la

identidad fuera de un compacto para todo t , y es claro que $(\hat{h}_t(\mathbb{R}^{\lambda-1} \times 0)) \cap (\mathbb{R}^{n-\lambda-1} \times 0 \times \dots \times 0 \times 1) = \{(0, \dots, 0, 1)\}$ si $t = \frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}$ y es vacío de lo contrario (siempre y cuando tengamos cuidado al elegir las k). Además, esta intersección es transversal en \mathbb{R}^{n-2} porque los $\varepsilon_{i,j}$ en (1) en el punto de intersección cumplen $\varepsilon_{i,j} = 0$ si $j \neq n - \lambda - 1 + i$ y $\varepsilon_{i,j} \neq 0$ si $j = n - \lambda - 1 + i$. Finalmente, derivando según t vemos que $\bigcup_{t \in [0,1]} h_t(S'_L(q_i))$ es transversal en el punto de intersección.

El caso $n - \lambda < \lambda$ es análogo. Las únicas dos salvedades son que tendremos que completar el subespacio en la construcción de g_2 e intercambiar los roles de $\lambda - 1$ y $n - \lambda - 1$ en la definición de \hat{h}_t . \square

Usando ahora la isotopía del lema recién probado, encontraremos f' y ξ' que cumplan la conclusión del teorema. Sea $f'^{-1}(f(q_i) + \frac{\varepsilon}{2}) \times [0, 1]$ un entorno collar a la derecha de $f'^{-1}(f(q_i) + \frac{\varepsilon}{2})$. Usando el **Lema 4.3** (en su versión de derecha a izquierda) en este entorno tenemos un nuevo campo de tipo gradiente ξ' asociado a f' que cumple que $D'_L(q_i)$ es $\bigcup_{t \in [0,1]} h_t(S'_L(q_i))$ en nuestro entorno collar. Por lo tanto, $D'_L(q_i) \cdot D_R(q_j) = 1$. Además, como el entorno tubular que tomamos para definir h no intersectaba las de más esferas a derecha, $D'_L(q_i)$ no intersecta los discos a derecha que no son los de q_i y q_j . Además, como ξ no fue modificado fuera del entorno collar, $D'_L(q_i) \cdot D_R(q_i) = 1$. Con esto concluye la prueba. \square

Teorema 7.9

Sea (W, V, V') una tríada suave de dimensión mayor a 6 con puntos críticos de índices mayores a 1 y menores a $n - 1$. Si W, V y V' son simplemente conexas y $H_(W, V) = 0$, entonces tenemos un cobordismo producto.*

Demostración. Usemos el **Teorema 4.6** para conseguir una función de Morse f autoindexada. Como $H_*(W, V) = 0$, tenemos que la sucesión $\dots \rightarrow C_\lambda \rightarrow C_{\lambda-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1$ es exacta, por lo que tenemos un isomorfismo entre $Im(\partial_{\lambda+1})$ y $Ker(\partial_\lambda)$. Sea a_1, \dots, a_n una base para $C_{\lambda+1}$. Como C_λ es la suma directa de $Ker(\partial_\lambda)$ y un complemento de este, que denotaremos $Ker^\perp(\partial_\lambda)$, esto quiere decir que podemos encontrar una base para C_λ que esté formada por una base para $Im(\partial_{\lambda+1})$ y una base para $Ker^\perp(\partial_\lambda)$. La base de $Im(\partial_{\lambda+1})$ que tomaremos será $\partial_{\lambda+1}a_1, \dots, \partial_{\lambda+1}a_n$.

Restrinjámonos ahora a $c_\lambda c_{\lambda+1}$. Aplicando el **Teorema 7.6**, tenemos f tal que los $D_L^{\lambda+1}$ representan las clases a_i y los D_L^λ representan las clases $\partial_{\lambda+1} a_i$. A la vez, $S_L \cdot S_R = a_i \cdot S_R = a_i \cdot D_R = \partial_{\lambda+1} a_i \cdot D_R = \pm 1$, donde estamos continuamente explotando $D_R, D_L^\lambda \subseteq c_\lambda$ y $D_L^{\lambda+1} \subseteq c_{\lambda+1}$. Incrementando f en un entorno del p del D_L correspondiente a $\partial_{\lambda+1} a_i$ y reduciendo f en un entorno del q del D_L correspondiente a a_i como en el **Teorema 4.1**, podemos considerar el cobordismo $c_\lambda c_p c_q c_{\lambda+1}$ y restringirnos al cobordismo $c_p c_q$. Aplicando el **Teorema 6.3** nos podemos deshacer de ambos puntos críticos. Aplicando este método sucesivamente eventualmente nos deshacemos de todos los puntos críticos excepto posiblemente algunos de índice 2 y algunos de índice $n - 2$. Sin embargo, estos casos no puede darse debido a que $Im(\partial_2) = Ker(\partial_1) = Im(\partial_1) = Ker(\partial_0) = Im(\partial_0) = 0$ porque $H_1(W, V) = 0$ y $H_0(W, V) = 0$ por hipótesis, y por lo tanto todos los puntos críticos de índice 2 pueden ser cancelados con algún punto crítico de índice 3, y porque $Ker(\partial_{n-2}) = Im(\partial_{n-1}) = Ker(\partial_{n-1}) = Im(\partial_n) = Ker(\partial_n) = 0$ porque $H_{n-1}(W, V) = 0$ y $H_n(W, V) = 0$ por hipótesis, y por lo tanto todos los puntos críticos de índice $n - 2$ pueden ser cancelados con puntos críticos de orden $n - 3$. \square

8. CANCELACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS EXTREMALES

Para finalizar la prueba del teorema del h-cobordismo, lo único que resta es lograr eliminar los puntos críticos no contemplados en el **Teorema 7.9**: los de índice 0, 1, $n - 1$ y n . Dando vuelta triádas es claro que solo necesitamos enfocarnos en los casos 0 y 1. Nos desharemos primero de los puntos críticos de índice 0 con el siguiente resultado:

Lema 8.1

Si $H_0(W, V) = 0$, entonces todo punto crítico de índice 0 puede ser cancelado con un punto crítico de índice 1.

Demostración. Consideremos un punto crítico p de índice 0 tal que su esfera a derecha no tiene número de intersección 1 con ningún punto crítico de índice 1. Denotemos por W_p a la componente conexa de p . Probaremos que $H_0(W_p, W_p \cap V) = H_0(W_p, \emptyset) = H_0(W_p) \neq 0$. Como $H_0(W, V)$ es de la forma $G \oplus H_0(W_p, W_p \cap V)$, esto implica un absurdo.

Consideremos un conjunto de nivel no crítico entre V y $f^{-1}(\frac{1}{4})$ (asumiendo que f ya está autoindexada). Si este es conexo, usando el **Lema 2.1** y el **Teorema 3.3** vemos que debe ser efectivamente $S_R(p)$ y, por lo tanto, rastreando para atrás el conjunto de nivel concluimos que la componente conexa de p no tiene componentes de borde en V . Deducimos entonces $H_0(W_p, W_p \cap V) = H_0(W_p) \neq 0$.

Por lo tanto, el conjunto de nivel que estamos considerando debe ser una unión disjunta de $S_R(p)$ junto con otras componentes conexas. Ahora, este conjunto de nivel no crítico se verá afectado solamente por las cirugías correspondientes a los índices 1, ..., n . Sin embargo, solamente una cirugía de tipo $(1, n - 1)$ puede unir dos componentes conexas, ya que \mathbb{S}^n es conexa para $n \geq 1$. Además, una cirugía de tipo $(1, n - 1)$ tal que \mathbb{S}^0 interseca a $S_R(p)$ en ambos puntos no la conectará con otra componente conexa. Por lo tanto, una vez más concluimos que la componente conexa de p no tiene componentes de borde y, por lo tanto, $H_0(W_p, W_p \cap V) = H_0(W_p) \neq 0$.

Esto significa que $H_0(W, V) = 0$ implica que $S_R(p)$ debe intersectarse en exactamente un punto con una esfera a izquierda correspondiente a un punto de índice 1. Por el **Teorema 5.8**, tenemos que p se puede cancelar con dicho punto crítico. \square

Para deshacernos de los puntos críticos de índice 1, precisaremos de dos lemas, de los cuales el siguiente es el primero:

Lema 8.2

Sea λ tal que $0 \leq \lambda \leq n - 1$. Entonces existe una función de Morse $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1, \dots, x_n) = x_1$ fuera de un compacto K y sus únicos puntos críticos son $-e_1$ y e_1 , que además cumplen $f(-e_1) < f(e_1)$ y son de índice λ y $\lambda + 1$ respectivamente.

Demostración. Empezamos definiendo f en el conjunto $\{te_1 : t \in \mathbb{R}\}$ como una función $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpla las siguientes condiciones:

1. $f_1'(x) = 0 \iff |x| = 1$

2. $f_1''(-1) < 0$

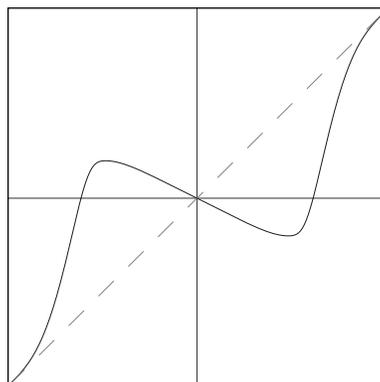
3. $f_1''(1) > 0$

4. $f_1(-1) > f_1(1)$

5. $|x| \geq 2 \implies f_1(x) = x$

6. $f_1(x) = -f_1(-x)$

7. $f_1 \in C^\infty$



Algunas de estas propiedades se pueden deducir de otras, pero no es relevante a efectos de la prueba. Ahora, notemos que para el caso $n = 1$ basta con tomar f_1 como solución al único caso posible, $\lambda = 0$. Nuestra idea ahora será extender esta solución de a una coordenada, en cada caso o bien alterando el índice de los puntos críticos o dejándolo intacto.

Si $x = (x_1, \dots, x_n)$, definimos $x_- = (0, x_2, \dots, x_{\lambda+1}, 0, \dots, 0)$ y $x_+ = (0, \dots, 0, x_{\lambda+2}, \dots, x_n)$. Extenderemos f_1 mediante un conjunto de isotopías que dependerán de $\|x_-\|$ y de $\|x_+\|$, además de $\|x\|$ eventualmente para poder controlar f fuera de un compacto K .

Definimos $f_+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función que cumpla las siguientes condiciones:

1. $f_+'(x) > 0$

2. $|x| < 2 \implies f_+(x) > f_1(x)$

3. $|x| \geq 2 \implies f_+(x) = x$

4. $f_+ \in C^\infty$

Notemos que puede que tengamos que reelegir f_1 para que se cumplan simultáneamente las propiedades 1 y 2, pero siempre se podrá. Una condición suficiente para f_1 será $f_1((-2, 2)) \subseteq (-2, 2)$.

Definimos $f_- := f_+^{-1}$ (es decir, reflejamos f_- con respecto al eje $x = y$).

Definimos $\tau : [0, +\infty] \rightarrow [0, 1]$ como una función suave tal que $\tau(0) = 0$, $\tau'(0) = 1$, $\tau(1) = 1$ y $\tau'(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. Además pediremos que sea creciente en $[0, 1]$ y que la función definida en todo \mathbb{R} mediante reflexión impar sea suave. Nuestra intención será usar a τ como parámetro de tiempo para solucionar potenciales problemas de regularidad.

Definimos ahora una isotopía h que cumpla las siguientes condiciones:

1. $h_t(x) = (1 - \tau(t))f(x) + \tau(t)f_+(x)$ si $t \in [0, 1]$
2. $h_t(x) = f_-(x)$ si $t \in [1, 2]$
3. $h_t(x) = (1 - \tau(t - 2))f_+(x) + \tau(t - 2)x$ si $t \in [2, 3]$
4. $h_t(x) = x$ si $t \in [3, +\infty)$
5. $h_t(x) = (1 - \tau(-t))f(x) + \tau(-t)f_-(x)$ si $t \in [-1, 0]$
6. $h_t(x) = f_-(x)$ si $t \in [-2, -1]$
7. $h_t(x) = (1 - \tau(-(t + 2)))f_-(x) + \tau(-(t + 2))x$ si $t \in [-3, -2]$
8. $h_t(x) = x$ si $t \in (-\infty, -3]$

Observemos que por las propiedades de τ tenemos $\frac{\partial h_t}{\partial t} = 0 \iff 1 \leq |t| \leq 2$. Como $f'_+(x)$ y $f'_-(x)$ nunca se anulan, concluimos que nunca se da $\frac{\partial h_t}{\partial t} = \frac{\partial h_t}{\partial x} = 0$.

Ahora denotaremos por $h(t, r)$ a la isotopía que se define de la misma manera que h_t pero reemplazando $f(x)$, $f_+(x)$ y $f_-(x)$ por $(1 - \tau(r))f(x) + \tau(r)x$, $(1 - \tau(r))f_+(x) + \tau(r)x$ y $(1 - \tau(r))f_-(x) + \tau(r)x$ respectivamente.

Finalmente, extendemos f a todo \mathbb{R}^n de la siguiente manera:

$$f(x) = h(\|x_-\|^2 - \|x_+\|^2, \|x_-\|^2 + \|x_+\|^2)(x_1)$$

Por construcción, $f(x) = x_1$ si $x \in \mathbb{D}^n$. Además, por las restricciones que deducimos sobre los posibles puntos críticos de h_t , tenemos que solo podemos tener puntos críticos cuando

$\|x_-\| = \|x_+\| = 0$. Estos serán $-e_1$ y e_1 por nuestra construcción inicial. Además, es fácil chequear que la segunda derivada según un componente de x_- (respectivamente x_+) en ambos puntos es negativa (respectivamente positiva). Por lo tanto, $-e_1$ y e_1 son puntos críticos no degenerados de índice λ y $\lambda + 1$ respectivamente. \square

Procedemos ahora a enunciar y probar el segundo lema:

Lema 8.3

Fijado i , si V es conexa y de dimensión mayor o igual a 3, entonces existe un encaje φ de \mathbb{S}^1 en $f^{-1}(1 + \frac{1}{2})$ tal que se cumple $S_R(q_j) \cdot \varphi(\mathbb{S}^1) = \delta_{ij}$, donde los q_j son los puntos críticos de índice 1.

Demostración. Elegimos un punto arbitrario p de $S_R(q_i)$. Encajamos \mathbb{D}^1 transversalmente en un entorno de p de manera que no intersekte ninguna otra esfera a derecha. Ahora, trazamos las trayectorias de los dos extremos de este disco encajado hacia atrás, hasta que lleguen a V (lo cual podemos hacer porque estamos asumiendo que no hay puntos críticos de índice 0). Trazamos análogamente hacia atrás las trayectorias de las esferas a izquierda. Su imagen en V es un conjunto de puntos, ya que son de dimensión 0. Como $\dim(V) \geq 2$, tenemos que V sigue siendo conexa al retirar estos puntos. Por lo tanto, podemos tomar un camino suave en V que una los dos extremos que consideramos, y trasladarlo de vuelta hacia $f^{-1}(1 + \frac{1}{2})$.

Con esto podemos conseguir un mapa suave de \mathbb{S}^1 a $f^{-1}(1 + \frac{1}{2})$, definiéndolo en $[0, \frac{1}{2}]$ de manera que su imagen sea el disco que habíamos encajado inicialmente, y en $[\frac{1}{2}, 1]$ de manera que sea el camino suave que trasladamos (y, por lo tanto, la imagen de \mathbb{S}^1 no intersekte ninguna otra esfera a derecha). Puede que sea necesario llevar a cabo un proceso de “suavización” en $\frac{1}{2}$ y en $0 \cong 1$ para conseguir dicho mapa suave. Aplicando el **Lema 6.10** y usando que $\dim(V) \geq 2 \dim(\mathbb{S}^1) + 1 = 3$ por hipótesis, obtenemos el encaje deseado. \square

El teorema que probaremos para deshacernos de los puntos críticos de índice 1 es el siguiente:

Teorema 8.4

Supongamos que tenemos una función de Morse f autoindexada en W que no tiene puntos críticos de índice 0 y además se cumple que W y V son simplemente conexas con $n \geq 5$.

Entonces existe una función de Morse f' en W tal que f' no tiene puntos críticos de índice 0 ni 1.

Demostración. Elijamos un punto crítico q_i de índice 1 y consideremos su esfera a derecha $S_R(q_i)$. Utilizando el **Lema 8.3**, tomamos un encaje φ de \mathbb{S}^1 en $f^{-1}(1 + \frac{1}{2})$ de manera que $S_R(q_i) \cdot \varphi(\mathbb{S}^1)$ no interseque a ninguna esfera a derecha distinta a $S_R(q_i)$. Como la dimensión de $f^{-1}(1 + \frac{1}{2})$ es mayor a 2, podemos asumir usando el **Lema 4.2** en conjunción con el **Lema 4.3** que $\varphi(\mathbb{S}^1)$ no interseca ninguna esfera a izquierda de ningún punto crítico de índice 2. Traslademos entonces (\mathbb{S}^1) hasta $f^{-1}(2 + \frac{1}{2})$ y llamémosle a esta 1-esfera S_1 . La idea es que, si logramos encontrar un punto crítico q'_i (que necesariamente será de índice 2) cuya esfera a izquierda en $f^{-1}(2 + \frac{1}{2})$ sea esta $\varphi(\mathbb{S}^1)$ trasladada, entonces podremos cancelar q_i y q'_i utilizando el **Teorema 5.8**. Por supuesto, este punto crítico probablemente no exista en la f con la que empezamos, pero podemos modificar a f para forzar su existencia:

Como $f^{-1}(1 + \frac{1}{2})$ no contiene puntos críticos, tomemos un punto no crítico del conjunto y apliquemos el **Teorema 3.1** a las trayectorias de un campo de tipo gradiente para f . Encajemos, mediante un mapa ψ , a \mathbb{R}^n en el entorno que nos provee el teorema tubular de manera que $\psi(x_1) = h^{-1}(\frac{2 \arctan x_1}{\pi})$ (acá \arctan solo cumple el rol de una normalización por cómo está definido C en el **Teorema 1.1**). Redefiniendo f en $\psi(\mathbb{R}^n)$ como $\psi \circ g$, donde g es la función que nos da el **8.2** tomando $\lambda = 2$, conseguimos así una nueva función suave f_2 que es idénticamente igual a f fuera de $K \subseteq \psi(\mathbb{R}^n)$ y que en K tiene dos nuevos puntos críticos, uno de índice 2 (que llamaremos q'_i) y otro de índice 3 (que llamaremos q''_i).

Citaremos el siguiente resultado, que se deduce del **Lema 6.9** y el **Lema 6.10** en conjunto:

Teorema 8.5

Si dos encajes suaves de una variedad suave M^m a una variedad suave N^n son homotópicos, entonces son suavemente isotópicos si $n \geq 2m + 3$.

Consideremos ahora $S_L(q'_i)$ en $f^{-1}(2 + \frac{1}{2})$. Sea $i : S_L(q'_i) \rightarrow f^{-1}(2 + \frac{1}{2})$ la inclusión. Notemos que $f^{-1}(2 + \frac{1}{2})$ es simplemente conexa, ya que por el **Teorema 3.8** podemos ver a W como $f^{-1}(2 + \frac{1}{2})$ con discos de dimensiones $n - 1$ y $n - 2$ ligados de un lado y de dimensiones $3, \dots, n$ del otro, por lo que podemos utilizar el teorema de van Kampen (ver

Apéndice) para concluir que $f^{-1}(2 + \frac{1}{2})$ y W tienen grupos fundamentales isomorfos; este último es trivial por hipótesis.

Como $f_2^{-1}(2 + \frac{1}{2})$ es simplemente conexa y de dimensión mayor o igual a 3, tenemos una isotopía de la inclusión a φ . Usando el **Teorema 5.8** y el **Teorema 8.5** tenemos entonces una isotopía de la identidad en $f_2^{-1}(2 + \frac{1}{2})$ que lleva $S_L(q'_i)$ a S_1 . Ajustando nuestro campo de tipo gradiente a la derecha de $f_2^{-1}(2 + \frac{1}{2})$ usando el **Lema 4.3** tenemos que $S_L(q_i) = S_1$.

Utilizando el **Teorema 4.1** modificamos f_2 (que ahora llamaremos f') de manera que se preserve el campo de tipo gradiente pero se cumpla $1 + \delta < f'(q_i) < 1 + \frac{1}{2} < f'(q'_i) < 2 - \delta$ para algún $\delta > 0$. Usando el **Teorema 5.8** en $f'^{-1}(1 + \delta, 2 - \delta)$ eliminamos los puntos críticos q_i y q'_i . Finalmente, para obtener una función autoindexada y poder volver a aplicar el método que acabamos de desarrollar, movemos q''_i al nivel $f'(3)$ usando de nuevo el **Teorema 4.1**. Aplicando este proceso las veces que sea necesario obtenemos el resultado buscado. □

9. EL TEOREMA DEL H-COBORDISMO Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

Nos encontramos, finalmente, en condiciones de probar el teorema epónimo de esta monografía.

Teorema 9.1 (Teorema del h-cobordismo)

Sea (W^n, V, V') una tríada suave con $n \geq 6$ tal que $H_*(W, V) = 0$ y tanto W como V y V' son simplemente conexas. Entonces existe un difeomorfismo entre W y $V \times [0, 1]$.

Demostración. Usando el **Teorema 4.6** podemos considerar una función de Morse auto-indexada para la tríada. Aplicando el **Teorema 8.4** podemos deshacernos de los puntos críticos de índices 1, 2, $n - 1$ y n . Con esto, nos hallamos en condiciones de aplicar el **Teorema 7.9**, con lo que obtenemos el resultado. \square

Inmediatamente obtenemos un corolario que es, en esencia, lo que realmente buscamos con el teorema anterior:

Corolario 9.1.1

Si para V y V' existe W tal que se cumplen las condiciones del teorema del h-cobordismo, entonces V y V' son difeomorfas.

Armados con este teorema, estamos ahora en condiciones de probar la conjetura de Poincaré para $n \geq 6$, para lo cual primero será útil (e independientemente interesante) caracterizar \mathbb{D}^n para $n \geq 6$:

Teorema 9.2 (Caracterización de \mathbb{D}^n , $n \geq 6$)

Sea W^n una variedad suave, compacta y simplemente conexa con $n \geq 6$ tal que ∂W es simplemente conexo. Entonces W es difeomorfa a \mathbb{D}^n si y solo si $H_*(W) = H_*(\mathbb{D}^n)$.

Demostración. Como la homología es invariante por difeomorfismos, la primera implicación es inmediata. Por otro lado, si $H_*(W) = H_*(\mathbb{D}^n)$, consideremos un encaje $\varphi : \mathbb{D}^n \rightarrow W$, (basta con tomar la inclusión a \mathbb{R}^n y componer con una carta de W). Aplicando el teorema de excisión, $H_*(W - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ), \varphi(\mathbb{D}^n) - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ)) \cong H_*(W, \varphi(\mathbb{D}^n)) \cong 0$, donde el último isomorfismo se deduce de la sucesión exacta larga de la homología relativa. Además $W - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ)$ y $\varphi((\mathbb{D}^n)^\circ)$ son simplemente conexas porque $n \geq 3$, mientras que la

otra componente de borde es simplemente conexa por hipótesis. Con esto, aplicando el **Teorema 9.1** tenemos que $W - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ)$ es difeomorfa a $\mathbb{D}^n \times [0, 1]$. Por lo tanto, rellenando el $\varphi((\mathbb{D}^n)^\circ)$ que habíamos removido y teniendo cuidado con la diferenciabilidad en el borde (ver **Teorema 1.1**), tenemos que W es difeomorfa a \mathbb{D}^n (ya que estamos, al fin y al cabo, simplemente alargando el radio de la bola). \square

Teorema 9.3 (Conjetura de Poincaré para $n \geq 5$, ver [Hil53])

Sea W^n una variedad cerrada y simplemente conexa con $n \geq 5$ que cumple $H_*(W) = H_*(\mathbb{S}^n)$. Entonces W es homeomorfa a \mathbb{S}^n .

Demostración. Consideremos un encaje $\varphi : \mathbb{D}^n \rightarrow W$ y una vez más consideremos $W - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ)$ como cobordismo, esta vez de la forma $(W - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ), \emptyset, \partial\mathbb{D}^n)$. Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} H_\lambda(W - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ)) &= H^{n-\lambda}(W - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ), \partial\varphi(\mathbb{D}^n)) && \text{(Teorema 7.5)} \\ &= H^{n-\lambda}(W, \varphi(\mathbb{D}^n)) && \text{(Excisión)} \\ &= H_\lambda(\varphi(\mathbb{D}^n)) && \text{(Sucesión exacta larga)} \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos la sucesión exacta larga de la cohomología relativa, a saber:

$$\dots \rightarrow H^k(X, A) \rightarrow H^k(X) \rightarrow H^k(A) \rightarrow H^{k+1}(X, A) \rightarrow \dots$$

y los grupos de homología de W (que sabemos por hipótesis) y de $\varphi(\mathbb{D}^n)$ (que sabemos por ser contractible y, por lo tanto, tener la cohomología de un punto).

Usando el **Teorema 9.2**, tenemos un difeomorfismo $h : \mathbb{D}^n \rightarrow W - \varphi((\mathbb{D}^n)^\circ)$. Por lo tanto, W es homeomorfa a dos copias de \mathbb{D}^n pegadas por el borde mediante $h|_{\partial\mathbb{D}^n}$. Usando esto, podemos describir el siguiente homeomorfismo con \mathbb{S}^n :

Viendo a \mathbb{S}^n como subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} , podemos fácilmente enviar la primer copia de \mathbb{D}^n a $\mathbb{S}^n \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} \leq 0\}$ mediante un mapa p (usando una proyección estereográfica, por ejemplo). Para la segunda copia de \mathbb{D}^n , notemos que $h|_{\partial\mathbb{D}^n}$ puede ser extendida a un mapa de toda la bola mediante $g(x) = \|x\| h|_{\partial\mathbb{D}^n}(\frac{x}{\|x\|})$ para $x \neq 0$ y $h(0) = 0$. Además, es fácil ver que se da $g^{-1} = \|x\| h|_{\partial\mathbb{D}^n}^{-1}(\frac{x}{\|x\|})$ y que ambas funciones son continuas. Por lo tanto, h es en realidad un homeomorfismo. Enviando entonces la segunda copia de \mathbb{D}^n a

\mathbb{S}^n mediante $-p(-g(x))$ tenemos un homeomorfismo entre $W \cong \mathbb{D}^n \cup_{h|_{\partial\mathbb{D}^n}} \mathbb{D}^n$ y \mathbb{S}^n . Para el caso $n = 5$, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 9.4 (ver [KM15], [Wal62])

Si M^n es una variedad suave, cerrada y simplemente conexa con la homología de \mathbb{S}^n y $n = 4, 5$ o 6 , entonces existe W variedad suave, compacta y contractible tal que $\partial W = M$.

Usando este resultado, el **Teorema 9.2** implica inmediatamente que M es difeomorfa a \mathbb{S}^n para $n = 5$ y $n = 6$. □

Corolario 9.3.1

Si una variedad suave y cerrada M^n con $n \geq 5$ es una esfera homotópica, entonces M^n es homeomorfa a \mathbb{S}^n .

Una pregunta que puede surgir sobre el **Teorema 9.3** es si el resultado es también cierto en la categoría **Diff**. A estos efectos, citamos el siguiente resultado que, al igual que el teorema epónimo de esta monografía, valió una medalla Fields:

Teorema 9.5 (Esferas exóticas, ver [Mil56])

Existen variedades suaves de dimensión 7 que son homeomorfas pero no difeomorfas a \mathbb{S}^7 con su estructura diferencial usual.

Este resultado, de hecho, fue probado antes que el teorema del h-cobordismo, y fue históricamente el puntapié inicial de la topología diferencial: la categoría **Diff** resultó ser mucho más rica y compleja que lo que se creía, y resultó haber distinciones sutiles (y extremadamente contraintuitivas) con **Top**.

Veamos ahora otra consecuencia del **Teorema 9.1**:

Teorema 9.6 (Caracterización de \mathbb{D}^5)

Sea W^5 es una variedad suave, compacta y simplemente conexa que tiene la homología entera de un punto. Consideremos $V = \partial W$. Entonces:

1. Si V es difeomorfa a \mathbb{S}^4 entonces W es difeomorfa a \mathbb{D}^5 .
2. Si V es homeomorfa a \mathbb{S}^4 entonces W es homeomorfa a \mathbb{D}^5 .

Demostración. En el caso 1, por hipótesis tenemos un difeomorfismo $\varphi : V \rightarrow \mathbb{S}^4$, por lo que podemos formar una variedad $M^5 = W \cup_{\varphi} \mathbb{D}^5$. Al ser por hipótesis (homológicamente) dos discos pegados por el borde, tenemos que M tiene la homología de una esfera. Además, M es simplemente conexa por el teorema de van Kampen (ver Apéndice). En el **Teorema 9.3** probamos que para el caso $n = 5$ el homeomorfismo del teorema es en realidad un difeomorfismo. Ahora usamos el siguiente resultado:

Teorema 9.7 (ver [Pal60], [Cer61], [Mil61])

Dados dos encajes suaves de \mathbb{D}^n en M^n una variedad conexa y orientada que preservan orientación, siempre existe una isotopía de ambiente entre ellos.

Como M es una esfera, podemos descomponerla en la unión de dos discos. Encajando el \mathbb{D}^5 de la definición de M en uno de ellos, tenemos entonces gracias al teorema un difeomorfismo $g : M \rightarrow M$ que lleva W en un disco.

Para el caso 2, consideremos $D(W)$ el doble de W (dos copias de W con el borde identificado, ver [Mun63]). La subvariedad $V \subseteq D(W)$ tiene un entorno bicollar en $D(W)$ por construcción, y $D(W)$ es homeomorfa a \mathbb{S}^5 por el **Teorema 9.3**. Citamos ahora la siguiente generalización del teorema de la curva de Jordan:

Teorema 9.8 ([Bro60])

Si tenemos una $(n - 1)$ -esfera Σ encajada topológicamente en \mathbb{S}^n , entonces existe un homeomorfismo $h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ que lleva Σ en $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{S}^n$ (léase: “el ecuador”). Por lo tanto, $\mathbb{S}^n - \Sigma$ tiene dos componentes conexas y la clausura de cada una es un n -disco con borde Σ .

Tomando $\Sigma = V$ tenemos entonces que W es homeomorfa a \mathbb{D}^5 . □

Ofrecemos como última consecuencia otra generalización del teorema de la curva de Jordan, esta vez en la categoría **Diff** :

Teorema 9.9

Si Σ es una $(n - 1)$ -esfera encajada suavemente en \mathbb{S}^n con $n \geq 5$, entonces existe una isotopía de ambiente suave que lleva Σ a $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{S}^n$.

Demostración. $\mathbb{S}^n - \Sigma$ tiene dos componentes conexas [Referencia], por lo que podemos usar el **Corolario 3.3.2** para conseguir un entorno bicollar de Σ . La clausura en \mathbb{S}^n de una componente de $\mathbb{S}^n - \Sigma$ es una variedad suave, simplemente conexa con borde Σ y la homología entera de un punto. Por lo tanto, para $n \geq 6$ el **Teorema 9.2** nos dice que las componentes conexas de $\mathbb{S}^n - \Sigma$ son difeomorfas a \mathbb{D}^n . Para $n = 5$ concluimos lo mismo luego de aplicar el **Teorema 9.6**. Por lo tanto, el **Teorema 9.8** nos provee con una isotopía de ambiente que lleva una componente conexa al hemisferio sur de \mathbb{S}^n , y por lo tanto lleva Σ al ecuador, \mathbb{S}^{n-1} . \square

Una consideración a tener en cuenta con respecto a este último teorema: la isotopía de ambiente no necesariamente deriva en la inclusión $i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n$. Por ejemplo, si uno toma $i \circ g$, donde $g : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ es un difeomorfismo que no es isotópico a la identidad, la isotopía de ambiente no podrá llegar a la identidad.

Estos difeomorfismos son también importantes en la construcción de esferas exóticas como las del **Teorema 9.5**: de hecho, si $n \geq 6$ tendremos que $\mathbb{D}^n \cup_g \mathbb{D}^n$ será una esfera exótica siempre que g sea de esta forma [**Cerf1970LaSN**]. A estas esferas se les llama esferas retorcidas (*twisted spheres* en inglés). Usando nuestra caracterización del disco, es fácil probar que todas las esferas exóticas son esferas retorcidas para $n \geq 6$. En dimensión 5 ya probamos que no existen esferas exóticas. Es fácil probar que tampoco existen esferas exóticas de dimensión 0, 1 o 2. Tampoco existen para $n = 3$ (ver [**Per02**] y [**Per03**]); este resultado se deduce de la Conjetura de Poincaré original.

La existencia de esferas exóticas de dimensión 4 es al día de hoy una pregunta abierta. Se sabe por un teorema de Cerf (ver [**Cer68**]) que $\text{Diff}^+(\mathbb{S}^3)$ es conexo, por lo que una esfera exótica de dimensión 4 no puede ser una esfera retorcida. Esto, sin embargo, no descarta la existencia de esferas exóticas, ya que no podemos utilizar el teorema del h-cobordismo en esta dimensión y, por lo tanto, no tenemos una caracterización del disco como la probada en este capítulo para convertir una esfera exótica en una esfera retorcida.

APÉNDICE: TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

Toda esta sección utiliza como referencia principal a [Hat02].

Definición A.1

Dado un espacio topológico conexo por caminos X , definimos el **grupo fundamental**, que denotaremos $\pi_1(X)$, como el grupo que forman las clases de equivalencia de homotopía de las funciones continuas de $[0, 1]$ en X tales que $f(0) = f(1) = x_0$, con x_0 un punto (arbitrario) previamente elegido, donde la concatenación en x_0 es la operación de grupo.

Definición A.2

Dados grupos A , B y C y homomorfismos $\varphi : C \rightarrow A$ y $\psi : C \rightarrow B$, definimos el **producto libre de A y B amalgamado por C** (mediante φ y ψ), que denotaremos $A *_C B$, como el grupo que cumple que existen homomorfismos $i_1 : A \rightarrow A *_C B$ y $i_2 : B \rightarrow A *_C B$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 A *_C B & \xleftarrow{i_2} & B \\
 \uparrow i_1 & & \uparrow \psi \\
 A & \xleftarrow{\varphi} & C
 \end{array}$$

y, además, tales que dado un grupo G con homomorfismos j_1 y j_2 que también hacen conmutar este diagrama, entonces existe un único homomorfismo $u : A *_C B \rightarrow G$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xleftarrow{j_2} & B \\
 \uparrow j_1 & \swarrow u & \uparrow \psi \\
 A *_C B & \xleftarrow{i_2} & B \\
 \uparrow i_1 & & \uparrow \psi \\
 A & \xleftarrow{\varphi} & C
 \end{array}$$

Teorema A.1 (Teorema de van Kampen)

Sea X un espacio topológico que es la unión de subespacios U_1, U_2 abiertos y conexos por caminos, de manera que $U_1 \cap U_2$ es no vacío y también conexo por caminos (en particular, X es conexo por caminos, por lo que podemos considerar el grupo fundamental independiente de un punto base). Entonces, $\pi_1(X) \cong \pi_1(U_1) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2)} \pi_1(U_2)$, donde amalgamamos mediante las inclusiones.

Definición A.3

Definimos el **n -símplice** Δ^n como la envolvente convexa de $\{e_1, \dots, e_{n+1}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Tomando un subconjunto de $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ con $k + 1$ elementos uno puede definir un k -subsímplice de Δ^n , intuitivamente una “ k -cara” de Δ_n , tomando la envolvente convexa. En el caso específico de un $(n - 1)$ -subsímplice, lo denotaremos Δ_i , donde i es tal que e_i no pertenece al subconjunto que define el subsímplice.

Definición A.4

Dado un espacio topológico X , definimos un **n -símplice singular** como una función continua, potencialmente no inyectiva, $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

Definición A.5

Definimos una **n -cadena** en un espacio topológico X como un elemento del grupo libre generado por los n -símplices singulares en X , que denotaremos $C_n(X)$.

Definición A.6

Definimos el **mapa de borde** para n -cadenas $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ de la siguiente manera:

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \sigma|_{\Delta_i}$$

No es difícil probar que se cumple $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Con esto en mente, tiene sentido la siguiente definición:

Definición A.7

Definimos el **n -ésimo grupo de homología singular** de X , que denotaremos $H_n(M)$, como el grupo $\frac{\text{Ker}(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}$.

Lema A.2

Una variedad M^n cerrada es orientable si y solo si $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$.

Dado A un subespacio de X , tenemos $\partial_n(C_n(A)) = C_{n-1}(A)$, por lo que ∂_n induce un mapa de borde en el cociente, $\partial'_n : \frac{C_n(X)}{C_n(A)} \rightarrow \frac{C_{n-1}(X)}{C_{n-1}(A)}$. Es decir, tiene sentido la siguiente definición:

Definición A.8

Definimos el **n -ésimo grupo de homología singular de X relativo a A** , que denotaremos $H_n(X, A)$, como el grupo $\frac{\text{Ker}(\partial'_n)}{\text{Im}(\partial'_{n+1})}$.

Lema A.3 (Sucesión exacta larga de una tripleta)

Sean A y B subespacios de X tales que $A \subseteq B$. Entonces

$$\cdots \rightarrow H_k(B, A) \rightarrow H_k(X, A) \rightarrow H_k(X, B) \rightarrow H_{k-1}(B, A) \rightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta larga, donde el morfismo de $H_k(B, A)$ en $H_k(X, A)$ es el inducido por la inclusión de B en X , el morfismo de $H_k(X, A)$ en $H_k(X, B)$ es inducido por la identidad (y está bien definido porque $A \subseteq B$) y el morfismo de $H_k(X, B)$ en $H_{k-1}(B, A)$ es inducido por el mapa de borde.

Teorema A.4 (Excisión)

Sean A y B subespacios topológicos de X tales que $A \subseteq B$ y existen retratos de deformación de A' y B' de A y B respectivamente tales que $\overline{A'} \subseteq B'^\circ$. Entonces:

$$H_n(X, A) \cong H_n(X - A, B - A)$$

Definición A.9

Decimos que una sucesión G_n de grupos abelianos con homomorfismos $\partial_n : G_n \rightarrow G_{n-1}$ es un **complejo de cadenas** si $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ para todo n . Lo denotaremos (G_n, ∂) . Cuando el mapa ∂ ya está sobreentendido, lo denotaremos G_* .

Definición A.10

Definimos el **n -ésimo grupo de homología de un complejo de cadenas** (G_n, ∂) , que denotaremos $H_n(G_*)$, como el grupo $\frac{\text{Ker}(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}$.

Definición A.11

Dado un complejo de cadenas, para cada n podemos definir G^n como el dual de G_n (es decir, $\text{Hom}(G_n, \mathbb{Z})$) y $\delta_n : G^n \rightarrow G^{n+1}$ como el mapa que toma un morfismo en G^n y lo precompone con ∂_{n+1} (es decir, $\delta_n(\varphi) = \varphi \circ \partial_{n+1}$). (G^n, δ) define un complejo de cadenas, que llamaremos el **complejo de cocadenas** de (G_n, ∂) . Definimos el **n -ésimo grupo de cohomología de un complejo de cadenas**, que denotaremos $H^n(G_*)$, como el grupo de homología definido para (G^n, δ) .

Teorema A.5 (Teorema del coeficiente universal para cohomología en \mathbb{Z})

Para un complejo de cadenas (G_n, ∂) , los grupos de homología del complejo de cocadenas asociado quedan determinados por las sucesiones exactas escindidas siguientes, para cada n :

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(G_*)) \rightarrow H^n(G_*) \xrightarrow{h} \text{Hom}(H_n(G_*)) \rightarrow 0$$

En otras palabras, la cohomología en \mathbb{Z} está determinada por la homología en \mathbb{Z} . Para las definiciones de Ext y de h (en un contexto más general) referirse a [Hat02].

Definición A.12

Dados $u \in H^p(X)$ y $v \in H^q(X)$, definimos el **producto copa** $u \smile v$ como el elemento de $H^{p+q}(X)$ que cumple la siguiente igualdad para todo $(p+q)$ -símplice singular σ :

$$(u \smile v)(\sigma) = u(\sigma|_{\{e_1, \dots, e_p\}})v(\sigma|_{\{e_{p+1}, \dots, e_{p+q}\}})$$

Teorema A.6 (Isomorfismo de Thom)

Sea (E, B, π) un haz orientado de n -espacios y sea E_0 el conjunto de puntos que no valen 0 en la fibra. Sea $F_0 = F \cap E_0$. Entonces $H^i(E, E_0) = 0$ si $i < n$. Además, el rango de $H^n(E, E_0)$ es 1 y el generador u restringido a $H^n(F, F_0)$ es distinto de 0 para toda fibra. Además, la correspondencia $y \mapsto y \smile u$ es un isomorfismo entre $H^j(E)$ y $H^{j+n}(E, E_0)$ para todo j .

REFERENCIAS

- [Whi36] Hassler Whitney. “Differentiable Manifolds”. En: *Annals of Mathematics* 37.3 (1936), págs. 645-680.
- [Whi44] Hassler Whitney. “The Self-Intersections of a Smooth n -Manifold in $2n$ -Space”. En: *Annals of Mathematics* 45 (1944), pág. 220.
- [Hil53] P. J. Hilton. *An Introduction to Homotopy Theory*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1953.
- [Mil56] John W. Milnor. “On Manifolds Homeomorphic to the 7-Sphere”. En: *Annals of Mathematics* 64 (1956), pág. 399.
- [Tho56] René Thom. “La classification des immersions”. En: 1956.
- [Mil58] John W. Milnor. *Differential Topology*. Princeton University Press, 1958.
- [Bro60] Morton Brown. “A proof of the generalized Schoenflies theorem”. En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 66 (1960), págs. 74-76.
- [Pal60] Richard S. Palais. “Extending Diffeomorphisms”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 11.2 (1960), págs. 274-277.
- [Wal60] Andrew H. Wallace. “Modifications and Cobounding Manifolds”. En: *Canadian Journal of Mathematics* 12 (1960), págs. 503-528.
- [Cer61] Jean Cerf. “Topologie de certains espaces de plongements”. En: *Bulletin de la Société Mathématique de France* 89 (1961), págs. 227-380.
- [Mil61] John W. Milnor. “Differential Structures”. En: 1961.
- [Sma61a] Stephen Smale. “Generalized Poincaré’s Conjecture in Dimensions Greater Than Four”. En: *Annals of Mathematics* 74 (1961), págs. 391-406.
- [Sma61b] Stephen Smale. “On Gradient Dynamical Systems”. En: *Annals of Mathematics* 74 (1961), pág. 199.
- [MS62] John W. Milnor y Jim Stasheff. “Characteristic Classes. (Am-76), Volume 76”. En: 1962.

- [Wal62] C. T. C. Wall. “Killing the Middle Homotopy Groups of Odd Dimensional Manifolds”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 103.3 (1962), págs. 421-433.
- [Mil63] John W. Milnor. “Morse Theory. (Am-51), Volume 51”. En: 1963.
- [Mun63] James R. Munkres. “Elementary differential topology : lectures given at Massachusetts Institute of Technology, fall, 1961”. En: 1963.
- [Lan64] Serge Lang. “Introduction to Differentiable Manifolds”. En: 1964.
- [Mil65] John W. Milnor. “Lectures on the h-cobordism theorem”. En: Princeton University Press, 1965.
- [Cer68] Jean Cerf. “Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ($\Gamma_4 = o$)”. En: 1968.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. ISBN: 978-0-521-79540-1. URL: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf> (visitado 17-03-2022).
- [Lee02] John M. Lee. “Introduction to Smooth Manifolds”. En: 2002.
- [Per02] Grisha Perelman. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. 2002. eprint: [arXiv:math/0211159](https://arxiv.org/abs/math/0211159).
- [Per03] Grisha Perelman. *Ricci flow with surgery on three-manifolds*. 2003. eprint: [arXiv:math/0303109](https://arxiv.org/abs/math/0303109).
- [Mat09] MathOverflow. *Examples of great mathematical writing*. 2009. URL: <https://mathoverflow.net/questions/358/examples-of-great-mathematical-writing> (visitado 20-03-2022).
- [KM15] Michel Kervaire y John W. Milnor. “Groups of Homotopy Spheres, I”. En: 2015.