

TRABAJO MONOGRÁFICO

---

# Encajes e inmersiones isométricas $C^1$

El teorema de Nash-Kuiper

---

Por: Alejandro Bellati

Orientador: Martín Reiris



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

Licenciatura en Matemática  
Facultad de Ciencias  
Universidad de la República  
Montevideo, Uruguay



## Resumen

Esta monografía revisita el problema de construir una inmersión/encaje isométrico de una variedad Riemanniana en  $\mathbb{R}^n$ , un problema que fue formulado por primera vez en 1873 y resuelto, de manera satisfactoria, por Nash en 1954. En la primer parte de esta tesis damos una prueba completa del teorema de Nash basados en el artículo *The masterpieces of John Forbes Nash Jr* de Camillo De Lellis. En el último capítulo damos un encaje isométrico del toro plano en  $\mathbb{R}^3$ , replicando la construcción dada en el artículo *Flat tori in three-dimensional space and convex integration* de Vincent Borelli et al.

## Abstract

This monograph revisits the problem of constructing an isometric embedding/immersion of a Riemannian manifold in  $\mathbb{R}^n$ , a problem that was first formulated in 1873 and satisfactorily solved by Nash in 1954. In the first part of this thesis we give a complete proof of Nash's theorem based on the article *The masterpieces of John Forbes Nash Jr* by Camillo De Lellis. In the last chapter we give an isometric embedding of the flat torus in  $\mathbb{R}^3$ , replicating the construction given in the paper *Flat tori in three-dimensional space and convex integration* by Vincent Borelli et al.



## Índice general

Capítulo 1. Introducción	5
1. Algunos resultados	5
2. Los resultados de Nash	6
3. ¿Qué sucede con la curvatura?	9
Capítulo 2. Preliminares	13
1. Topológicos	13
2. Variedades diferenciales, inmersiones y encajes.	15
3. Particiones de la unidad	17
4. Entorno tubular	18
5. Norma Hilbert-Schmidt	20
6. Proyecciones y aproximación	20
Capítulo 3. Etapa de iteración	23
Capítulo 4. Resultados principales	39
1. Nash's $C^1$ isometric embedding	39
2. Inmersiones y encajes isométricos en $\mathbb{R}^N$	41
Capítulo 5. Encaje isométrico del toro plano en $\mathbb{R}^3$	49
1. Introducción	49
2. Integración convexa en dimensión 1	50
3. Encaje isométrico del toro plano	54
Bibliografía	67



## Capítulo 1

### Introducción

Sea una variedad diferenciable  $M$  con una métrica Riemanniana  $g$ . Si  $U \subset M$  es un entorno coordinado entonces podemos escribir la métrica en coordenadas mediante

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

donde seguimos el convenio de sumación de Einstein. El hecho de que  $g$  sea suave es equivalente a pedir que las funciones  $g_{ij}$  lo sean. Una inmersión isométrica  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una inmersión, es decir función diferenciable con diferencial inyectivo, que además preserva la métrica

$$g_p(v, w) = \langle D_p u(v), D_p u(w) \rangle_{\mathbb{R}^n} \quad \forall p \in M, v, w \in T_p M$$

Si además  $u$  es un homeomorfismo sobre su imagen entonces es un encaje isométrico.

Gauss definió la curvatura de una superficie de manera extrínseca, utilizando el espacio ambiente, y luego probó en su célebre *Teorema egregium* que al final era un objeto intrínseco, solo dependía de medidas hechas en la superficie, independiente de cómo estuviese la superficie encaja en el espacio ambiente. Luego Riemann tomó el enfoque intrínseco como punto de partida para generalizar el concepto de curvatura a otras dimensiones y a variedades abstractas. A partir de aquí surgió la pregunta de si era posible realizar todas las variedades Riemannianas como subvariedades de algún  $\mathbb{R}^m$ , es decir, de si era posible encajar isométricamente toda variedad Riemanniana en algún  $\mathbb{R}^m$ .

La existencia de una inmersión, o de un encaje, isométrico de variedades Riemannianas es un problema clásico cuya formulación se atribuye a Schläfli, en 1873. Siendo precisos, el problema consiste en tratar de determinar cuándo una variedad Riemanniana de dimensión  $n$  puede ser encajada isométricamente en un espacio ambiente  $\mathbb{R}^m$  mediante un encaje de regularidad predefinida ( $C^k$  para cierto  $k$ ).

#### 1. Algunos resultados

En esta sección resumimos el estado del problema previo a los artículos publicados por Nash y está basado fuertemente en la review de Klainerman [6]. Traduzcamos el problema en ecuaciones. Denotamos por  $e$  a la métrica usual en  $\mathbb{R}^N$ . Si  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una inmersión, con  $\dim(M) = n$ , entonces la expresión  $e(D_p u(v), D_p u(w))$  con  $p \in M, v, w \in T_p M$  define una métrica en  $M$  llamada la métrica pullback. Denotamos la misma por  $u^*e$ . En coordenadas locales esta métrica está dada por

$$u^*e = (\partial_i u \cdot \partial_j u) dx^i \otimes dx^j$$

con  $\cdot$  el producto interno usual. Entonces para que la inmersión  $u$  sea isométrica se tiene que cumplir  $u^*e = g$ , o en coordenadas  $g_{ij} = \partial_i u \cdot \partial_j u$ , lo que es un sistema de ecuaciones

en derivadas parciales. Observar que la métrica tiene  $n(n+1)/2$  componentes independientes, por lo cual el sistema está sobredeterminado al menos que  $N \geq n(n+1)/2$ .

Lo primero a mencionar, es que si  $N \geq n(n+1)/2$  existen encajes locales isométricos que son analíticos. Esto se sigue de una aplicación del llamado *principio de Cauchy-Kowalewski*. El problema global fue atacado por primera vez en el caso  $n = 2$  y  $N = 3$ , y con hipótesis extras sobre la curvatura. En lo que sigue  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  es la esfera.

**TEOREMA 1.1** (Cohn-Vossen (1927), Herglotz). *Si  $(S^2, g)$  tiene curvatura de Gauss positiva y  $u \in C^2(S^2, \mathbb{R}^3)$  es un encaje isométrico entonces  $u(S^2)$  está determinado a menos de un movimiento rígido.*

Como veremos, exigir regularidad  $C^2$  es esencial. La existencia de una solución en este mismo contexto fue establecida por H.Lewy (1937) cuando la métrica  $g$  es analítica: una métrica analítica en la esfera siempre es realizable por una subvariedad analítica de  $\mathbb{R}^3$ . Tomo varios años deshacerse de la excesiva regularidad exigida en la métrica.

## 2. Los resultados de Nash

En el momento en que Nash publica sus trabajos [9, 10], se sabía poco sobre la existencia de soluciones. En la década del 50, en sus dos papers Nash revolucionó el tema, en [9] demuestra la existencia de una gran cantidad de encajes isométricos  $C^1$  en  $\mathbb{R}^{n+2}$  y en [10] establece la existencia de encajes isométricos  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^m$  para cierto  $m(n)$ . Kuiper [7] modifica [9] y establece la existencia de encajes isométricos  $C^1$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y como corolario deduce que toda superficie compacta de curvatura negativa admite un encaje isométrico  $C^1$  en  $\mathbb{R}^3$ . Para hacer el resultado más sorprendente, se deduce de [9] y de [7] que toda superficie compacta puede encajarse isométricamente dentro de una bola de radio arbitrariamente pequeño (en particular la esfera de radio 1 puede ser encajada isométricamente dentro de una bola de radio 1/2).

Las técnicas utilizadas por Nash en cualquiera de sus artículos fueron totalmente innovadoras dando lugar a importantes desarrollos. El legado de Nash tiene ramificaciones importantes: el primer artículo da lugar a la teoría general de la integración convexa y el principio-h de Gromov y el segundo da lugar al célebre teorema de la función inversa de Nash-Moser.

Para introducir los teoremas que Nash presentó en [9] es necesario introducir el concepto de inmersión corta.

**DEFINICIÓN 1.1** (Inmersiones cortas). *Si  $(M, g)$  es una variedad Riemanniana, una inmersión  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  es corta si  $u^*e \leq g$  en el sentido que  $g - u^*e$  es semidefinida positiva. En coordenadas esto quiere decir*

$$(\partial_i u \cdot \partial_j u) w^i w^j \leq g_{ij} w^i w^j$$

*Análogamente, decimos que una inmersión es estrictamente corta si  $g - u^*e$  es definida positiva.*

Si  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una inmersión isométrica entonces se verifica que el mapa preserva las longitudes de las curvas, es decir, la longitud de una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  es igual a la

longitud de  $u \circ \gamma$  en  $\mathbb{R}^N$ . Sin embargo, si una inmersión es estrictamente corta entonces la longitud de  $u \circ \gamma$  es menor a la longitud de  $\gamma$ . La idea de Nash es comenzar a partir de una inmersión estrictamente corta  $u$  e ir corrigiendo de a poco a  $u$ , haciendo que en cada paso siga siendo estrictamente corta pero menos. Luego de infinitos pasos logra que el mapa resultante este  $C^0$  cerca de  $u$  y que además sea una inmersión isométrica, llegando al siguiente resultado.

**TEOREMA 1.2** (Nash's  $C^1$  isometric embedding theorem). *Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana cerrada de dimensión  $n$  y sea  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  una inmersión corta  $C^\infty$  con  $N \geq n+2$ . Entonces, para todo  $\epsilon > 0$  existe una inmersión isométrica  $C^1$ ,  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  tal que  $\|u - v\|_{C^0} < \epsilon$ . Si además  $v$  es un encaje entonces  $u$  se puede elegir encaje también.*

El hecho de que la variedad sea cerrada se puede evitar, para eso hay que introducir la noción de conjunto límite. Recordamos el concepto de exhaustión por compactos de un espacio topológico.

**DEFINICIÓN 1.2.** *Una sucesión  $(K_i)_{i=1}^\infty$  de subconjuntos compactos de un espacio topológico  $X$  es una exhaustión de  $X$  por compactos si  $X = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$  y  $K_i \subset \text{Int}(K_{i+1}) \forall i$ .*

**PROPOSICIÓN 1.3.** *Si  $X$  es un espacio con base numerable y localmente compacto y Hausdorff entonces admite una exhaustión por compactos.*

En particular una variedad diferenciable admite una exhaustión por compactos.

**DEFINICIÓN 1.3** (Conjunto límite). *Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  una función diferenciable. Sea  $(K_i)_{i=1}^\infty$  una exhaustión por compactos de  $M$ . El conjunto límite de  $v$  es la colección de puntos  $q$  que son límites de  $(v(p_i))_i$  con  $p_i \in M - K_i$ .*

Lo anterior está bien definido, ya que la condición  $K_i \subset \text{Int}(K_{i+1})$  permite ver que el conjunto no depende de la exhaustión elegida. En efecto, gracias a esa condición se tiene  $\bigcup_{i=1}^\infty \text{Int}(K_i) = M$  y por lo tanto si tengo otra exhaustión por compactos  $(C_j)_j$  para cada  $j$  existe  $i$  tal que  $C_j \subset K_i$ . Por lo tanto si una sucesión de  $p_i$  se escapa de la exhaustión  $K_i$  también lo hará de la  $C_j$ .

Si  $(K_i)$  es una exhaustión por compactos de  $M$  entonces  $(K_i^c)$  es, en la topología de la compactificación por un punto, una base de entornos de  $\infty$ , es por eso que la sucesión  $p_i$  mencionada en la definición está convergiendo a  $\infty$ . A modo de ejemplo, consideremos la inmersión  $\gamma : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\gamma(t) = (\sin 2t, \sin t)$ . En este caso el conjunto límite de  $v$  es el  $(0, 0)$ . Con esta nueva definición el teorema de Nash para variedades no cerradas es el siguiente:

**TEOREMA 1.4** ( $C^1$  isometric embedding, nonclosed case). *Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$  y sea  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  una inmersión estrictamente corta  $C^\infty$  con  $N \geq n + 2$ . Entonces, para todo  $\epsilon > 0$  existe una inmersión isométrica  $C^1$ ,  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  tal que  $\|u - v\|_{C^0} < \epsilon$ . Si además  $v$  es un encaje, y el conjunto límite de  $v$  no interseca a  $v(M)$ , entonces  $u$  se puede elegir encaje también. Además se puede elegir que  $u$  tenga el mismo conjunto límite que  $v$ .*

Notar que si  $M$  es compacta entonces el conjunto límite es vacío. Además en el caso compacto veremos que si multiplico el mapa  $v$  por  $\lambda$  cercano a 1 paso de una inmersión

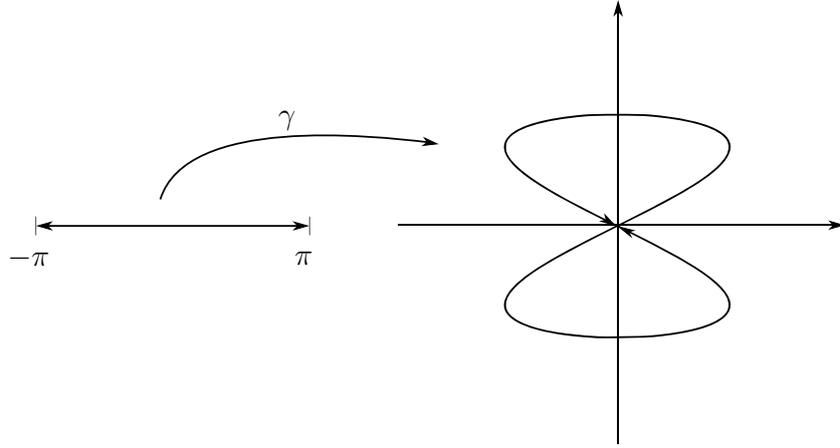


FIGURA 1. Ejemplo de una inmersión  $\gamma : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuyo conjunto límite es el origen.

corta a una estrictamente corta que además está  $C^0$  cerca (ver el corolario 2.3.1). Es por todo esto que este teorema es una generalización del teorema 1.2.

*OBSERVACIÓN.* Nash comenta que es posible relajar la condición  $N \geq n + 2$  a la condición óptima  $N \geq n + 1$  usando cálculos más complicados, sin embargo, no da ningún detalle sobre esto. Kuiper probó un poco después que efectivamente vale con  $N \geq n + 1$  usando una adaptación del argumento de Nash. El teorema final se conoce como el teorema de Nash-Kuiper.

Notar que el teorema del encaje isométrico  $C^1$  de Nash-Kuiper implica que cualquier 2-variedad cerrada y orientable puede ser encajada isométricamente en  $\mathbb{R}^3$ . Aquí pedimos orientable simplemente para saber que existe un encaje en  $\mathbb{R}^3$ . En la figura 2 se ve el toro plano encajado en  $\mathbb{R}^3$ . Más aún, el teorema de Nash-Kuiper implica que cualquier



FIGURA 2. Encaje isométrico del toro plano en  $\mathbb{R}^3$ . Fuente: <http://hevea-project.fr/>

2-variedad cerrada y orientable puede ser encajada isométricamente en una bola de radio  $\epsilon > 0$  en  $\mathbb{R}^3$  con  $\epsilon > 0$  arbitrariamente chico. Para ver esto, si  $M$  es una 2-variedad cerrada y  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un encaje, entonces como  $M$  es compacta, existe  $\lambda$  tal que  $\tilde{v} = \lambda v$  es un encaje corto. Además tomando  $\lambda$  suficientemente chico podemos hacer

que la imagen este contenida en una bola de radio  $\epsilon/2$ . Por Nash-Kuiper existe  $u$  encaje isométrico  $\epsilon/2$  cerca en la topología  $C^0$ , entonces obtenemos lo deseado.

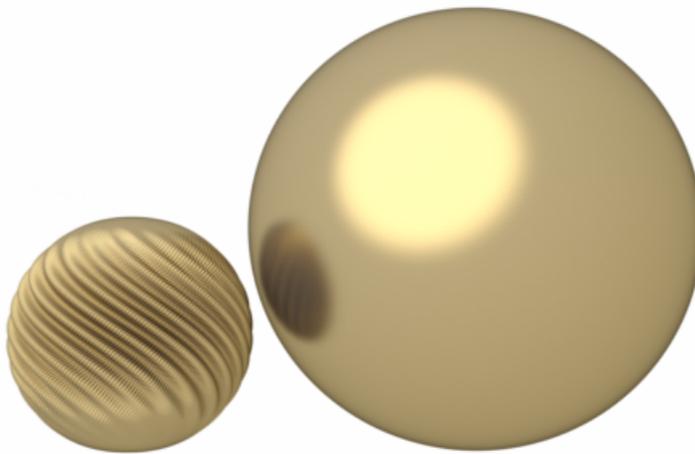


FIGURA 3. Encaje isométrico de la esfera en una bola de radio menor.  
Fuente: <http://hevea-project.fr/>

Este resultado es bastante impactante y contraintuitivo, especialmente si lo comparamos con el teorema de rigidez de Cohn-Vossen para el problema de Weyl: si  $M$  es una 2-esfera con una métrica  $g$  de regularidad  $C^2$  con curvatura de Gauss positiva entonces la imagen de un encaje isométrico  $C^2$  en  $\mathbb{R}^3$  está únicamente determinada a menos de movimientos rígidos de  $\mathbb{R}^3$ . Por otro lado simples argumentos geométricos prueban que ninguna superficie de curvatura de Gauss negativa puede encajarse isométricamente en  $\mathbb{R}^3$  mediante un encaje  $C^2$ .

Para terminar, si se combinan los teoremas de Nash con el clásico teorema de Whitney sobre la existencia de inmersiones y encajes diferenciables se puede probar el siguiente resultado.

**COROLARIO 1.4.1.** *Toda variedad Riemanniana  $(M, g)$  tiene una inmersión isométrica  $C^1$  en  $\mathbb{R}^{2n}$  y un encaje isométrico  $C^1$  en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Si adicionalmente la variedad es cerrada el encaje isométrico  $C^1$  se puede hacer en  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

En la primer parte de esta tesis veremos una prueba de los teoremas de Nash de su primer paper, aquellos sobre los encajes/inmersiones  $C^1$ , y también veremos este último corolario. En el último capítulo daremos un encaje isométrico del toro plano en  $\mathbb{R}^3$ , mostrando una instancia del teorema de Nash-Kuiper. La realización de este mapa se basa en sistematizar, mediante el uso de integración convexa, parte de la construcción realizada por Nash y Kuiper. Para la primer parte el artículo de principal referencia es [5] mientras que para el final es [4].

### 3. ¿Qué sucede con la curvatura?

La curvatura de Gauss de una subvariedad de  $\mathbb{R}^3$  se define utilizando este espacio ambiente, utilizando cómo la variedad está encajada. Localmente tiene bien definido un

campo normal a la superficie  $N : U \subset M \rightarrow S^2$ . Este mapa es diferenciable, además el diferencial en un punto  $D_p N : T_p M \rightarrow T_{N(p)} S^2$  es un operador lineal una vez que se identifican  $T_p M$  y  $T_{N(p)} S^2$  con subespacios de  $\mathbb{R}^3$ , es decir, son el mismo subespacio visto en  $\mathbb{R}^3$ . Se prueba que este mapa es autoadjunto y por lo tanto el operador es diagonalizable. Los valores propios son los llamados curvaturas principales y los subespacios las direcciones principales. La curvatura de Gauss es el producto de las curvaturas principales lo cual coincide con el determinante de  $D_p N$ . Por otro lado tenemos definiciones intrínsecas de curvatura, definiciones que no utilizan el espacio ambiente. Todas estas nociones quedan capturadas en la información que da un campo tensorial llamado el tensor de curvatura de Riemann. Gauss en su genial teorema egregium demuestra que su definición de curvatura termina siendo un concepto intrínseco de las subvariedades, al final la misma se puede dar en terminos del tensor de curvatura, es decir, tiene una definición intrínseca que es equivalente.

Simple argumentos geométricos muestran que la curvatura de Gauss de una subvariedad compacta de  $\mathbb{R}^3$  siempre tiene algún punto de curvatura positiva, por lo tanto no existe una subvariedad compacta de curvatura cero en  $\mathbb{R}^3$  o de curvatura negativa. Por otro lado el teorema de Nash asegura la existencia de un encaje isométrico  $C^1$  del toro plano. Esto parece contradictorio y es por eso que esta sección esta dedicada a aclarar un poco el asunto.

Primero una subvariedad diferenciable  $M \subset \mathbb{R}^3$  se define como una variedad diferenciable  $M$  que cumple que la inclusión  $i : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un encaje suave. Esto quiere decir que la topología de  $M$  es la topología relativa y que el mapa  $i : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  es  $C^\infty$  y con diferencial inyectivo. Es un teorema que si  $N$  es una variedad diferenciable y  $f : N \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un encaje suave entonces  $f(N)$  admite una única estructura de variedad diferenciable tal que  $f(N)$  es una subvariedad diferenciable de  $\mathbb{R}^3$  y  $f : N \rightarrow f(N)$  un difeomorfismo.

El teorema de Nash asegura la existencia de un encaje  $C^1$  del toro plano en  $\mathbb{R}^3$ ,  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es por eso que la imagen de este toro plano en  $\mathbb{R}^3$  no tiene estructura de variedad diferenciable tal que sea una subvariedad de  $\mathbb{R}^3$ . Sin embargo, tiene estructura de variedad diferenciable tal que es una subvariedad  $C^1$  de  $\mathbb{R}^3$ , lo que quiere decir que el mapa  $i : f(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un encaje  $C^1$ . Con esta estructura el mapa  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow f(\mathbb{T}^2)$  es un difeomorfismo  $C^\infty$  que es una isometría. Se sigue que todas las curvaturas intrínsecas se preservan, el tensor de curvatura de  $f(\mathbb{T}^2) \subset \mathbb{R}^3$  es nulo, en particular la definición intrínseca de curvatura de Gauss es nula. Lo que sucede es que la definición extrínseca de la curvatura de Gauss no se relaciona bien con la intrínseca, de hecho ni siquiera está bien definida.

La curvatura de Gauss tal cual como la definió Gauss no es posible. Como el encaje  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es  $C^1$  entonces el mapa  $N : f(\mathbb{T}^2) \rightarrow S^2$  no es diferenciable. Esto se sigue porque en coordenadas de  $\mathbb{R}^3$ , en la fórmula del mapa  $N$  aparecen las primeras derivadas de  $f$ . Es necesario usar coordenadas de  $\mathbb{R}^3$  ya que la forma de definir el campo normal es viendo los subespacios tangentes encajados en  $\mathbb{R}^3$ . Visto desde otro punto de vista, las parametrizaciones de la variedad  $f(\mathbb{T}^2)$  son mapas  $C^1$  cuando se los mira como mapas

a  $\mathbb{R}^3$  (y no a  $f(\mathbb{T}^2)$  donde obviamente son  $C^\infty$ ), como el mapa normal se define a partir de campos suaves de  $f(\mathbb{T}^2)$  vistos en  $\mathbb{R}^3$  vía el diferencial de la inclusión, estos campos pierden regularidad y son solo continuos en  $\mathbb{R}^3$ .

Uno podría intentar relacionar el espacio ambiente con la variedad de otra forma, y no como lo hizo Gauss. En general la relación clásica entre las curvaturas queda dada por un 2-tensor covariante llamado *la segunda forma fundamental*. Este tensor mide la diferencia entre calcular derivadas covariantes en el espacio ambiente con calcular derivadas covariantes en la variedad y gracias a él se termina derivando relaciones entre la curvatura del espacio ambiente y de la variedad. Como 2-tensor se puede elevar uno de sus índices para conseguir un (1,1)-tensor el cual está canónicamente identificado con endomorfismo lineal del plano tangente a la variedad. Dicha transformación lineal resulta coincidir con el mapa de Gauss,  $d_p N$ . Sin embargo este segundo enfoque también carece de sentido, pues para definir la segunda forma es necesario tomar dos campos suaves  $X, Y$  en la variedad  $f(\mathbb{T}^2)$ , y comparar la derivada covariante de  $f(\mathbb{T}^2)$ ,  $\nabla_X Y$ , con la derivada covariante del espacio ambiente  $\tilde{\nabla}_X Y$ . Esto es un problema ya que para calcular  $\tilde{\nabla}_X Y$  se deben pensar los campos  $X, Y$  como campos de  $\mathbb{R}^3$  (vía el diferencial de la inclusión), el problema es que como campos de  $\mathbb{R}^3$  son solo continuos y entonces no está bien definida la derivada covariante.



## Capítulo 2

### Preliminares

En este capítulo resumimos resultados de distinta índole que serán de utilidad para el desarrollo de los teoremas relevantes.

#### 1. Topológicos

El siguiente lema será de utilidad para la prueba de la existencia de un encaje isométrico.

LEMA 1.1 (Shrinking lemma). *Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico normal y  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  un cubrimiento por abiertos localmente finito. Entonces existe un cubrimiento por abiertos  $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $\bar{V}_i \subset U_i$ .*

DEMOSTRACIÓN. Como  $\{U_i\}$  es un cubrimiento por abiertos entonces  $A = X - \bigcup_{i>1} U_i$  es un cerrado tal que  $A \subset U_1$ . Como el espacio es normal entonces existe un abierto  $V_1$  tal que  $A \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset U_1$ . Se sigue que  $\{V_1\} \cup \{U_i\}_{i \geq 2}$  es un cubrimiento por abiertos. Nuevamente, por ser un cubrimiento por abiertos entonces  $A = X - V_1 \cup \bigcup_{i>2} U_i$  es un cerrado tal que  $A \subset U_2$ . De nuevo defino  $V_2$  tal que  $A \subset V_2 \subset \bar{V}_2 \subset U_2$ . De esta forma construyo inductivamente una colección de abiertos  $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i$  y tal que para todo  $i$ ,  $\{V_1, \dots, V_i\} \cup \{U_j, j > i\}$  es un cubrimiento de  $X$ . Para terminar veamos que  $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es un cubrimiento de  $X$ . Dado  $x \in X$  como el cubrimiento  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es localmente finito entonces existe  $i_0$  tal que  $x \in U_{i_0}$  y  $x \notin U_i \forall i > i_0$ . Como  $\{V_1, \dots, V_{i_0}\} \cup \{U_j, j > i_0\}$  es un cubrimiento entonces necesariamente existe  $j$  con  $1 \leq j \leq i_0$  tal que  $x \in V_j$ . Esto termina de probar que  $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es un cubrimiento.  $\square$

OBSERVACIÓN. *De hecho, asumiendo axioma de elección se puede probar una versión más general, que sigue pidiendo que el cubrimiento sea localmente finito pero que no exige que sea numerable.*

El siguiente lema garantiza la existencia de un cubrimiento con buenas propiedades. El mismo será utilizado varias veces en distintas partes de la monografía.

LEMA 1.2. *Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $\{V_\lambda\}$  un cubrimiento por abiertos de  $M$ . Entonces existe un cubrimiento por abiertos  $\{U_\ell\}$  con las siguientes propiedades:*

- a) *Cada  $U_\ell$  está contenido en algún  $V_\lambda$ .*
- b) *La clausura de cada  $U_\ell$  es difeomorfa a una bola  $n$ -dimensional.*
- c) *Cada  $U_\ell$  intersecta como mucho finitos otros elementos del cubrimiento.*
- d) *Cada punto  $p \in M$  tiene un entorno contenido como mucho en  $n + 1$  elementos del cubrimiento.*

e) La colección  $\{U_\ell\}$  se subdivide en  $n + 1$  clases  $\mathcal{C}_i$  tal que los abiertos en  $\mathcal{C}_i$  son disjuntos dos a dos.

DEMOSTRACIÓN. Es un teorema clásico que  $M$  puede ser triangulada. Refinando la triangulación se puede asumir que cada simplex está contenido en algún  $V_\lambda$ , más aún, podemos suponer que cada simplex y sus adyacentes están contenidos en un  $V_\lambda$ . Denotamos por  $S$  la triangulación y enumeramos los vértices mediante  $\{S_i^0\}$ , los lados 1-dimensionales mediante  $\{S_i^1\}$  y así para el resto. Tomamos una subdivisión de  $S$  utilizando el baricentro y le llamamos  $T$ .

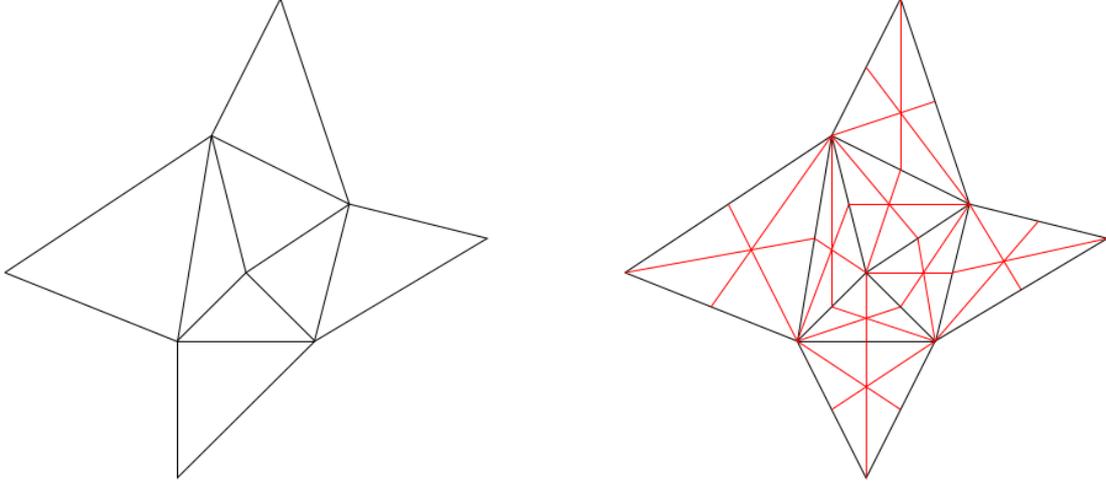


FIGURA 1. Triangulación  $S$  y la triangulación  $T$  generada utilizando el baricentro de cada triángulo en rojo. Fuente [5].

1. Para cada vértice  $S_i^0$  de  $S$  consideramos  $U_i^0$  como el interior de la estrella de  $S_i^0$  en la triangulación  $T$ . La estrella es la unión de todos los simplex de la triangulación que contienen a  $S_i^0$ . De esta manera los abiertos  $\{U_i^0\}$  son dos a dos disjuntos.
2. Para cada lado  $S_i^1$  de  $S$  consideramos  $U_i^1$  como el interior de la estrella de  $S_i^1$  en la triangulación  $T$ . Nuevamente la familia  $\{U_i^1\}$  son dos a dos disjuntos. Además si  $U_i^1 \cap U_j^0 \neq \emptyset$  entonces  $S_j^0 \subset S_i^1$ . En efecto si no ocurre esto último es claro que  $U_i^1 \cap U_j^0 = \emptyset$  pues los triángulos que contienen a  $S_i^1$  no tienen a  $S_j^0$ .
3. Continuamos de esta forma hasta  $n - 1$ . Completamos la colección  $\{U_i^t : 0 \leq t \leq n - 1\}$  con los interiores  $U_i^n$  de los simplex  $n$ -dimensionales  $S_i^n$ . Denotamos la colección final por  $\mathcal{C}$ .

La familia  $\mathcal{C}$  claramente es un cubrimiento por abiertos que cumple a) y e). Si dos elementos distintos  $U_i^s$  y  $U_j^t$  tienen intersección no vacía, con  $s \geq t$  entonces  $s > t$  y  $S_j^t$  es una cara de  $S_i^s$ . Esto implica que  $\mathcal{C}$  satisface c). Para ver d), dado  $p \in M$  tomo  $W = \bigcap_i U_{\ell(i)}$  siendo  $U_{\ell(i)} \in \mathcal{C}_i$  un abierto tal que  $p \in U_{\ell(i)}$  o  $M$  en caso de no existir dicho abierto. Es claro que no puede haber otros abiertos más que  $\{U_{\ell(i)}\}_{i=1}^{n+1}$  que intersecten  $W$ , probando d). Falta conseguir b), sin embargo, basta con elegir abiertos un poco más pequeños para cada  $U_s^j$  para conseguir una familia que cumpla b) y que además retenga el resto de las propiedades. Es fácil ver que achicando los abiertos se

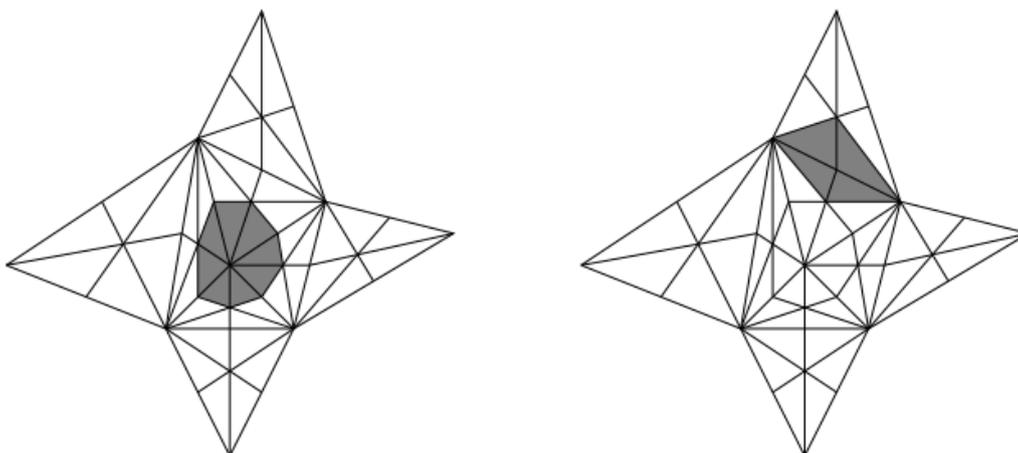


FIGURA 2. A la izquierda se ve uno de los conjuntos  $U_i^0$ , a la derecha se ve uno de los  $U_j^1$ . Fuente [5]

siguen cumpliendo c),d) y e). El tema es seguir cubriendo la variedad. Para esto notar que el cubrimiento obtenido hasta ahora es numerable y localmente finito, por lo tanto puedo repetir el procedimiento visto en el lema 1.1 pero utilizando  $V_\ell$  tal que  $\bar{V}_\ell$  sea difeomorfo a una bola. El cubrimiento es localmente finito por la propiedad d) y es numerable ya que  $M$  tiene base numerable y puedo colocar un elemento básico dentro del interior de cada triángulo, por lo tanto hay numerables triángulos.  $\square$

## 2. Variedades diferenciales, inmersiones y encajes.

A lo largo de toda la monografía, usaremos el término *variedad diferenciable* para referirnos a una variedad topológica sin borde, con un atlas maximal diferenciable, es decir, con los cambios de cartas suaves. Recordar que un mapa diferenciable  $f : M \rightarrow N$  entre variedades diferenciables es una inmersión si para todo  $p \in M$  se tiene que  $D_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es inyectivo. Si además  $f : M \rightarrow N$  es un homeomorfismo sobre su imagen entonces se dice que  $f$  es un encaje diferenciable. En el capítulo de introducción definimos la noción de conjunto límite. El siguiente resultado relaciona esta noción con la de inmersión y encaje.

PROPOSICIÓN 2.1. *Si  $u : M \rightarrow N$  es una inmersión inyectiva tal que el conjunto límite de  $u$  no interseca a  $u(M)$  entonces  $u$  es un encaje.*

DEMOSTRACIÓN. Para ver esto necesitamos chequear que  $u^{-1} : u(M) \rightarrow M$  es continua. Sea  $u(p_k)$  una sucesión en la imagen tal que  $u(p_k) \rightarrow u(p) \in u(M)$ , hay que ver que  $p_k \rightarrow p$ . Afirmando que existe  $K \subset M$  compacto tal que  $p_k \in K \forall k$ . En efecto, si no fuese así tomo una exhaustión por compactos  $(K_i)$  y una subsucesión  $p_{k_i}$  con  $p_{k_i} \notin K_i$ . Es decir,  $p_{k_i} \rightarrow \infty$ . Pero esto es absurdo ya que  $u(p_{k_i}) \rightarrow u(p)$  por lo que  $u(p)$  estaría en el conjunto límite de  $u$ . Entonces tenemos que  $p_k \in K \forall k$ . Supongamos por absurdo que  $p_k$  no converge a  $p$ , entonces podemos tomar una subsucesión convergente  $p_{k_i} \rightarrow q$  con  $q \neq p$ , pero entonces por continuidad de  $u$  tenemos  $u(q) = \lim_i u(p_{k_i}) = u(p)$

rompiendo la inyectividad de  $u$ , absurdo. Esto termina de probar que  $p_k \rightarrow p$  y por lo tanto  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un encaje.  $\square$

Sea  $M$  y  $F$  espacios topológicos. Un fibrado sobre  $M$  con fibra  $F$  es un espacio topológico  $E$  junto con una función sobreyectiva continua  $\pi : E \rightarrow M$  con la propiedad de que para cada  $x \in M$  existe un abierto  $U$  de  $x$  en  $M$  y un homeomorfismo  $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ , llamado trivialización local de  $E$  sobre  $U$ , tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & & U \end{array}$$

donde  $\pi_1$  es la proyección en el primer factor. El espacio  $M$  es llamado la base del fibrado y  $\pi$  su proyección. Si  $E, M, F$  son además variedades diferenciables,  $\pi$  es diferenciable y las trivializaciones locales son difeomorfismos entonces se le llama fibrado diferenciable.

Sea  $UM \subset TM$  definido como  $UM := \{(p, v) \in TM : g_p(v, v) = 1\}$ , el fibrado tangente unitario. Se tiene el siguiente resultado:

**TEOREMA 2.2.**  *$UM$  es una subvariedad encajada de  $TM$ . Además si restringimos la proyección natural de  $TM \rightarrow M$  a  $UM$  obtenemos un fibrado diferenciable con fibra  $\mathbb{S}^{n-1}$ .*

**PROPOSICIÓN 2.3.** *El mapa  $\pi : UM \rightarrow M$  es un mapa propio, es decir, la preimagen de compactos es compacta.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $K$  un compacto de  $M$  y sea  $(p_i, v_i)$  una sucesión de puntos en  $\pi^{-1}(K)$ . Como  $K$  es compacto, a menos de tomar una subsucesión,  $p_i = \pi(p_i, v_i) \rightarrow p \in K$ . Sea  $U$  un entorno de  $p$  con una trivialización de  $UM$ , es decir, con un mapa  $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{S}^{n-1}$  difeomorfismo que cumple el diagrama de arriba. Para  $i$  suficientemente grande  $(p_i, v_i) \in \pi^{-1}(U)$ . Ahora  $\Phi(p_i, v_i) = (p_i, w_i)$  con  $w_i \in \mathbb{S}^{n-1}$  pero entonces a menos de tomar una subsucesión  $w_i \rightarrow w \in \mathbb{S}^{n-1}$ , entonces  $(p_i, w_i) \rightarrow (p, w)$ . Volviendo para atrás por el homeomorfismo  $\Phi$  concluimos que  $(p_i, v_i)$  converge a un punto de  $\pi^{-1}(K)$ .  $\square$

**COROLARIO 2.3.1.** *Sea  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  una inmersión y sea  $K \subset M$  compacto. Entonces existe  $\lambda < 1$  tal que  $\lambda u : K \rightarrow \mathbb{R}^k$  es estrictamente corta, es decir,  $(\lambda u)^*e_p < g_p$  para todo  $p \in K$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sabemos que  $g_p(v, v) > 0 \forall p \in K, v \in T_pM$ . En particular,  $g_p(v, v) > 0 \forall (p, v) \in \pi^{-1}(K) \subset UM$ . Ahora el mapa  $(p, v) \mapsto g_p(v, v)$  visto como mapa de  $TM \rightarrow \mathbb{R}$  es continuo, en particular lo es desde  $\pi^{-1}(K) \subset UM \subset TM$ . Como  $\pi^{-1}(K)$  es compacto entonces tiene un mínimo en este conjunto. Eso implica que  $g_p(v, v) > m > 0 \forall p \in K, v \in U_pM$ . De igual manera  $u^*e$ , la métrica pullback,

tiene un máximo en  $\pi^{-1}(K) \subset UM$ . Entonces si multiplico por  $\lambda^2$  tal que  $\lambda^2$  por este máximo sea menor que  $m$  se sigue que

$$g_p(v, v) > \lambda^2(u^*e)_p(v, v) = ((\lambda u)^*e)_p(v, v) \quad \forall p \in K, v \in U_pM$$

pero por la homogeneidad esta desigualdad sigue valiendo si cambiamos  $U_pM$  por  $T_pM$ , probando lo deseado.  $\square$

### 3. Particiones de la unidad

También es de utilidad recordar la herramienta de particiones de la unidad. Sea  $X$  un espacio topológico y  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  un cubrimiento por abiertos de  $X$ . Una partición de la unidad subordinada a  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es una familia  $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$  de funciones continuas  $\psi_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

1.  $0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1 \quad \forall \alpha \in I, \forall x \in X$ .
2.  $\text{supp } \psi_\alpha \subset U_\alpha \quad \forall \alpha \in I$ .
3. La familia de los soportes,  $\{\text{supp } \psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es localmente finita, es decir, cada punto tiene un entorno que intersecta  $\text{supp } \psi_\alpha$  solamente para finitos  $\alpha \in I$ .
4.  $\sum_{\alpha \in I} \psi_\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in X$

Debido a la condición 3, la suma en 4 tiene finitos términos no nulos para cada  $x$ , por lo cual no hay problemas de convergencia. Para variedades diferenciables se tiene el siguiente resultado.

**TEOREMA 2.4** (Existencia de particiones de la unidad). *Si  $M$  es una variedad diferenciable con o sin borde, y  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es un cubrimiento por abiertos de  $M$  entonces existe una partición de la unidad diferenciable subordinada a  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ .*

Para una prueba ver [8]. Sea  $X$  un espacio topológico,  $A \subset M$  un cerrado y  $A \subset U$  con  $U$  abierto cualquiera. Una función  $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua es llamada un chichón para  $A$  con soporte en  $U$  si  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $\psi = 1$  en  $A$  y  $\text{supp } \psi \subset U$ .

**PROPOSICIÓN 2.5** (Existencia de chichones diferenciables). *Sea  $M$  una variedad diferenciable con o sin borde. Entonces para todo cerrado  $A$  y todo abierto  $U$  con  $A \subset U$ , existe un chichón para  $A$  con soporte  $U$  que es diferenciable.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $U_0 = U$ ,  $U_1 = M - A$  y sea  $\{\psi_0, \psi_1\}$  una partición de la unidad diferenciable subordinada al cubrimiento por abiertos  $\{U_0, U_1\}$ . La función  $\psi_1 \equiv 0$  en  $A$  por lo tanto  $\psi_0 \equiv 1$  en  $A$ . La función buscada es  $\psi_0$ .  $\square$

**LEMA 3.1.** *Sea  $\{U_\ell\}$  un cubrimiento numerable y localmente finito, entonces existe una familia de funciones  $\varphi_\ell : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable con soporte en  $U_\ell$ ,  $0 \leq \varphi_\ell \leq 1$  y tal que para todo  $p \in M$  existe  $\ell$  con  $\varphi_\ell = 1$  en un entorno de  $p$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Como el cubrimiento  $\{U_\ell\}_\ell$  es numerable y localmente finito puedo aplicar el lema 1.1 obteniendo un cubrimiento por abiertos  $\{V_\ell\}_\ell$  con  $\bar{V}_\ell \subset U_\ell$ . Entonces puedo definir  $\varphi_\ell$  como un chichón diferenciable para  $\bar{V}_\ell$  soportado en  $U_\ell$  (Prop 2.5). Entonces dado un punto cualquiera  $p \in M$ , como  $\{V_\ell\}_\ell$  es un cubrimiento existe alguno de estos que tiene a  $p$ ,  $p \in V_\ell$ , entonces  $\varphi_\ell = 1$  cerca de  $p$ .  $\square$

#### 4. Entorno tubular

Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  el espacio tangente  $T_x\mathbb{R}^n$  es canónicamente identificado con  $\mathbb{R}^n$ , y el fibrado tangente  $T\mathbb{R}^n$  es difeomorfo canónicamente a  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Por esta identificación, cada  $T_x\mathbb{R}^n$  hereda un producto interno. Supongamos que  $M \subset \mathbb{R}^n$  es una subvariedad diferenciable (encajada) de dimensión  $m$ . Recordar que en este caso para cada  $x \in M$ ,  $T_xM$  es canónicamente identificado con un subespacio de  $T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ . Entonces tiene sentido definir el espacio normal a  $M$  en  $x$  como el espacio  $(n-m)$ -dimensional  $N_xM \subset T_x\mathbb{R}^n$  que consiste de los vectores ortogonales a  $T_xM$  respecto al producto interno en  $T_x\mathbb{R}^n$ . El fibrado normal,  $NM$ , se define como el subconjunto de  $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  que consiste de los puntos-vectores ortogonales a  $M$ :

$$NM = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in M, v \in N_xM\}$$

Además tenemos una proyección natural  $\pi_{NM} : NM \rightarrow M$  definida como la restricción de  $\pi : T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Se tiene el siguiente resultado:

**TEOREMA 2.6.** *Si  $M \subset \mathbb{R}^n$  es una subvariedad  $m$ -dimensional encajada entonces  $NM$  es una subvariedad  $n$ -dimensional encajada en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Más aún,  $\pi_{NM} : NM \rightarrow M$  es un fibrado.*

Para una demostración ver [8] pag 138, pag 267.

Definimos  $E : NM \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mediante

$$E(x, v) = x + v$$

Es claramente diferenciable por ser la restricción de un mapa diferenciable a una subvariedad encajada. Este mapa manda cada espacio normal  $N_xM$  de manera afín sobre el subespacio afín por  $x$  ortogonal a  $T_xM$ . Un entorno tubular de  $M$  es un entorno  $U$  de  $M$  en  $\mathbb{R}^n$  que es la imagen difeomorfa mediante  $E$  de un abierto  $V \subset NM$  de la forma

$$V = \{(x, v) \in NM : \|v\| < \delta(x)\}$$

para alguna función positiva y continua  $\delta : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Ver figura 3. Se tiene el siguiente resultado

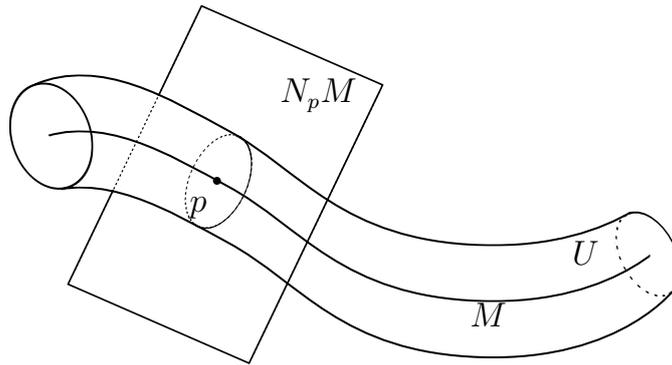


FIGURA 3. Entorno tubular de  $M$

**TEOREMA 2.7.** *Toda subvariedad encajada de  $\mathbb{R}^n$  tiene un entorno tubular.*

Para una prueba, ver [8], pag 139. Recordar, una retracción de un espacio topológico  $X$  sobre un subespacio  $M \subset X$  es un mapa continuo  $r : X \rightarrow M$  tal que  $r$  es la identidad en  $M$ .

PROPOSICIÓN 2.8. *Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  una subvariedad encajada. Si  $U$  es un entorno tubular de  $M$  entonces existe un mapa diferenciable  $r : U \rightarrow M$  que es una retracción diferenciable y una submersión.*

DEMOSTRACIÓN. Recordar que existe un abierto  $V$  de  $NM$  tal que  $E : V \rightarrow U$  es un difeomorfismo. Definimos entonces  $r : U \rightarrow M$  mediante  $r = \pi_{NM} \circ E^{-1}$ . El mapa  $r$  es diferenciable por ser una composición. Para cada  $x \in M$ ,  $E(x, 0) = x$  por lo tanto  $r(x) = \pi_{NM}(E^{-1}(x)) = x$  lo que muestra que  $r$  es una retracción. Como  $\pi_{NM}$  es una submersión y  $E^{-1}$  un difeomorfismo se sigue que  $r$  es una submersión.  $\square$

Llamaremos proyección ortogonal al mapa  $r : U \rightarrow M$ . Notar que cada punto del entorno tubular  $U$  se escribe de forma única como  $x + v$  con  $x \in M$  y  $v \in N_x M$ . El mapa  $r$  manda  $x + v \mapsto x$ , por lo que actúa como una proyección ortogonal. Si observamos la figura 4, la proyección ortogonal  $r : U \rightarrow M$  contrae cada segmento gris (imagen de una fibra por  $E$ ) en el punto de intersección con  $M$ . Por último, bajo

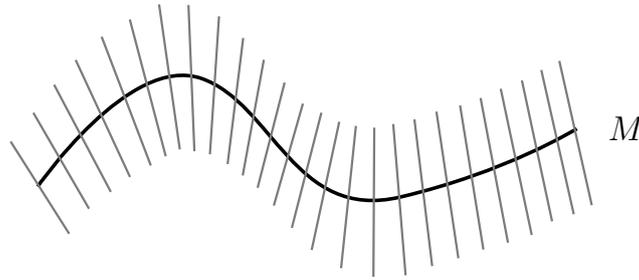


FIGURA 4. La proyección ortogonal  $r : U \rightarrow M$  contrae cada segmento gris (imagen de una fibra por  $E$ ) en el punto de intersección con  $M$ .

ciertas hipótesis se puede elegir un entorno tubular de grosor uniforme. Por ejemplo, si  $M$  es compacta es claro que  $\delta : M \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un mínimo,  $\delta_0$ , entonces el difeomorfismo  $E : \{(x, v) \in NM : \|v\| < \delta(x)\} \rightarrow U$  se restringe a un difeomorfismo  $E : \{(x, v) : \|v\| < \delta_0\} \rightarrow \tilde{U}$ , con  $\tilde{U} \subset U$ . Se sigue que  $\tilde{U}$  es entorno tubular de  $M$ . En nuestro caso será útil el siguiente lema.

LEMA 4.1. *Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  una subvariedad encajada y  $W \subset M$  un abierto de  $M$  con clausura compacta. Entonces existe un entorno tubular  $U$  de  $W$  con grosor uniforme  $\delta_0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\hat{U}$  un entorno tubular de  $M$ . Entonces existe  $\delta : M \rightarrow \mathbb{R}$  función continua y positiva tal que si  $\hat{V} := \{(x, v) : \|v\| < \delta(x)\}$  entonces  $E : \hat{V} \subset NM \rightarrow \hat{U}$  es un difeomorfismo. La función  $\delta : M \rightarrow \mathbb{R}$  alcanza un mínimo en  $\overline{W}$ ,  $\delta_0$ , y por lo tanto  $\delta_0 < \delta(x) \forall x \in W$ . Sea  $V = \{(x, v) \in NW, \|v\| < \delta(x)\}$ , donde  $NW$  es el fibrado normal de  $W$ . Está claro que  $NW \subset NM$  y  $V \subset \hat{V}$  son abiertos en  $NM$ , entonces el mapa  $E : \hat{V} \rightarrow \hat{U}$  se restringe a un difeomorfismo  $E : V \rightarrow U$  con  $W \subset U \subset \hat{U}$ . Se sigue que  $U$  es un entorno tubular de grosor  $\delta_0$  para  $W$ .  $\square$

### 5. Norma Hilbert-Schmidt

La norma Hilbert-Schmidt de una matriz es la norma que proviene del producto interno  $\langle A, B \rangle := \text{tr}(B^t A)$ , más explícitamente, si  $(a_{ij})$  es una matriz

$$\|(a_{ij})\|_{HS} := \sqrt{\sum_{i,j} a_{i,j}^2}$$

En esta sección comentamos alguna que otra utilidad de la norma de Hilbert-Schmidt en matrices.

LEMA 5.1. *Si  $A, B$  son matrices definidas positivas se cumple  $\text{tr}(B^t A) > 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Recordar que para que una matriz real sea definida positiva se le pide que sea simétrica, entonces  $A$  y  $B$  lo son. Por el teorema espectral, existe una matriz  $U$  tal que  $UU^t = Id$  y  $UAU^t = D$ , con  $D$  matriz diagonal. Además como  $A$  es definida positiva entonces todos los valores de la diagonal  $D$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son estrictamente positivos. Entonces

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A) = \text{tr}(B^t U^t D U) = \text{tr}(U B^t U^t D) = \lambda_1 c_{11} + \lambda_2 c_{22} + \dots + \lambda_n c_{nn}$$

donde  $(c_{ij})$  son los coeficientes de la matriz  $C = U B^t U^t$ . Entonces

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \lambda_1 c_{11} + \lambda_2 c_{22} + \dots + \lambda_n c_{nn} \\ &\geq \min\{\lambda_i\}(c_{11} + \dots + c_{nn}) = \min\{\lambda_i\}\text{tr}(B) > 0 \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que cada  $\lambda_i$  es positivo y además al hecho de que al ser  $B$  definida positiva su traza es positiva.  $\square$

LEMA 5.2. *Si  $A, B$  son dos matrices definidas positivas tal que  $A > B$  (es decir  $A - B$  es definida positiva) entonces  $\|A\|_{HS} > \|B\|_{HS}$ .*

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \|A\|_{HS}^2 &= \langle A, A \rangle = \langle A - B, A \rangle + \langle B, A \rangle \\ &= \langle A - B, A \rangle + \langle B, B \rangle + \langle B, A - B \rangle \\ &= \langle B, B \rangle + \langle A - B, A + B \rangle \end{aligned}$$

ahora  $A - B$  es definida positiva por hipótesis. Como  $A$  y  $B$  lo son entonces claramente  $A + B$  lo es. Entonces por el lema anterior  $\langle A - B, A + B \rangle > 0$ . Se sigue que  $\|A\|_{HS}^2 > \langle B, B \rangle = \|B\|_{HS}^2$ , probando lo deseado.  $\square$

### 6. Proyecciones y aproximación

LEMA 6.1. *Sea  $S$  un subespacio de  $\mathbb{R}^N$  y  $\{v_1, \dots, v_k\} \subset S^\perp$  un conjunto ortonormal de vectores. Si  $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k\}$  son  $k$  vectores cumpliendo  $\|v_i - \tilde{v}_i\| < 1/k$  entonces  $\{P(\tilde{v}_1), \dots, P(\tilde{v}_k)\}$  es linealmente independiente, donde  $P$  es la proyección ortogonal en  $S^\perp$ .*

DEMOSTRACIÓN. Si no lo fuera, entonces existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tal que  $\alpha_1 P(\tilde{v}_1) + \dots + \alpha_k P(\tilde{v}_k) = 0 \Rightarrow P(\alpha_1 \tilde{v}_1 + \dots + \alpha_k \tilde{v}_k) = 0$ . Esto implica que  $\alpha_1 \tilde{v}_1 + \dots + \alpha_k \tilde{v}_k \in \text{Ker } P = S$ . Por lo tanto  $\langle \alpha_1 \tilde{v}_1 + \dots + \alpha_k \tilde{v}_k, v_j \rangle = 0 \forall j$ . Sin embargo,

$$\begin{aligned} |\langle \alpha_1 \tilde{v}_1 + \dots + \alpha_k \tilde{v}_k, v_j \rangle| &= \left| \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k, v_j \rangle - \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle \tilde{v}_i - v_i, v_j \rangle \right| \\ &> |\alpha_j| - \left( \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \right) \frac{1}{k} \quad \forall j \end{aligned}$$

esto es absurdo ya que seguro existe  $j$  tal que  $|\alpha_j| \geq \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \frac{1}{k}$  y por lo tanto el producto interno anterior es no nulo.  $\square$

Automáticamente se obtiene el siguiente resultado más débil, que es exactamente igual pero sin proyectar.

COROLARIO 2.8.1. Si  $\{v_1, \dots, v_k\}$  es un conjunto ortonormal y  $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k\}$  son  $k$  vectores cumpliendo  $\|v_i - \tilde{v}_i\| < 1/k$  entonces el conjunto  $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k\}$  es linealmente independiente.

DEMOSTRACIÓN. De lo anterior sabemos que  $\{P(\tilde{v}_1), \dots, P(\tilde{v}_k)\}$  es linealmente independiente por lo tanto lo es sin la  $P$ .  $\square$

LEMA 6.2. Sea  $B$  una variedad, con o sin borde, y sean  $b_1, \dots, b_k : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  mapas diferenciables tal que  $\{b_1(p), \dots, b_k(p)\}$  es linealmente independiente para todo  $p \in B$ . Entonces el método de Gram-Schmidt produce unos mapas  $\nu_1, \dots, \nu_k : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  que además siguen siendo diferenciables.

DEMOSTRACIÓN. Como  $\{b_1(p), \dots, b_k(p)\}$  es un conjunto linealmente independiente puedo aplicar el procedimiento de Gram Schmidt sin problemas. El mismo da

$$\begin{aligned} \nu_1(p) &= \frac{b_1(p)}{\|b_1(p)\|} \\ \nu_2(p) &= \frac{b_2(p) - \langle b_2(p), \nu_1(p) \rangle \nu_1(p)}{\|b_2(p) - \langle b_2(p), \nu_1(p) \rangle \nu_1(p)\|} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Si fijamos un entorno coordinado  $U$  por coordenadas  $(x^i)$ , y sustituimos en las fórmula anteriores, como  $b_1, \dots, b_k$  son diferenciables se sigue que  $\nu_1, \dots, \nu_k$  lo son.  $\square$

LEMA 6.3. Sea  $B$  una variedad, con o sin borde,  $w : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  una inmersión y sea  $\sigma : B \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  un mapa diferenciable de la forma  $\sigma(b) = (w(b), z(b))$ . Sea  $P : w(B) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  dado por  $P(w(b), v) = P_{T_{w(b)}^\perp(w(B))}(v)$  la proyección ortogonal en  $T_{w(b)}^\perp(w(B)) := [D_b w(T_b B)]^\perp$ . Entonces el mapa  $P \circ \sigma : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  es diferenciable.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $U$  un entorno coordinado de  $B$ , con coordenadas  $(x^i)$ . Entonces  $\left\{ \frac{\partial w}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial w}{\partial x^n}(p) \right\}$  es una base de  $T_{w(p)}(w(B))$  para todo  $p \in U$ . Ahora los mapas  $\frac{\partial w}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x^n} : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  caen en las hipótesis del lema anterior, donde la variedad es  $U$ . Aplicando el lema consigo  $\nu_1, \dots, \nu_n : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  diferenciables y tal que

$\{\nu_1(p), \dots, \nu_n(p)\}$  es base ortonormal de  $T_{w(p)}(w(B)) \forall p \in U$ . Se sigue que en estas coordenadas el mapa  $P \circ \sigma$  es de la forma

$$P \circ \sigma(x) = \pi_2(\sigma(x)) - \sum_{i=1}^n \langle \pi_2(\sigma(x)), \nu_i(x) \rangle \nu_i(x)$$

que claramente es diferenciable. Aquí  $\pi_2$  es la proyección  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  en el segundo factor.  $\square$

Para seguir, si  $\delta : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función positiva y continua, decimos que  $F, \tilde{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  están  $\delta$ -cerca si  $\|F(x) - \tilde{F}(x)\| < \delta(x) \forall x \in M$ .

**TEOREMA 2.9** (Teorema de aproximación de Whitney para funciones). *Sea  $M$  una variedad con o sin borde y  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  una función continua. Dado una función continua  $\delta : M \rightarrow \mathbb{R}$  y positiva, existe una función diferenciable  $\tilde{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  que esta  $\delta$ -cerca de  $F$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Para cada  $x \in M$  sea  $U_x$  un entorno de  $x$  suficientemente chico tal que

$$\delta(y) > \frac{1}{2}\delta(x) \quad \text{y} \quad \|F(y) - F(x)\| < \frac{1}{2}\delta(x)$$

para todo  $y \in U_x$ . Este entorno existe debido a la continuidad de  $\delta$  y a la continuidad de  $F$ . Entonces si  $y \in U_x$

$$\|F(y) - F(x)\| < \frac{1}{2}\delta(x) < \delta(y)$$

La colección  $\{U_x : x \in M\}$  es un cubrimiento por abiertos de  $M$ . Tomamos un subcubrimiento numerable  $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{\infty}$ . Sea  $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$  una partición de la unidad subordinada al cubrimiento  $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{\infty}$ . Entonces definimos  $\tilde{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  mediante

$$\tilde{F}(y) = \sum_{i \geq 1} \varphi_i(y) F(x_i)$$

como para cada punto hay finitos sumandos claramente la función es diferenciable. Recordar que  $\sum_{i \geq 1} \varphi_i \equiv 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}(y) - F(y)\| &= \left\| \sum_{i \geq 1} \varphi_i(y) F(x_i) - F(y) \right\| \\ &= \left\| \sum_{i \geq 1} \varphi_i(y) F(x_i) - \left( \sum_{i \geq 1} \varphi_i(y) \right) F(y) \right\| \\ &\leq \sum_{i \geq 1} \varphi_i(y) \|F(x_i) - F(y)\| < \sum_{i \geq 1} \varphi_i(y) \delta(y) = \delta(y) \end{aligned}$$

probando lo deseado.  $\square$

## Etapa de iteración

Como comentamos previamente, la idea de Nash es comenzar por una inmersión estrictamente corta e ir corrigiéndola en etapas, hasta llegar a un mapa final que cumple lo deseado. Para lograr esto es fundamental la proposición llamada *iteration stage* o *etapa de iteración* en español. En este capítulo nos dedicaremos a probar este resultado, que enunciamos en breves.

Desde ahora y para el resto del capítulo 3 y parte del 4, fijamos un atlas en  $M$ , formado por entornos coordenados  $(U_\ell)$  que cumplen con *b*), *c*), y *d*) del lema 1.2. Reservaremos la letra  $\ell$  para este cubrimiento de manera de no generar confusión.

Dado un tensor simétrico de tipo  $(0,2)$   $h$  en  $M$ , escribimos  $h = h_{ij}dx^i \otimes dx^j$  utilizando un entorno coordenado  $U_\ell$ . Denotamos por  $\|h\|_{0,U_\ell}$  al supremo de la norma Hilbert-Schmidt de las matrices  $h_{ij}(p)$  con  $p \in U_\ell$ . Análogamente, si  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  es un mapa  $C^1$ , escribimos  $\|Dv\|_{0,U_\ell}$  para denotar al supremo de la norma de la matriz Jacobiana en las coordenadas de  $U_\ell$ . Para ser precisos, si  $(\varphi_\ell, U_\ell)$  son las coordenadas, entonces

$$\|Dv\|_{0,U_\ell} = \sup_{x \in \varphi_\ell(U_\ell)} \|J_x(v \circ \varphi_\ell^{-1})\|_{HS}$$

donde  $\|\cdot\|_{HS}$  es la norma Hilbert-Schmidt y  $J_x$  es el Jacobiano en  $x$ . Finalmente denotamos por

$$\begin{aligned} \|h\|_0 &:= \sup_\ell \|h\|_{0,U_\ell} \\ \|Dv\|_0 &:= \sup_\ell \|Dv\|_{0,U_\ell} \end{aligned}$$

que en un comienzo podrían ser  $\infty$  pues  $M$  no es necesariamente compacta. Con todo esto podemos enunciar la proposición clave, que permite hacer inducción para ir construyendo de a poco el mapa deseado. Esto es lo que Nash llamaba *a stage*.

**PROPOSICIÓN 3.1** (Etapa de iteración). *Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana con  $\dim(M) = n \leq N - 2$  y  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  una inmersión estrictamente corta. Entonces existe  $C > 0$  tal que para toda elección de números positivos  $\eta_\ell > 0$  y para todo  $\delta > 0$  existe una inmersión estrictamente corta  $z : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  que cumple*

- (1)  $\|z - w\|_{0,U_\ell} < \eta_\ell \quad \forall \ell$
- (2)  $\|g - z^*e\|_0 < \delta$
- (3)  $\|Dw - Dz\|_0 < C\sqrt{\|g - w^*e\|_0}$

Además si  $w$  es inyectiva y el conjunto límite de  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  no intersecta  $w(M)$  entonces podemos elegir  $z$  inyectiva. Observar que el término derecho de la última ecuación puede ser  $\infty$ .

El objetivo de este capítulo es probar la proposición anterior. Para eso primero debemos pasar por algunas proposiciones previas. Usaremos el término *métrica primitiva* para llamar a cualquier tensor del tipo  $(0,2)$  de la forma  $a^2 d\psi \otimes d\psi$ , donde  $a, \psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones diferenciables. Notar que dicho tensor solamente es semidefinido positivo y por lo tanto no es una métrica Riemanniana. Sin embargo, el siguiente lema muestra que cualquier métrica Riemanniana se puede escribir como una suma, localmente finita, de métricas primitivas que además cumplen otros requerimientos técnicos.

**PROPOSICIÓN 3.2.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $h$  un tensor diferenciable, definido positivo, del tipo  $(0,2)$ . Sea además un cubrimiento por abiertos  $\{W_i\}$  de  $M$ . Entonces existe una familia numerable de métricas primitivas  $h_j$  tal que  $h = \sum_j h_j$ . Además se cumple*

1. Cada  $h_j$  está soportado en algún  $W_i$ .
2. Para cada  $p \in M$  hay a lo sumo  $K(n) = \frac{n(n+1)^2}{2}$  de los  $h_j$  cuyo soporte contiene a  $p$ .
3. El soporte de cada  $h_j$  intersecta el soporte de a lo sumo finitos otros  $h_k$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Primero que nada, para cada punto  $p$  encontraremos un entorno  $V_p \subset W_i$  para algún  $i$  y  $J(n) = \frac{n(n+1)}{2}$  métricas primitivas  $h_{p_1}, \dots, h_{p_J}$  en  $V_p$  tal que  $h = h_{p_1} + \dots + h_{p_J}$ . Para lograr esto fijamos un entorno coordenado  $\mathcal{O}$  centrado en  $p$  y tal que  $\mathcal{O} \subset W_i$  y escribimos  $h = h_{ij} dx^i \otimes dx^j$ . Sea el espacio de matrices simétricas  $\text{Sym}_{n \times n}$  y sea  $M$  la matriz cuyos coeficientes son  $h_{ij}(p)$ .

Dado un covector  $w \in (T_p M)^*$  cuya expresión en coordenadas es  $w = w_j dx^j$ , entonces tenemos  $w \otimes w = w_i w_j dx^i \otimes dx^j$ . Identificamos  $w \otimes w$  con la matriz  $A$  cuyos coeficientes son  $w_i w_j$ , es decir, es la expresión matricial de  $w \otimes w$  en la base elegida. Resulta que las matrices de la forma  $w \otimes w$  forman claramente un generador de las matrices simétricas. Entonces existen  $J(n) = \frac{n(n+1)}{2}$  matrices de este tipo,  $A'_i = w_i \otimes w_i$ , que son linealmente independientes. Cuidado con la notación, aquí  $w_i$  no es una coordenada del covector  $w$ , sino más bien es el  $i$ -ésimo covector. Sea  $M' = \sum_i A'_i$ . Claramente  $M$  es definida positiva, y  $M'$  también lo es. Para ver esto último, es claro que es semidefinida positiva. Sea  $v$  vector tal que  $v^T M' v = 0$ . Como  $A'_i$  es semidefinida positiva, se sigue que  $v^T A'_i v = 0$  para todo  $i$ . Como las matrices son simétricas, es una consecuencia clara del teorema espectral que esto ocurre si y sólo si  $v \in \ker(A'_i)$  para todo  $i$ . Entonces encontramos  $v$  un vector que está en el kernel de todas las matrices  $A'_i$ . Pero la colección de estas matrices es una base de  $\text{Sym}_{n \times n}$  por lo tanto pueden generar cualquier matriz, en particular a la matriz identidad. Pero como todas las matrices  $A'_i$  tienen a  $v$  en su kernel entonces las matrices que generan también, en particular  $v$  está en el kernel de la identidad, por lo tanto  $v = 0$ . Esto termina de probar que  $M'$  es definida positiva.

Para seguir afirmo que existe  $L$  una matriz invertible tal que  $LM'L^T = M$ . En efecto, como  $M$  y  $M'$  son matrices simétricas entonces existe  $O$  y  $O_1$  matrices ortogonales

tal que  $D = O^T M O$  y  $D_1 = O_1^T M' O_1$  son matrices diagonales, con valores positivos en la diagonal, ya que  $M$  y  $M'$  son definidas positivas. Sean  $D^{-1/2}$  y  $D_1^{-1/2}$  las matrices diagonales formadas por los inversos de las raíces de los valores de  $D$  y  $D_1$  respectivamente. Sea  $U = O D^{-1/2}$  y  $U_1 := O_1 D_1^{-1/2}$ , entonces es claro que  $U^T M U = U_1^T M' U_1 = I_{n \times n}$ , por lo tanto  $L := (U_1 U^{-1})^T$  es el mapa deseado. Habiendo encontrado  $L$ , definimos  $A_i := L A'_i L^T = L w_i \otimes L w_i = v_i \otimes v_i$ , definiendo  $v_i := L w_i$ . Aquí entendemos por  $L w_i$  el covector cuyas coordenadas en la base  $dx^j$  son las coordenadas de  $w_i$  multiplicadas por la matriz  $L$ . Se sigue que  $M = \sum_i A_i$ , y que las matrices  $\{A_i\}$  forman una base de las matrices simétricas.

Para continuar, recordar que  $\mathcal{O} \subset V_p$  era un entorno coordenado, digamos con coordenadas  $(x^i)$ . Entonces defino  $\psi_i : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\psi_i(x) = v_{i_1} x^1 + \dots + v_{i_n} x^n$  en estas coordenadas, donde  $v_{i_k}$  es la coordenada  $k$ -ésima del covector  $v_i \in (T_p M)^*$  en la base  $dx^j$ . Se sigue que  $d\psi_i(p) = v_i \forall i$ . En estas coordenadas  $d\psi_i \otimes d\psi_i$  es constante, es decir, su expresión matricial es  $A_i$  para todo punto en  $\mathcal{O}$ . Es por eso que  $\{d\psi_1 \otimes d\psi_1, \dots, d\psi_n \otimes d\psi_n\}$  forma una base local de los tensores simétricos de orden  $(0, 2)$ . Se sigue que existen funciones diferenciables  $\alpha_i : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$h = \sum_{i=1}^J \alpha_i d\psi_i \otimes d\psi_i$$

y que  $\alpha_i(p) = 1 \forall i$ . Se sigue que podemos achicar  $\mathcal{O}$  a un entorno de  $p$ ,  $V_p \subset \mathcal{O}$ , donde  $\alpha_i$  es el cuadrado de una función diferenciable  $a_i$ . Las métricas primitivas  $h_{p_i} = a_i^2 d\psi_i \otimes d\psi_i$  y el entorno  $V_p$  son los buscados.

Para terminar, podemos aplicar el lema 1.2 sobre el cubrimiento  $\{V_p\}_{p \in M}$ , obteniendo un refinamiento  $\tilde{U}_\ell$  cumpliendo las propiedades listadas en el lema. Para cada  $\ell$  sea  $V_p$  tal que  $\tilde{U}_\ell \subset V_p$ , entonces defino  $h_{\ell,1} = h_{p1}, \dots, h_{\ell,J} = h_{pJ}$  (aquí utilizo la notación  $\ell, i$  en lugar de  $\ell, i$  para no confundir con la expresión del tensor inicial  $h$  en un sistema de coordenadas dado). Sea ahora  $\beta_\ell$  funciones diferenciables en  $M$ , soportadas en  $\tilde{U}_\ell$ , con la propiedad de que para todo punto  $p \in M$  existe  $\ell$  tal que  $\beta_\ell(p) \neq 0$ . Estas funciones las puedo obtener aplicando el lema 3.1, o tomándolas como una partición de la unidad subordinada a  $\{\tilde{U}_\ell\}$ . Con todo esto, defino

$$\varphi_\ell := \frac{\beta_\ell}{\sqrt{\sum_j \beta_j^2}}$$

Los tensores  $\varphi_\ell^2 h_{\ell,j}$  es la familia de métricas primitivas de la tesis. Aquí entendemos que  $\varphi_\ell^2 h_{\ell,j}$  esa definido en toda la variedad  $M$  y que es cero fuera del soporte de  $\varphi_\ell^2$ . Veamos que efectivamente se cumple lo pedido.

1. Cada tensor está soportado en algún  $W_i$ , pues dado uno de estos tensores  $\varphi_\ell^2 h_{\ell,j}$ , es claro que está soportado en  $\tilde{U}_\ell \subset V_p \subset W_i$  para algún  $i$ .
2. Dado  $p \in M$ , por la propiedad d) del lema 1.2, se sigue que  $p$  está contenido en como mucho  $n + 1$  elementos de  $\{\tilde{U}_\ell\}_\ell$ , digamos en  $\{\tilde{U}_{\ell_1}, \dots, \tilde{U}_{\ell_{n+1}}\}$ . Pero como

el soporte de una métrica primitiva  $h_{\ell,j}$  está contenido en  $\tilde{U}_\ell$  se sigue que las métricas primitivas que contienen en su soporte a  $p$  son las métricas primitivas que están soportadas en alguno de los abiertos  $\tilde{U}_{\ell_1}, \dots, \tilde{U}_{\ell_{n+1}}$ . Además para cada uno de estos abiertos hay  $n(n+1)/2$  métricas primitivas soportadas en el abierto, se sigue que hay a lo sumo  $K(n) = n(n+1)^2/2$  métricas cuyo soporte tienen a  $p$ , pues las otras están soportadas en abiertos que no tienen a  $p$ .

3. Dada una métrica primitiva de la familia construida,  $h_{\ell,j}$ , su soporte está incluido en  $\tilde{U}_\ell$  y por lo tanto puede intersectarse con el soporte de las otras métricas soportadas en  $\tilde{U}_\ell$ , que son finitas, o con el soporte de alguna métrica primitiva soportada en algún abierto  $\tilde{U}_{\ell'}$  tal que  $\tilde{U}_{\ell'} \cap \tilde{U}_\ell \neq \emptyset$ . Pero solo existen finitos abiertos que intersectan a  $\tilde{U}_\ell$  y en cada uno de estos abiertos hay finitas métricas primitivas soportadas en el abierto.

Y finalmente, para cada  $\ell$  tenemos que  $h = \sum_j h_{\ell,j}$  en los puntos de  $\tilde{U}_\ell$ . Por lo tanto,  $h\varphi_\ell^2 = \varphi_\ell^2 \sum_j h_{\ell,j}$  en toda la variedad  $M$ . Se sigue que

$$\sum_{\ell,j} h_{\ell,j} \varphi_\ell^2 = \sum_{\ell} \varphi_\ell^2 \sum_j h_{\ell,j} = \sum_{\ell} \varphi_\ell^2 h = h \sum_{\ell} \frac{\beta_\ell^2}{\sum_i \beta_i^2} = h$$

aquí vale aclarar, como para cada punto  $p$  hay finitos términos no nulos la manipulación anterior es sobre suma finitas y por lo tanto no hay ningún problema.  $\square$

Para poder probar la proposición clave 3.1 todavía es necesario un ingrediente técnico más. La siguiente proposición usa de manera exhaustiva lo probado en la sección 6 del capítulo anterior.

**PROPOSICIÓN 3.3.** *Sea  $B$  un cerrado de  $\mathbb{R}^n$  difeomorfo a una bola  $n$ -dimensional cerrada y sea  $w : B \rightarrow \mathbb{R}^N$ , con  $N \geq n + 2$ , una inmersión diferenciable. Entonces existen dos mapas diferenciables  $v, b : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  tal que*

- a)  $\|v(q)\| = \|b(q)\| = 1$  y  $v(q) \perp b(q)$  para todo  $q \in B$ .
- b)  $v(q)$  y  $b(q)$  son ambos ortogonales a  $T_{w(q)}(w(B))$  para todo  $q \in B$ .

**OBSERVACIÓN.** *Si  $w$  además es inyectiva entonces es un encaje por lo tanto  $w(B)$  es una subvariedad encajada de  $\mathbb{R}^N$  difeomorfa a  $B$ . En este caso puedo pensar a  $v, b$  como mapas de  $w(B) \rightarrow Nw(B)$  el fibrado normal de  $w(B)$ . En este contexto  $v, b$  son secciones del fibrado. En el caso  $N = n + 2$  estaríamos encontrando un frame del fibrado normal, por lo cual estaríamos viendo que el fibrado normal es paralelizable y por lo tanto trivial.*

**DEMOSTRACIÓN.** Observar que basta con encontrar  $v, b : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  continuos. Intuitivamente, si encontramos estos mapas continuos entonces podemos aproximar estos mapas por mapas diferenciables, proyectar en el fibrado normal y usar Gram-Schmidt para que además sean ortonormales. Para esto tenemos que asegurar que la proyección de las aproximaciones de  $v, b$  sean linealmente independiente, para esto, como  $v, b$  son ortonormales punto a punto, basta que la aproximación de Whitney sea a menos de  $\epsilon$ , siendo  $\epsilon$  un factor geométrico.

Formalizamos lo anterior: por el teorema de aproximación de Whitney encontramos mapas diferenciables  $v', b' : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  que están  $1/2$ -cerca de  $v$  y  $b$  respectivamente. Puedo considerar los mapas,  $v'', b''$  resultantes de proyectar  $v'(q), b'(q)$  en  $T_{w(q)}^\perp(w(B))$ . Como  $v, b$  están  $1/2$ -cerca de  $v', b'$  el lema 6.1 me asegura que  $v'', b'' : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  son tal que  $\{v''(q), b''(q)\}$  son linealmente independientes para todo  $q \in M$ . Además como  $v', b' : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  son diferenciables el lema 6.3 me asegura que  $v'', b'' : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  también lo son. Esto se debe a que, por ejemplo  $v'$ , se puede escribir como la composición de los mapas  $b \mapsto (w(b), v'(b)) \mapsto P(w(b), v'(b))$  siendo  $P : w(B) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  el mapa dado por la proyección ortogonal en  $T_{w(b)}^\perp(w(B))$  de la segunda componente. Finalmente, por el lema 6.2 podemos aplicar el método de Gram Schmidt a  $v'', b'' : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  para obtener mapas diferenciables  $v''', b''' : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  que cumplen todo lo pedido.

Entonces de ahora en más nos dedicamos a la existencia  $v, b : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  continuos. Asumimos sin pérdida de generalidad que  $B$  es la bola de centro 0 y radio 1 cerrada. Sea  $R$  el conjunto de todos los radios  $r$  tal que existe un par  $v, b$  continuo cumpliendo lo pedido pero definido en  $\overline{B_r}(0)$ . La prueba queda finalizada si probamos que  $1 \in R$ .

Primero introduciremos ciertos mapas por comodidad. Como el fibrado tangente de  $B$  es trivial entonces existe una frame global diferenciable, es decir,  $n$  secciones  $\sigma_1, \dots, \sigma_n : B \rightarrow TB$  tal que  $\{\sigma_1(q), \dots, \sigma_n(q)\}$  es base de  $T_q B$  para todo  $q \in B$ . Para cada  $i$  defino  $t_i : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  como  $t_i = Dw \circ \sigma_i$ . Como  $w$  es una inmersión se sigue que los mapas son diferenciables y que además  $\{t_1(q), \dots, t_n(q)\}$  es base de  $T_{w(q)} w(B)$  para todo  $q \in B$ . Por último, aplicando Gram Schmidt, lema 6.2, puedo suponer que además  $\{t_1(q), \dots, t_n(q)\}$  es ortonormal para todo  $q \in B$ .

Dado  $\epsilon = \frac{1}{2n}$ , por continuidad uniforme existe  $\delta > 0$  tal que  $\|t_i(q) - t_i(q')\| < 1/2n$  si  $\|q - q'\| \leq \delta$ . Veamos que  $R$  no es vacío. Sean  $v_0, b_0$  dos vectores ortonormales que son normales a  $T_{w(0)}(w(B))$ . Entonces

$$|\langle t_i(q), b_0 \rangle| = |\langle t_i(q) - t_i(0), b_0 \rangle| < \frac{1}{2n} \quad \forall q \in B_\delta(0) \subset V$$

pero entonces si proyecto  $b_0$  en  $T_{w(q)}^\perp(w(B))$  con  $q \in B_\delta(0)$  obtengo un vector  $b(q)$  tal que

$$\|b_0 - b(q)\| = \left\| \sum_i \langle b_0, t_i(q) \rangle t_i(q) \right\| < 1/2$$

Análogamente para  $v_0$ . Entonces obtuve dos mapas  $v, b : B_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}^N$ , tal que son ortogonales a  $T_{w(q)}(w(B))$ , son diferenciables, pues surgieron de la proyección y el lema 6.3 me asegura que así es, y además para todo  $q \in B_\delta(0)$ ,  $v(q), b(q)$  están  $1/2$ -cerca de  $v_0, b_0$  que son ortonormales. Gracias a esto último, el corolario 2.8.1 me asegura que  $\{v(q), b(q)\}$  es linealmente independiente para todo  $q \in B_\delta(0)$ . Para terminar puedo aplicarles el método de Gram Schmidt, nuevamente mantengo diferenciability y obtengo mapas en  $B_\delta(0)$  que cumplen lo pedido. Esto prueba que  $\delta/2 \in R$  y por lo tanto  $R$  es no vacío.

Sea  $\rho = \sup R$  y sea  $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sucesión con  $\rho_k \in R$  y  $\rho_k \rightarrow \rho$ . Sean  $v_k, b_k$  los correspondientes mapas continuos en  $\overline{B_{\rho_k}}(0)$  satisfaciendo a) y b). Defino  $\tilde{v}_k, \tilde{b}_k$  en  $B_1 = B$  haciendo que sean iguales a  $v_k$  y  $b_k$  en  $B_{\rho_k}(0)$  y luego extendiéndolos de la siguiente manera

$$\tilde{v}_k(x) = v_k \left( \rho_k \frac{x}{\|x\|} \right) \quad \tilde{b}_k(x) = b_k \left( \rho_k \frac{x}{\|x\|} \right) \quad \text{para } \|x\| \geq \rho_k$$

Los mapas  $\tilde{v}_k, \tilde{b}_k$  satisfacen a). Ahora si  $q$  se encuentra en un entorno  $\delta$  de  $\overline{B_{\rho_k}}(0)$ , entonces  $\left\| q - \rho_k \frac{q}{\|q\|} \right\| < \delta$  entonces

$$\begin{aligned} \left| \langle t_i(q), \tilde{b}_k(q) \rangle \right| &= \left| \langle t_i(q), b_k \left( \rho_k \frac{q}{\|q\|} \right) \rangle \right| = \left| \langle t_i(q) - t_i \left( \rho_k \frac{q}{\|q\|} \right), b_k \left( \rho_k \frac{q}{\|q\|} \right) \rangle \right| \\ &< \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

pero entonces si proyecto  $\tilde{b}_k(q)$  en  $T_{w(q)}^\perp(w(B))$  obtengo un vector  $b'_k(q)$  tal que

$$\left\| \tilde{b}_k(q) - b'_k(q) \right\| = \left\| \sum_i \langle \tilde{b}_k(q), t_i(q) \rangle t_i(q) \right\| < 1/2$$

y análogamente para  $\tilde{v}_k$ , obteniendo  $v'_k$ . Entonces tengo  $b'_k, v'_k : \overline{B_{\sigma_k}}(0) \rightarrow \mathbb{R}^N$  perpendiculares a  $T_{w(q)}(w(B))$ , continuos y tal que  $b'_k, v'_k$  están  $1/2$ -cerca de  $\tilde{b}_k, \tilde{v}_k$  respectivamente. Aquí,  $\sigma_k = \min\{1, \rho_k + \delta\}$ . Como  $b'_k(q), v'_k(q)$  están  $1/2$ -cerca de  $\{\tilde{b}_k(q), \tilde{v}_k(q)\}$  el cual es un conjunto ortonormal, entonces se sigue del corolario 2.8.1 que  $\{b'_k(q), v'_k(q)\}$  es linealmente independiente. Entonces  $b'_k, v'_k$  siguen siendo linealmente independientes, y continuos. Por último, si además aplico Gram-Schmidt obtengo un par  $b''_k, v''_k$  en  $\overline{B_{\sigma_k}}(0)$  cumpliendo a) y b), por lo cual  $\sigma_k \in R$ . De todo esto  $\rho \geq \sigma_k = \min\{1, \rho_k + \delta\} \rightarrow \min\{1, \rho\}$ , es decir,  $\rho = 1$ . Además si  $k$  es suficientemente grande como para que  $\rho_k + \delta > 1$  entonces  $\sigma_k = \rho = 1$  y por lo tanto  $1 \in R$ , probando lo deseado.  $\square$

Ahora si estamos listo para probar la proposición clave, la etapa de iteración.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 3.1. Nuestro objetivo es construir un mapa  $z : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ , que esté cerca de  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  (eq 1), que cumpla que la métrica pullback dada por este mapa esté cerca de la métrica  $g$  (eq 2) y que además siga siendo un mapa estrictamente corto, es decir, que a la métrica pullback  $z^*e$  le falte para llegar a  $g$ . Esto, en principio, es un problema ya que Nash idea un método que logra aproximar la métrica  $g$  con  $z^*e$  pero sin lograr que  $z$  sea estrictamente corto. Y si en efecto el mapa  $z$  no queda estrictamente corto no es posible iterar para aproximar mejor  $g$ . Para esto Nash cambia la métrica  $g$  por una estrictamente menor (pero todavía cerca), y aproxima esta nueva métrica. Como la nueva métrica es estrictamente menor, si la aproximación es suficientemente buena entonces el mapa  $z$  será estrictamente corto respecto a  $g$ . Comenzamos entonces buscando esta nueva métrica.

Recordar que tenemos un atlas de  $M$  formado por entornos coordenados  $(U_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  satisfaciendo  $b)$ ,  $c)$  y  $d)$  del lema 1.2. Sea  $(\varphi_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  una partición de la unidad subordinada a  $(U_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ . Cada  $U_\ell$  intersecta un número finito de otros  $U_j$ 's. Denotamos por  $I(\ell)$  al conjunto de índices  $j$  tal que  $U_j \cap U_\ell \neq \emptyset$ . Afirimo que, como son finitos, y el mapa  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una inmersión estrictamente corta, puedo elegir  $\delta_\ell > 0$  tal que  $(1 - \delta_\ell)g - w^*e$  es definido positivo en  $U_j \forall j \in I(\ell)$  y además

$$\|\delta_\ell g\|_{0,U_j} < \frac{\delta}{2} \quad \text{para todo } j \in I(\ell)$$

En efecto, como cada  $U_j$  tiene clausura compacta entonces  $\|g\|_{0,U_j}$  es finito por lo cual multiplicando por un número puedo achicar la norma tanto como quiero. Además, si denoto por  $\pi : UM \rightarrow M$  la proyección natural del tangente unitario en  $M$ , entonces el hecho de que  $w$  sea una inmersión estrictamente corta implica

$$\frac{g_p(v, v)}{w^*e_p(v, v)} > 1 \quad \forall p \in \bar{U}_j, v \in T_p M, \|v\|_p = 1$$

pero la función  $(p, v) \rightarrow \frac{g_p(v, v)}{w^*e_p(v, v)}$  de  $UM \cap \pi^{-1}(\bar{U}_j) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Como  $UM \cap \pi^{-1}(\bar{U}_j)$  es compacto entonces hay un mínimo, es decir, existe  $p_0 \in \bar{U}_j$  y  $v \in T_{p_0} M$  con  $\|v\|_{p_0} = 1$ , tal que

$$\frac{g_{p_0}(v, v)}{w^*e_{p_0}(v, v)} > \frac{g_{p_0}(v_0, v_0)}{w^*e_{p_0}(v_0, v_0)} > 1 \quad \forall p \in \bar{U}_j, v \in T_p M, \|v\|_p = 1$$

entonces puedo elegir  $\delta_\ell$  tal que  $(1 - \delta_\ell) \frac{g_{p_0}(v_0, v_0)}{w^*e_{p_0}(v_0, v_0)} > 1$ . Se sigue que  $(1 - \delta_\ell)g - w^*e$  es definido positivo en  $U_j$ . Sea  $\varphi := \sum_\ell \delta_\ell \varphi_\ell$ , la nueva métrica buscada es  $(1 - \varphi)g$ . Denotemos por  $h := (1 - \varphi)g - w^*e$  el defecto isométrico. Habiendo hecho esto, tenemos que

$$\|g - (h + w^*e)\|_{0,U_\ell} = \|\varphi g\|_{0,U_\ell} = \left\| \sum_{j \in I(\ell)} \varphi_j \delta_j g \right\|_{0,U_\ell} \leq \sum_{j \in I(\ell)} \|\varphi_j \delta_j g\|_{0,U_\ell} < \delta/2$$

y por lo tanto  $\|g - (h + w^*e)\|_0 < \delta/2$ . Además si  $p \in U_\ell$  entonces

$$\begin{aligned} h(p) &= (1 - \varphi)g(p) - w^*e(p) \\ &= \left( 1 - \sum_{j \in I(\ell)} \delta_j \varphi_j \right) g(p) - w^*e(p) \\ &\geq (g - w^*e)(p) - \max\{\delta_j : j \in I(\ell)\}g(p) > 0 \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que si  $\delta_j$  es el valor del máximo, como  $U_j \cap U_\ell \neq \emptyset$  entonces sabemos que  $g - \delta_j g - w^*e > 0$ . Por lo tanto  $h$  es definida positiva lo cual equivale a que  $w$  es estrictamente corta respecto a esta métrica. Por último notar que

$$g - (h + w^*e) = \varphi g > 0$$

donde la última desigualdad se debe a que  $\varphi = \sum_\ell \delta_\ell \varphi_\ell > 0$  en toda la variedad ya que es una partición de la unidad. En resumen, por el momento hemos construido una

nueva métrica  $h + w^*e$  que está cerca de la métrica original  $g$  y tal que  $w$  sigue siendo una inmersión estrictamente corta respecto a esta métrica. Afirmando que para probar el teorema, basta con conseguir un mapa  $z : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  tal que

$$(4) \quad \|z - w\|_{0, U_\ell} < \eta_\ell \quad \forall \ell$$

$$(5) \quad \|z^*e - (w^*e + h)\|_{0, U_\ell} < \delta'_\ell \quad \forall \ell$$

$$(6) \quad \|Dw - Dz\|_{0, U_\ell}^2 < 2K(n)^2 \|g - w^*e\|_{0, U_\ell} \quad \forall \ell$$

donde  $K(n)$  es la constante de la proposición 3.2, y donde  $\delta'_\ell$  son elegidos apropiadamente. Veamos esto. Primero la primera ecuación es la misma que la escrita en la tesis. La tercera ecuación es más fuerte que la escrita en la tesis. Solo hay que entender por qué es suficiente cumplir la ecuación (5) para satisfacer la ecuación (2) y el hecho de que  $z$  sea estrictamente corta respecto a  $g$ . Primero, si  $\delta'_\ell < \delta/2 \quad \forall \ell$ , entonces se sigue de la desigualdad triangular que

$$\|z^*e - g\|_0 < \delta$$

satisfaciendo la ecuación (2) de la tesis. Por otro lado, veamos que si los  $\delta'_\ell$  son apropiados entonces el mapa  $z : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  obtenido es estrictamente corto respecto a  $g$ . En efecto, como  $\bar{U}_\ell$  tiene clausura compacta y  $g - (w^*e + h) > 0$  entonces un argumento idéntico a al utilizado en el principio de esta prueba con el tangente unitario muestra que existe  $p_0 \in \bar{U}_\ell$ , y un  $v_0 \in T_{p_0}M$ , con  $\|v_0\|_{p_0} = 1$ , tal que

$$\begin{aligned} g_p(v, v) - (w^*e + h)_p(v, v) &\geq g_{p_0}(v_0, v_0) - (w^*e + h)_{p_0}(v_0, v_0) \\ &=: M_\ell > 0 \quad \forall p \in \bar{U}_\ell, v \in U_pM \end{aligned}$$

luego si  $p \in \bar{U}_\ell$ ,  $v \in U_pM$  entonces

$$\begin{aligned} g_p(v, v) - z^*e_p(v, v) &= g_p(v, v) - (w^*e + h)_p(v, v) \\ &\quad + ((w^*e + h)_p(v, v) - z^*e_p(v, v)) \\ &\geq M_\ell - |(w^*e + h)_p(v, v) - z^*e_p(v, v)| \end{aligned}$$

pero si  $\|(w^*e + h) - z^*e\|_{0, U_\ell} < \delta'_\ell$  adecuado entonces

$$|(w^*e + h)_p(v, v) - z^*e_p(v, v)| < M_\ell/2 \quad \forall p \in U_\ell, v \in T_pM, \|v\|_p = 1$$

y por lo tanto  $z$  es estrictamente corto.

Entonces desde ahora nos centramos en construir un mapa  $z : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  satisfaciendo las ecuaciones (4), (5), (6). Para esto, aplicamos la proposición 3.2 para escribir  $h = \sum_j h_j$  donde cada  $h_j$  es una métrica primitiva y soportada en algún  $U_\ell$ . Recordar que las métricas primitivas son numerables, por lo tanto podemos suponer que el índice  $j \in \mathbb{N}$ . Recordar que dado  $j$ , el soporte de  $h_j$  se encuentra dentro de un  $U_\ell$ , y este abierto es intersectado solo por finitos otros elementos del cubrimiento. Por lo tanto, dado  $j$  solo existen finitos  $\ell$  tal que  $U_\ell$  intersecta el soporte de  $h_j$ . Denotamos por  $L(j)$  al conjunto de los  $\ell$  tal que  $U_\ell$  intersecta el soporte de  $h_j$ . Para construir el mapa  $z$  vamos a ir agregando pequeñas perturbaciones al mapa  $w$ , la perturbación  $j$ -ésima será llamada  $w_j^p$ . El soporte de la perturbación será el mismo que el de  $h_j$ . Denotamos

por  $w_j = w + w_1^p + \dots + w_j^p$  el mapa resultante luego de sumar  $j$  perturbaciones a  $w$ . Vamos a construir  $w_j^p$  tal que se cumplan las siguientes estimaciones:

$$(7) \quad \|w_j^p\|_{0,U_\ell} < \frac{\eta_\ell}{K(n)} \quad \forall \ell \in L(j)$$

$$(8) \quad \|Dw_j^p\|_{0,U_\ell}^2 < 2 \|h\|_{0,U_\ell} \quad \forall \ell \in L(j)$$

$$(9) \quad \left\| w_j^* e - (w_{j-1}^* e + h_j) \right\|_{0,U_\ell} < \frac{\delta'_\ell}{K(n)} \quad \forall \ell \in L(j)$$

Más abajo vamos a probar la existencia de los mapas  $w_j^p$ . Ahora mismo asumamos su existencia y veamos cómo concluir. Definimos  $z = w + \sum_j w_j^p$ . Veamos que  $z$  cumple todo lo deseado. Primero dado  $U_\ell$ , afirmo que solo finitas perturbaciones  $w_j^p$  son no nulas en  $U_\ell$ , por lo tanto  $z$  está bien definido y es suave. La razón de esto es que para cada punto  $q \in \overline{U}_\ell$  existe  $h_j$  tal que  $h_j$  no es cero en ese punto. Se sigue que hay un entorno de  $q$ ,  $W_q$ , donde  $h_j$  no es nulo. Como solo hay finitas otras métricas primitivas cuyos soporte intersecta el de  $h_j$  se sigue que en el entorno  $W_q$  solo hay finitas métricas primitivas no nulas. Esto forma un cubrimiento de  $\overline{U}_\ell$  y por lo tanto existe un subcubrimiento finito  $\{W_{q_1}, \dots, W_{q_k}\}$ , lo cual prueba que solo hay finitas métricas  $h$  no nulas en  $\overline{U}_\ell$  y por lo tanto lo mismo vale para  $w_j^p$ , ya que tienen el mismo soporte. Para seguir, notar que hay como mucho  $K(n)$  métricas primitivas cuyo soporte tiene a  $q$  (y por lo tanto como mucho  $K(n)$  perturbaciones  $w_j^p$  cuyo soporte tiene a  $q$ ). Entonces si  $q \in U_\ell$  se tiene

$$\|z(q) - w(q)\| = \left\| \sum_{j:q \in \text{sup } h_j} w_j^p \right\| \leq \sum_{j:q \in \text{sup } h_j} \|w_j^p\|_{0,U_\ell} < K(n) \frac{\eta_\ell}{K(n)} = \eta_\ell$$

donde en la última desigualdad hemos usado que, como  $q \in \text{sup } h_j$ ,  $\ell \in L(j)$  y por lo tanto vale la eq (7). Se sigue que  $\|z - w\|_{0,U_\ell} < \eta_\ell$ , satisfaciendo (4). Por otro lado, si  $q \in U_\ell$  entonces análogamente pero usando la ecuación (8) tenemos

$$\begin{aligned} \|Dw(q) - Dz(q)\| &\leq \sum_{j:q \in \text{sup } h_j} \|Dw_j^p\|_{0,U_\ell} < K(n) \sqrt{2 \|h\|_{0,U_\ell}} \\ &< K(n) \sqrt{2 \|g - w^* e\|_{0,U_\ell}} \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que  $g - w^* e > h$ . Recordar que al ser la norma Hilbert-Schmidt el lema 5.2 nos dice que la desigualdad vale. Se sigue que

$$\|Dw - Dz\|_{0,U_\ell}^2 < 2K(n)^2 \|g - w^* e\|_{0,U_\ell}$$

satisfaciendo la ecuación (6). Por último, dado  $U_\ell$ , solo hay finitas  $w_j^p$  no nulos en  $U_\ell$  y por lo tanto existe  $m_0 > 0$  tal que  $z = w_{m_0}$  en  $U_\ell$  para algún  $m_0$  grande. Se sigue que  $z^* e = w_{m_0}^* e$  y  $w_j^* e = w_{m_0}^* e$ ,  $j \geq m_0$  en todo  $U_\ell$ . Entonces, en el entorno  $U_\ell$  tenemos

$$z^* e - (w^* e + h) = w_{m_0}^* e - w^* e - \sum_j h_j = \sum_{j \geq 1} w_j^* e - (w_{j-1}^* e + h_j)$$

Donde  $w_0 = w$ . Recordar que para cada punto de la variedad hay a lo sumo  $K(n)$  de los  $h_j$ 's cuyo soporte tienen a  $p$ . Lo mismo vale para las perturbaciones  $w_j^p$  pues el soporte es

el mismo. En la sumatoria anterior, si para cierto  $j$ , el soporte de  $h_j$  no tiene a  $p$  entonces  $h_j$  se anula en  $p$  pero además  $w_j^p$  se anula en un entorno de  $p$  y por lo tanto no aporta al pullback, es decir,  $w_j^*e = w_{j-1}^*e$  en ese punto. En resumen, dado un punto  $p$  de  $U_\ell$ , no hay más de  $K(n)$  sumandos no nulos en la sumatoria anterior al evaluar en  $p$ . Además cuando hay un termino no nulo es porque el soporte de  $h_j$  tiene al punto y por lo tanto para ese  $j$  se tiene que  $\ell \in L(j)$ . Es por eso que, en el entorno coordinado  $U_\ell$ , podemos usar la desigualdad de la ecuación (9) para concluir que  $\|z^*e - (w^*e + h)\|_{0,U_\ell} < \delta'_\ell$ , probando (5).

El resto de la prueba se trata de construir las perturbaciones  $w_j^p$ . Para definir  $w_j^p : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ , de los finitos entornos  $U_\ell$  que intersectan al soporte de  $h_j$  ( $\ell : \ell \in L(j)$ ) tomamos uno tal que  $\text{supp } h_j \subset U_\ell$ . Ahora aplicamos la proposición 3.3 en  $B := \bar{U}_\ell$  con  $\omega = w_{j-1}$  para obtener dos mapas  $v, b : \bar{U}_\ell \rightarrow \mathbb{R}^N$  con las propiedades de la proposición. Denotamos las coordenadas de  $U_\ell$  por  $(x^i)$ . Recordemos que  $h_j = a_j^2 d\psi_j \otimes d\psi_j$ . Definimos  $w_j^p$  en  $U_\ell$ , mediante su fórmula en coordenadas

$$(10) \quad w_j^p(x) = a_j(x) \frac{\nu(x)}{\lambda} \cos(\lambda\psi_j(x)) + a_j(x) \frac{b(x)}{\lambda} \sin(\lambda\psi_j(x))$$

donde  $\lambda$  es un parámetro que tenemos que elegir adecuadamente, y definimos  $w_j^p = 0$  fuera de  $U_\ell$ . En la expresión anterior se sobreentiende que  $w_j^p(x)$ ,  $a_j(x)$ ,  $\nu(x)$ ,  $b(x)$  y  $\psi_j(x)$  son en realidad  $w_j^p(\varphi_\ell^{-1}(x))$ ,  $a_j(\varphi_\ell^{-1}(x))$ ,  $\nu(\varphi_\ell^{-1}(x))$ ,  $b(\varphi_\ell^{-1}(x))$  y  $\psi_j(\varphi_\ell^{-1}(x))$ , donde  $\varphi_\ell$  es la carta de las coordenadas  $(x^i)$  en  $U_\ell$ . Vamos a ver que eligiendo  $\lambda$  suficientemente grande vamos a lograr cumplir las ecuaciones (7), (8) y (9) para el entorno  $U_\ell$  elegido. Luego veremos que también vale para  $U_{\ell'}$  con  $\ell' \in L(j)$ , que es lo que necesitamos. Notar que por ser normales  $\|\nu(x)\| = 1$ ,  $\|b(x)\| = 1$  y  $\|a_j(x)\|$  está acotada en  $U_\ell$  ya que es distinto de cero en el soporte de  $h_j$  que es un compacto en  $U_\ell$ . Es por eso que eligiendo  $\lambda$  suficientemente grande logramos que  $\|w_j^p\|_{0,U_\ell} < \frac{\eta_\ell}{K(n)}$  satisfaciendo (7). Para ver de cumplir la ecuación (8) es necesario calcular la norma  $\|Dw_j^p\|_{0,U_\ell}$ . Recordamos que esta es la norma Hilbert-Schmidt del jacobiano de  $w_j^p$  en las coordenadas de  $U_\ell$ , el cual denotamos  $Jw_j^p(x)$ , y se sobreentiende que en realidad es  $J(w_j^p \circ \varphi_\ell^{-1})(x)$ . En estas coordenadas tenemos la fórmula (10). Usando la misma vemos que la entrada  $ik$  de la matriz  $Jw_j^p(x)$  es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} (w_j^p)^i(x) = & \underbrace{-a_j(x) \sin \lambda\psi_j(x) \nu^i(x) \frac{\partial}{\partial x^k} \psi_j(x)}_{A_{i,j}(x)} + \underbrace{a_j(x) \cos \lambda\psi_j(x) b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^k} \psi_j(x)}_{B_{i,j}(x)} \\ & + \frac{1}{\lambda} \underbrace{\left( \frac{\partial a_j(x)}{\partial x^k} \nu^i(x) \cos \lambda\psi_j(x) + \frac{\partial \nu^i(x)}{\partial x^k} a_j(x) \cos \lambda\psi_j(x) \right.}_{E_{i,j}(x)} \\ & \left. + \frac{\partial b^i(x)}{\partial x^k} a_j(x) \sin \lambda\psi_j(x) + \frac{\partial a_j(x)}{\partial x^k} b^i(x) \sin \lambda\psi_j(x) \right) \end{aligned}$$

Denotamos por  $A(x)$ ,  $B(x)$  y  $E(x)$  las matrices cuyos coeficientes son  $A_{i,j}(x)$ ,  $B_{i,j}(x)$  y  $E_{i,j}(x)$  respectivamente, coeficientes indicados en la cuenta anterior. De esta manera la cuenta anterior se puede resumir matricialmente como  $Jw_j(x) = A(x) + B(x) + E(x)$ . Siguiendo con la cuenta de interés, la norma de HS en un punto de coordenadas  $x$  es

$$\begin{aligned}
& \|Jw_j^p(x)\|_{HS}^2 = \\
& \sum_{k,i} \left( \begin{aligned} & a_j(x)^2 \sin^2 \lambda \psi_j(x) (\nu^i(x))^2 \left( \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^k} \right)^2 \\ & + a_j(x)^2 \cos^2 \lambda \psi_j(x) (b^i(x))^2 \left( \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^k} \right)^2 \\ & - 2a_j(x)^2 \sin \lambda \psi_j(x) \cos \lambda \psi_j(x) \nu^i(x) b^i(x) \left( \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^k} \right)^2 \\ & + \frac{1}{\lambda^2} (\dots)^2 + \frac{1}{\lambda} (\dots) \end{aligned} \right) \\
& = \sum_k \left( \sum_i \left[ \begin{aligned} & a_j^2(x) \sin^2 \lambda \psi_j(x) (\nu^i(x))^2 \left( \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^k} \right)^2 \\ & + a_j^2(x) \cos^2 \lambda \psi_j(x) (b^i(x))^2 \left( \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^k} \right)^2 \\ & - 2a_j^2(x) \sin \lambda \psi_j(x) \cos \lambda \psi_j(x) \nu^i b^i \left( \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^k} \right)^2 \end{aligned} \right] \right) \\
& + \sum_{k,i} \frac{1}{\lambda^2} (\dots) + \frac{1}{\lambda} (\dots)
\end{aligned}$$

Ahora recordamos que  $v, b$  son ortonormales, por lo tanto

$$\begin{aligned}
& \|Jw_j^p(x)\|_{HS}^2 = \\
& \sum_k \left( a_j(x)^2 \sin^2 \lambda \psi_j(x) \left( \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^k} \right)^2 + a_j(x)^2 \cos^2 \lambda \psi_j(x) \left( \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^k} \right)^2 \right) \\
& + \sum_{k,i} \frac{1}{\lambda^2} (\dots) + \frac{1}{\lambda} (\dots) \\
& = a_j(x)^2 \sin^2 \lambda \psi_j(x) \sum_k \left( \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^k} \right)^2 + a_j(x)^2 \cos^2 \lambda \psi_j(x) \sum_k \left( \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^k} \right)^2 \\
& + \sum_{k,i} \frac{1}{\lambda^2} (\dots) + \frac{1}{\lambda} (\dots) \\
& = a_j(x)^2 \sum_k \left( \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^k} \right)^2 + \sum_{k,i} \frac{1}{\lambda^2} (\dots) + \frac{1}{\lambda} (\dots)
\end{aligned}$$

ahora las expresiones en los paréntesis son continuas y no nulas solamente en el compacto  $\text{sup } h_j \subset U_\ell$ , es por eso que están acotadas en  $U_\ell$  por una constante  $C$ . Además, recordar que  $h_j = a_j^2 d\psi_j \otimes d\psi_j = a_j^2 \frac{\partial \psi_j}{\partial x^i} \frac{\partial \psi_j}{\partial x^k} dx^i \otimes dx^k$ , por lo que

$$\begin{aligned} \|h_j\|_{0,U_\ell} &= \sup_{p \in U_\ell} a_j^2 \sqrt{\sum_{i,k} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x^i}\right)^2 \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x^k}\right)^2} \\ &= \sup_{p \in U_\ell} a_j^2 \sqrt{\left(\sum_i \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x^i}\right)^2\right) \left(\sum_k \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x^k}\right)^2\right)} = \sup_{p \in U_\ell} a_j^2 \sum_i \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x^i}\right)^2 \end{aligned}$$

Usando esto en la cuenta anterior obtenemos

$$\|Jw_j^p(x)\|_{HS}^2 \leq \|h_j\|_{0,U_\ell} + \frac{C}{\lambda} \leq \|h\|_{0,U_\ell} + \frac{C}{\lambda} < 2 \|h\|_{0,U_\ell}$$

siempre y cuando  $\lambda$  sea suficientemente grande, ya que  $\|h\|_{0,U_\ell} > 0$ . Esto prueba la ecuación (8) para el  $\ell \in L(j)$  particular elegido.

Para seguir notar que el tensor  $\bar{h} := w_j^* e - w_{j-1}^* e = \bar{h}_{i,k} dx^i \otimes dx^k$ , que es el tensor que mide cuanto cambio el pullback, es tal que  $\bar{h}_{i,k} = \bar{h}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = w_j^* e\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) - w_{j-1}^* e\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \left\langle \frac{\partial w_j}{\partial x^i}, \frac{\partial w_j}{\partial x^k} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial w_{j-1}}{\partial x^i}, \frac{\partial w_{j-1}}{\partial x^k} \right\rangle$ . En otras palabras, los coeficientes del tensor en esta base son los coeficientes de la matriz

$$Jw_j^T Jw_j - Jw_{j-1}^T Jw_{j-1}$$

Recordar que  $Jw_j = Jw_{j-1} + A + B + E$ . Por el hecho de que  $v$  y  $b$  son ortonormales entre sí, y además son perpendiculares a  $Tw_{j-1}(M)$ , se sigue que

$$0 = A^T B = B^T A = A^T Jw_{j-1} = Jw_{j-1}^T A = B^T Jw_{j-1} = Jw_{j-1}^T B$$

Con estos datos, es fácil ver que  $Jw_j^T Jw_j - Jw_{j-1}^T Jw_{j-1} = A^T A + BB^T + E^T(Jw_{j-1} + A + B) + (Jw_{j-1}^T + A^T + B^T)E + EE^T$ . Entonces

$$(11) \quad \left\| Jw_j^T Jw_j - Jw_{j-1}^T Jw_{j-1} - A^T A - BB^T \right\|_{HS} \leq K/\lambda \quad \text{para } x \in U_\ell$$

ya que la matriz  $E$  se componía de términos acotados por una constante sobre  $\lambda$ . Por otro lado

$$\begin{aligned} (A^T A + B^T B)_{i,k} &= a_j^2(x) \sin^2 \lambda \psi_j(x) \left( \sum_r \nu^r \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^i} \nu^r \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^k} \right) \\ &\quad + a_j(x)^2 \cos^2 \lambda \psi_j(x) \left( \sum_r b^r \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^i} b^r \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^k} \right) \\ &= a_j^2(x) \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^i} \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x^k} \end{aligned}$$

entonces los coeficientes de la matriz  $(A^T A + B^T B)$  son las coordenadas de la métrica primitiva  $h_j$  en la base  $dx^i \otimes dx^k$ . Es por esto que la ecuación (11) está diciendo exactamente que  $\left\| w_j^* e - (w_{j-1}^* e + h_j) \right\|_{0,U_\ell} \leq K/\lambda$ . Tomando  $\lambda$  suficientemente grande se

sigue que se satisface lo pedido, eq (9), para el  $\ell$  particular elegido.

Para probar que se puede encontrar  $\lambda$  que sirva para todo  $\ell' \in L(j)$  notar que si  $U_{\ell'}$  es uno de estos entornos, con coordenadas  $(y^i)$  entonces todas las cuentas son iguales pero en las coordenadas  $(y^i)$ . Es decir, todas las igualdades anteriores valen pero con  $y$  en lugar de  $x$ . Por ejemplo, la ecuación (10) vale con  $y$  en lugar de  $x$ , donde se sobreentiende que  $w_j^p(y)$ ,  $a_j(y)$ ,  $\nu(y)$ ,  $b(y)$  y  $\psi_j(y)$  son en realidad  $w_j^p(\varphi_{\ell'}^{-1}(y))$ ,  $a_j(\varphi_{\ell'}^{-1}(y))$ ,  $\nu(\varphi_{\ell'}^{-1}(y))$ ,  $b(\varphi_{\ell'}^{-1}(y))$  y  $\psi_j(\varphi_{\ell'}^{-1}(y))$ , donde  $\varphi_{\ell'}$  es la carta de las coordenadas  $(y^i)$  en  $U_{\ell'}$ . Falta ver que también valen las acotaciones. El argumento en el caso anterior era que  $\text{sup } h_j \subset U_{\ell'}$  es compacto y las expresiones que aparecían eran continuas. Ahora las expresiones son las mismas pero para  $U_{\ell'}$  con  $\ell' \in L(j)$  cualquiera no es cierto que  $\text{sup } h_j \subset U_{\ell'}$ , solo sabemos que  $U_{\ell'}$  interseca el soporte de  $h_j$ . En un principio las coordenadas dadas por  $U_{\ell'}$  podrían hacer que las distintas cantidades que tenemos, expresadas en esas coordenadas, crezcan sin control al acercarse al borde. Para subsanar este problema, notar que en realidad podíamos haber elegido los abiertos del cubrimiento  $\{U_{\ell}\}$  siendo bolas coordenadas regulares, es decir, podemos suponer que el entorno coordinado  $(U_{\ell'}, \varphi_{\ell'})$  en realidad está contenido compactamente en un entorno coordinado más grande  $(\tilde{U}_{\ell'}, \varphi_{\ell'})$ ,  $\bar{U}_{\ell'} \subset \tilde{U}_{\ell'}$ , y que además  $\varphi_{\ell'} : \tilde{U}_{\ell'} \rightarrow \mathbb{R}^n$  cumple

$$\varphi_{\ell'}(U_{\ell'}) = B_r(0) \quad \varphi_{\ell'}(\bar{U}_{\ell'}) = \bar{B}_r(0) \quad \varphi_{\ell'}(\tilde{U}_{\ell'}) = B_{r'}(0) \quad \text{con } r < r'$$

Ver figura 1. Fuera de  $\text{sup } h_j$  las cantidades están trivialmente controladas, por lo que

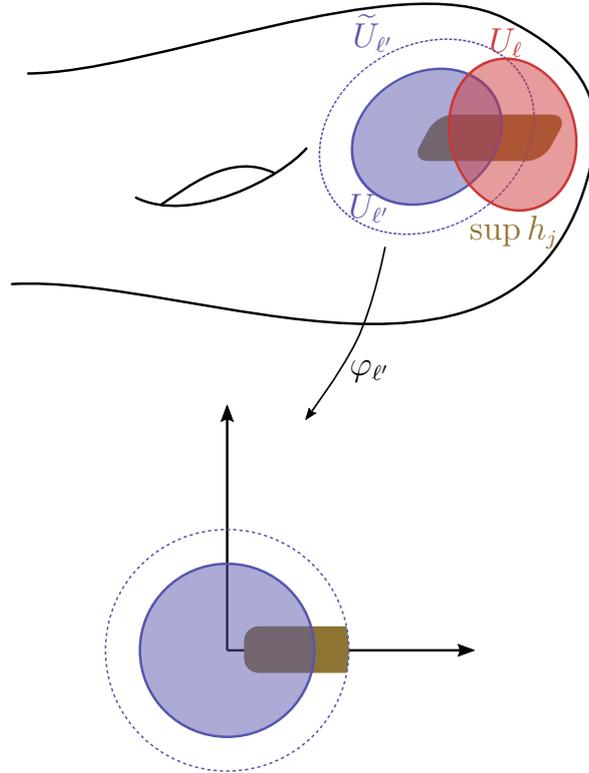


FIGURA 1.  $U_{\ell'}$  es una bola coordinada regular.

solo hace falta controlarlas en  $\sup h_j \cap U_{\ell'}$ . Como  $\sup h_j \cap \bar{U}_{\ell'}$  es un compacto en  $\tilde{U}_{\ell'}$ , que es donde están definidas las coordenadas, entonces valen el mismo tipo de acotaciones que antes. Es por esto que podemos encontrar un  $\lambda$  que sirve para cada  $\ell' \in L(j)$ . Como son finitos podemos encontrar uno que funciona para todos.

Para terminar la demostración hay que ver que si  $w$  es inyectiva y el conjunto límite de  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  no intersecta  $w(M)$  entonces  $z$  se puede construir inyectiva también. Fijamos dos puntos  $p, q \in M$ . Para  $j$  suficientemente grande se tiene que  $z(p) = w_j(p)$  y  $z(q) = w_j(q)$  por lo tanto basta con probar la inyectividad de  $w_j$  para todo  $j$ . Probaremos, inductivamente en  $j$ , que se puede construir  $w_j$  inyectivo, exigiendo un poco más el valor de  $\lambda$  en la construcción anterior.<sup>1</sup> Entonces asumimos que  $w_{j-1}$  es inyectiva. Si  $p, q$  no están en el soporte de  $h_j$  entonces  $w_{j-1}(q) = w_j(q)$  y  $w_{j-1}(p) = w_j(p)$  y entonces listo. Ahora fijamos  $\ell$  tal que  $\sup h_j \subset U_\ell$ . Debido a la compacidad del soporte de  $h_j$  y a la hipótesis del conjunto límite de  $w$  se tiene  $\|w_{j-1}(p) - w_{j-1}(q)\| \geq 2\beta$  para todo  $q \in \sup h_j, p \notin U_\ell$  con  $\beta > 0$  una constante positiva. Si tomamos  $\lambda$  suficientemente grande entonces  $\|w_j - w_{j-1}\|_0 < \beta$  y por lo tanto  $\|w_j(p) - w_j(q)\| \geq \|w_{j-1}(p) - w_{j-1}(q)\| - \|w_j(p) - w_{j-1}(p)\| - \|w_j(q) - w_{j-1}(q)\| > 0$  probando la inyectividad en este caso. Falta ver que  $w_j(p) \neq w_j(q)$  cuando un punto está en el soporte de  $h_j$ , y el otro en  $U_\ell$ , y son distintos claro. Como  $\bar{U}_\ell$  es compacto y  $w_{j-1}$  inyectiva, se sigue que la restricción de este mapa a  $\bar{U}_\ell$  es un homeomorfismo sobre su imagen. Como además era una inmersión tenemos que  $w_{j-1} : U_\ell \rightarrow w_{j-1}(U_\ell)$  es un encaje. El hecho de que es una inmersión hay que exigirlo en la construcción, eligiendo  $\lambda$  adecuadamente en cada paso. En efecto, si  $w_{j-1}$  es una inmersión entonces para todo  $\ell'$  tal que  $U_{\ell'}$  no intersecte el soporte de  $w_j^p$  se tiene  $w_j = w_{j-1}$  en  $U_{\ell'}$ , por lo cual  $w_j$  es una inmersión en  $U_{\ell'}$ . Si  $U_{\ell'}$  intersecta al soporte de  $w_j$  tenemos para usar la ecuación (9). La misma dice que  $w_j^*e$  está cerca de  $w_{j-1}^*e + h_j$  en  $U_{\ell'}$  pero esta última es una métrica. Entonces si  $\delta'_{\ell'}$  es suficientemente chico (lo obtengo agrandando  $\lambda$ )  $w_j^*e$  también será definida positiva y por lo tanto  $w_j$  una inmersión en  $U_{\ell'}$ . Se sigue que  $w_j$  es una inmersión en toda la variedad.

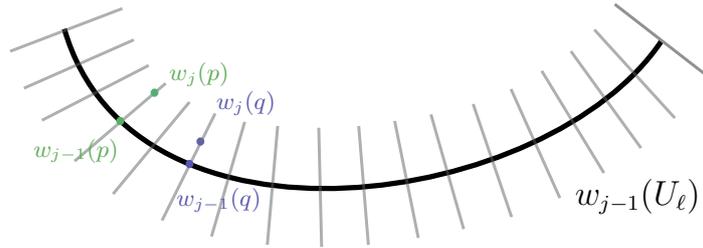


FIGURA 2. Entorno tubular de  $w_{j-1}(U_\ell)$ .

Sea  $U$  un entorno tubular de  $w_{j-1}(U_\ell)$  y sea  $r : U \rightarrow w_{j-1}(U_\ell)$  la proyección ortogonal. Además, en este caso podemos pedir que el grosor del entorno tubular,  $\delta$ ,

<sup>1</sup>Recordar que se elige un  $\lambda$  para construir cada  $w_j^p$ , por lo tanto en realidad  $\lambda$  depende de  $j$ .

sea constante. Esto se debe a que  $U_\ell$  tiene clausura compacta y al lema 4.1. Entonces si  $\lambda$  es suficientemente grande,  $w_j(U_\ell)$  cae en el entorno tubular de  $w_{j-1}(U_\ell)$ , pero  $w_j$  y  $w_{j-1}$  solo se diferencian en un vector del fibrado normal. Más precisamente:  $r(w_j(q)) = r(w_{j-1}(q) + w_j^p(q)) = w_{j-1}(q)$ , donde la última igualdad es cierta ya que  $w_j^p(q) \in N_q(w_{j-1}(U_\ell))$ . De igual manera  $r(w_j(p)) = w_{j-1}(p)$ . Como  $r(w_j(p)) \neq r(w_j(q))$  entonces  $w_j(p) \neq w_j(q)$ , probando lo deseado. Ver figura 2. □



## Resultados principales

### 1. Nash's $C^1$ isometric embedding

En esta sección vamos a probar los teoremas enunciados en la introducción, comenzando por el teorema 1.4.

**TEOREMA 1.4.** *Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$  y sea  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  una inmersión estrictamente corta  $C^\infty$  con  $N \geq n + 2$ . Entonces, para todo  $\epsilon > 0$  existe una inmersión isométrica  $C^1$ ,  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  tal que  $\|u - v\|_{C^0} < \epsilon$ . Si además  $v$  es un encaje, y el conjunto límite de  $v$  no intersecta a  $v(M)$ , entonces  $u$  se puede elegir encaje también. Además se puede elegir que  $u$  tenga el mismo conjunto límite que  $v$ .*

Como hemos visto, la proposición 3.1 es un mecanismo para, a partir de una métrica pullback que es estrictamente corta, que *le falta*, conseguir un mapa cuya métrica pullback sigue siendo estrictamente corta pero que le falta menos para llegar a la métrica original. Además lo hace controlando que tanto se acerca a la métrica objetivo. Es por esto que necesito infinitos pasos para realizar la corrección. Además la proposición me permite hacerlo también controlando que el mapa creado en cada paso no sea muy distinto del mapa original. Esto último me permite asegurar convergencia y por lo tanto puedo corregir infinitas veces y llegar a un mapa límite. Recordar el atlas  $(U_\ell)_\ell$  que fijamos al comienzo del capítulo 3. El lector podrá observar que no se utiliza toda la regularidad de  $v$ , solamente se exige que sea  $C^1$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una inmersión estrictamente corta y sea  $\epsilon > 0$  como en el enunciado. Vamos a aplicar iterativamente la proposición 3.1 produciendo una secuencia de mapas  $v_q$ . Dado  $\ell$ , como el conjunto límite de  $v$  es cerrado y  $v(\bar{U}_\ell)$  es compacto entonces existe  $\beta_\ell$  tal que los puntos de  $v(\bar{U}_\ell)$  están a distancia al menos  $\beta_\ell$  del conjunto de puntos límite de  $v$ . Sea

$$\bar{\eta}_{q,\ell} := 2^{-q-1} \min\{\epsilon, \beta_\ell, 2^{-\ell}\}$$

$$\delta_q := 4^{-q}$$

Para cada  $q \geq 1$  aplicamos la proposición con  $w = v_{q-1}$ ,  $\eta_\ell = \bar{\eta}_{q,\ell}$  y  $\delta = \delta_q$  para producir  $v_q := z$ . Entonces tenemos

1.  $\|v_q - v_{q-1}\|_0 \leq 2^{-q-1}\epsilon$  y por lo tanto la sucesión  $v_q$  converge uniformemente a un mapa  $u$ , además,  $\|u - v\|_0 \leq \epsilon \sum_{q \geq 1} 2^{-q-1} \leq \epsilon/2$ .
2.  $\|v - u\|_{0,U_\ell} \leq \beta_\ell \sum_{q \geq 1} 2^{-q-1} \leq \beta_\ell/2$
3.  $\|v - u\|_{0,U_\ell} \leq 2^{-\ell} \sum_{q \geq 1} 2^{-q-1} \leq 2^{-\ell}$ . Esto implica que el conjunto límite de  $u$  y de  $v$  son iguales. En efecto, si  $(K_i)_{i=1}^\infty$  es una exhaustión por compactos

de  $M$  y sea  $p_i \in M - K_i$ . Fijado  $\ell$ , como cada  $U_j$  tiene clausura compacta entonces existe  $i_0$  tal que  $U_j \subset K_{i_0} \forall j \leq \ell$ . Esto implica que si  $i > i_0$  entonces  $\|v(p_i) - u(p_i)\| \leq 2^{-\ell}$ , es decir,  $\|v(p_i) - u(p_i)\| \rightarrow 0$ . Como los conjuntos límites son iguales, entonces el conjunto límite de  $u$  está a distancia al menos  $\beta_\ell$  de  $v(\overline{U}_\ell)$ , pero  $\|u - v\|_{0, U_\ell} \leq \beta_\ell/2$ . Se sigue que el conjunto límite de  $u$  no intersecta  $u(M)$ .

4.  $\|Dv_q - Dv_{q-1}\|_0 \leq C2^{-q+1}$  para todo  $q \geq 2$ . En efecto, sabemos que para  $q \geq 2$   $\|Dv_q - Dv_{q-1}\|_0 \leq C\sqrt{\|g - v_{q-1}^*e\|_0} \leq C\sqrt{\delta_{q-1}} = C\sqrt{4^{-q+1}} = C2^{-q+1}$ . Esto implica que la convergencia es  $C^1$ , no solo  $C^0$ , es por eso que  $u$  es un mapa  $C^1$ .
5. Sea  $p \in M$  y  $v \in T_pM$ , entonces

$$g_p(v, v) - u^*e_p(v, v) = g_p(v, v) - e(D_pu(v), D_pu(v))$$

como  $v_q \xrightarrow{q} u$   $C^1$  entonces  $D_pv_q(v) \xrightarrow{q} D_pu(v)$  como vectores de  $\mathbb{R}^N$ . Esto se sigue de que si  $p \in U_\ell$  y  $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  en estas coordenadas entonces  $D_pu(v) = J_{\varphi_{\ell(p)}}(u \circ \varphi_\ell^{-1}) \cdot (v^1, \dots, v^n)$ . Pero recordar que  $\|Du - Dv_q\|_{0, U_\ell} \rightarrow 0$  implica justamente  $J_{\varphi_{\ell(p)}}(v_q \circ \varphi_\ell^{-1}) \rightarrow J_{\varphi_{\ell(p)}}(u \circ \varphi_\ell^{-1})$ . Usando esto y la continuidad de  $e$

$$\begin{aligned} g_p(v, v) - u^*e_p(v, v) &= \lim_q g_p(v, v) - e(D_pv_q(v), D_pv_q(v)) \\ &= \lim_q g_p(v, v) - (v_q^*e)_p(v, v) \\ &= \lim_q (g_{ij}(p) - (v_q^*e)_{ij}(p))v^i v^j \end{aligned}$$

Recordar que la repetición de índices implica una suma en  $i$  y una suma en  $j$ . Ahora como  $\|g - v_q^*e\|_0 < 4^{-q}$  entonces  $(v_q^*e)_{ij}(p) \rightarrow g_{ij}(p)$  por lo tanto  $g_p(v, v) = u^*e_p(v, v)$ . Como esto vale para todo punto y todo vector tangente entonces esto prueba que  $u$  es una isometría, de donde se sigue que es una inmersión.

Falta probar el caso en que  $v$  es un encaje. Al ser un encaje es inyectivo, veamos que el mapa  $u$  se puede construir inyectivo. Para eso alcanza con cambiar los parámetros  $\bar{\eta}_{q,\ell}$  por otros  $\eta_{q,\ell}$  más chicos. Al ser más chicos todo lo concluido anteriormente sigue siendo cierto. Vamos a elegir  $\eta_{q,\ell}$  de manera que además nos asegure la inyectividad. Notar que la proposición 3.1 nos asegura la inyectividad de  $v_q$  para todo  $q$ . La idea es la siguiente, si  $x \neq y$  entonces

$$\|u(x) - u(y)\| \geq \|v_q(x) - v_q(y)\| - \left\| \sum_{k=q}^{\infty} (v_{k+1}(x) - v_k(x)) - (v_{k+1}(y) - v_k(y)) \right\|$$

entonces si tengo control de que tan chico es  $\|v_q(x) - v_q(y)\|$  puedo exigir que los mapas producidos después de  $v_q$  sean tales que al sumarlos como en la ecuación anterior sean menor que  $\|v_q(x) - v_q(y)\|$ . En principio no puedo tener control de esta cantidad pues  $x$  puede ser muy cercano a  $y$ , es por eso que voy a considerar esta cantidad para los  $x, y$  tales que  $d(x, y) > 2^{-q}$ . De esta forma dado  $x \neq y$  siempre existe algún  $q$  que cumple

esto. Formalicemos, consideramos el compacto  $V_q := \bigcup_{\ell \leq q} \bar{U}_\ell$  y defino

$$2\gamma_i := \min\{|v_i(x) - v_i(y)| : d(x, y) \geq 2^{-i}, x, y \in V_i\}$$

Aquí  $d$  es la distancia geodésica inducida por la métrica Riemanniana  $g$ . Entonces definimos  $\eta_{q,\ell} := \min\{\bar{\eta}_{q,\ell}, 2^{-q-1}\gamma_1, 2^{-q-1}\gamma_2, \dots, 2^{-q-1}\gamma_{q-1}\}$ . Aplicamos la iteración de arriba pero con  $\eta_{q,\ell}$  en lugar de  $\bar{\eta}_{q,\ell}$ . Veamos que  $u$  es inyectiva. Dado  $x \neq y$  en  $M$  existe  $q$  tal que  $d(x, y) \geq 2^{-q}$  y tal que  $x, y \in V_q$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|u(x) - u(y)\| &\geq \|v_q(x) - v_q(y)\| - \left\| \sum_{k=q}^{\infty} (v_{k+1}(x) - v_k(x)) - (v_{k+1}(y) - v_k(y)) \right\| \\ &\geq \|v_q(x) - v_q(y)\| - 2 \sum_{k=q}^{+\infty} \|v_{k+1} - v_k\|_{0, V_q} \\ &\geq 2\gamma_q - 2 \sum_{k=q}^{+\infty} 2^{-(k+1)-1} \gamma_q = 2\gamma_q - \gamma_q/2^q > 0 \end{aligned}$$

por lo tanto  $u$  es una inmersión isométrica inyectiva. Para terminar, como el conjunto límite de  $u$  no intersecta  $u(M)$  entonces por la proposición 2.1  $u$  es un encaje. Tenemos entonces que  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un encaje isométrico.  $\square$

## 2. Inmersiones y encajes isométricos en $\mathbb{R}^N$

De ahora en más quitamos la reserva de la letra  $U_\ell$  para los abiertos del cubrimiento especial utilizado durante el capítulo anterior y la sección pasada. Como comentamos en la introducción de esta monografía, si uno combina los teoremas de Whitney con el teorema de Nash se puede ver que toda variedad admite un encaje isométrico. Comenzamos recordando uno de los teoremas de Whitney.

**TEOREMA 4.1** (Strong Whitney Embedding Theorem). *Si  $n > 0$  entonces toda  $n$ -variedad diferenciable admite un encaje en  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

**COROLARIO 4.1.1.** *Toda  $n$ -variedad cerrada admite un encaje isométrico  $C^1$  en  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Por el teorema de Whitney existe un encaje  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ . Como  $M$  es compacta, basta multiplicar  $f$  por una constante suficientemente chica para que sea además un encaje estrictamente corto. Entonces aplicando el teorema de Nash encontramos un encaje isométrico de  $M$  en  $\mathbb{R}^{2n}$ .  $\square$

Para probar una versión más general de este corolario, para el caso de variedades no compactas, tenemos que construir una inmersión estrictamente corta en  $\mathbb{R}^{2n}$ , y un encaje estrictamente corto en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , cuyo conjunto límite no intersecte a la imagen. Para hacer esto lo que haremos es construir un mapa así en  $\mathbb{R}^N$  con  $N$  grande y luego ir reduciendo el  $N$  hasta el valor deseado.

**LEMA 2.1.** *Sea  $z : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  un encaje estrictamente corto tal que  $z(M)$  está acotado, el conjunto límite es  $\{0\}$  y no intersecta a la imagen. Si  $N > 2n + 1$  entonces existe un mapa  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  con las mismas propiedades.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $S = z(M)$ , subvariedad de  $\mathbb{R}^N$  y sea  $v \in \mathbb{R}^N$  no nulo. Sea  $\pi_v : \mathbb{R}^N \rightarrow \{v\}^\perp$  la proyección ortogonal. La idea es elegir  $v$  tal que  $\pi_v : S \rightarrow \{v\}^\perp$  sea una inmersión inyectiva cuya imagen no tenga al  $\{0\}$ . Para eso debemos elegir  $v$  que cumpla

1. Para todo  $p \neq q$  puntos distintos de  $S$ ,  $p - q$  no es colineal a  $v$ .
2. Para todo  $w$  vector tangente a  $S$  que no es nulo,  $w$  no es colineal a  $v$ .
3. Para todo  $p \in S$ ,  $p$  no puede ser colineal a  $v$ .

Intuitivamente, al variar  $p, q$  en la primer condición me muevo en  $2n$  dimensiones y la recta  $[p - q]$  en  $N - 1$ , por lo tanto si  $2n < N - 1$  seguro voy a encontrar una recta que no es ninguna de las rectas  $[p - q]$ , y por lo tanto en esa dirección podemos tomar  $v$ . Similar para la segunda y tercer condición. Para formalizar, considero  $\mathbb{P}_{N-1}(\mathbb{R})$  el espacio proyectivo, sea  $\Delta_S \subset S \times S$  el conjunto cerrado  $\Delta_S := \{(p, q) \in S \times S \mid p = q\}$  y  $S_0 \subset TS$  el conjunto cerrado  $S_0 = \{(p, v) \in TS : v = 0\}$ . Considero los siguientes mapas:

$$\begin{aligned} \kappa : S \times S - \Delta_S &\rightarrow \mathbb{P}_{N-1}(\mathbb{R}), & \kappa(p, q) &= [p - q] \\ \tau : TS - S_0 &\rightarrow \mathbb{P}_{N-1}(\mathbb{R}), & \tau(p, w) &= [w] \\ \alpha : S &\rightarrow \mathbb{P}_{N-1}(\mathbb{R}), & \alpha(p) &= [p] \end{aligned}$$

Observar que  $\dim S \times S - \Delta_S = \dim S \times S = 2n$ ,  $\dim TS - S_0 = \dim TS = 2n$ . Como  $2n < N - 1$ , cualquiera de los tres mapas anteriores sale de una variedad de cierta dimensión y llega a una variedad de una dimensión estrictamente mayor. Además son claramente diferenciables entonces la imagen de estos mapas tiene medida cero en  $\mathbb{P}_{N-1}(\mathbb{R})$ , por lo tanto existe  $[v] \in \mathbb{P}_{N-1}(\mathbb{R})$  que no está en la imagen de ninguno de estos tres mapas, entonces  $v$  es el vector deseado. Considero  $\pi_v \circ z : M \rightarrow \{v\}^\perp$ . Este mapa es una inmersión inyectiva pues  $z$  es un encaje y  $\pi_v$  una inmersión inyectiva. Además es estrictamente corto, donde estoy considerando  $\{v\}^\perp$  con la métrica relativa. Veamos esto, recordemos que el mapa  $\pi_v$  tiene norma 1 como operador lineal. Si  $w \in T_p M$  es no nulo y  $e$  denota el producto interno en  $\mathbb{R}^N$  entonces

$$\begin{aligned} (\pi_v \circ z)^*(w, w) &= e(D_p(\pi_v \circ z)(w), D_p(\pi_v \circ z)(w)) = e(\pi_v(D_p z(w)), \pi_v(D_p z(w))) \\ &\leq e(D_p z(w), D_p z(w)) < g_p(w, w) \end{aligned}$$

Por lo tanto el mapa es estrictamente corto. Veamos que el conjunto límite es el  $\{0\}$ , que no interseca a la imagen y que el mapa construido es un encaje. Por la condición 3 está claro que  $\pi_v \circ z(M)$  no tiene al cero. Por otro lado, si  $p_i$  es una sucesión de  $M$  convergiendo a  $\infty$ , es decir, escapándose de una exhaustión por compactos, y tal que  $\pi_v \circ z(p_i) \rightarrow q$  entonces como  $z(p_i)$  está acotado, a menos de tomar una subsucesión puedo suponer que converge a un elemento  $p$ . Pero entonces por hipótesis  $p = 0$  y por lo tanto  $q = \pi_v(p) = 0$ .

Como  $\pi_v \circ z : M \rightarrow \{v\}^\perp$  es una inmersión inyectiva cuyo conjunto límite no interseca a la imagen entonces es un encaje (prop 2.1). Para terminar, componiendo con una isometría lineal  $\{v\}^\perp \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$  obtengo un mapa como el de la hipótesis pero que llega a  $\mathbb{R}^{N-1}$ . Iterando este procedimiento consigo un mapa que termina en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .  $\square$

Para el caso donde solo me interesa tener una inmersión estrictamente corta, es decir no importa la inyectividad, se puede conseguir un mapa que termina en  $\mathbb{R}^{2n}$ . Más precisamente,

LEMA 2.2. *Sea  $z : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  un encaje estrictamente corto tal que  $z(M)$  está acotado, el conjunto límite es  $\{0\}$  y no intersecta a la imagen. Si  $N > 2n$  entonces existe una inmersión estrictamente corta  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 2.1 podemos suponer que  $N = 2n + 1$  y que  $S = z(M)$  subvariedad encajada de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . De nuevo sea  $v \in \mathbb{R}^{2n+1}$  un vector no nulo y sea  $\pi_v : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \{v\}^\perp$  la proyección ortogonal. Sea  $US := \{(x, v) \in T\mathbb{R}^{2n+1} : x \in S, v \in T_x S, e(v, v) = 1\}$ , el tangente unitario a  $S$  con la métrica relativa.  $US$  es una subvariedad encajada de  $TS$ , y por lo tanto de  $T\mathbb{R}^n$ , de dimensión  $2n - 1$ . Considero los siguientes mapas

$$\begin{aligned} \tau : US &\rightarrow \mathbb{P}_{2n}(\mathbb{R}), & \tau(p, w) &= [w] \\ \alpha : S &\rightarrow \mathbb{P}_{2n}(\mathbb{R}), & \alpha(p) &= [p] \end{aligned}$$

El mapa  $\tau$  es diferenciable pues es la restricción de  $(p, w) \mapsto [w]$  de  $T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}_{2n}(\mathbb{R})$ . Como tanto  $\dim US$  como  $\dim S$  son menores estrictamente a  $\dim \mathbb{P}_{2n}(\mathbb{R})$  entonces la imagen de estos mapas tienen medida cero y por lo tanto existe  $[v] \in \mathbb{P}_{2n}(\mathbb{R})$  que no está en la imagen ni de  $\alpha$  ni de  $\tau$ . Esto implica que  $\pi_v : S \rightarrow \{v\}^\perp$  tiene diferencial inyectivo y además la imagen de este mapa no toca al cero. Siguiendo el argumento del lema anterior vemos que el conjunto límite de  $\pi_v \circ z$  es el  $\{0\}$  de  $\{v\}^\perp$  y que este mapa es estrictamente corto. De nuevo componiendo con una isometría lineal de  $\{0\}^\perp \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  encontramos el mapa deseado.  $\square$

COROLARIO 1.4.1. *Toda variedad Riemanniana  $(M, g)$  tiene una inmersión isométrica  $C^1$  en  $\mathbb{R}^{2n}$  y un encaje isométrico  $C^1$  en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Si adicionalmente la variedad es cerrada el encaje isométrico  $C^1$  se puede hacer en  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

DEMOSTRACIÓN. El caso de la variedad cerrada ya fue resuelto en 4.1.1. El caso general requiere más cuidado. Debido a los lemas 2.1 y 2.2, basta con construir un encaje  $z : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  con  $N = (n + 1)(n + 2)$  tal que

1.  $z$  sea un mapa estrictamente corto.
2. El conjunto límite de  $z$  es  $\{0\}$  y no intersecte la imagen de  $z$ .
3. La imagen de  $z$  este acotada.

Para construir  $z$  consideramos un atlas formado por abiertos  $\{U_\ell\}$  que cumpla todas las hipótesis del lema 1.2. Denotamos por  $\Phi_\ell : U_\ell \rightarrow \mathbb{R}^n$  las respectivas cartas. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $\|\Phi_\ell\| \leq 1$ . Como  $M$  no es compacta y como el cubrimiento es por abiertos con clausura compacta necesariamente no puede ser un cubrimiento finito. Entonces es infinito numerable, por lo cual nuestro índice  $\ell$  corre en los naturales. Recordamos que el cubrimiento  $\{U_\ell\}$  está formado por  $n + 1$  clases  $\mathcal{C}_i$  donde para cada  $i$  los abiertos de  $\mathcal{C}_i$  son dos a dos disjuntos. Consideremos una familia  $\{\varphi_\ell\}_\ell$  de funciones diferenciables, cada una soportada en  $U_\ell$  con  $0 \leq \varphi_\ell \leq 1$  y tal que para todo punto  $p \in M$  exista al menos una de estas funciones  $\varphi_\ell$  tal que  $\varphi_\ell = 1$  en un entorno de  $p$ . Para lograr esto, recordar que el cubrimiento  $\{U_\ell\}_\ell$  es numerable y localmente finito así que puedo aplicar el lema 3.1.

Comenzamos definiendo un mapa  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  especificando cada componente. Sea  $p \in M$  y  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ . Si  $p$  no está en ningún elemento de  $\mathcal{C}_i$  entonces definimos  $w_{(i-1)(n+2)+1}(p) = \dots = w_{i(n+2)}(p) = 0$ . En otro caso, existe un único  $U_\ell \in \mathcal{C}_i$  tal que  $p \in U_\ell$ . Entonces definimos

$$\begin{aligned} w_{(i-1)(n+2)+j}(p) &= \varphi_\ell(p)(\Phi_\ell(p))_j \quad \text{con } j \in \{1, \dots, n\} \\ w_{(i-1)(n+2)+n+1}(p) &= \varphi_\ell(p) \\ w_{i(n+2)}(p) &= \varphi_\ell(p) \end{aligned}$$

Este mapa es solo auxiliar. Para cada  $p$  existe al menos un  $\ell$  tal que  $\varphi_\ell = 1$  en un entorno de  $p$ . Si  $U_\ell \in \mathcal{C}_i$  esto quiere decir que el mapa  $w$ , cerca de  $p$ , tiene en las componentes  $(i-1)(n+2)+j$  con  $j \in \{1, \dots, n\}$  al mapa  $\Phi_\ell$ . Es decir, luce de la forma

$$(\dots, (\Phi_\ell)_1, (\Phi_\ell)_2, \dots, (\Phi_\ell)_n, \dots)$$

entonces en el Jacobiano de  $w$  en estas coordenadas, aparece una submatriz de  $n \times n$  correspondiente al diferencial de  $\Phi_\ell : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y por lo tanto el diferencial de  $w$  es de rango completo, por lo cual es inyectivo. Esto prueba que  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una inmersión.

Para construir el mapa final vamos a construir una sucesión  $(\epsilon_\ell)_\ell$  de números positivos estrictamente monótona y convergente a cero. En principio  $w$  no va a ser una inmersión estrictamente corta. Sin embargo, como  $U_\ell$  tiene clausura compacta entonces, por el corolario 2.3.1, existe  $\lambda_\ell < 1/2$  tal que el mapa  $\lambda_\ell w : U_\ell \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una inmersión estrictamente corta respecto a  $\frac{1}{2}g$ , es decir, para todo  $p \in U_\ell$  se tiene que  $((\lambda_\ell w)^*e)_p < \frac{1}{2}g_p$ .

Finalmente defino  $\epsilon_\ell = \lambda_1 \cdots \lambda_\ell$  y  $z : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  especificando cada componente. Sea  $p \in M$  y  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ . Si  $p$  no está en ningún elemento de  $\mathcal{C}_i$  entonces definimos  $z_{(i-1)(n+2)+1}(p) = \dots = z_{i(n+2)}(p) = 0$ . En otro caso, existe un único  $U_\ell \in \mathcal{C}_i$  tal que  $p \in U_\ell$ . Entonces definimos

$$\begin{aligned} z_{(i-1)(n+2)+j}(p) &= \epsilon_\ell \varphi_\ell(p)(\Phi_\ell(p))_j \quad \text{con } j \in \{1, \dots, n\} \\ z_{(i-1)(n+2)+n+1}(p) &= \epsilon_\ell^2 \varphi_\ell(p) \\ z_{i(n+2)}(p) &= \epsilon_\ell \varphi_\ell(p) \end{aligned}$$

El hecho de que para cada punto  $p$  exista al menos un  $\ell$  tal que  $\varphi_\ell$  sea idénticamente 1 en un entorno de  $p$  implica que  $z$  sea una inmersión y esto se ve igual que con  $w$ . Además esto implica que  $z(p) \neq 0$ . Observar que como la sucesión  $\epsilon_\ell$  está acotada,  $\|\Phi_\ell\| \leq 1$  y los chichones también están acotados entonces la imagen de  $z$  está acotada. Por otro lado, si  $(p_i)_i$  es una sucesión de  $M$  convergiendo a  $\infty$  entonces los  $\ell$  tal que  $p_i \in U_\ell$  tienden a infinito cuando  $i \rightarrow \infty$ . Como  $\epsilon_\ell \rightarrow 0$  entonces  $z(p_i) \rightarrow 0$ . Esto prueba que el conjunto límite es el  $\{0\}$  y que la imagen de  $z$  no toca dicho conjunto.

Como  $z : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una inmersión cuyo conjunto límite no intersecta su imagen entonces para ver que es un encaje alcanza con ver que es inyectivo (prop 2.1). Sea  $p$  y  $q$  dos puntos distintos de  $M$ , sea  $U_\ell$  tal que  $\varphi_\ell(p) = 1$  y sea  $i$  con  $U_\ell \in \mathcal{C}_i$ .

1. Si  $q \in U_\ell$  entonces o  $\varphi_\ell(q) \neq 1$ , en cuyo caso  $z_{(i-1)(n+2)+n+1}(q) = \epsilon_\ell^2 \varphi_\ell(q) \neq \epsilon_\ell^2 = z_{(i-1)(n+2)+n+1}(p)$ , o  $\varphi_\ell(q) = 1$ . En este último caso  $z(q) \neq z(p)$  ya que  $\Phi_\ell(p) \neq \Phi_\ell(q)$ .
2. Si  $q \notin U_\ell$  pueden ocurrir dos cosas. Si  $\varphi_{\ell'}(q) = 0 \forall U_{\ell'} \in \mathcal{C}_i$ , entonces  $z_{(i-1)(n+2)+n+1}(q) = 0 \neq z_{(i-1)(n+2)+n+1}(p)$ . Sino existe  $U_{\ell'} \in \mathcal{C}_i$  distinto de  $U_\ell$  tal que  $\varphi_{\ell'}(q) \neq 0$ . Pero si ocurre esto último entonces

$$\frac{z_{(i-1)(n+2)+n+1}(p)}{z_{i(n+2)}(p)} = \varepsilon_\ell \neq \varepsilon_{\ell'} = \frac{z_{(i-1)(n+1)+n+1}(q)}{z_{i(n+2)}(q)}$$

esto termina de probar que  $z$  es inyectivo. Para terminar hay que ver que  $z$  es estrictamente corto. Para eso voy a chequear que para todo  $\ell$  se tiene  $(z^*e)_p \leq \frac{1}{2}g_p \forall p \in U_\ell$ , y para esto voy a hacer inducción en  $\ell$ . Defino  $\varepsilon_\infty = 0$ .

Para  $\ell = 1$ , sea  $U_1$  y sea  $W_1 = U_1 - \bigcup_{\ell \neq 1} \partial U_\ell$ . Notar que solo finitos  $U_\ell$  intersectan  $U_1$ , y que además cada  $\partial U_\ell$  es un cerrado de  $M$  con interior vacío, pues  $\overline{U}_\ell$  es difeomorfo a un disco cerrado. Se concluye que  $W_1$  es un abierto denso de  $U_1$ . Sea  $p \in W_1$  y  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ . Como  $W_1$  es abierto entonces existe un entorno de  $p$ ,  $V_p \subset W_1$ , conexo y tal que  $\partial U_\ell \cap V_p = \emptyset$  para todo  $\ell$ . Debido a esto se tiene que para todo  $\ell$ ,  $V_p \subset U_\ell$  o  $U_\ell \cap V_p = \emptyset$ , pero no hay otro caso. Entonces puede ser que exista  $\ell$  tal que  $p \in V_p \subset U_\ell \in \mathcal{C}_i$ , en este caso el  $\ell$  es único así que tiene sentido definir  $\ell(i) := \ell$ . O no existe y en este caso el entorno  $V_p$  consiste de puntos que no pertenecen a ningún abierto  $U_\ell$  de  $\mathcal{C}_i$ . En este caso defino  $\ell(i) = \infty$ . Notar que si  $j \in \{1, \dots, n+2\}$  y  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  entonces

$$\begin{aligned} z_{(i-1)(n+2)+j}(q) &= \varepsilon_{\ell(i)} w_{(i-1)(n+2)+j}(q) \quad \forall q \in V_p \quad \text{si } j \neq n+1 \\ z_{(i-1)(n+2)+j}(q) &= \varepsilon_{\ell(i)}^2 w_{(i-1)(n+2)+j}(q) \quad \forall q \in V_p \quad \text{si } j = n+1 \end{aligned}$$

incluso si  $\ell(i) = \infty$ . Esto implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} &= \varepsilon_{\ell(i)} \frac{\partial w_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} \quad \text{si } j \neq n+1 \\ \frac{\partial z_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} &= \varepsilon_{\ell(i)}^2 \frac{\partial w_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} \quad \text{si } j = n+1 \end{aligned}$$

Usando el convenio de sumación de Einstein, lo anterior implica que para todo  $j \neq n+1$ ,  $\left(\frac{\partial z_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} v^k\right)^2 = \varepsilon_{\ell(i)}^2 \left(\frac{\partial w_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} v^k\right)^2$  y para  $j = n+1$ ,  $\left(\frac{\partial z_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} v^k\right)^2 = \varepsilon_{\ell(i)}^4 \left(\frac{\partial w_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} v^k\right)^2$ . Tomando  $v = v^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ , con  $(x^i)$  las coordenadas en  $U_1$ ,

$$\begin{aligned} (z^*e)_p(v, v) &= \sum_m \left(\frac{\partial z_m}{\partial x^k} v^k\right)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+2} \left(\frac{\partial z_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} v^k\right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+2} \varepsilon_{\ell(i)}^2 \left(\frac{\partial w_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} v^k\right)^2 \end{aligned}$$

Ahora de todos los  $\ell(i)$  involucrados está claro que 1 es el índice más chico y por lo tanto  $\varepsilon_1$  es el más grande de los involucrados en la suma anterior. Por lo tanto

$$\begin{aligned} (z^*e)_p(v, v) &\leq \varepsilon_1^2 \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+2} \left( \frac{\partial w_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} v^k \right)^2 = \varepsilon_1^2 (w^*e)_p(v, v) \\ &= \lambda_1^2 (w^*e)_p(v, v) = ((\lambda_1 w)^*e)_p(v, v) < \frac{1}{2} g_p(v, v) \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a la condición que impusimos sobre  $\lambda_1 w$  en  $U_1$ . Esto prueba lo deseado en todos los puntos de  $W_1$ . Como este conjunto es denso en  $U_1$  y la métrica continua se sigue que  $(z^*e)_p(v, v) \leq \frac{1}{2} g_p(v, v) \forall p \in U_1$ , terminando el caso base. De hecho la desigualdad vale con  $p \in \overline{U}_1$ , de nuevo por continuidad.

Si ahora estudiamos el abierto  $U_{\ell_0+1}$  para probar lo deseado basta probarlo para el abierto  $V_{\ell_0+1} = U_{\ell_0+1} - \overline{U}_{\ell_0} - \dots - \overline{U}_1$ , pues en los conjuntos que eliminé ya se que se cumple. Es aquí donde use inducción fuerte. Ahora defino  $W_{\ell_0+1} = V_{\ell_0+1} - \bigcup_{\ell \neq \ell_0+1} \partial U_\ell$ . Por las mismas observaciones que antes  $W_{\ell_0+1}$  es un abierto denso de  $V_{\ell_0+1}$  por lo cual basta probar lo deseado en  $W_{\ell_0+1}$ . Ahora se repiten las palabras, sea  $p \in W_{\ell_0+1}$  y  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ . Existe un entorno  $V_p \subset W_{\ell_0+1}$  tal que: Una de dos, o existe  $\ell$  tal que  $p \in V_p \subset U_\ell \in \mathcal{C}_i$ , en este caso el  $\ell$  es único así que tiene sentido definir  $\ell(i) := \ell$ , o no existe y en este caso  $V_p$  consiste de puntos que no pertenecen a ningún abierto de  $\mathcal{C}_i$ . En este caso defino  $\ell(i) = \infty$ . Notar que si  $j \in \{1, \dots, n+2\}$  y  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  entonces

$$\begin{aligned} z_{(i-1)(n+2)+j}(q) &= \varepsilon_{\ell(i)} w_{(i-1)(n+2)+j}(q) \quad \forall q \in V_p \quad \text{si } j \neq n+1 \\ z_{(i-1)(n+2)+j}(q) &= \varepsilon_{\ell(i)}^2 w_{(i-1)(n+2)+j}(q) \quad \forall q \in V_p \quad \text{si } j = n+1 \end{aligned}$$

Por eso nuevamente si  $j \neq n+1$ ,  $\left( \frac{\partial z_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} v^k \right)^2 = \varepsilon_{\ell(i)}^2 \left( \frac{\partial w_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} v^k \right)^2$  y si  $j = n+1$ ,  $\left( \frac{\partial z_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} v^k \right)^2 = \varepsilon_{\ell(i)}^4 \left( \frac{\partial w_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} v^k \right)^2$ . Además notar que de todos los índices  $\ell(i)$  involucrados, el más chico es  $\ell_0+1$  pues estoy dentro de  $V_{\ell_0+1}$ . Entonces repitiendo la cuenta de antes, si  $v = v^k \frac{\partial}{\partial x^k}$  con  $(x^i)$  coordenadas en  $U_{\ell_0+1}$

$$\begin{aligned} (z^*e)_p(v, v) &= \sum_m \left( \frac{\partial z_m}{\partial x^k} v^k \right)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+2} \left( \frac{\partial z_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} v^k \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+2} \varepsilon_{\ell(i)}^2 \left( \frac{\partial w_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} v^k \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+2} \varepsilon_{\ell_0+1}^2 \left( \frac{\partial w_{(i-1)(n+2)+j}(p)}{\partial x^k} v^k \right)^2 = \varepsilon_{\ell_0+1}^2 (w^*e)_p(v, v) \\ &\leq \lambda_{\ell_0+1}^2 (w^*e)_p(v, v) = ((\lambda_{\ell_0+1} w)^*e)_p(v, v) < \frac{1}{2} g_p(v, v) \end{aligned}$$

De nuevo, por continuidad se concluye que  $(z^*e)_p(v, v) \leq \frac{1}{2}g_p(v, v)$  en todo  $V_{\ell_0+1}$ , terminando la inducción. Con esto probamos que en toda la variedad  $(z^*e)_p \leq \frac{1}{2}g_p < g_p$ , consiguiendo un mapa estrictamente corto.  $\square$



## Encaje isométrico del toro plano en $\mathbb{R}^3$

### 1. Introducción

Si  $\Gamma$  es un subgrupo de isometrías de  $\mathbb{R}^2$ , discreto, que preservan orientación e isomorfo a  $\mathbb{Z}^2$  entonces el espacio de órbitas  $\mathbb{R}^2/\Gamma$  es una variedad diferenciable y el mapa cociente es un cubrimiento diferenciable.<sup>1</sup> Por el hecho de ser un grupo de isometrías, la métrica de  $\mathbb{R}^2$  desciende a una métrica en el cociente. Se le llama *toro plano* a un cociente con estas características. En el caso en que  $\Gamma$  es el grupo generado por  $T_1(x, y) = (x + 1, y)$  y  $T_2(x, y) = (x, y + 1)$  entonces el cociente es llamado *toro plano cuadrado*, el cual denotaré por  $\mathbb{T}^2$ .

Por otro lado tenemos el toro *geométrico* subvariedad de  $\mathbb{R}^3$ , cuya clásica parametrización manda horizontales y verticales de  $\mathbb{R}^2$  en meridianos y latitudes. Esta parametrización baja a un mapa del toro plano en el toro geométrico que resulta ser un encaje diferenciable. Sin embargo, este encaje distorsiona distancias: una curva en  $\mathbb{T}^2$  no mide lo mismo que su correspondiente imagen en el toro geométrico. Durante mucho tiempo se pensó que esta distorsión no se podía arreglar, es decir, que no había forma de encajar isométricamente el toro plano en  $\mathbb{R}^3$ . Sin embargo, como comentamos en la introducción de este documento Nash comenta que su argumento se puede adaptar para hacer encajes en codimensión 1. Kuiper lleva el trabajo a cabo un año después llegando al llamado teorema de Nash-Kuiper. El teorema mostraba, para sorpresa de la comunidad, que el encaje isométrico del toro plano en  $\mathbb{R}^3$  sí existía.

**TEOREMA 5.1 (Nash-Kuiper).** *Sea  $(M^n, g)$  una variedad Riemanniana cerrada y  $f_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  con  $q > n$  un encaje estrictamente corto, entonces existe un encaje isométrico  $C^1$  que está  $C^0$ -cerca de  $f_0$ .*

A pesar de esto, la prueba de Nash se basa en una construcción intrincada que hace difícil entender la naturaleza del mapa resultante. Gromov estudiando las ideas de Nash, y revisitando otros autores (Smale, Hirsch, Eliashberg) logró extraer una noción que está por detrás de todo: el h-principio. El principio da una forma muy general de resolver ciertas ecuaciones en derivadas parciales, o más generalmente, las llamadas *partial differential relations*. Cuando se satisface un h-principio para una relación diferencial el problema se reduce a cuestiones topológicas. Para probar que el h-principio se satisface en diferentes situaciones Gromov introdujo varios métodos para resolver *partial differential relations*. Uno de ellos, basado en Nash y Kuiper, es la *integración convexa*. Este método provee una forma sistemática de construir encajes que convergen a un encaje

---

<sup>1</sup>Es un hecho que un subgrupo de isometrías discreto del plano que preservan orientación, y que no tienen puntos fijos, es generado por una traslación o por dos traslaciones.

isométrico. Aún así, debido a la generalidad de este método sigue siendo difícil entender el mapa resultante. Es por esto que en el artículo [4], los autores plantean convertir la integración convexa en un algoritmo explícito para el caso del toro plano, con el objetivo de estudiar el mapa resultante.

El objetivo de este capítulo es dar las ideas básicas de integración convexa y aplicarlas para probar la existencia de un encaje isométrico  $C^1$  del toro plano en  $\mathbb{R}^3$ . El capítulo está basando fuertemente en los trabajos [1, 2, 3, 4].

## 2. Integración convexa en dimensión 1

Veamos el problema que está por detrás de la integración convexa. En su forma más simple es un problema de aproximación de curvas. Sea  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^q$  conexo por caminos y sea  $f_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^q$  una curva  $C^1$  tal que para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $f'_0(t) \in \text{IntConv}(\mathcal{R})$ , el interior de la envolvente convexa de  $\mathcal{R}$ . Dado  $\epsilon > 0$ , el problema consiste en construir una curva  $C^1$ ,  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^q$  tal que

1. Para todo  $t \in [0, 1]$  se cumple  $f'(t) \in \mathcal{R}$ .
2.  $\|f - f_0\|_{C^0} < \epsilon$  donde  $\|f\| := \sup_t \|f(t)\|$ .

La condición 1 es una restricción sobre la derivada, si se cumple se dice que  $f$  satisface la relación diferencial  $\mathcal{R}$ . La estrategia para resolver el problema es construir  $f'$  con imagen en  $\mathcal{R}$ , y tal que en promedio se parezca a  $f'_0$ . Una forma es hacer como en la figura 1 que  $f'$  se parezca a una especie de resorte, y que en cada espiral del resorte promedia lo mismo que un pedacito de  $f'_0$ . De esta manera, integrando se va a conseguir cierta cercanía  $C^0$ . Aumentando la cantidad de espirales del resorte esta cercanía se mejora. Formalmente,

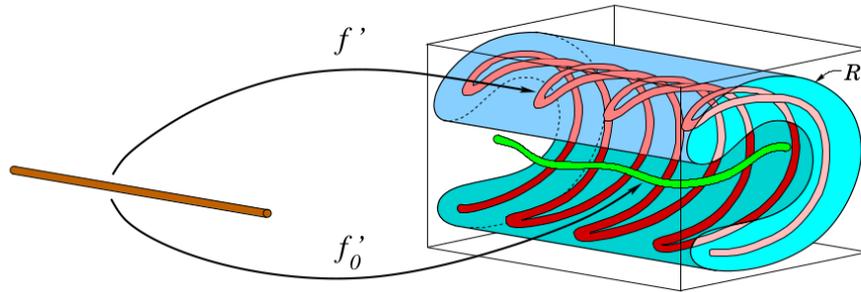


FIGURA 1. En verde se observa la imagen de  $f'_0$ , en rojo la de  $f'$ . En azul el conjunto  $\mathcal{R}$ . Fuente [1].

para construir la función  $f$  se utiliza una familia continua de loops a un parámetro, es decir, una función continua  $h : [0, 1] \rightarrow C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathcal{R})$  que manda  $t \mapsto h_t : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{R}$  y tal que en promedio el loop  $h_t$  es igual a  $f'_0(t)$ , es decir,

$$\int_0^1 h_t([s]) ds = f'_0(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

donde  $[s]$  es  $s$  módulo  $\mathbb{Z}$ . Aquí  $h_t([s]) \in \mathbb{R}^q$ , y la integral se entiende es componente a componente. Luego el mapa  $f$  se construye imponiendo  $f'(t) := h_t([Nt])$ ,  $N \in \mathbb{N}$ .

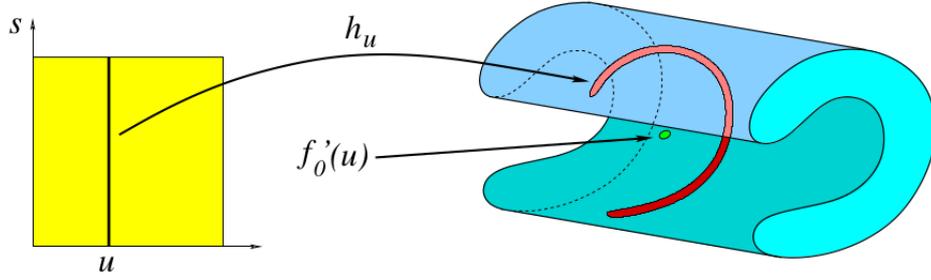


FIGURA 2. Imagen del loop  $h_u$ . Fuente [1].

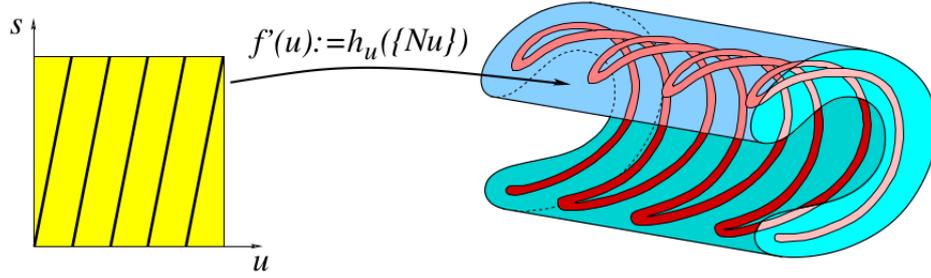


FIGURA 3. Imagen de  $u \mapsto h_u([Nu])$ . Fuente [1].

Finalmente, se define

$$(12) \quad f(t) := f_0(0) + \int_0^t h_u([Nu]) du$$

se dice que  $f$  se obtuvo de  $f_0$  mediante integración convexa. El número  $N$  controla la cantidad de espirales del mapa  $f'$ . Notar que  $f'(t) = h_t([Nt]) \in \mathcal{R}$  por lo tanto  $f$  satisface la relación diferencial. Es por eso que para resolver el problema basta con satisfacer la condición 2 y probar la existencia de los loops.

Antes de continuar, notar que el mapa  $h : [0, 1] \rightarrow C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathcal{R})$  está en correspondencia con  $\tilde{h} : [0, 1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{R}$  con  $\tilde{h}(u, s) = h_u(s)$ . Además  $\tilde{h}$  es continua sii  $h$  lo es. Es por esto que se usará indistintamente una formulación o la otra, y la misma letra  $h$  para ambas.

**2.1. Aproximación  $C^0$ .** Para probar la condición 2 exigiremos más sobre la familia de loops.

PROPOSICIÓN 5.2. *Sea  $h : I \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^q$  suave tal que  $f'_0(t) = \int_0^1 h(t, [u]) du$ . Definimos  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^q$  mediante  $f(t) := f_0(0) + \int_0^1 h(s, [Ns]) ds$ , con  $N > 0$  natural. Se cumple que*

$$\|f - f_0\|_{C^0} \leq \frac{1}{N} \left( 2\|h\|_{C^0} + \left\| \frac{\partial h}{\partial t} \right\|_{C^0} \right)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $t \in [0, 1]$ , sea  $n$  la parte entera de  $Nt$  y sea  $I_j = [\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}]$   $0 \leq j \leq n-1$  y  $I_n = [\frac{n}{N}, t]$ . Tenemos

$$f(t) - f(0) = \sum_{j=0}^n S_j \text{ y } f_0(t) - f_0(0) = \sum_{j=0}^n s_j$$

donde  $S_j := \int_{I_j} h(v, [Nv]) dv$  y  $s_j := \int_{I_j} f'_0(x) dx = \int_{I_j} \int_0^1 h(x, [u]) du dx$ . Haciendo el cambio de variable  $u = Nv - j$ , obtenemos para cada  $j \in [0, n-1]$

$$S_j = \frac{1}{N} \int_0^1 h\left(\frac{u+j}{N}, [u]\right) du = \int_{I_j} \int_0^1 h\left(\frac{u+j}{N}, [u]\right) du dx$$

Ahora  $\|S_j - s_j\| \leq \int_{I_j} \int_0^1 \|h(\frac{u+j}{N}, [u]) - h(x, [u])\| du dx$ . Fijado  $[u]$ , considero la función  $g(z) = h(z, [u])$  entonces el integrando es  $g(\frac{u+j}{N}) - g(x)$ . Aplicando valor medio a  $g$  se obtiene

$$\left\| h\left(\frac{u+j}{N}, [u]\right) - h(x, [u]) \right\| \leq \left\| \frac{\partial h}{\partial t} \right\|_{C^0} \left| \frac{u+j}{N} - x \right| \leq \frac{1}{N} \left\| \frac{\partial h}{\partial t} \right\|_{C^0}$$

Se sigue que si  $j \in [0, n-1]$  entonces  $\|S_j - s_j\| \leq \frac{1}{N^2} \left\| \frac{\partial h}{\partial t} \right\|_{C^0}$ . Para el término  $j = n$  usamos la desigualdad  $\|S_n - s_n\| \leq \frac{2}{N} \|h\|_{C^0}$ . La prueba se termina usando que  $\|f(t) - f_0(t)\| \leq \sum_{j=0}^n \|S_j - s_j\|$ .  $\square$

**2.2. Existencia de loops.** Para probar la existencia de loops en un contexto general es necesario utilizar la hipótesis de que  $f'_0(t) \in \text{IntConv}(\mathcal{R})$ . En nuestro caso nos contentaremos con exhibir loops que atacan una relación diferencial de interés para el problema del encaje isométrico. El lector interesado puede dirigirse al artículo [1] para ver una prueba para relaciones  $\mathcal{R}$  que además son abiertas.

Para construir el encaje del toro plano partimos de uno de sus encajes típicos. Sea  $R > r > 0$ , consideramos

$$(13) \quad \begin{aligned} f_0 : \mathbb{T}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ [u, v] &\longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(R + r \cos 2\pi u) \cos 2\pi v \\ \frac{1}{2\pi}(R + r \cos 2\pi u) \sin 2\pi v \\ \frac{r}{2\pi} \sin 2\pi u \end{cases} \end{aligned}$$

Notar que este encaje mapea las *horizontales*  $\{[u, v] \in \mathbb{T}^2 : v = v_0\}$  a los meridianos del toro geométrico. Usando las coordenadas estándar en  $\mathbb{T}^2$  y la fórmula anterior obtenemos  $(f_0^*e)_{[u,v]} = r^2 du^2 + (R + r \cos 2\pi u)^2 dv^2$ , mientras que la métrica en el toro plano es  $du^2 + dv^2$ . Por lo tanto si  $R + r < 1$  entonces  $f_0$  es un encaje estrictamente corto de  $\mathbb{T}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ . Para construir un encaje isométrico, este mapa será *corrugado* a lo largo de distintas curvas, de manera de incrementar las longitudes de estas. En cada paso, cada corrugación será tal que el nuevo mapa seguirá siendo estrictamente corto pero generando una métrica pullback más cerca de la métrica objetivo. Tenemos una gran flexibilidad en cómo generar las corrugaciones. La teoría de la integración convexa de Gromov da una forma sistemática de producir estas corrugaciones, aunque no es constructiva, no da preferencia a ninguna corrugación en particular. En el artículo

[4] los autores explicitan cómo hacer estas corrugaciones. La corrugación es un proceso esencialmente 1-dimensional, la idea es construir a partir de una curva  $f_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  y una función  $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , con  $r > \|f'_0\|$ , otra curva  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya velocidad cumpla  $\|f'\| = r$ . Esto último sería nuestra *relación diferencial*. Además queremos que la nueva curva se mantenga  $C^0$  cerca de la curva inicial. Notar que la métrica pullback en  $[0, 1]$  dada por un mapa  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  es justamente  $\|g'(t)\| dt^2$  por lo que el proceso de corrugar que buscamos lo que hace es agrandar la métrica. Siguiendo la idea general de integración convexa, necesitamos una familia diferenciable de loops a un parámetro  $h : [0, 1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$  satisfaciendo  $\|h(t, u)\| = r(t), \forall (t, u) \in [0, 1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  y tal que

$$(14) \quad \forall t \in [0, 1], \quad f'_0(t) = \int_0^1 h(t, [u]) du$$

Eligiendo la cantidad de corrugaciones, definimos  $f(t) := f_0(0) + \int_0^t h(u, [Nu]) du$ . Por la proposición 5.2 se sigue que eligiendo  $N$  suficientemente grande podemos tener la cercanía deseada entre  $f$  y  $f_0$ . En este caso podemos dar una fórmula explícita para la familia de loops buscada. Definimos

$$h(t, [u]) := r(t) \left( \cos(\alpha(t) \cos 2\pi u) \mathbf{t}(t) + \sin(\alpha(t) \cos 2\pi u) \mathbf{n}(t) \right)$$

donde  $\mathbf{t}(t) = \frac{f'_0(t)}{\|f'_0(t)\|}$  y  $\mathbf{n}(t)$  es un vector normal a la curva en  $f_0(t)$ . La función  $\alpha(t)$  está determinada por la condición 14. En efecto, como  $J_0(z) = \int_0^1 \cos(z \cos 2\pi u) du$  es la función de Bessel de primera especie y orden 0, tenemos que  $\int_0^1 h(t, [u]) du = r(t) J_0(\alpha(t)) \mathbf{t}(t)$  por lo tanto  $\alpha(t)$  debe ser tal que  $J_0(\alpha(t)) = \frac{\|f'_0(t)\|}{r(t)}$ . Como  $0 < \frac{f'_0(t)}{r(t)} < 1$  y  $J_0 : (0, x_0) \rightarrow (0, 1)$  es invertible, donde  $x_0$  es la primera raíz de  $J_0$ , entonces  $\alpha(t) = J_0^{-1} \left( \frac{\|f'_0(t)\|}{r(t)} \right)$ . Para simplificar la fórmula definimos  $e_t^{i\phi} := \cos \phi \mathbf{t}(t) + \sin \phi \mathbf{n}(t)$ . Con esto tenemos

$$(15) \quad f(t) := f_0(0) + \int_0^t h(u, [Nu]) du, \quad h(t, [u]) := r(t) e_t^{i\alpha(t) \cos 2\pi u}$$

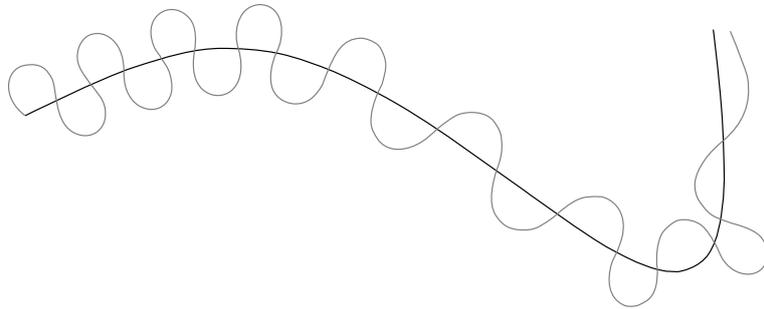


FIGURA 4. La curva negra es corrugada con 9 oscilaciones. Fuente [4].

### 3. Encaje isométrico del toro plano

**3.1. Integración convexa en dimensión 2.** La extensión clásica de integración convexa a dos dimensiones consiste en utilizar una familia de curvas a un parámetro que folia un dominio 2-dimensional. Veremos esto en el toro  $\mathbb{T}^2$ . Dado  $f_0 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el encaje estrictamente corto,  $X : \mathbb{T}^2 \rightarrow T\mathbb{T}^2$  un campo vectorial que no se anula, y una función  $r : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ , el objetivo es producir un nuevo mapa  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya derivada a lo largo de  $X$  en  $p$  punto arbitrario tenga norma  $r(p) > \|Xf_0(p)\|$ , donde esto último es el vector tangente  $X(p)$  aplicado a  $f_0$ , es decir, la derivada direccional de  $f_0$  en la dirección de  $X(p)$ . Sea  $\theta : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$  el flujo dado por el campo  $X$ . Sea  $S$  una subvariedad encajada de dimensión 1, transversal al flujo  $\theta$  que además cumple

1. Para todo  $p \in S$ ,  $\theta^p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$  con  $\theta^p(t) = \theta(p, t)$  vuelve a  $S$  en tiempo 1.
2.  $\theta(S \times [0, 1]) = \mathbb{T}^2$

Con este contexto, la generalización natural de la ecuación 15 sería

$$(16) \quad f(\theta(p, s)) := f_0(p) + \int_0^s r(\theta(p, u)) e_{\theta(p, u)}^{i\alpha(\theta(p, u)) \cos 2\pi Nu} du, \quad (p, s) \in S \times [0, 1]$$

donde  $\alpha : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que  $\alpha(p) = J_0^{-1} \left( \frac{\|df_0(X_p)\|}{r(p)} \right)$ ,  $e_p^{i\phi} = \cos \phi \mathbf{t}(p) + \sin \phi \mathbf{n}(p)$  con  $p \in \mathbb{T}^2$ ,  $\mathbf{t}(p) = df_0(X_p) / \|df_0(X_p)\|$  y  $\mathbf{n} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo normal. Sin embargo, esta fórmula tiene varios puntos a pulir. Primero, la función  $f$  no está bien definida sobre el toro, pues  $\theta(p, 1)$  vuelve a estar en  $S$  y por eso tiene dos definiciones. Este problema lo solucionaremos agregando un termino que haga una transición suave entre la cuenta anterior y la función  $f_0$  cuando  $s$  se acerca a 1. Segundo, por qué  $f$  es diferenciable. Y finalmente, y ya pensando en nuestro problema concreto, qué campo de direcciones  $X$  elegir y qué función  $r$  utilizar para lograr el objetivo, que la métrica pullback dada por  $f$  esté más cerca de la métrica objetivo que la métrica pullback de  $f_0$ . Cómo elegir estos elementos es parte del objetivo de la siguiente sección.

**3.2. Estrategia.** Comenzamos con el encaje estrictamente corto  $f_0 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por la ecuación 13. El mapa  $\Delta : \mathbb{T}^2 \rightarrow T^2T^*\mathbb{T}^2$  dado por  $p \mapsto g_p - (f_0^*e)_p$ , donde  $g$  es la métrica plana en el toro y  $e$  es la métrica de  $\mathbb{R}^3$ , es llamado *defecto isométrico* y mide qué tanto le falta a la métrica pullback para ser la métrica deseada. La idea es ir construyendo una serie de mapas que vayan reduciendo el defecto isométrico.

Recordar que dado un entorno coordenado  $((x^i), U)$  tenemos para cada  $p \in U$  un vector tangente en  $p$  llamado  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  que es el pullback por  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  del vector  $e_i$  de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces tenemos un mapa  $p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  que da un campo vectorial en  $U$  llamado el  $i$ -ésimo campo vectorial coordenado, el cual denotamos por  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ . En el caso de  $\mathbb{T}^2$ , recordar que la proyección  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  restringida a abiertos  $V \subset \mathbb{R}^2$  adecuados dan coordenadas de  $\mathbb{T}^2$ , que llamamos  $u$  y  $v$ . Tomando otro abierto  $\tilde{V}$  obtenemos otras coordenadas  $\tilde{u}$  y  $\tilde{v}$ . Usando cambios de bases se ve que  $\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}$  y  $\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial \tilde{v}}$  en su dominio común. Por esta razón, tenemos dos campos vectoriales globales en  $\mathbb{T}^2$ , cuya representación en las coordenadas estándar es  $\frac{\partial}{\partial u}$  y  $\frac{\partial}{\partial v}$ . Abusando la notación nos referiremos a estos campos como  $\frac{\partial}{\partial u}$  y  $\frac{\partial}{\partial v}$ , si bien no son campos coordenados. Notar que estos campos

coinciden con hacer el pushforward de los campos  $e_1$  y  $e_2$  de  $\mathbb{R}^2$  vía  $d\pi : T\mathbb{R}^2 \rightarrow T\mathbb{T}^2$ . El par de campos  $(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v})$  forma una base de  $T\mathbb{T}^2$  en cada punto, de esta manera tenemos la base dual  $(du, dv)$ , esto es, dos campos de covectores que forman una base de  $T^*\mathbb{T}^2$  en cada punto. Como el par de campos  $(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v})$  forma una base en cada punto de  $T\mathbb{T}^2$  un campo cualquiera  $X : \mathbb{T}^2 \rightarrow T\mathbb{T}^2$  se puede escribir en la forma  $X = a_u \frac{\partial}{\partial u} + a_v \frac{\partial}{\partial v}$  donde  $a_u, a_v : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son las coordenadas de los vectores en la base mencionada, por esto esencialmente  $X : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Otra forma de decir todo esto es, el fibrado tangente del toro es trivial y por eso la secciones se corresponden a mapas de la base en la fibra. De igual manera pero para el fibrado cotangente, y más aún para el fibrado de 2-tensores covariantes, se tiene que cualquier 2-tensor en  $\mathbb{T}^2$  se escribe de la forma  $h = h_{uu}du \otimes du + h_{vv}dv \otimes dv + h_{uv}du \otimes dv + h_{vu}dv \otimes du$ . Si además el tensor es simétrico entonces  $h_{uv} = h_{vu}$  y se puede escribir de la forma  $h = h_{uu}du^2 + 2h_{uv}dudv + h_{vv}dv^2$ . Es por eso que los 2-tensores simétricos en  $\mathbb{T}^2$  se identifican, en cada punto, con  $\mathbb{R}^3$  mediante  $h_p \mapsto (h_{uv}(p), h_{uu}(p), h_{vv}(p))$ . Además los 2-tensores simétricos definidos positivos son  $\{h_{uu}du^2 + h_{uv}dudv + h_{vv}dv^2 \mid h_{uu} > 0, h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2 > 0\}$ , es el *cono positivo* en  $\mathbb{R}^3$ , el cual se ve en rojo en la figura 5.

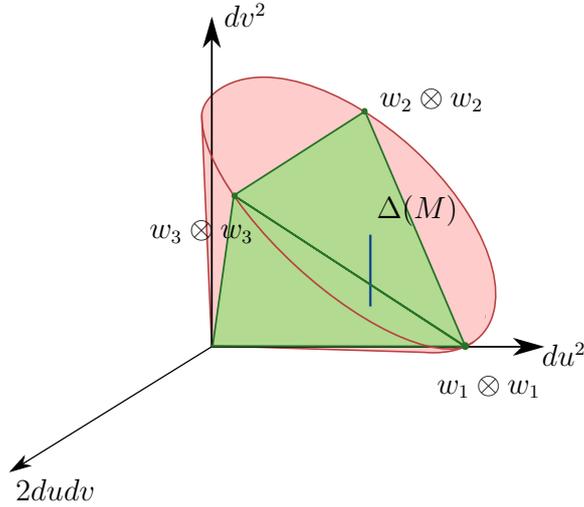


FIGURA 5. En rojo se observa el correspondiente a los 2-tensores simétricos definidos positivos. En verde se muestra el cono generado por  $w_i \otimes w_i$  y en azul la imagen del defecto isométrico  $\Delta$ .

Al ser  $f_0$  estrictamente corto el defecto isométrico es definido positivo y por eso  $\Delta(M)$  vive en el cono positivo al verlo en  $\mathbb{R}^3$ . Más aún, como se escribe de la forma  $\Delta = (1 - r^2) du^2 + (1 - R - r \cos 2\pi u)^2 dv^2$  se sigue que  $\Delta(M)$  forma un segmento en el cono. El borde del cono se corresponde con lo que llamamos métricas primitivas, es decir, un punto en el borde del cono se corresponde con un 2-tensor simétrico de la forma  $w \otimes w$  con  $w$  un covector con coordenadas constantes en la base  $du, dv$ .

Definimos tres campos de covectores  $w_i : \mathbb{T}^2 \rightarrow T^*TM$ ,  $i = 1, 2, 3$ , de la forma  $w_1 = du$ ,  $w_2 = \frac{du}{\sqrt{5}} + \frac{2dv}{\sqrt{5}}$  y  $w_3 = \frac{du}{\sqrt{5}} - \frac{2dv}{\sqrt{5}}$ . Haciendo cuentas se ve que  $\Delta$  se encuentra en el cono positivo generado por  $w_i \otimes w_i$ , es decir, existe  $\rho_1, \rho_2, \rho_3 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que

$$\Delta = \rho_1 w_1 \otimes w_1 + \rho_2 w_2 \otimes w_2 + \rho_3 w_3 \otimes w_3$$

Gráficamente esto se corresponde con que el segmento azul se encuentra dentro del cono verde de la figura. Asociado con los campos  $w_i$  tenemos los campos de vectores  $U_i : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, i = 1, 2, 3$  con  $U_1 = \frac{\partial}{\partial u}, U_2 = \frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{2}{5}\frac{\partial}{\partial v}$  y  $U_3 = \frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{2}{5}\frac{\partial}{\partial v}$ . De esta forma hemos descompuesto el defecto isométrico en tres defectos más sencillos, que tienen una clara dirección asociada. El objetivo sería construir a partir de  $f_0$  un mapa  $f_1$  tal que  $g - f_1^*e = \rho_2 w_2 \otimes w_2 + \rho_3 w_3 \otimes w_3$ , es decir,  $f_1^*e = f_0^*e + \rho_1 w_1 \otimes w_1$ . Si logramos esto entonces repitiéndolo un total de tres veces habremos logrado lo deseado. Sería ideal que el proceso de integración convexa a lo largo de las direcciones  $U_1$  permita construir el mapa  $f_1$ . Esto no es nada loco, para verlo, olvidémonos por un segundo que la fórmula 16 no tiene sentido en el toro. Pedir que  $f_1^*e = f_0^*e + \rho_1 w_1 \otimes w_1$  (17) exige, entre otras cosas, que  $\langle df_1(U_1), df_1(U_1) \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle df_0(U_1), df_0(U_1) \rangle_{\mathbb{R}^3} + \rho_1$  (18). Utilizando la fórmula 16 se tiene que  $df_1(U_1(\theta(p, s))) = r(\theta(p, s))e_{\theta(p, s)}^{i\alpha(\theta(p, s))\cos 2\pi Ns}$  por lo cual utilizando  $r(q) = \sqrt{\|df_0(U_1(q))\|^2 + \rho_1(q)}$  se logra cumplir la ecuación 18. Sin embargo, esto tiene dos problemas. Primero, resulta que utilizar las direcciones dadas por  $U_1$  no es una buena idea para satisfacer las otras exigencias de la ecuación 17. Por otro lado, el hecho de que la fórmula 16 no está bien definida en el toro nos hará utilizar una fórmula similar, pero que no logra la igualdad 18, sino que logra una aproximación. Debido a esta aproximación, no podemos pretender en tres pasos encontrar nuestro mapa final deseado.

Con el fin de arreglar lo último, consideramos la sucesión de métricas  $g_k = f_0^*e + \delta_k \Delta, k \geq 1$  con  $\delta_k = 1 - e^{-\gamma k}$  con  $\gamma > 0$ . Vamos a construir una sucesión de mapas  $f_k$  tal que  $f_k^*e \approx g_k$ , es decir,  $f_k$  es *cuasi-isométrico* para  $g_k$ . El mapa  $f_k$  se construye a partir de  $f_{k-1}$  mediante tres procesos de corrugación. Detallemos este proceso, la sucesión de mapas será construida tal que  $g_k - f_{k-1}^*e$  tenga imagen dentro del cono generado por  $w_1 \otimes w_1, w_2 \otimes w_2, w_3 \otimes w_3$ . Dicho de otra forma, es tal que existen funciones positivas  $\rho_{k,j}, j = 1, 2, 3$  con

$$g_k - f_{k-1}^*e = \rho_{k,1} w_1 \otimes w_1 + \rho_{k,2} w_2 \otimes w_2 + \rho_{k,3} w_3 \otimes w_3$$

entonces aplicaremos tres integraciones convexas para construir a partir de  $f_{k,0} := f_{k-1}$  tres mapas  $f_{k,1}, f_{k,2}$  y  $f_{k,3}$ . Cada mapa es el resultado de una integración convexa sobre el mapa anterior. El mapa  $f_{k,1}$  cancelará, aproximadamente, el primer término. El mapa  $f_{k,2}$  los dos primeros términos y así.

$$\begin{aligned} g_k - f_{k,1}^*e &\approx \rho_{k,2} w_2 \otimes w_2 + \rho_{k,3} w_3 \otimes w_3 \\ g_k - f_{k,2}^*e &\approx \rho_{k,3} w_3 \otimes w_3 \\ g_k - f_{k,3}^*e &\approx 0. \end{aligned}$$

Para lograr esto, definimos para  $j = 1, 2, 3, \mu_{k,j} = f_{k,j-1}^*e + \rho_{k,j} w_j \otimes w_j$  y buscamos que  $f_{k,j}^*e \approx \mu_{k,j}$ . De esta manera obtenemos la sucesión deseada como  $f_k := f_{k,3} (= f_{k+1,0})$ .

**3.3. Construcción de  $f_{k,j}$ .** En esta sección explicaré la construcción formal del mapa  $f_{k,j}$  a partir del mapa  $f_{k,j-1}$ . Por el momento solo asumimos que  $f_{k,j-1}$  es una inmersión y que  $g_k - f_{k-1}^*e$  está en el cono positivo comentado previamente. Para comenzar, arranquemos construyendo  $f_{k,1}$ . Como ya comenté, si bien es natural, no sirve aplicar integración convexa a lo largo de  $U_1$ . Consideramos el campo auxiliar  $V_1 = \frac{\partial}{\partial v}$  y

consideramos el campo  $W_{k,1} : \mathbb{T}^2 \rightarrow T\mathbb{T}^2$  dado por

$$W_{k,1} = U_1 - \frac{\mu_{k,1}(U_1, V_1)}{\mu_{k,1}(V_1, V_1)} V_1$$

Esto está bien definido ya que al ser  $f_{k,0}$  una inmersión entonces  $u_{k,1}$  es una métrica. Notar que el campo  $W_{k,1}$  es ortogonal a  $V_1$  para la métrica  $\mu_{k,1}$ . Realizaremos integración convexa a lo largo de  $\widehat{W}_{k,1}$ . Para evitar el problema de la mala definición de 16 haremos lo siguiente. Consideremos el campo en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\widehat{W}_{k,1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T\mathbb{R}^2$  dado por  $\widehat{W}_{k,1}(p) = d\pi_p^{-1}(W_{k,1}(\pi(p)))$ . Se dice que el campo  $\widehat{W}_{k,1}$  y el campo  $W_{k,1}$  están  $\pi$ -relacionados. Sea  $\theta : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$  el flujo de  $W_{k,1}$  y  $\eta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  el flujo de  $\widehat{W}_{k,1}$ . Por el hecho de que los campos están  $\pi$ -relacionados se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\eta_t} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\theta_t} & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

Ahora sea  $S_1 = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid p = t(0, 1), t \in \mathbb{R}\}$  el eje  $y$ , y sea  $\eta : S_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la restricción de  $\eta$  a  $S_1 \times \mathbb{R}$  (mismo nombre). Notar que  $\widehat{W}_{k,1}$  es transversal a  $S_1$ , esto implica que  $\eta : S_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una inmersión<sup>2</sup>. Además, como la componente  $x$  del campo  $\widehat{W}_{k,1}$  es constante igual a 1, es fácil ver que el mapa  $\eta : S_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una biyección. Como  $\dim S_1 \times \mathbb{R} = \dim \mathbb{R}^2$  entonces  $\eta : S_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un difeomorfismo. Definimos  $G_{k,1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mediante

$$\begin{aligned} G_{k,1}(\eta(p, s)) &= f_{k,0}(\pi(p)) + \int_0^s r(\pi(\eta(p, u))) e^{\frac{i\alpha(\pi(\eta(p, u))) \cos 2\pi N_{k,1} u}{\pi(\eta(p, u))}} du \\ (19) \quad &= f_{k,0}(\pi(p)) + \int_0^s r(\theta(\pi(p), u)) e^{\frac{i\alpha(\theta(\pi(p), u)) \cos 2\pi N_{k,1} u}{\theta(\pi(p), u)}} du \\ &\text{con } (p, s) \in S_1 \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{t}(q) = \frac{df_{k,0}(W_{k,1}(q))}{\|df_{k,0}(W_{k,1}(q))\|}$ ,  $\mathbf{n} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un campo tal que  $\mathbf{n}(q)$  es normal a  $df_{k,0}(T_q\mathbb{T}^2)$ . Observar que la condición isométrica,  $f_{k,1}^* e \approx \mu_{k,1}$ , en la dirección de  $\widehat{W}_{k,1}$  exige  $\|dG_{k,1}(\widehat{W}_{k,1})\|^2 = \mu_{k,1}(W_{k,1}, W_{k,1})$  y por otro lado  $\|dG_{k,1}(\widehat{W}_{k,1})\|^2 = r^2$  por lo tanto definimos  $r(q) = \sqrt{\mu_{k,1}(W_{k,1}(q), W_{k,1}(q))} = \sqrt{\|df_{k,0}(W_{k,1}(q))\|^2 + \rho_{k,1}(q)}$ . Por último fijamos  $\alpha(q) = J_0^{-1}\left(\frac{\|df_{k,0}(W_{k,1}(q))\|}{r(q)}\right)$ . Notar que el mapa  $G_{k,1}$  es diferenciable pues  $\eta : S_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un difeomorfismo. Como  $\widehat{W}_{k,1}$  es el pullback de un campo en el toro entonces  $\eta(p+(0, n), s) = \eta(p, s) + (0, n)$ . Esto implica que  $G_{k,1}(x, y) = G_{k,1}(x, y+n)$ .

<sup>2</sup>Ver *flowout theorem* del capítulo 9 de [8]

Sin embargo, en general  $G_{k,1}$  no tiene por qué descender al toro. Sea  $C = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ . Sea  $w : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es una función diferenciable con forma de  $S$ ,  $w(0) = 0$ ,  $w(1) = 1$  y  $w^{(k)}(0) = 0$ ,  $w^{(k)}(1) = 0$  para todo  $k$ . Entonces definimos  $F_{k,1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$(20) \quad \begin{aligned} F_{k,1}(\eta(p, s)) &= G_{k,1}(\eta(p, s)) - w(s)(G_{k,1} - F_{k,0})(\eta(p, 1)) \\ &\text{si } (p, s) \in S_1 \times [0, 1] \\ F_{k,1}(x + n, y) &= F_{k,1}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

donde  $F_{k,0} = f_{k,0} \circ \pi$ . Es importante entender por qué está bien definida la función. Usaremos que el conjunto  $C = [0, 1]^2$  es un dominio fundamental y que  $\eta(S_1 \times [0, 1]) = [0, 1] \times \mathbb{R}$ , lo cual se sigue de que la componente  $x$  del campo es 1. Primero, la definición anterior es sobre todo  $\mathbb{R}^2$  ya que la primer condición define  $F_{k,1}$  en  $\eta(S_1 \times [0, 1]) = [0, 1] \times \mathbb{R} = \bigcup_n C + n(0, 1)$ , y la segunda la extiende a  $\bigcup_{n,m} C + (n, m) = \mathbb{R}^2$  (por ser fundamental). Por otro lado, la primer condición define la función en  $K = \bigcup_n C + n(0, 1)$ , mientras que la segunda en los iterados de  $K$  por la transformación  $T(x, y) = (x+1, y)$ . Como  $C$  es fundamental, estos iterados solo se tocan en el borde, en donde la definición coincide, pues en el borde la función  $F_{k,1}$  coincide con  $f_{k,0} \circ \pi$ . En cuanto a la diferenciablez la única duda es que ocurre en los puntos de  $S$ , usando las coordenadas  $(p, s)$  dadas por el difeomorfismo  $\eta : S_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  y la fórmula 20 se puede ver que la función es diferenciable. Definimos  $f_{k,1} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  bajando  $F_{k,1}$ .

Para terminar esta sección explicaré brevemente cómo construir  $f_{k,2}$  a partir de  $f_{k,1}$ , asumiendo que esta última es una inmersión. Comenzamos igual que antes pero utilizando  $U_2 = \frac{1}{5} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{2}{5} \frac{\partial}{\partial v}$ ,  $V_2 = -2 \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$  y  $W_{k,2} = U_2 - \frac{\mu_{k,2}(U_2, V_2)}{\mu_{k,2}(V_2, V_2)} V_2$ . Para que la definición  $W_{k,2}$  tenga sentido  $\mu_{k,2} = f_{k,1}^* e + \rho_{k,2} w_2 \otimes w_2$  debe ser una métrica, y esto se cumple ya que  $f_{k,1}$  es una inmersión. Definimos  $S_2 = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid p = t(-2, 1), t \in \mathbb{R}\}$  y sea  $\eta : S_2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la restricción del flujo  $\eta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  del campo  $\widehat{W}_{k,2}$ . Si consideramos la base  $\{(1/5, 2/5), (-2, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$ , la primer coordenada de  $\widehat{W}_{k,2}$  en esta base es constante igual a 1. Similar a antes, esto implica que  $\eta : S_2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un difeomorfismo. Definimos  $G_{k,2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  igual que antes pero haciendo los cambios de índice  $(k, 0) \mapsto (k, 1)$ ,  $(k, 1) \mapsto (k, 2)$ . Observar que  $\eta(p + n(-2, 1), s) = \eta(p, s) + n(-2, 1)$  por lo tanto  $G_{k,2}(\eta(p, s) + n(-2, 1)) = G_{k,2}(\eta(p, s))$ . Una vez más, en general  $G_{k,2}$  no tiene por qué bajar al toro. Sea  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = \lambda_1(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) + \lambda_2(-2, 1), \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$ . Entonces definimos  $F_{k,2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$(21) \quad \begin{aligned} F_{k,2}(\eta(p, s)) &= G_{k,2}(\eta(p, s)) - w(s)(G_{k,2} - F_{k,1})(\eta(p, 1)) \\ &\text{si } (p, s) \in S_2 \times [0, 1] \\ F_{k,2}(x + n, y) &= F_{k,2}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Revisemos por qué la función está bien definida. Nuevamente  $C$  es un dominio fundamental y  $\eta(S_2 \times [0, 1]) = \bigcup_m C + m(-2, 1)$ , lo cual se sigue de que la primer componente del campo en la base  $\{(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}), (-2, 1)\}$  es 1 y el dominio fundamental  $C$  es el paralelogramo generado por esta base, ver figura 6. Primero, la definición anterior es sobre todo  $\mathbb{R}^2$  ya que la primer condición define  $F_{k,2}$  en  $\eta(S_2 \times [0, 1]) = \bigcup_m C + m(-2, 1)$ ,

y la segunda la extiende a  $\bigcup_{n,m} C + m(-2, 1) + n(1, 0) = \mathbb{R}^2$ , pues  $(-2, 1)$  y  $(1, 0)$  generan  $\mathbb{Z}^2$  y  $C$  es fundamental. Por otro lado, la primer condición define la función en  $K = \bigcup_m C + m(-2, 1)$ , mientras que la segunda en los iterados de  $K$  por la transformación  $T(x, y) = (x + 1, y)$ . Como  $C$  es fundamental, estos iterados solo se tocan en el borde, en donde la definición coincide, pues en el borde la función  $F_{k,2}$  coincide con  $f_{k,1} \circ \pi$ . Igual que antes la función es diferenciable y además como  $(-2, 1)$  y  $(1, 0)$  generan  $\mathbb{Z}^2$  entonces  $F_{k,2}(x + n, y + m) = F_{k,2}(x, y)$  y entonces baja a un mapa  $f_{k,2} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

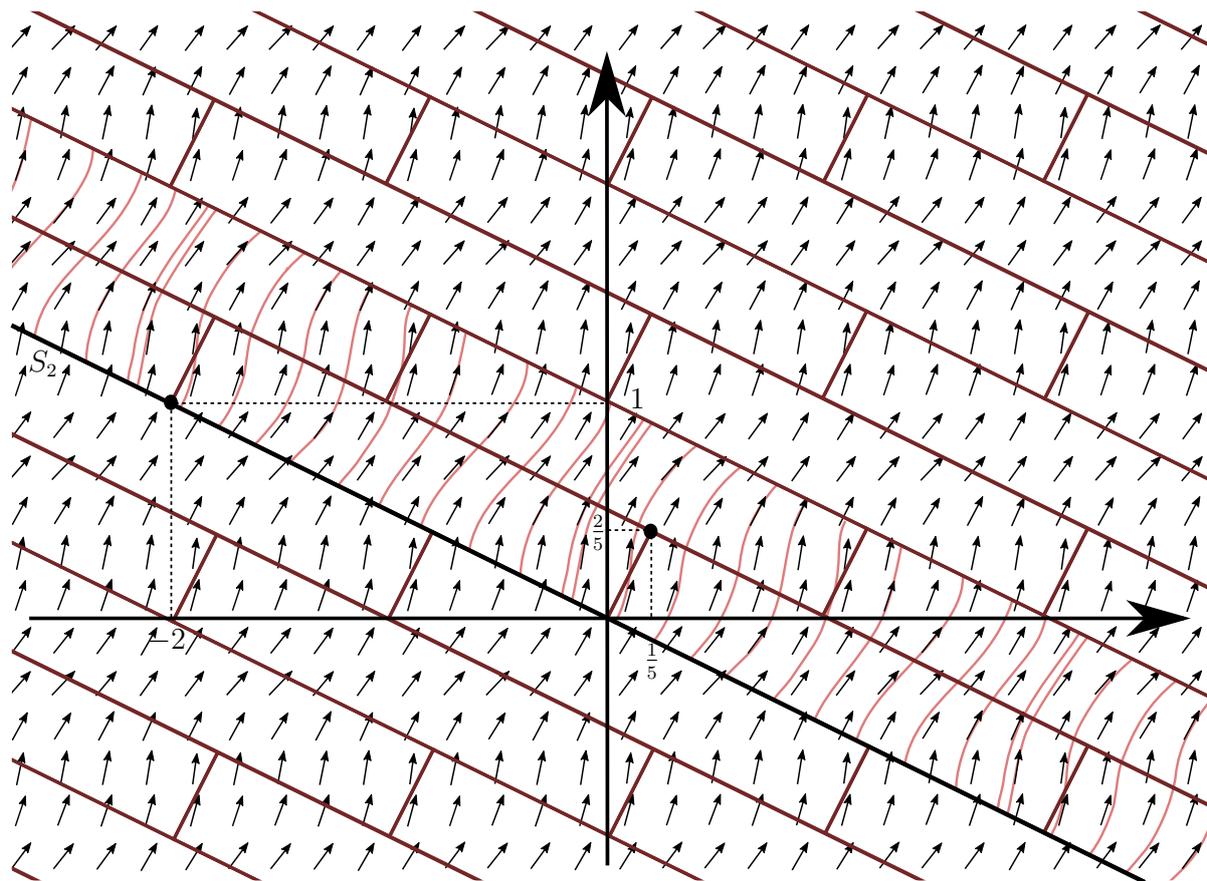


FIGURA 6. Los rectángulos corresponden al dominio fundamental iterado por las transformaciones del cubrimiento. En rojo claro se observan las curvas integrales del flujo, saliendo de  $S_2$ , y fluyendo dos unidades de tiempo.

Observar que la construcción de la sucesión de mapas  $f_{k,j}$  está determinada solo por los números de corrugaciones  $N_{k,j}$ . En la figura 7 se pueden ver las primeras cuatro corrugaciones. Notar que para  $f_{1,1}$ , el campo  $W_{1,1} = U_1$ , es por eso que la corrugación es a lo largo de los meridianos.

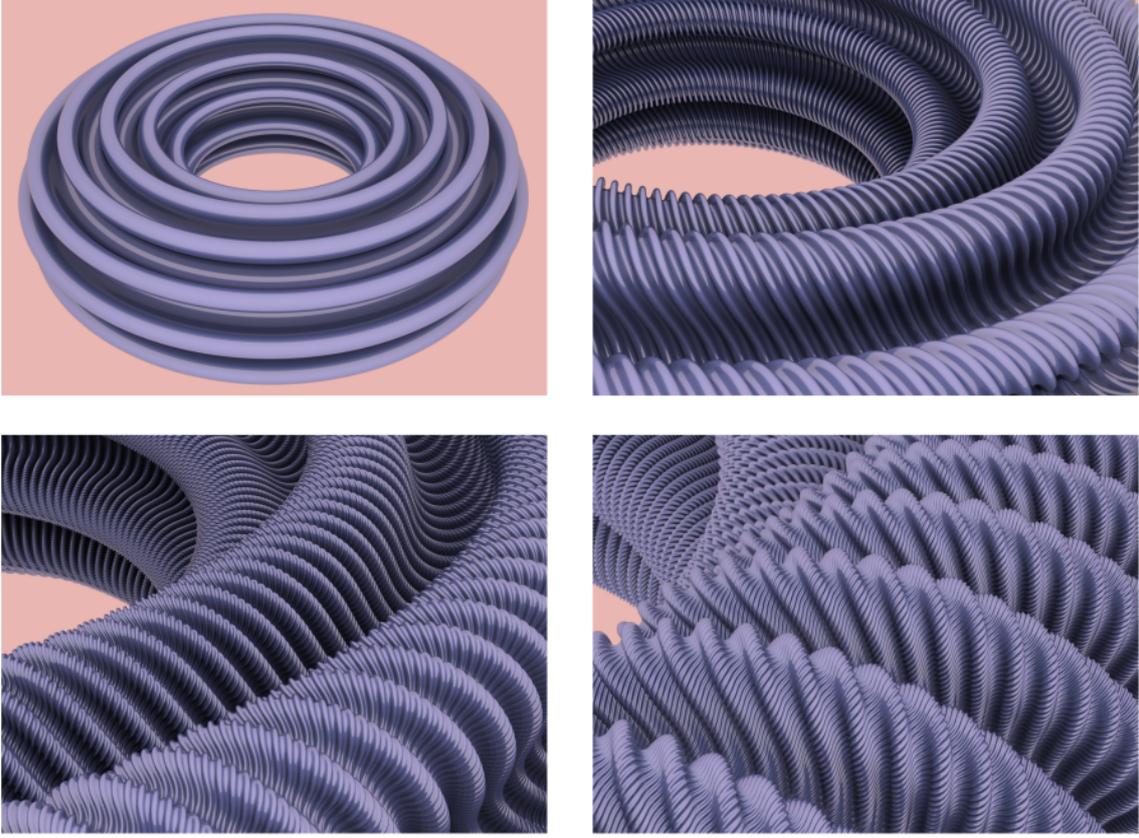


FIGURA 7. Las primeras cuatro corrugaciones,  $f_{1,1}$ ,  $f_{1,2}$ ,  $f_{1,3}$  y  $f_{2,1}$ . Fuente [4].

**3.4. Resultados.** En esta sección daré los teoremas principales expuestos por el autor [4] y verificaré que se pueden elegir las corrugaciones  $N_{k,j}$  para que la construcción de la sección anterior pueda ser iterada. Recordar que para construir  $f_{k,j}$  asumimos que  $f_{k,j-1}$  es una inmersión y que  $g_k - f_{k-1}^*e$  está en el cono generado por  $\{w_1 \otimes w_1, w_2 \otimes w_2, w_3 \otimes w_3\}$ . Entonces para poder iterar el proceso es necesario probar que se pueden elegir las corrugaciones tal que  $f_{k,j}$  es una inmersión y  $g_{k+1} - f_{k,3}^*e$  está en el cono anterior. Lo primero lo verificamos en la afirmación 1 y lo segundo en la afirmación 2. Por último veremos la existencia de una inmersión isométrica del toro plano, dejando la inyectividad para la siguiente sección.

**TEOREMA 5.3** (Teorema 1 de [4]). *Supongamos que podemos construir  $f_{k,j}$ , con  $j = 1, 2, 3$ . Entonces para cada  $j$  existe  $C_{k,j}$  independiente de  $N_{k,j}$  (pero dependiendo en  $f_{k,j-1}$  y sus derivadas) tal que*

1.  $\|f_{k,j} - f_{k,j-1}\|_{C^0} \leq \frac{C_{k,j}}{N_{k,j}}$
2.  $\|df_{k,j} - df_{k,j-1}\|_{C^0} \leq \frac{C_{k,j}}{N_{k,j}} + \sqrt{7} \sqrt{\|\rho_{k,j}\|_{C^0}}$
3.  $\|\mu_{k,j} - f_{k,j}^*e\|_{C^0} \leq \frac{C_{k,j}}{N_{k,j}}$

La primer condición nos dice que podemos construir  $f_{k,j}$   $C^0$ -cerca de  $f_{k,j-1}$ , el segundo mantiene el control de los diferenciales y el último nos dice que nuestro mapa es cuasi-isométrico para  $\mu_{k,j}$ . Respecto a la demostración de este teorema, el primer punto se debe a que esencialmente lo que hicimos fue integración convexa en dimensión 1 a un parámetro  $p \in S$ , construyendo la curva  $s \mapsto F_{k,j}(\eta(p, s))$  a partir de la curva  $s \mapsto F_{k,j-1}(\eta(p, s))$ , entonces la  $C^0$  cercanía se sigue de la proposición 5.2. El resto de los items se sigue de tediosas cuentas en la base  $V_j, W_{k,j}$ . El lector interesado puede encontrar más detalles en [4] y en [2].

**AFIRMACIÓN 1.** *Supongamos que podemos construir  $f_{k,j}$ . Si  $f_{k,j-1}$  es una inmersión entonces existe  $N_{k,j}$  tal que  $f_{k,j}$  es una inmersión.*

**DEMOSTRACIÓN.** El mapa  $f_{k,j}$  es una inmersión si y sólo si  $f_{k,j}^*e$  es definido positivo para todo punto  $p \in \mathbb{T}^2$ . Como  $f_{k,j-1}$  es una inmersión entonces  $\mu_{k,j} = f_{k,j-1}^*e + \rho_{k,j}w_j \otimes w_j$  es definido positivo para todo  $p \in \mathbb{T}^2$ . Si  $\mu_{k,j} = a_{uu}du^2 + a_{vv}dv^2 + 2a_{uv}dudv$  con  $a_{uu}, a_{vv}, a_{uv} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y si  $f_{k,j}^*e = b_{uu}du^2 + b_{vv}dv^2 + 2b_{uv}dudv$ , el teorema 5.3 nos dice que tomando  $N_{k,j}$  suficientemente grande tenemos que los coeficientes de  $\mu_{k,j}$  y los de  $f_{k,j}^*e$  se acercan uniformemente. Más precisamente, que podemos achicar  $\sup_{p \in \mathbb{T}^2} |a_{ij} - b_{ij}|$  tanto como queramos. Como  $\mu_{k,j}$  es definido positivo entonces  $a_{uu} > 0, a_{uu}a_{vv} - a_{uv}^2 > 0 \forall p \in \mathbb{T}^2$ . Como estos coeficientes son continuos y  $\mathbb{T}^2$  compacto entonces esta expresión alcanza un mínimo. Se sigue que tomando  $N_{k,j}$  suficientemente grande obtenemos  $b_{uu} > 0, b_{uu}b_{vv} - b_{uv}^2 > 0 \forall p \in \mathbb{T}^2$ , es decir,  $f_{k,j}^*e$  es definido positivo.  $\square$

Antes de probar la afirmación 2 utilizamos el teorema 5.3 para probar que  $f_k = f_{k,3}$  es cuasi-isométrico para  $g_k$ .

**PROPOSICIÓN 5.4.** *Supongamos que podemos construir  $f_{k,1}, f_{k,2}$  y  $f_{k,3}$ , entonces se cumple  $\|g_k - f_k^*e\|_{C^0} \leq \frac{C_{k,1}}{N_{k,1}} + \frac{C_{k,2}}{N_{k,2}} + \frac{C_{k,3}}{N_{k,3}}$*

**DEMOSTRACIÓN.** Aplicando el teorema 5.3 reiteradas veces se tiene

$$\begin{aligned} \|g_k - f_{k,3}^*e\|_{C^0} &\leq \|g_k - \mu_{k,3}\|_{C^0} + \|\mu_{k,3} - f_{k,3}^*e\|_{C^0} \\ &\leq \|g_k - \rho_{k,3}w_3 \otimes w_3 - f_{k,2}^*e\|_{C^0} + \frac{C_{k,3}}{N_{k,3}} \\ &\leq \|g_k - \rho_{k,3}w_3 \otimes w_3 - \mu_{k,2}\|_{C^0} + \|\mu_{k,2} - f_{k,2}^*e\|_{C^0} + \frac{C_{k,3}}{N_{k,3}} \\ &\leq \|g_k - \rho_{k,3}w_3 \otimes w_3 - \rho_{k,2}w_2 \otimes w_2 - f_{k,1}^*e\|_{C^0} + \frac{C_{k,2}}{N_{k,2}} + \frac{C_{k,3}}{N_{k,3}} \\ &= \|\mu_{k,1} - f_{k,1}^*e\|_{C^0} + \frac{C_{k,2}}{N_{k,2}} + \frac{C_{k,3}}{N_{k,3}} \leq \frac{C_{k,1}}{N_{k,1}} + \frac{C_{k,2}}{N_{k,2}} + \frac{C_{k,3}}{N_{k,3}} \end{aligned}$$

$\square$

**AFIRMACIÓN 2.** *Supongamos que tenemos construido  $f_{k-1}$  inmersión y que  $g_k - f_{k-1}^*e$  está en el cono generado por  $w_i \otimes w_i$ . Entonces podemos construir  $f_k$  inmersión tal que  $g_{k+1} - f_k^*e$  está en el cono generado por  $w_i \otimes w_i$ .*

DEMOSTRACIÓN. Como  $g_k - f_{k-1}^*e$  está en el cono generado por  $w_i \otimes w_i$  y  $f_{k,0} := f_{k-1}$  es una inmersión podemos aplicar la construcción de la sección anterior para construir  $f_{k,1}$ . De la afirmación 1 se sigue que además podemos hacer que  $f_{k,1}$  sea una inmersión eligiendo  $N_{k,1}$  suficientemente grande. Esto nos permite volver a aplicar el proceso constructivo de la sección anterior para construir  $f_{k,2}$ . De nuevo la afirmación nos dice que podemos hacer que este mapa sea inmersión. inductivamente llegamos a construir  $f_k := f_{k,3}$  inmersión. La proposición anterior nos dice que podemos pedir que  $f_k^*e$  este tan cerca de  $g_k$  como uno quiera, siempre y cuando  $N_{k,1}, N_{k,2}$  y  $N_{k,3}$  sean suficientemente grandes. Notar que

$$g_{k+1} - f_k^*e = g_k - f_k^*e + (\delta_{k+1} - \delta_k)\Delta$$

entonces tomando  $N_{k,1}, N_{k,2}$  y  $N_{k,3}$  suficientemente grandes logramos que

$$\|(g_{k+1} - f_k^*e) - (\delta_{k+1} - \delta_k)\Delta\|_{C^0}$$

sea tan chico como uno quiera. Como  $\mathbb{T}^2$  es compacto,  $(\delta_{k+1} - \delta_k)\Delta(\mathbb{T}^2)$  está a distancia positiva del borde del cono generado por  $w_i \otimes w_i$ . Es por esto que si exigimos que  $g_{k+1} - f_k^*e$  este suficientemente cerca de  $(\delta_{k+1} - \delta_k)\Delta$  entonces tendremos que  $(g_{k+1} - f_k^*e)(\mathbb{T}^2)$  también estará en el interior del cono generado por  $w_i \otimes w_i$ .  $\square$

La siguiente proposición resume las afirmaciones anteriores y termina de probar que la construcción se puede iterar.

AFIRMACIÓN 3. *El proceso de construcción se puede iterar el método para construir  $f_{k,j}$  con  $k \in \mathbb{N}$  y  $j \in \{1, 2, 3\}$ , de manera que los mapas sean inmersiones,  $f_{k,3}$  sea cuasi-isométrico a  $g_k$  para todo  $k$ .*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, el mapa  $f_{1,0} := f_0$  es una inmersión y  $g_1 - f_0 = \delta_1\Delta$  está en el cono generado por  $w_i \otimes w_i$ . Entonces la afirmación 2 nos da el paso inductivo para construir toda la sucesión.  $\square$

Finalmente llegamos al resultado principal de esta sección

TEOREMA 5.5. *Existen  $\{N_{k,j}\}$  con  $k \in \mathbb{N}$  y  $j \in \{1, 2, 3\}$  tal que la sucesión  $f_k$  es  $C^1$  convergente a una inmersión isométrica  $f_\infty : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que además se encuentra  $\epsilon$ -cerca de  $f_0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Usando el ítem 1 del teorema 5.3 podemos exigir  $\|f_{k,j} - f_{k,j-1}\| \leq \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^k}$  lo cual implica que  $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k - f_{k-1}\| \leq \epsilon$ . Por ser la serie convergente se tiene que la sucesión  $f_k$  converge  $C^0$  a un mapa  $f_\infty : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Como además la serie es menor o igual a  $\epsilon$  se sigue que  $f_\infty$  está  $\epsilon$ -cerca de  $f_0$ . Para controlar  $C^1$  hay que hacer más trabajo. Aplicando el ítem 2 del teorema 5.3 tenemos

$$\|df_k - df_{k-1}\| \leq \sum_{j=1}^3 \frac{C_{k,j}}{N_{k,j}} + \sqrt{7} \sum_{j=1}^3 \sqrt{\|\rho_{k,j}\|_{C^0}}, k \geq 1$$

Recordar que  $g_k - f_{k-1}^*e = \rho_{k,1}w_1 \otimes w_1 + \rho_{k,2}w_2 \otimes w_2 + \rho_{k,3}w_3 \otimes w_3, k \geq 1$ . Como  $w_i \otimes w_i$  es una base de los 2-tensores simétricos, colocar una norma en los coeficientes

$\rho_{k,j}$  da una norma en los 2-tensores simétricos. Como todas las normas son equivalentes se sigue que existe  $C > 0$  (independiente de  $k$  y de  $j$ ) tal que

$$\sqrt{\sum_j \rho_{k,j}^2} \leq C \|g_k - f_{k-1}^* e\|$$

entonces  $\rho_{k,j} \leq C \|g_k - f_{k-1}^* e\|$  y por lo tanto  $\sum_j \sqrt{\rho_{k,j}} \leq C' \sqrt{\|g_k - f_{k-1}^* e\|}$ , donde  $C' = \sqrt{C}$ . Ahora si  $k \geq 2$  entonces  $\|f_{k-1}^* e - g_{k-1}\|_{C^0} \leq \sum_j C_{k-1,j}/N_{k-1,j}$ . Usando todo esto tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{7} \sum_{j=1}^3 \sqrt{\|\rho_{k,j}\|_{C^0}} &\leq \sqrt{7} C' \sqrt{\|g_k - f_{k-1}^* e\|_{C^0}} \leq \sqrt{7} C' \sqrt{\|g_k - g_{k-1}\|_{C^0} + \sum_{j=1}^3 \frac{C_{k-1,j}}{N_{k-1,j}}} \\ &\leq 2\sqrt{7} C' \left( \sqrt{\|g_k - g_{k-1}\|_{C^0}} + \sum_{j=1}^3 \frac{\sqrt{C_{k-1,j}}}{\sqrt{N_{k-1,j}}} \right) \\ &\leq K \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}} \sqrt{\|\Delta\|_{C^0}} + K \sum_{j=1}^3 \frac{\sqrt{C_{k-1,j}}}{\sqrt{N_{k-1,j}}}, \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos el siguiente control sobre el cambio de diferenciales

$$(22) \quad \|df_k - df_{k-1}\|_{C^0} \leq \sum_{j=1}^3 \frac{C_{k,j}}{N_{k,j}} + K \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}} \sqrt{\|\Delta\|} + K \sum_{j=1}^3 \frac{\sqrt{C_{k-1,j}}}{\sqrt{N_{k-1,j}}}, \quad k \geq 2$$

Notar que  $\sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}} = e^{-\frac{\gamma}{2}k} \sqrt{e^\gamma - 1}$  y por lo tanto  $\sum_{k=2}^{+\infty} \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}}$  es convergente. Por otro lado, la serie  $\sum_{k=2}^{+\infty} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{C_{k,j}}{N_{k,j}} + K \sum_{j=1}^3 \frac{\sqrt{C_{k-1,j}}}{\sqrt{N_{k-1,j}}} \right)$  es convergente siempre y cuando exijamos lo necesario los coeficientes  $N_{k,j}$ . Se sigue que la convergencia de  $f_k$  es  $C^1$ , por lo tanto  $f_\infty : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un mapa  $C^1$ .

Para terminar, fijado un punto vector  $v \in T\mathbb{T}^2$ , está claro que  $g_k(v, v) \xrightarrow[k]{} g(v, v)$ . Por otro lado, la convergencia  $C^1$  implica que  $f_k^* e(v, v) \xrightarrow[k]{} f_\infty^* e(v, v)$ . Entonces

$$g(v, v) - f_\infty^* e(v, v) = \lim_k g_k(v, v) - f_k^* e(v, v)$$

pero la proposición 5.4 nos dice que si exigimos aún más los coeficientes  $N_{k,j}$  tenemos  $\|g_k - f_k^* e\|_{C^0} \xrightarrow[k]{} 0$ . Como en la cuenta anterior el vector está fijo se sigue que  $g(v, v) - f_\infty^* e(v, v) = 0$  y por lo tanto  $f_\infty$  es una isometría. Automáticamente es una inmersión.  $\square$

**3.5. Sobre la inyectividad.** En la sección anterior construimos una inmersión isométrica  $f_\infty : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  partiendo de un mapa estrictamente corto y aplicando infinitas corrugaciones. Como  $\mathbb{T}^2$  es compacto, para probar que existe un encaje isométrico es suficiente con ver que se puede realizar la construcción anterior pero que además el mapa final es inyectivo. En mi opinión, ni en el artículo de referencia [4] ni en [2, 3] los autores dan una prueba completa/satisfactoria de la inyectividad del mapa resultante.

Es por esto que en esta sección daré mis ideas de por qué se puede realizar la construcción anterior consiguiendo inyectividad. Bajo ningún concepto lo que sigue es una demostración, son solo ideas.

Para empezar afirmo que si  $f_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un encaje entonces el mapa  $f$  obtenido mediante el proceso de integración convexa unidimensional descrito en la sección 2 es inyectivo y por lo tanto un encaje. El autor [2] comenta esto y da un argumento al respecto, sin embargo, tampoco lo considero un argumento suficiente/satisfactorio. Una idea de por qué esto es cierto es que como  $f$  está  $C^0$  cerca de  $f_0$  entonces la inyectividad solo puede fallar localmente. Un estudio preciso de la fórmula de integración convexa con los loops que utilizamos muestra que el mapa es localmente inyectivo. Asumiendo esto veamos qué sucede con la integración convexa realizada en el toro. Supongamos que tenemos  $f_{k,j-1} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  encaje y vamos a realizar integración convexa a lo largo de  $W_{k,j}$  para construir  $f_{k,j}$ . Además sea  $\theta : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$  el flujo asociado. Por lo anterior, podemos asumir que si  $N_{k,j}$  es suficientemente grande entonces si  $s_1 \neq s_2$  tenemos  $f_{k,j}(\theta^p(s_1)) \neq f_{k,j}(\theta^p(s_2))$  donde  $p \in S_k$  subvariedad encajada de  $\mathbb{T}^2$  con las propiedades comentadas en 3.3. Esto es, a lo largo de una misma curva integral la función  $f_{k,j}$  no repite valores. Queda ver qué ocurre si tomo curvas integrales distintas  $\theta^p$  y  $\theta^q$  con  $p, q \in S_k$  distintos.

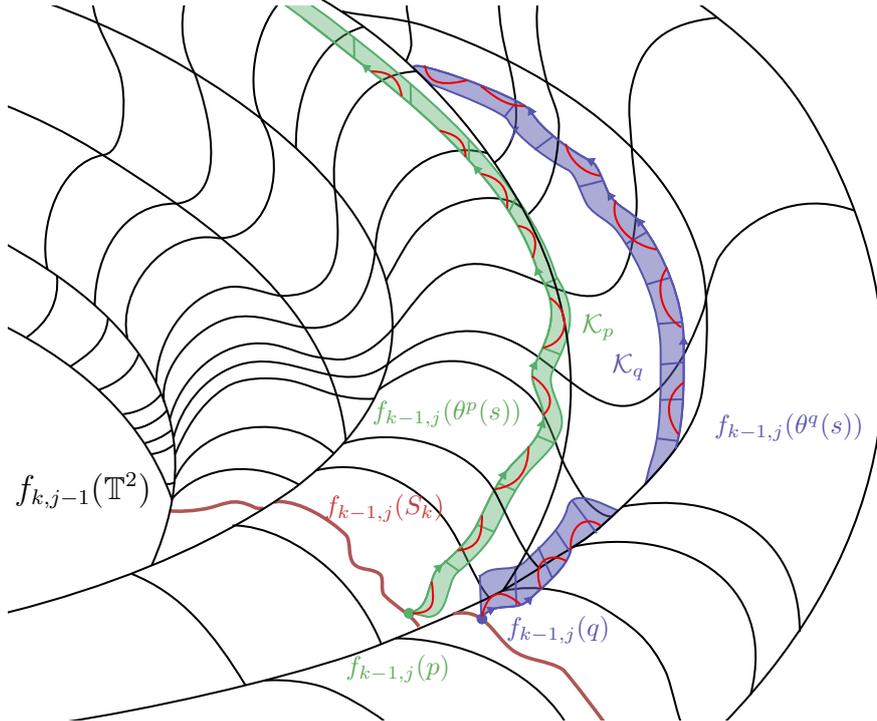


FIGURA 8. Se observan los puntos  $p, q$ , la subvariedad  $S_k$  y las curvas integrales vistas en el toro corrugado  $f_{k-1,j}(\mathbb{T}^2)$ . Las curvas integrales son las que tienen flechas, por encima de estas están bosquejadas las fibras del entorno tubular en esos puntos. En rojo fuerte se observa la imagen de las curvas integrales por  $f_{k,j}$ .

Como  $f_{k,j-1}$  es un encaje entonces su imagen tiene un entorno tubular. Tomemos  $N_{k,j}$  suficientemente grande como para que la  $C^0$  cercanía entre  $f_{k,j}$  y  $f_{k,j-1}$  haga que la imagen de  $f_{k,j}$  caiga en el entorno tubular. Debido a que la definición de  $f_{k,j}(\theta(p, s))$  involucra integrar utilizando un campo tangente y un campo normal, los valores que toma  $f_{k,j}$  a lo largo de  $\theta^p$  están en las fibras del entorno tubular de los puntos de  $\theta^p$ :

$$\forall t, f_{k,j}(\theta^q(t)) \in \bigcup_{s \in [0,1]} \theta^p(s) + N_{\theta^p(s)}(M) =: \mathcal{K}_p$$

donde  $M = f_{k-1,j}(\mathbb{T}^2)$  y  $N_{\theta^p(s)}(M)$  es el espacio normal a  $M$  en  $f_{k-1,j}(\theta^p(s))$ . Si  $U$  es el entorno tubular de  $M$  entonces para todo  $s$ ,  $f_{k,j}(\theta^p(s)) \in \mathcal{K}_p \cap U$  y  $f_{k,j}(\theta^q(s)) \in \mathcal{K}_q \cap U$ , pero como  $U$  es un entorno tubular estos dos conjuntos no se intersectan, ya que están formados por fibras distintas del entorno tubular. Es por esto que  $f_{k,j}$  es inyectiva. Esta idea se ilustra en la figura 8, en donde se observa el toro corrugado,  $f_{k-1,j}(\mathbb{T}^2)$ , y las correspondientes curvas integrales en azul y en verde (con flechas). Sobre estas curvas, también en azul y en verde pero transparente, se bosqueja el conjunto  $\mathcal{K}_p$  y  $\mathcal{K}_q$ . Además en rojo fuerte se observan los valores de  $f_{k,j}$  en las curvas integrales. Lo que estoy diciendo es que  $\mathcal{K}_p$  y  $\mathcal{K}_q$  no se intersectan en el entorno tubular, y que los valores de  $f_{k,j}$  a lo largo de una curva integral, por ejemplo  $\theta^p$ , se encuentra justamente en la parte del entorno tubular de  $\mathcal{K}_p$ .

Entonces tenemos una sucesión de encajes cuasi-isométricos para  $g_k$  convergiendo  $C^1$  a una inmersión isométrica  $f_\infty : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Pasar la inyectividad al límite es más complicado. El autor [2] comenta que al estar en codimensión 1 los ingredientes anteriores implican la inyectividad.



## Bibliografía

- [1] Vincent Borelli. Talk I: One dimensional Convex Integration. <http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/borrelli/Diablerets/1-diablerets.pdf>, 2012. Projet HEVEA, Ecoles d'été.
- [2] Vincent Borelli. Talk III: The h-principle for isometric embeddings. <http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/borrelli/Diablerets/3-diablerets.pdf>, 2012. Projet HEVEA, Ecoles d'été.
- [3] Vincent Borelli. Talk IV: Flat 2-torus in  $\mathbb{R}^3$ . <http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/borrelli/Diablerets/4-diablerets.pdf>, 2012. Projet HEVEA, Ecoles d'été.
- [4] Vincent Borrelli, Saïd Jabrane, Francis Lazarus, and Boris Thibert. Flat tori in three-dimensional space and convex integration. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(19):7218–7223, 2012.
- [5] Camillo De Lellis. The masterpieces of John Forbes Nash Jr. In *The Abel Prize 2013-2017*, pages 391–499. Springer, 2019.
- [6] Sergiu Klainerman. On Nash's unique contribution to analysis in just three of his papers. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 54(2):283–305, 2017.
- [7] Nicolaas H Kuiper. On  $C^1$  - isometric imbeddings. I, II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*. 58 = *Indag. Math.* 17 (1955), 545–556, 683–689.
- [8] John M Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2013.
- [9] John Nash.  $C^1$  isometric imbeddings. *Annals of mathematics*, pages 383–396, 1954.
- [10] John Nash. The imbedding problem for riemannian manifolds. *Annals of mathematics*, pages 20–63, 1956.

Montevideo, 28 de febrero de 2022

  
Alejandro Bellati

  
Martín Reiris

Tribunal  
  
Sébastien Alvarez

  
Matías Carrasco