

Especies y su conexión con Álgebras de Hopf graduadas

José Malanga
Orientadora: Mariana Pereira
15 de Agosto del 2017

Trabajo Monográfico
Licenciatura de Matemáticas
Universidad de la República
Montevideo - Uruguay

Agradecimientos

A mi mamá. Varias veces me increpó que yo no estudiaba matemáticas sino un montón de letras, ahora ya tiene asumido que las matemáticas son un puñado de letras y algún que otro chirimbolo. Espero que esté tan orgullosa de mí como yo estoy de ella.

A cierto profesor de Ciencias, que en mi primer día de clases, nos dió a todos un baño de realidad y de verdades con fundamentos y todo!!! Cuyas expresiones me desafiaron, enojaron y que en cierta medida tenían un tino amargo. Y luego... con los años... hasta me cayó bárbaro el tipo, íbas viendo que no estaba errado este hombre..., en fin, me dió el caprichoso objetivo de recibirme de Licenciado en Matemáticas. Demoré unos añitos, pero buehhh... Ahora puedo decir Misión Cumplida y palmearle la espalda al profe y decirle: "Tenías razón."

Ni idea tiene el pobre que me generó todos estos sentimientos.

A Marianita Pereira. Por su paciencia, dedicación, consejos, buena onda, por su tiempo, correcciones, libros, fuerzas, alegría y por mil cosas más. Gracias Marianita...

Me quedó corto el párrafo anterior y no refleja el agradecimiento que le quiero expresar a esta mujer, así que tipeo unas letras más y repito Gracias miles Marianita!!! Genia!!! Idola!!!

Resumen

El objetivo de este trabajo es mostrar como varias álgebras de Hopf (graduadas) se pueden obtener aplicando ciertos funtores a monoides de Hopf en especies. Para ello presentamos primero las álgebras de Hopf, en particular las álgebras de Hopf graduadas y las especies vectoriales sobre conjuntos finitos probando algunas propiedades básicas de estos conceptos. Luego definiremos cuatro funtores, llamados funtores de Fock, a partir de estos pasaremos de monoides de Hopf en especies a álgebras de Hopf graduadas, y estudiamos si algunas propiedades de bimonoides en especies son preservadas o no por estos funtores.

En el primer capítulo se presentarán las álgebras de Hopf graduadas con componentes finitas y sus duales graduados, determinando bajo ciertas hipótesis una fórmula para la antípoda (Fórmula de Takeuchi). Presentamos además varios ejemplos clásicos de las mismas.

En el Capítulo 2 se brinda nociones básicas de categorías y de categorías monoidales hasta llegar al concepto de monoides de Hopf en categorías monoidales trenzadas. Veremos que las álgebras de Hopf graduadas son un ejemplo de esto último; específicamente, son monoides de Hopf en la categoría de espacios vectoriales graduados ($gVect$) equipada con el producto de Cauchy (como estructura monoidal).

En el tercer capítulo presentamos el concepto de especie vectorial y definimos en la categoría de especies vectoriales (Sp) un producto (también llamado producto de Cauchy), que la equipa con una estructura monoidal. Luego presentamos varios ejemplos de monoides de Hopf en esta categoría. Presentamos además las especies duales de forma análoga a lo visto en espacios vectoriales graduados con componentes finitas.

Finalizamos el trabajo brindando, en la primer parte del Capítulo 4, una breve introducción sobre funtores monoidales bilaxos y sus propiedades básicas. Destacamos la Proposición 4.1.11, que establece que funtores monoidales bilaxos llevan bimonoides en bimonoides. Por último definimos cuatro funtores monoidales bilaxos (funtores de Fock) de la categoría Sp en $gVect$ y los aplicamos a distintos ejemplos de especies vistas en el Capítulo 3 para obtener así varios de los ejemplos de biálgebras graduadas vistas en el Capítulo 1. Finalmente, estudiamos algunas propiedades de estos funtores, en lo que respecta a su comportamiento con la dualización y preservación de propiedades como conmutatividad y coconmutatividad.

Índice general

Agradecimientos	i
Resumen	iii
1. Álgebras de Hopf	1
1.1. Álgebras y morfismos de álgebras	1
1.2. Coálgebras y morfismos de coálgebras	4
1.3. Biálgebras y producto de convolución	10
1.4. Álgebras de Hopf y álgebras de Hopf graduadas	14
1.5. Fórmula de Takeuchi para la antípoda	21
1.6. Álgebras de Hopf y dualidad.	25
2. Categorías	33
2.1. Conceptos Básicos	33
2.2. Categorías monoidales y monoides de Hopf	37
3. Especies	43
3.1. Definiciones y Ejemplos.	43
3.2. Monoides y comonoides en (Sp, \bullet)	48
3.3. Bimonoides y monoides de Hopf en (Sp, \bullet)	55
3.4. Especies duales	61
4. Functores de Fock	67
4.1. Functores monoidales laxos, colaxos y bilaxos	67
4.2. Functor de Fock completo \mathcal{K}	72
4.3. Functor de Fock bosónico $\overline{\mathcal{K}}$	81
4.4. Functor de Fock completo \mathcal{K}^\vee	87
4.5. Functor de Fock bosónico $\overline{\mathcal{K}}^\vee$	91
4.6. Functores de Fock y dualidad	96
4.7. Functores de Fock y (co)conmutatividad	100
Bibliografía	107

Capítulo 1

Álgebras de Hopf

En este capítulo presentaremos las álgebras de Hopf, algunos resultados y ejemplos de la teoría. Nos concentraremos específicamente en álgebras de Hopf graduadas. Para mayor profundidad en la teoría general, se puede encontrar en [MS92] y una detallada introducción al tema en el trabajo monográfico de [MP01].

Usaremos la letra \mathbb{k} para denotar a un cuerpo cualquiera, el símbolo \otimes para el producto tensorial de espacios vectoriales sobre \mathbb{k} y escribiremos $\cong: \mathbb{k} \otimes V \rightarrow V$ (y respectivamente $\cong: V \otimes \mathbb{k} \rightarrow V$) al isomorfismo que lleva $k \otimes v$ (respectivamente $v \otimes k$) en kv . Cuando sea necesario, escribiremos los inversos de estos mapas como $\lambda_V: V \rightarrow \mathbb{k} \otimes V$ y $\rho_V: V \rightarrow V \otimes \mathbb{k}$.

Si A y B son espacios vectoriales, escribiremos $\beta_{A,B}$ o simplemente β al isomorfismo de espacios vectoriales $\beta_{A,B}: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$, definido como $\beta(a \otimes b) = b \otimes a \forall a \in A$ y $b \in B$.

En este capítulo, asumiremos algunos conceptos básicos en categorías que igualmente desarrollaremos en el Capítulo 2.

1.1. Álgebras y morfismos de álgebras

Definición 1.1.1. Una \mathbb{k} -álgebra es una terna (A, μ, u) donde A es un \mathbb{k} -espacio vectorial, $\mu: A \otimes A \rightarrow A$ y $u: \mathbb{k} \rightarrow A$ son transformaciones lineales tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mu \otimes Id_A} & A \otimes A \\ Id_A \otimes \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A \end{array} \quad (\text{diagrama de asociatividad}),$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{k} \otimes A & \xrightarrow{u \otimes Id_A} & A \otimes A & \xleftarrow{Id_A \otimes u} & A \otimes \mathbb{k} \\ & \searrow \cong & \downarrow \mu & \swarrow \cong & \\ & \lambda_A^{-1} & A & \rho_A^{-1} & \end{array} \quad (\text{diagramas de unidad}).$$

A μ y u se le llaman producto y unidad del álgebra respectivamente.

Diremos que (A, μ, u) es un álgebra omitiendo el cuerpo, y si no hay confusión con las operaciones, diremos simplemente que A es un álgebra.

Escribiremos $\mu(a \otimes b) = ab$ y $u(1_{\mathbb{k}}) = 1_A$. Con esta notación el diagrama de asociatividad equivale a que $a(bc) = (ab)c \forall a, b$ y $c \in A$ y el de unidad $1_A a = a 1_A = a$, lo que equivale a pedir que $u(1_{\mathbb{k}}) = 1_A$ sea el neutro para μ .

Ejemplo 1.1.2. Un cuerpo \mathbb{k} con el producto usual y la unidad definida como $u_{\mathbb{k}} = Id_{\mathbb{k}}$ es un álgebra.

Ejemplo 1.1.3. Sea $\mathbb{k}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios en x con coeficientes en \mathbb{k} y sean $p, q \in \mathbb{k}[x]$ y $k \in \mathbb{k}$. Definimos $\mu_{\mathbb{k}[x]}(p \otimes q) = pq$ como el producto usual de polinomios y $u_{\mathbb{k}[x]}(k) = k$, es decir, $u_{\mathbb{k}[x]}$ es la inclusión del cuerpo en los polinomios; entonces $(\mathbb{k}[x], \mu_{\mathbb{k}[x]}, u_{\mathbb{k}[x]})$ es una álgebra.

El diagrama de asociatividad conmuta, porque el producto usual de los polinomios es asociativo y los diagramas de unidad conmutan, pues $u_{\mathbb{k}[x]}(1_{\mathbb{k}}) = 1_{\mathbb{k}[x]}$ es el neutro del producto de polinomios.

A continuación trabajaremos con otro producto en polinomios, que nos será útil para trabajar con duales; para ello veamos primero la siguiente observación.

Observación 1.1.4. Con r, s y $t \in \mathbb{N}$, es muy sencillo ver que se cumple la siguiente identidad combinatoria:

$$\binom{r+s+t}{t} \binom{r+s}{s} = \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!} = \binom{r+s+t}{s+t} \binom{s+t}{t}. \quad (1.1)$$

Lo anterior se conoce como coeficiente multinomial en $r, s, t \in \mathbb{N}$ y se escribe como $\binom{r+s+t}{r, s, t}$, más adelante utilizaremos una generalización de este concepto.

Ejemplo 1.1.5. Sean $x^r, x^s, x^t \in \mathbb{k}[x]$ y $k \in \mathbb{k}$. Definimos $\mu'_{\mathbb{k}[x]}(x^r \otimes x^s) = \binom{r+s}{s} x^{r+s}$ y $u_{\mathbb{k}[x]}(k) = kx^0$ como en el ejemplo anterior; entonces $(\mathbb{k}[x], \mu'_{\mathbb{k}[x]}, u_{\mathbb{k}[x]})$ es una \mathbb{k} -álgebra.

Veamos que el diagrama de asociatividad conmuta:

$$\mu'_{\mathbb{k}[x]}(\mu'_{\mathbb{k}[x]} \otimes Id)(x^r \otimes x^s \otimes x^t) = \mu'_{\mathbb{k}[x]} \left(\binom{r+s}{s} x^{r+s} \otimes x^t \right) = \binom{r+s+t}{t} \binom{r+s}{s} x^{r+s+t},$$

y por otro lado tenemos que

$$\mu'_{\mathbb{k}[x]}(Id \otimes \mu'_{\mathbb{k}[x]})(x^r \otimes x^s \otimes x^t) = \mu'_{\mathbb{k}[x]} \left(x^r \otimes \binom{s+t}{t} x^{s+t} \right) = \binom{r+s+t}{s+t} \binom{s+t}{t} x^{r+s+t}.$$

Ambas expresiones son iguales por la identidad combinatoria (1.1), por lo tanto el diagrama de asociatividad conmuta.

Mediante un sencillo cálculo se prueba que:

$$\mu'_{\mathbb{k}[x]}(u \otimes Id)(k \otimes x^r) = \mu'_{\mathbb{k}[x]}(Id \otimes u)(x^r \otimes k) = kx^r,$$

concluyendo que $(\mathbb{k}[x], \mu'_{\mathbb{k}[x]}, u_{\mathbb{k}[x]})$ es una \mathbb{k} -álgebra.

Ejemplo 1.1.6. Sea (G, \odot, e) un grupo y $\mathbb{k}G$ el \mathbb{k} -espacio vectorial con base los elementos de G ; es decir que $\mathbb{k}G = \{\sum_{g \in G} a_g g, \text{ con } a_g \in \mathbb{k}, \text{ donde sólo una cantidad finita de los } a_g \text{ son no nulos}\}$. Definimos $\forall a_g, a_h$ y $k \in \mathbb{k}$:

$$\mu_{\mathbb{k}G} \left(\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \otimes \left(\sum_{h \in G} a_h h \right) \right) = \sum_{g, h \in G} a_g a_h (g \odot h) = \sum_{\substack{t=g \odot h \\ t \in G}} a_g a_h t \quad y \quad u_{\mathbb{k}G}(k) = ke.$$

Observar que μ es la extensión lineal de \odot y $1_{\mathbb{k}G} = e$; resulta que $(\mathbb{k}G, \mu_{\mathbb{k}G}, u_{\mathbb{k}G})$ es una álgebra.

El diagrama de asociatividad conmuta porque el producto en \mathbb{k} y en G son asociativos y los diagramas de unidad conmutan pues e es el neutro del grupo.

Notación 1.1.7. De ahora en adelante escribiremos $A^{\otimes k} = \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{k \text{ veces}}$.

Ejemplo 1.1.8. Sea V un \mathbb{k} -espacio vectorial, se define la **álgebra tensorial sobre V** como $T(V) = \bigoplus_{k \geq 0} V^{\otimes k}$, donde $V^{\otimes 0} = \mathbb{k}$. Sean $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ e $y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \in T(V)$; definimos el producto en $T(V)$ como $\mu_{T(V)}((x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_m)) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m$, **la concatenación** y definimos la unidad en $T(V)$ como la siguiente inclusión $u_{T(V)} : \mathbb{k} \hookrightarrow T(V)$.

El álgebra tensorial es una álgebra con las operaciones definidas, dado que concatenar es asociativa y la unidad al llevar los elementos del cuerpo a $V^{\otimes 0} = \mathbb{k}$, hace conmutar los diagramas de unidad.

Definición 1.1.9. Sean (A, μ_A, u_A) y (B, μ_B, u_B) dos \mathbb{k} -álgebras, **un morfismo de \mathbb{k} -álgebras** es una transformación lineal $f : A \rightarrow B$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{f \otimes f} & B \otimes B \\ \mu_A \downarrow & & \downarrow \mu_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{k} & \xrightarrow{u_A} & A \\ & \searrow u_B & \downarrow f \\ & & B \end{array} .$$

Es decir que $f(ab) = f(a)f(b) \forall a \in A$ y $\forall b \in B$ y que $f(1_A) = 1_B$.

A la categoría cuyos objetos son las \mathbb{k} -álgebras y cuyos morfismos son los morfismos de \mathbb{k} -álgebras, la llamaremos $\text{Alg}_{\mathbb{k}}$. A continuación veremos que esta categoría es cerrada bajo productos tensoriales.

Proposición 1.1.10. Sean (A, μ_A, u_A) y (B, μ_B, u_B) dos \mathbb{k} -álgebra si definimos $\mu_{A \otimes B} : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \rightarrow A \otimes B$ y $u_{A \otimes B} : \mathbb{k} \rightarrow A \otimes B$ como $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$ y $1_{A \otimes B} = 1_A \otimes 1_B$, entonces resulta que $(A \otimes B, \mu_{A \otimes B}, u_{A \otimes B})$ es también una \mathbb{k} -álgebra.

Demostración.

Observar que $\mu_{A \otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes \beta_{A,B} \otimes Id_B)$, con $\beta_{A,B} : B \otimes A \rightarrow A \otimes B$ definida como $\beta_{A,B}(b \otimes a) = a \otimes b$; resulta que $\mu_{A \otimes B}$ y $u_{A \otimes B}$ son mapas lineales, por ser composición y producto tensorial de mapas lineales.

Para la conmutatividad del diagrama de asociatividad, consideremos $a_1, a_2, a_3 \in A$ y $b_1, b_2, b_3 \in B$,

$$(a_1 \otimes b_1)[(a_2 \otimes b_2)(a_3 \otimes b_3)] = (a_1 \otimes b_1)(a_2 a_3 \otimes b_2 b_3) = a_1(a_2 a_3) \otimes b_1(b_2 b_3),$$

y usando la asociatividad de μ_A y de μ_B obtenemos que

$$(a_1 a_2) a_3 \otimes (b_1 b_2) b_3 = (a_1 a_2 \otimes b_1 b_2) \otimes (a_3 \otimes b_3) = [(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2)] \otimes (a_3 \otimes b_3).$$

Resta probar que $u_{A \otimes A}$ cumple con la conmutatividad de los diagramas de unidad, $1_{A \otimes B}(a \otimes b) = (1_A \otimes 1_B)(a \otimes b) = 1_A a \otimes 1_B b = a \otimes b = (a \otimes b)(1_A \otimes 1_B) = (a \otimes b)1_{A \otimes B}$, $\forall a \in A$. \square

Definición 1.1.11. Sea (A, μ, u) una álgebra, definimos a $\mu^{op} : A \otimes A \rightarrow A$ como $\mu^{op}(a \otimes b) = \mu(b \otimes a)$, $\forall a, b \in A$ o lo que es lo mismo $\mu^{op} = \mu \circ \beta$.

Afirmación 1.1.12. Si (A, μ, u) es una álgebra entonces, (A, μ^{op}, u) también lo es.

Demostración. Veamos que el diagrama de asociatividad de μ^{op} conmuta. Sean $a, b, c \in A$ entonces, $\mu^{op}(a \otimes \mu^{op}(b \otimes c)) = \mu(\mu^{op}(b \otimes c) \otimes a) = \mu(\mu(c \otimes b) \otimes a)$. Por la conmutatividad del diagrama de asociatividad para μ obtenemos

$$\mu(c \otimes \mu(b \otimes a)) = \mu^{op}(\mu(b \otimes a) \otimes c) = \mu^{op}(\mu^{op}(a \otimes b) \otimes c).$$

Ahora veamos que los diagramas de la unidad conmutan; dado los diagramas de unidad u en (A, μ, u) y que $\mu^{op}(u \otimes Id_A) = \mu(Id_A \otimes u)$, la última expresión es igual a $\mu(u \otimes Id_A) = \mu^{op}(Id_A \otimes u)$ lo que prueba la conmutatividad de los diagramas de la unidad para A^{op} , entonces A^{op} es un álgebra. \square

Definición 1.1.13. Al álgebra (A, μ^{op}, u) la llamaremos el **álgebra opuesta** y la escribiremos como A^{op} .

Definición 1.1.14. Sean (A, μ_A, u_A) y (B, μ_B, u_B) dos \mathbb{k} -álgebras. Sea $f : A \rightarrow B$ un mapa \mathbb{k} -lineal; decimos que **f es un antimorfismo de álgebras** si cumple que $\mu_B^{op} \circ (f \otimes f) = f \circ \mu_A$ y que $f \circ u_A = u_B$; es decir si para todo $a, a' \in A$, $f(aa') = f(a')f(a)$ y $f(1_A) = (1_B)$.

Observar que $f : A \rightarrow B$ es antimorfismo de álgebras si y sólo si $f : A \rightarrow B^{op}$ es morfismo de álgebras, y también si y sólo si $f : A^{op} \rightarrow B$ es morfismo de álgebras.

1.2. Coálgebras y morfismos de coálgebras

A continuación presentaremos las coálgebras, que resultan de dualizar la noción de álgebra, en el sentido en que se cambian los sentidos de las flechas en los diagramas presentados.

Definición 1.2.1. Una **\mathbb{k} -coálgebra** es una terna (C, Δ, ε) donde C es un \mathbb{k} -espacio vectorial, $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ y $\varepsilon : C \rightarrow \mathbb{k}$ son transformaciones lineales tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ \Delta \downarrow & & \downarrow Id_C \otimes \Delta \\ C \otimes C & \xrightarrow{\Delta \otimes Id_C} & C \otimes C \otimes C \end{array} \quad (\text{diagrama de coasociatividad}),$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{k} \otimes C & \xleftarrow{\varepsilon \otimes Id_C} & C \otimes C & \xrightarrow{Id_C \otimes \varepsilon} & C \otimes \mathbb{k} \\ & \cong \swarrow & \uparrow \Delta & \searrow \cong & \\ & \lambda_C & C & \rho_C & \end{array} \quad (\text{diagramas de counidad}).$$

Conociendo el cuerpo en que estamos trabajando, diremos que (C, Δ, ε) es una coálgebra o simplemente que C es una coálgebra si tampoco existiere confusión con las operaciones.

Al mapa Δ lo llamaremos **coproducto** y a ε **counidad**.

Ejemplo 1.2.2. Si definimos $\Delta_{\mathbb{k}} : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k} \otimes \mathbb{k}$ como $\Delta_{\mathbb{k}}(k) = k \otimes 1 = 1 \otimes k$ y $\varepsilon_{\mathbb{k}} = Id_{\mathbb{k}}$, resulta que $(\mathbb{k}, \Delta_{\mathbb{k}}, \varepsilon_{\mathbb{k}})$ es una \mathbb{k} -coálgebra.

Veamos que $\Delta_{\mathbb{k}}$ cumple con el diagrama de asociatividad,
 $(\Delta_{\mathbb{k}} \otimes Id_{\mathbb{k}})\Delta_{\mathbb{k}}(k) = (\Delta_{\mathbb{k}} \otimes Id_{\mathbb{k}})(k \otimes 1) = \Delta_{\mathbb{k}}(k) \otimes 1 = k \otimes 1 \otimes 1,$
 $(Id_{\mathbb{k}} \otimes \Delta_{\mathbb{k}})\Delta_{\mathbb{k}}(k) = (Id_{\mathbb{k}} \otimes \Delta_{\mathbb{k}})(k \otimes 1) = k \otimes \Delta_{\mathbb{k}}(1) = k \otimes 1 \otimes 1.$

Se procede de forma similar para probar la conmutatividad de los diagramas de counidad, concluyendo que \mathbb{k} es una \mathbb{k} -coálgebra.

Ejemplo 1.2.3. Sean $p, q \in \mathbb{k}[x]$ y $k \in \mathbb{k}$, definimos $\Delta_{\mathbb{k}[x]}(x^n) := \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i}$
y $\varepsilon_{\mathbb{k}[x]}(p) = p(0)$ extendiendo por linealidad; resulta que $(\mathbb{k}[x], \Delta_{\mathbb{k}[x]}, \varepsilon_{\mathbb{k}[x]})$ es una \mathbb{k} -coálgebra.

Comencemos por la conmutatividad del diagrama de coasociatividad,

$$\begin{aligned} (\Delta_{\mathbb{k}[x]} \otimes Id_{\mathbb{k}[x]})\Delta_{\mathbb{k}[x]}(x^n) &= (\Delta_{\mathbb{k}[x]} \otimes Id_{\mathbb{k}[x]}) \left(\sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i} \right) = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} \Delta_{\mathbb{k}[x]}(x^i) \otimes x^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^{j=n} \binom{n}{i} \binom{i}{j} (x^j \otimes x^{i-j}) \otimes x^{n-i}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (Id_{\mathbb{k}[x]} \otimes \Delta_{\mathbb{k}[x]})\Delta_{\mathbb{k}[x]}(x^n) &= (Id_{\mathbb{k}[x]} \otimes \Delta_{\mathbb{k}[x]}) \left(\sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i} \right) = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} x^i \otimes \Delta_{\mathbb{k}[x]}(x^{n-i}) = \\ &= \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^{j=n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} x^i \otimes (x^j \otimes x^{n-i-j}). \end{aligned}$$

Si reetiquetamos la primera ecuación con $n = r + s + t$, $i = s + t$ y $j = t$ y la segunda con $n = r + s + t$, $i = t$ y $j = s$ obtenemos que

$$\begin{aligned} (\Delta_{\mathbb{k}[x]} \otimes Id_{\mathbb{k}[x]})\Delta_{\mathbb{k}[x]}(x^n) &= \sum_{\substack{r+s+t=0 \\ r,s,t \geq 0}} \binom{r+s+t}{s+t} \binom{s+t}{t} x^t \otimes x^s \otimes x^r \text{ y que,} \\ (Id_{\mathbb{k}[x]} \otimes \Delta_{\mathbb{k}[x]})\Delta_{\mathbb{k}[x]}(x^n) &= \sum_{\substack{r+s+t=0 \\ r,s,t \geq 0}} \binom{r+s+t}{t} \binom{r+s}{s} x^t \otimes x^s \otimes x^r. \end{aligned}$$

Considerando la igualdad combinatoria (1.1), concluimos que ambas expresiones son iguales.

Resta probar la conmutatividad de los diagramas de la counidad,

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{\mathbb{k}[x]} \otimes Id_{\mathbb{k}[x]})\Delta_{\mathbb{k}[x]}(x^n) &= (\varepsilon_{\mathbb{k}[x]} \otimes Id_{\mathbb{k}[x]}) \left(\sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i} \right) = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} x^i \varepsilon_{\mathbb{k}[x]}(x^i) \otimes x^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} x^i(0) \otimes x^{n-i} = \binom{n}{0} x^0(0) \otimes x^{n-0} = 1 \otimes x^n = \lambda(x^n). \end{aligned}$$

Si procedemos de forma análoga a lo anterior, obtenemos que

$$(Id_{\mathbb{k}[x]} \otimes \varepsilon_{\mathbb{k}[x]})\Delta_{\mathbb{k}[x]}(x^n) = \rho(x^n),$$

probando la coasociatividad.

A continuación daremos otro coproducto en polinomios que nos será útil más adelante.

Ejemplo 1.2.4. Sea $\mathbb{k}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios y sean $p, q \in \mathbb{k}[x]$ y $k \in \mathbb{k}$, definimos $\Delta'_{\mathbb{k}[x]}(x^n) = \sum_{i=0}^{i=n} x^i \otimes x^{n-i}$ y $\varepsilon_{\mathbb{k}[x]}(p) = p(0)$ extendiendo por linealidad, resulta que $(\mathbb{k}[x], \Delta'_{\mathbb{k}[x]}, \varepsilon_{\mathbb{k}[x]})$ es una \mathbb{k} -coálgebra.

Veamos que el diagrama de coasociatividad conmuta,

$$\begin{aligned} (\Delta'_{\mathbb{k}[x]} \otimes Id_{\mathbb{k}[x]})\Delta'_{\mathbb{k}[x]}(x^n) &= (\Delta'_{\mathbb{k}[x]} \otimes Id_{\mathbb{k}[x]}) \left(\sum_{i=0}^{i=n} x^i \otimes x^{n-i} \right) = \sum_{i=0}^{i=n} \Delta'_{\mathbb{k}[x]}(x^i) \otimes x^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^{j=n} (x^j \otimes x^{i-j}) \otimes x^{n-i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Id_{\mathbb{k}[x]} \otimes \Delta'_{\mathbb{k}[x]})\Delta'_{\mathbb{k}[x]}(x^n) &= (Id_{\mathbb{k}[x]} \otimes \Delta'_{\mathbb{k}[x]})(\sum_{i=0}^{i=n} x^i \otimes x^{n-i}) = \sum_{i=0}^{i=n} x^i \otimes \Delta'_{\mathbb{k}[x]}(x^{n-i}) = \\
&= \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^{j=n-i} x^i \otimes (x^j \otimes x^{n-i-j}).
\end{aligned}$$

Ambas expresiones son iguales porque son de la forma $\sum_{n=r+s+t} x^r \otimes x^s \otimes x^t$.

Veamos ahora que los diagramas de counidad conmutan,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{\mathbb{k}[x]} \otimes Id_{\mathbb{k}[x]})\Delta'_{\mathbb{k}[x]}(x^n) &= (\varepsilon_{\mathbb{k}[x]} \otimes Id_{\mathbb{k}[x]})(\sum_{i=0}^{i=n} x^i \otimes x^{n-i}) = \sum_{i=0}^{i=n} \varepsilon_{\mathbb{k}[x]}(x^i) \otimes x^{n-i} = \\
&= \sum_{i=0}^{i=n} x^i(0) \otimes x^{n-i} = x^0(0) \otimes x^{n-0} = 1 \otimes x^n = \lambda(x^n).
\end{aligned}$$

Con $(Id_{\mathbb{k}[x]} \otimes \varepsilon_{\mathbb{k}[x]})\Delta'_{\mathbb{k}[x]}(x^n)$ procedemos de forma análoga a lo anterior, probando la coasociatividad.

Ejemplo 1.2.5. Sea $\mathbb{k}G$ como en el Ejemplo 1.1.6., consideremos ahora $g \in G$ y definamos a $\Delta_{\mathbb{k}G}$ como $\Delta_{\mathbb{k}G}(g) = g \otimes g$ extendido por linealidad y $\varepsilon_{\mathbb{k}G}$ como $\varepsilon_{\mathbb{k}G}(g) = 1_{\mathbb{k}} = 1$; resulta que $(\mathbb{k}G, \Delta_{\mathbb{k}G}, \varepsilon_{\mathbb{k}G})$ es una coálgebra.

Es fácil probar que $\Delta_{\mathbb{k}G}$ hace conmutar el diagrama de coasociatividad, basta con mostrarlo en los elementos de la base:

$$\begin{aligned}
(\Delta_{\mathbb{k}G} \otimes Id_{\mathbb{k}G})\Delta_{\mathbb{k}G}(g) &= (\Delta_{\mathbb{k}G} \otimes Id_{\mathbb{k}G})(g \otimes g) = \Delta_{\mathbb{k}G}(g) \otimes g = g \otimes g \otimes g = \\
&= g \otimes \Delta_{\mathbb{k}G}(g) = Id_{\mathbb{k}G}(g) \otimes \Delta_{\mathbb{k}G}(g) = (Id_{\mathbb{k}G} \otimes \Delta_{\mathbb{k}G})\Delta_{\mathbb{k}G}(g).
\end{aligned}$$

Trivialmente se puede probar que los diagramas de counidad conmutan, resultando que $(\mathbb{k}G, \Delta_{\mathbb{k}G}, \varepsilon_{\mathbb{k}G})$ es una coálgebra.

Considerando que $\Delta_{\mathbb{k}G}(g) = g \otimes g$ con $g \in G$, cuando tenemos (C, Δ, ε) una coálgebra y $c \in C$ tal que $\Delta(c) = c \otimes c$, se dice que c es de tipo grupo.

Ejemplo 1.2.6. El álgebra tensorial definida en el Ejemplo 1.1.8 es una coálgebra; para definir el coproducto, necesitamos la siguiente definición:

Sea S_n el conjunto de permutaciones de $\{1, \dots, n\}$. Decimos que $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n)) \in S_n$ es un **(p,n-p)-shuffle** o **(p,n-p)-barajamiento** si

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(p) \quad \text{y} \quad \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \dots < \sigma(n).$$

Al conjunto de (p,n-p)-shuffles lo escribimos $shf(p, n-p)$.

Definimos el coproducto en $T(V)$ como:

$$\Delta_{T(V)}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{\sigma \in shf(p, n-p)} (x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(p)}) \otimes (x_{\sigma(p+1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}).$$

Observamos que si $\sigma \in shf(0, n)$ o $\sigma \in shf(n, 0)$, σ es la identidad. En estos casos los sumandos correspondientes a $p=0$ y a $p=n$ son $1 \otimes (x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$ y $(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \otimes 1$ respectivamente.

Si $v = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$, para $n=3$ y $\sigma \in S_3$ tenemos que

- si $p=0$; $shf(0, 3) = \{Id\}$
- si $p=1$; $shf(1, 2) = \{\sigma \in S_3 : \sigma(2) < \sigma(3)\} = \{Id, (2, 1, 3), (3, 1, 2)\}$

- si $p = 2$; $shf(2, 1) = \{\sigma \in S_3 : \sigma(1) < \sigma(2)\} = \{Id, (2, 3, 1), (1, 3, 2)\}$
- si $p = 3$; $shf(3, 0) = \{Id\}$.

Para este caso tenemos que

$$\Delta_{T(V)}(v) = \Delta_{T(V)}(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = 1 \otimes (x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) + x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3) + x_2 \otimes (x_1 \otimes x_3) + x_3 \otimes (x_1 \otimes x_2) + (x_1 \otimes x_2) \otimes x_3 + (x_2 \otimes x_3) \otimes x_1 + (x_1 \otimes x_3) \otimes x_2 + (x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \otimes 1.$$

$$\text{Sea } v \in V^{\otimes n}, \text{ la counidad la definimos como } \varepsilon(v) = \begin{cases} Id_{\mathbb{k}}(v) & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Con estas definiciones de coproducto y counidad el álgebra tensorial resulta ser una \mathbb{k} -coálgebra.

Se puede dar una prueba del tipo combinatorio, pero más adelante probaremos que es isomorfa a otra \mathbb{k} -coálgebra, simplificando la demostración (Ejemplo 4.2.9).

Definición 1.2.7. Sean $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ y $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ dos \mathbb{k} -coálgebras, **un morfismo de \mathbb{k} -coálgebras** es una transformación lineal $f : C \rightarrow D$, tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & D \\ \Delta_C \downarrow & & \downarrow \Delta_D \\ C \otimes C & \xrightarrow{f \otimes f} & D \otimes D \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & D \\ & \searrow \varepsilon_C & \downarrow \varepsilon_D \\ & & \mathbb{k} \end{array}.$$

Llamaremos $\text{Coalg}_{\mathbb{k}}$ a la categoría cuyos objetos son \mathbb{k} -coálgebras y cuyos morfismos son morfismos de \mathbb{k} -coálgebras.

Notación 1.2.8. Es práctico introducir la **notación de Sweedler** para el coproducto; sea (C, Δ, ε) una coálgebra y $a \in C$, entonces $\Delta(a) = \sum_{i \in I} a_1^i \otimes a_2^i$, con I conjunto finito.

A veces prescindiremos del supraíndice i y nos queda una notación más sencilla:

$$\Delta(a) = \sum a_1 \otimes a_2.$$

Bajo la notación de Sweedler tenemos que

$$\begin{aligned} (Id_C \otimes \Delta) \circ \Delta(a) &= (Id_C \otimes \Delta) \left(\sum a_1 \otimes a_2 \right) = \sum a_1 \otimes \left(\sum (a_2)_1 \otimes (a_2)_2 \right) = \sum a_1 \otimes a_{21} \otimes a_{22} \\ (\Delta \otimes Id_C) \circ \Delta(a) &= (\Delta \otimes Id_C) \left(\sum a_1 \otimes a_2 \right) = \sum \left(\sum (a_1)_1 \otimes (a_1)_2 \right) \otimes a_2 = \sum a_{11} \otimes a_{12} \otimes a_2. \end{aligned}$$

Por la coasociatividad de Δ tenemos que $\sum a_1 \otimes a_{21} \otimes a_{22} = \sum a_{11} \otimes a_{12} \otimes a_2$, por lo que utilizaremos la siguiente notación para la comultiplicación,

$$\sum a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 := (Id_C \otimes \Delta) \circ \Delta(a) = (\Delta \otimes Id_C) \circ \Delta(a).$$

Análogamente, por asociatividad de μ generalmente escribimos abc para denotar

$$\mu \circ (Id \otimes \mu)(a \otimes b \otimes c) = a(bc) = abc = (ab)c = \mu \circ (\mu \otimes Id)(a \otimes b \otimes c).$$

Ejemplo 1.2.10. Bajo la notación de Sweedler la conmutatividad del diagrama de counidad queda

$$\begin{aligned} \lambda(a) &= (\varepsilon \otimes Id_C) \circ \Delta(a) = (\varepsilon \otimes Id_C) \circ \left(\sum a_1 \otimes a_2 \right) = \sum \varepsilon(a_1) \otimes a_2 \\ \rho(a) &= (Id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta(a) = (Id_C \otimes \varepsilon) \circ \left(\sum a_1 \otimes a_2 \right) = \sum a_1 \otimes \varepsilon(a_2). \end{aligned}$$

Obtenemos que,

$$a = \sum \varepsilon(a_1)a_2 = \sum a_1\varepsilon(a_2). \quad (1.2)$$

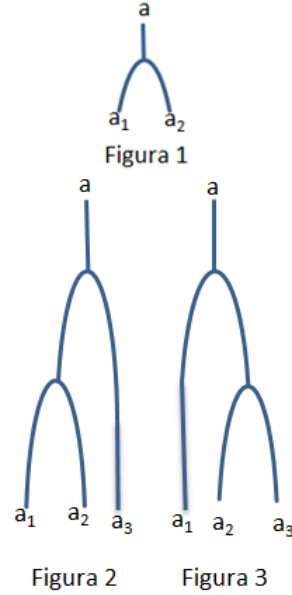
Observación 1.2.9. Las expresiones de la definición anterior están bien definidas por la asociatividad de μ y la coasociatividad de Δ . Veamos ejemplos para Δ y μ .

La Figura 1, simboliza si leemos de arriba hacia abajo que $\Delta(a) = \sum a_1 \otimes a_2$ y si leemos de abajo hacia arriba que $\mu(a_1 \otimes a_2) = a$.

Con esta idea, la Figura 2 representa, si leemos de arriba hacia abajo, que $(\Delta \otimes Id) \circ \Delta(a) = \sum a_1 \otimes a_2 \otimes a_3$, y si leemos de arriba hacia abajo que $\mu \circ (\mu \otimes Id)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = a$.

Y la Figura 3, si leemos de arriba hacia abajo, corresponde a $(Id \otimes \Delta) \circ \Delta(a) = \sum a_1 \otimes a_2 \otimes a_3$, y si leemos de arriba hacia abajo que $\mu \circ (Id \otimes \mu)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = a$.

Observemos que las Figuras 2 y 3 son equivalentes por coasociatividad de Δ y por asociatividad de μ si las leemos en el mismo sentido.



Observación 1.2.11. Sea $f : (C, \Delta_C, \varepsilon_C) \rightarrow (D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ un morfismo de cóalgebras; es decir que para todo $c \in C$ se cumple que $\varepsilon_D \circ f(c) = \varepsilon_C(c)$ y que $(f \otimes f) \circ \Delta_C(c) = \Delta_D \circ f(c)$. Veamos la última expresión bajo la notación de Sweedler:

$$(f \otimes f) \circ \Delta_C(c) = (f \otimes f) \left(\sum c_1 \otimes c_2 \right) = \sum f(c_1) \otimes f(c_2),$$

$$\Delta_D \circ f(c) = \sum f(c)_1 \otimes f(c)_2.$$

Por lo tanto se cumple que

$$\sum f(c_1) \otimes f(c_2) = \sum f(c)_1 \otimes f(c)_2.$$

Definición 1.2.12. Sean $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ y $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ dos \mathbb{k} -cóalgebras, definimos:

$$\Delta_{C \otimes D} : C \otimes D \rightarrow (C \otimes D)^{\otimes 2} \quad \text{como} \quad \Delta_{C \otimes D} = (Id_C \otimes \beta_{C,D} \otimes Id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D) \text{ y,}$$

$$\varepsilon_{C \otimes D} : C \otimes D \rightarrow \mathbb{k} \quad \text{como} \quad \varepsilon_{C \otimes D}(c \otimes d) = \varepsilon_C(c) \varepsilon_D(d), \quad \forall c \in C \text{ y } \forall d \in D.$$

Observación 1.2.13. Si utilizamos la notación de Sweedler en las definiciones anteriores para todo $c \in C$ y $\forall d \in D$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \Delta_{C \otimes D}(c \otimes d) &= (Id_C \otimes \beta_{C,D} \otimes Id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)(c \otimes d) = \\ &= (Id_C \otimes \beta_{C,D} \otimes Id_D) \circ (\Delta_C(c) \otimes \Delta_D(d)) = \\ &= (Id_C \otimes \beta_{C,D} \otimes Id_D) \left(\sum c_1 \otimes c_2 \otimes \sum d_1 \otimes d_2 \right) = \\ &= \sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2. \end{aligned}$$

Proposición 1.2.14. Sean $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ y $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ dos \mathbb{k} -cóalgebras, si tomamos los operadores de la definición anterior entonces $(C \otimes D, \Delta_{C \otimes D}, \varepsilon_{C \otimes D})$ es una \mathbb{k} -cóalgebra.

Demostración. Es claro que $C \otimes D$ es un \mathbb{k} e.v. Veamos que el coproducto $\Delta_{C \otimes D}$ hace conmutar el diagrama de coasociatividad,

$$\begin{array}{ccc} C \otimes D & \xrightarrow{\Delta_{C \otimes D}} & (C \otimes D)^{\otimes 2}. \\ \Delta_{C \otimes D} \downarrow & & \downarrow Id_{C \otimes D} \otimes \Delta_{C \otimes D} \\ (C \otimes D)^{\otimes 2} & \xrightarrow{\Delta_{C \otimes D} \otimes Id_{C \otimes D}} & (C \otimes D)^{\otimes 3} \end{array}$$

Para ello probaremos la siguiente igualdad $\forall c \in C$ y $\forall d \in D$;

$$(\Delta_{C \otimes D} \otimes Id_{C \otimes D}) \circ \Delta_{C \otimes D}(c \otimes d) = (Id_{C \otimes D} \otimes \Delta_{C \otimes D}) \circ \Delta_{C \otimes D}(c \otimes d).$$

Consideremos el primer miembro

$$\begin{aligned} (\Delta_{C \otimes D} \otimes Id_{C \otimes D}) \circ \Delta_{C \otimes D}(c \otimes d) &= (\Delta_{C \otimes D} \otimes Id_{C \otimes D})(\sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2) = \\ &= \sum c_{11} \otimes d_{11} \otimes c_{12} \otimes d_{12} \otimes c_2 \otimes d_2 = \\ &= \sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2 \otimes c_3 \otimes d_3. \end{aligned}$$

Ahora el segundo miembro

$$\begin{aligned} (Id_{C \otimes D} \otimes \Delta_{C \otimes D}) \circ \Delta_{C \otimes D}(c \otimes d) &= (Id_{C \otimes D} \otimes \Delta_{C \otimes D})(\sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2) = \\ &= \sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_{21} \otimes d_{21} \otimes c_{22} \otimes d_{22} = \\ &= \sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2 \otimes c_3 \otimes d_3. \end{aligned}$$

Ahora veamos que el diagrama de counidad $\varepsilon_{C \otimes D}$ conmuta.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{k} \otimes C \otimes D & \xleftarrow{\varepsilon_{C \otimes D} \otimes Id_{C \otimes D}} & (C \otimes D)^{\otimes 2} & \xrightarrow{Id_{C \otimes D} \otimes \varepsilon_{C \otimes D}} & C \otimes D \otimes \mathbb{k} \\ & \searrow \cong & \uparrow \Delta_{C \otimes D} & \swarrow \cong & \\ & \lambda_{C \otimes D} & C \otimes D & \rho_{C \otimes D} & \end{array}$$

Es decir que se verifiquen las siguientes identidades, considerando lo visto en el Ejemplo 1.2.10:

$$\sum (c \otimes d)_1 \varepsilon_{C \otimes D}((c \otimes d)_2) = c \otimes d = \sum \varepsilon_{C \otimes D}((c \otimes d)_1)(c \otimes d)_2.$$

Para verificar la primera identidad, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum (c \otimes d)_1 \varepsilon_{C \otimes D}((c \otimes d)_2) &= \sum (c_1 \otimes d_1) \varepsilon_{C \otimes D}(c_2 \otimes d_2) = \sum c_1 \otimes d_1 \varepsilon_C(c_2) \varepsilon_D(d_2) = \\ &= \sum c_1 \varepsilon_C(c_2) \otimes d_1 \varepsilon_D(d_2) = c \otimes d. \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene de aplicar el Ejemplo 1.2.10 a c y a d . Se procede de forma análoga con la segunda identidad. \square

Corolario 1.2.15. Si $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ es una \mathbb{k} -coálgebra entonces, $(C \otimes C, \Delta_{C \otimes C}, \varepsilon_{C \otimes C})$ es una \mathbb{k} -coálgebra.

Definición 1.2.16. Sea (C, Δ, ε) una \mathbb{k} -coálgebra, definimos $\Delta^{cop} = \beta \circ \Delta$ y a la terna $(C, \Delta^{cop}, \varepsilon)$ la escribiremos como C^{cop} .

De forma análoga a lo hecho para álgebras se prueba que:

Afirmación 1.2.17. Si (C, Δ, ε) es una \mathbb{k} -coálgebra, entonces C^{cop} es una \mathbb{k} -coálgebra, que llamaremos **coálgebra opuesta**.

Definición 1.2.18. Sean $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ y $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ dos \mathbb{k} -coálgebras. Sea $g : C \rightarrow D$ un mapa \mathbb{k} -lineal; decimos que **g es un antimorfismo de coálgebras** si cumple que: $(g \otimes g) \circ \Delta_C = \Delta_D^{cop} \circ g$ y que: $\varepsilon_D \circ g = \varepsilon_C$; es decir para todo $c, c' \in C$, $\sum g(c_1) \otimes g(c_2) = \sum g(c)_2 \otimes g(c)_1$, y $g(1_C) = 1_D$.

Observar que $g : C \rightarrow D$ es un antimorfismo de coálgebras si y sólo si $g : C \rightarrow D^{cop}$ es un morfismo de coálgebras, y también si y sólo si $g : C^{cop} \rightarrow D$ es un morfismo de coálgebras.

1.3. Biálgebras y producto de convolución

Para introducir el concepto de biálgebra, podemos exigir dos condiciones; la siguiente proposición tiene como fin mostrar que esas condiciones son equivalentes.

Proposición 1.3.1. *Sean $(B, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ una quintupla tal que (B, μ, u) es una \mathbb{k} -álgebra y (B, Δ, ε) es una \mathbb{k} -coálgebra, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I.- μ y u son morfismos de coálgebras.

II.- Δ y ε son morfismos de álgebras.

Demostración.

Sean $a, b \in B$; el producto μ es morfismo de coálgebras si y sólo si,

1. $\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ \Delta_{B \otimes B}$, es decir, si y sólo si
 $\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ ((Id \otimes \beta \otimes Id) \circ (\Delta \otimes \Delta)) =$
 $= ((\mu \otimes \mu) \circ (Id \otimes \beta \otimes Id)) \circ (\Delta \otimes \Delta) = \mu_{B \otimes B} \circ (\Delta \otimes \Delta)$ y,
2. $\varepsilon \circ \mu = \varepsilon_{B \otimes B}$, es decir $\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) \forall a, b \in B$.

La unidad u es morfismo de coálgebras si y sólo si,

3. $\Delta \circ u = u_{B \otimes B} \circ \Delta_{\mathbb{k}}$, es decir si $\Delta \circ u(1_{\mathbb{k}}) = 1_B \otimes 1_B = u_{B \otimes B}(1_{\mathbb{k}})$ y,
4. $\varepsilon \circ u = \varepsilon_{\mathbb{k}} = u_{\mathbb{k}}$, dado que $u_{\mathbb{k}} = \varepsilon_{\mathbb{k}} = Id_{\mathbb{k}}$.

Observar que estas condiciones, son las que debe cumplir el coproducto Δ (condiciones 1 y 3) y la counidad ε (condiciones 2 y 4) para ser morfismos de álgebras.

Por lo tanto, hemos probado que I y II son equivalentes. \square

Definición 1.3.2. *Una \mathbb{k} -biálgebra es una quintupla $(B, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ tal que:*

- (B, μ, u) es una \mathbb{k} -álgebra,
- (B, Δ, ε) es una \mathbb{k} -coálgebra y
- Δ y ε son morfismos de \mathbb{k} -álgebras ó equivalentemente, μ y u son morfismos de \mathbb{k} -coálgebras.

Diremos que B es una biálgebra cuando el cuerpo y las operaciones involucradas en la definición no presenten confusión.

Definición 1.3.3. *Sean $(B, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ y $(B', \mu', u', \Delta', \varepsilon')$ dos biálgebras, un morfismo de biálgebras es un mapa $f : B \rightarrow B'$ que es morfismo de álgebras y de coálgebras.*

Ejemplo 1.3.4. La quintupla $(\mathbb{k}G, \mu_{\mathbb{k}G}, u_{\mathbb{k}G}, \Delta_{\mathbb{k}G}, \varepsilon_{\mathbb{k}G})$ según los mapas definidos en los Ejemplos 1.1.6. y 1.2.5. es una \mathbb{k} -biálgebra.

Veamos que $\Delta_{\mathbb{k}G}$ y $\varepsilon_{\mathbb{k}G}$ son morfismos de álgebras; sean $g, h \in G$ y $1_{\mathbb{k}G} = e \in \mathbb{k}G$, entonces:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{k}G}(gg') &= gg' \otimes gg' = (g \otimes g')(g \otimes g') = \Delta_{\mathbb{k}G}(g)\Delta_{\mathbb{k}G}(g'), \text{ y} \\ \Delta_{\mathbb{k}G}(u_{\mathbb{k}G}(1_{\mathbb{k}})) &= \Delta_{\mathbb{k}G}(e) = e \otimes e = u_{\mathbb{k}G}(1_{\mathbb{k}}) \otimes u_{\mathbb{k}G}(1_{\mathbb{k}}) = u_{\mathbb{k}G \otimes \mathbb{k}G}(1_{\mathbb{k}}). \end{aligned}$$

Resta probar que $\varepsilon_{\mathbb{k}G}$ es un morfismo de álgebras:

$$\varepsilon_{\mathbb{k}G}(gh) = 1_{\mathbb{k}} = \varepsilon_{\mathbb{k}G}(g)\varepsilon_{\mathbb{k}G}(h), \quad \text{y} \quad \varepsilon_{\mathbb{k}G} \circ u_{\mathbb{k}G}(1_{\mathbb{k}}) = \varepsilon_{\mathbb{k}G}(e) = 1_{\mathbb{k}} = u_{\mathbb{k}}(1_{\mathbb{k}}).$$

Ejemplo 1.3.5. Si tomamos la quintupla $(\mathbb{k}[x], \mu_{\mathbb{k}[x]}, u_{\mathbb{k}[x]}, \Delta'_{\mathbb{k}[x]}, \varepsilon_{\mathbb{k}[x]})$ con las definiciones de los mapas dados en los Ejemplos 1.1.3. y 1.2.4. veamos que NO es una biálgebra.

Probaremos que $\Delta'_{\mathbb{k}[x]}$ NO es un morfismo de álgebras. Sean x^n y $x^m \in \mathbb{k}[x]$, entonces

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{k}[x] \otimes \mathbb{k}[x]} \circ (\Delta'_{\mathbb{k}[x]} \otimes \Delta'_{\mathbb{k}[x]})(x^n \otimes x^m) &= \mu_{\mathbb{k}[x] \otimes \mathbb{k}[x]} \left(\sum_{i=0}^{i=n} x^i \otimes x^{n-i} \otimes \sum_{j=0}^{j=m} x^j \otimes x^{m-j} \right) = \\ &= (\mu_{\mathbb{k}[x]} \otimes \mu_{\mathbb{k}[x]}) \circ (Id_{\mathbb{k}[x]} \otimes \beta \otimes Id_{\mathbb{k}[x]}) \left(\sum_{i=0}^{i=n} x^i \otimes x^{n-i} \otimes \sum_{j=0}^{j=m} x^j \otimes x^{m-j} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^{j=m} (\mu_{\mathbb{k}[x]} \otimes \mu_{\mathbb{k}[x]}) \circ (Id_{\mathbb{k}[x]} \otimes \beta \otimes Id_{\mathbb{k}[x]})(x^i \otimes x^{n-i} \otimes x^j \otimes x^{m-j}) = \\ &= \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^{j=m} (\mu_{\mathbb{k}[x]} \otimes \mu_{\mathbb{k}[x]})(x^i \otimes x^j \otimes x^{n-i} \otimes x^{m-j}) = \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^{j=m} (x^{i+j} \otimes x^{n+m-i-j}). \end{aligned}$$

La última expresión tiene $(m+1)(n+1)$ términos. Veamos la otra ecuación:

$$\Delta'_{\mathbb{k}[x]} \circ \mu_{\mathbb{k}[x]}(x^n \otimes x^m) = \Delta'_{\mathbb{k}[x]}(x^{n+m}) = \sum_{k=0}^{k=n+m} (x^k \otimes x^{n+m-k}).$$

La suma sólo tiene $m+n+1$ términos, por lo tanto las expresiones $\mu_{\mathbb{k}[x] \otimes \mathbb{k}[x]}(\Delta'_{\mathbb{k}[x]} \otimes \Delta'_{\mathbb{k}[x]})$ y $\Delta'_{\mathbb{k}[x]} \mu_{\mathbb{k}[x]}$ no son iguales, concluyendo que $\Delta'_{\mathbb{k}[x]}$ no es un morfismo de \mathbb{k} -álgebras y la quintupla en este ejemplo no es una biálgebra.

Ejemplo 1.3.6. Sea ahora la quintupla $(\mathbb{k}[x], \mu_{\mathbb{k}[x]}, u_{\mathbb{k}[x]}, \Delta_{\mathbb{k}[x]}, \varepsilon_{\mathbb{k}[x]})$ con las operaciones dadas en el Ejemplo 1.1.3. y consideremos $\Delta_{\mathbb{k}[x]}$ definida según el Ejemplo 1.2.3. veamos que ahora si la quintupla es una biálgebra.

Probaremos que $\Delta_{\mathbb{k}[x]}$ es un morfismo de álgebras, omitiremos algunos cálculos, dado que ya fueron presentados en el ejemplo anterior,

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{k}[x] \otimes \mathbb{k}[x]} \circ (\Delta_{\mathbb{k}[x]} \otimes \Delta_{\mathbb{k}[x]})(x^n \otimes x^m) &= \mu_{\mathbb{k}[x] \otimes \mathbb{k}[x]} \left(\sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i} \otimes \sum_{j=0}^{j=m} \binom{m}{j} x^j \otimes x^{m-j} \right) = \\ &= \sum_{i,j=0}^{i=n, j=m} \binom{n}{i} \binom{m}{j} (x^{i+j} \otimes x^{n+m-i-j}). \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\Delta_{\mathbb{k}[x]} \circ \mu_{\mathbb{k}[x]}(x^n \otimes x^m) = \Delta_{\mathbb{k}[x]}(x^{n+m}) = \sum_{k=0}^{k=n+m} \binom{n+m}{k} (x^k \otimes x^{n+m-k}).$$

Entonces ambas expresiones serán iguales, si y sólo si,

$$\sum_{k=i+j} \binom{n}{i} \binom{m}{j} = \binom{n}{0} \binom{m}{k} + \dots + \binom{n}{k} \binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}.$$

Observar que $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} x^i$ y que $(1+x)^m = \sum_{j=0}^{j=m} \binom{m}{j} x^j$,

y como, $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$, obtenemos lo siguiente

$$\left(\sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{j=m} \binom{m}{j} x^j \right) = \sum_{k=0}^{k=n+m} \binom{n+m}{k} x^k.$$

Si calculamos el coeficiente del término x^k en la ecuación de la izquierda llegaremos a la igualdad que necesitamos.

Observemos que: $1_{\mathbb{k}[x]} = 1_{\mathbb{k}} \in \mathbb{k}$, entonces,

$$\Delta_{\mathbb{k}[x]}(1_{\mathbb{k}[x]}) = \sum_{i=0}^{i=0} \binom{0}{i} 1_{\mathbb{k}}^i \otimes 1_{\mathbb{k}}^{0-i} = 1 \otimes 1.$$

Es decir que probamos las condiciones para que $\Delta_{\mathbb{k}[x]}$ sea morfismo de álgebras.

Resta probar que $\varepsilon_{\mathbb{k}[x]}$ es un morfismo de álgebras. Sean $p, q \in \mathbb{k}[x]$ y $k \in \mathbb{k}$, entonces $\mu_{\mathbb{k}}(\varepsilon_{\mathbb{k}[x]} \otimes \varepsilon_{\mathbb{k}[x]})(p \otimes q) = \mu_{\mathbb{k}}(p(0) \otimes q(0)) = p(0)q(0) = pq(0) = \varepsilon_{\mathbb{k}[x]}(pq) = \varepsilon_{\mathbb{k}[x]}(\mu_{\mathbb{k}[x]}(p \otimes q))$ y, $\varepsilon_{\mathbb{k}[x]} \circ u_{\mathbb{k}[x]}(k) = \varepsilon_{\mathbb{k}[x]}(k) = k(0) = k = Id_{\mathbb{k}}(k) = u_{\mathbb{k}}(k)$.

Por lo tanto $(\mathbb{k}[x], \mu_{\mathbb{k}[x]}, u_{\mathbb{k}[x]}, \Delta_{\mathbb{k}[x]}, \varepsilon_{\mathbb{k}[x]})$ es una biálgebra.

Ejemplo 1.3.7. En el Ejemplo 1.6.12 veremos que $(\mathbb{k}[x], \mu'_{\mathbb{k}[x]}, u_{\mathbb{k}[x]}, \Delta'_{\mathbb{k}[x]}, \varepsilon_{\mathbb{k}[x]})$ con los mapas definidos en los Ejemplos 1.1.5 y 1.2.4, es también una biálgebra (aún más, será un álgebra de Hopf). Veremos en ese ejemplo que se obtiene como la biálgebra graduada dual de $(\mathbb{k}[x], \mu_{\mathbb{k}[x]}, u_{\mathbb{k}[x]}, \Delta_{\mathbb{k}[x]}, \varepsilon_{\mathbb{k}[x]})$.

Ejemplo 1.3.8. En el último capítulo veremos que $T(V)$ con las estructuras definidas en los Ejemplos 1.1.8 y 1.2.6 es una biálgebra. Si $\dim(V) = 1$ tenemos que $T(V)$ es isomorfa a $\mathbb{k}[x]$ como biálgebras. Veamos esto.

Sea $v \in V$ tal que $V = \mathbb{k}v$, se define el mapa $\phi : T(V) \rightarrow \mathbb{k}[x]$ como $\phi(v^{\otimes n}) = x^n$ extendido por linealidad.

Claramente ϕ es \mathbb{k} lineal y biyectiva. Probaremos que ϕ es un morfismo de álgebras y de coálgebras. Para la prueba es suficiente hacerlo sobre los elementos homogéneos.

Primero veamos que: $\phi \circ \mu_{T(V)} = \mu_{\mathbb{k}[x]} \circ (\phi \otimes \phi)$,

$$\begin{aligned} \phi \circ \mu_{T(V)}(v^{\otimes n} \otimes v^{\otimes m}) &= \phi(v^{\otimes n+m}) = x^{n+m} = x^n x^m = \mu_{\mathbb{k}[x]}(x^n \otimes x^m) = \\ &= \mu_{\mathbb{k}[x]}(\phi(v^{\otimes n}) \otimes \phi(v^{\otimes m})) = \mu_{\mathbb{k}[x]} \circ (\phi \otimes \phi)(v^{\otimes n} \otimes v^{\otimes m}). \end{aligned}$$

Tenemos que $\forall k \in \mathbb{k}$, $\phi \circ u_{T(V)}(k) = \phi(k) = k = u_{\mathbb{k}[x]}(k)$.

Resta probar que ϕ es un morfismo de coálgebras, comenzaremos por

$$\begin{aligned} (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{T(V)}(v^{\otimes n}) &= (\phi \otimes \phi) \left(\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \in shf(p, n-p)}} (v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)}) \otimes (v_{\sigma(p+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}) \right) = \\ &= \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \in shf(p, n-p)}} \phi(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)}) \otimes \phi(v_{\sigma(p+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}) = \\ &= \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \in shf(p, n-p)}} x^p \otimes x^{n-p}. \end{aligned}$$

Observar que existe una biyección entre $(p, n-p)$ shuffles y subconjuntos $P = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_p\} \subseteq [n]$ con su complemento $P^C = \{k_{p+1} < \cdots < k_n\} \subseteq [n]$. Por cada $\sigma \in (p, n-p)$ shuffle, se toma $P = \{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\}$ y $P^C = \{\sigma(p+1), \dots, \sigma(n)\}$ y recíprocamente dado $P = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_p\} \subseteq [n]$ se define $\sigma(1) = k_1, \dots, \sigma(p) = k_p$ y $\sigma(p+1) = k_{p+1}, \dots, \sigma(n) = k_n$. Se concluye que el cardinal de $(p, n-p)$ shuffles es $\binom{n}{p}$. Eso nos lleva

a la siguiente expresión:

$$(\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{T(V)}(v^{\otimes n}) = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} x^p \otimes x^{n-p} = \Delta_{\mathbb{k}[x]}(x^n) = \Delta_{\mathbb{k}[x]} \circ \phi(v^{\otimes n}).$$

Resta ver que $\varepsilon_{\mathbb{k}[x]} \circ \phi = \varepsilon_{T(V)}$.

$$\varepsilon_{\mathbb{k}[x]} \circ \phi(v^{\otimes n}) = \varepsilon_{\mathbb{k}[x]}(x^n) = x^n(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} = \varepsilon_{T(V)}(v^{\otimes n}).$$

Definición 1.3.9. Sean (A, μ, u) una \mathbb{k} -álgebra, (C, Δ, ε) una \mathbb{k} -coálgebra. Llamamos

$$Hom(C, A)_{\mathbb{k}} := \{f : C \rightarrow A, \text{ t.q } f \text{ es } \mathbb{k}\text{-lineal}\}.$$

Definimos un producto en $Hom(C, A)_{\mathbb{k}}$ llamado **producto de convolución** como la función:

$$conv : Hom(C, A)_{\mathbb{k}} \times Hom(C, A)_{\mathbb{k}} \rightarrow Hom(C, A)_{\mathbb{k}}, \text{ dada por:}$$

$$conv(f, g) := \underbrace{f * g}_{\text{notación}} = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta, \quad \forall f \text{ y } g \in Hom(C, A)_{\mathbb{k}}.$$

Escribiremos $Hom(C, A)$ en vez de $Hom(C, A)_{\mathbb{k}}$, de no existir confusión con el cuerpo que se está utilizando. A continuación veremos algunas propiedades básicas del producto de convolución.

Lema 1.3.10. El producto de convolución es asociativo y tiene neutro $u\varepsilon$.

Demostración.

Sea $f \in Hom(C, A)$, probaremos que: $f * u\varepsilon = u\varepsilon * f = f$. Sea $x \in C$,
 $f * u\varepsilon(x) = \mu(f \otimes u\varepsilon)\Delta(x) = \mu(f \otimes u\varepsilon)(\sum x_1 \otimes x_2) = \mu(\sum f(x_1) \otimes u\varepsilon(x_2)) =$
 $= \sum \mu(f(x_1) \otimes u(\varepsilon(x_2)1_{\mathbb{k}})) = \sum \varepsilon(x_2)\mu(f(x_1) \otimes u(1_{\mathbb{k}})).$

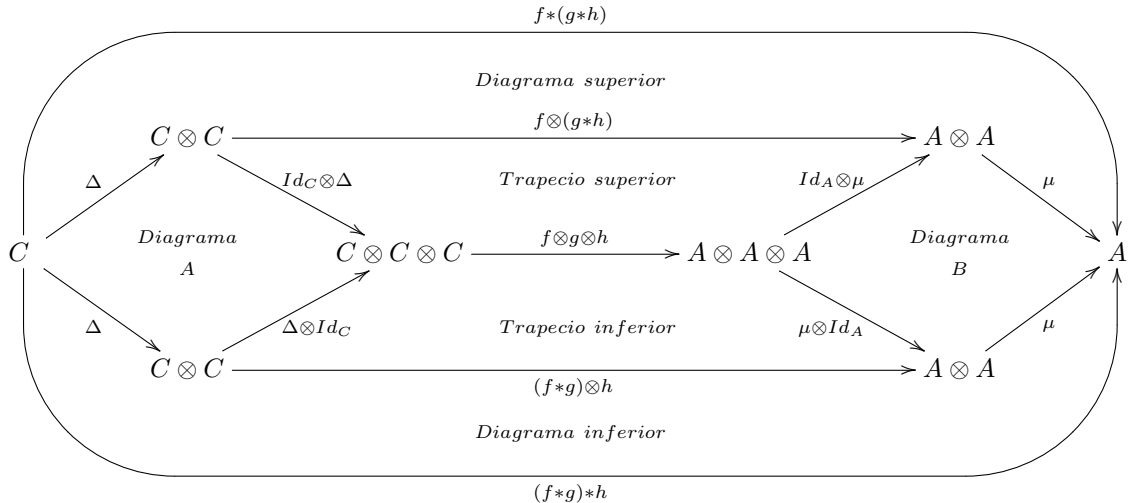
La última igualdad se debe a la linealidad de μ ; por la condición de unidad obtenemos que

$$\sum \varepsilon(x_2)f(x_1)1_A = \sum \varepsilon(x_2)f(x_1) = f(\sum \varepsilon(x_2)x_1) = f(x),$$

donde en la última igualdad utilizamos la condición de counidad.

Se procede de forma análoga con $u\varepsilon * f(x)$ obteniendo que es igual a $f(x)$.

Ahora probaremos la asociatividad del producto de convolución; para ello veamos el siguiente diagrama:



Si probamos que los subdiagramas interiores conmutan, los diagramas superior e inferior también, obteniendo de inmediato que el producto de convolución es asociativo.

Los Diagramas A y B conmutan, pues son los diagramas de coasociatividad y de asociatividad de Δ y μ respectivamente.

La asociatividad del producto tensorial explica la etiqueta de la flecha del centro $f \otimes g \otimes h$, observar que en realidad refiere a dos mapas, ellos son $f \otimes (g \otimes h)$ y $(f \otimes g) \otimes h$.

Por definición de producto de convolución los diagramas etiquetados como Trapecios superior e inferior conmutan. \square

1.4. Álgebras de Hopf y álgebras de Hopf graduadas

El objetivo en esta sección y la siguiente es probar que cierto tipo de biálgebras (graduadas y conexas), son álgebras de Hopf, estas álgebras son biálgebras con una estructura adicional (antípoda).

Definición 1.4.1. Si $(B, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ es una \mathbb{k} -biálgebra, e Id_B admite inversa S con respecto al producto de convolución definido en $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(B, B) = \text{End}_{\mathbb{k}}(B)$; es decir que $Id * S = S * Id = u\varepsilon$, diremos que:

- la séxtupla $(B, \mu, u, \Delta, \varepsilon, S)$ es una \mathbb{k} -álgebra de Hopf,
- y que la función S es la **antípoda**.

Veamos la condición de antípoda bajo la notación de Sweedler; sea $a \in B$:

$$\begin{aligned} Id * S(a) &= \mu(Id \otimes S)\Delta(a) = \mu(Id \otimes S)(\sum_i a_1 \otimes a_2) = \sum_i \mu(a_1 \otimes S(a_2)) = \sum a_1 S(a_2) \text{ y} \\ S * Id(a) &= \sum S(a_1)a_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la condición de antípoda es:

$$\sum a_1 S(a_2) = \sum S(a_1)a_2 = u\varepsilon(a). \quad (1.3)$$

Ejemplo 1.4.2. A continuación veremos que $(\mathbb{k}G, \mu, u, \Delta, \varepsilon, S_{\mathbb{k}G})$ es un álgebra de Hopf, con los operadores definidos en el Ejemplo 1.3.4 y la antípoda definida como la extensión lineal de $S_{\mathbb{k}G}(g) = g^{-1}$ para todo $g \in G$.

Veamos que $S_{\mathbb{k}G}$ satisface la condición de antípoda; para ésto basta con probarlo en los elementos de la base (G) . Para ello sea $g \in G$, entonces

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{k}G} * Id(g) &= \mu \circ (S_{\mathbb{k}G} \otimes Id) \circ \Delta(g) = \mu \circ (S_{\mathbb{k}G} \otimes Id)(g \otimes g) = \mu(S_{\mathbb{k}G}(g) \otimes Id(g)) = \\ &= \mu(g^{-1} \otimes g) = g^{-1}g = e. \end{aligned}$$

Y por otro lado $u\varepsilon(g) = u(1_{\mathbb{k}}) = e$, entonces $S_{\mathbb{k}G} * Id(g) = u\varepsilon(g)$ para todo $g \in G$. De forma análoga obtenemos que $Id * S_{\mathbb{k}G}(g) = u\varepsilon(g)$, por lo que $S_{\mathbb{k}G}$ es antípoda de $\mathbb{k}G$.

Definición 1.4.3. Sean H y B dos \mathbb{k} -álgebras de Hopf. El mapa $f : H \rightarrow B$ es un **morfismo de álgebras de Hopf** si es un morfismo de biálgebras.

Sería natural definir morfismo de álgebras de Hopf como morfismo de biálgebras que además preserve antípodas. En la siguiente proposición veremos que todo morfismo de biálgebras preserva antípodas.

Proposición 1.4.4. Sean $(H, \mu_H, u_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ y $(B, \mu_B, u_B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ dos álgebras de Hopf con antípodas S_H y S_B respectivamente. Entonces si $f : H \rightarrow B$ es un morfismo de biálgebras obtenemos que $S_B \circ f = f \circ S_H$.

Demostración. Consideremos el producto de convolución en $Hom(H, B)$ y los elementos $S_B \circ f$ y $f \circ S_H$ en ese anillo. Para probar que estos elementos son iguales, probaremos que uno es inverso a izquierda de f y el otro a derecha.

$$(S_B \circ f) * f = \mu_B \circ ((S_B \circ f) \otimes f) \circ \Delta_H = \mu_B \circ (S_B \otimes Id_B) \circ (f \otimes f) \circ \Delta_H = \mu_B \circ (S_B \otimes Id_B) \circ \Delta_B(f) = u_B \circ \varepsilon_B(f) = u_B \circ (\varepsilon_B \circ f) = u_B \circ \varepsilon_H.$$

En la expresión anterior utilizamos que f es un morfismo de coálgebras, es decir que $(f \otimes f) \circ \Delta_H = \Delta_B \circ f$ y que $\varepsilon_B \circ f = \varepsilon_H$. Por lo tanto $S_B \circ f$ es el inverso a izquierda de f con el producto de convolución en $Hom(H, B)$. Ahora trabajaremos en la otra expresión

$$f * (f \circ S_H) = \mu_B \circ (f \otimes (f \circ S_H)) \circ \Delta_H = \mu_B \circ (f \otimes f) \circ (Id_H \otimes S_H) \circ \Delta_H = f \circ \mu_H \circ (Id_H \otimes S_H) \circ \Delta_H = f \circ u_H \circ \varepsilon_H = (f \circ u_H) \circ \varepsilon_H = u_B \circ \varepsilon_H.$$

En esta última expresión utilizamos que f es un morfismo de álgebras, es decir que $\mu_B \circ (f \otimes f) = f \circ \mu_H$ y que $f \circ u_H = u_B$; concluyendo que $f \circ S_H$ es un inverso a derecha de f . \square

Para probar algunas propiedades de la antípoda será útil considerar el siguiente resultado.

Proposición 1.4.5. *Sea $(H, \mu, u, \Delta, \varepsilon, S)$ un álgebra de Hopf, entonces:*

- i. $S : H \rightarrow H$ es un antimorfismo de álgebras.
- ii. $S : H \rightarrow H$ es un antimorfismo de coálgebras.

Demostración.

i. Veamos que $S \circ u = u$. Para ello evaluemos la igualdad $S * Id = u\varepsilon$ en 1_H .

$$\begin{aligned} \text{El término de la izquierda queda} \\ (S * Id)(1_H) &= (\mu \circ (S \otimes Id) \circ \Delta)(1_H) = \mu \circ (S \otimes Id)(1_H \otimes 1_H) = \mu(S(1_H) \otimes 1_H) = S(1_H). \end{aligned}$$

Por otro lado, el término de la derecha queda $u \circ \varepsilon(1_H) = u(1_{\mathbb{k}}) = 1_H$. Por lo tanto $S(1_H) = 1_H$.

Para probar $S \circ \mu = \mu^{op} \circ (S \otimes S)$, consideremos los mapas $\nu, \rho \in Hom(H \otimes H, H)$ definidos de la siguiente manera $\nu := \mu^{op} \circ (S \otimes S)$ y $\rho := S \circ \mu$.

Escribiremos \otimes para el producto de convolución en $Hom(H \otimes H, H)$. Demostraremos que $\rho \otimes \mu = u\varepsilon_{H \otimes H} = \mu \otimes \nu$. Al ser $(Hom(H \otimes H, H), \otimes, u\varepsilon_{H \otimes H})$ un monoide con unidad se deduce que tanto ρ como ν son inversos de μ , por lo tanto $\rho = \nu$.

$$\begin{aligned} \text{Sean } a, b \in H \text{ entonces,} \\ (\rho \otimes \mu)(a \otimes b) &= \mu \circ (\rho \otimes \mu) \circ \Delta_{H \otimes H}(a \otimes b) = \mu \circ (\rho \otimes \mu) \left(\sum a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2 \right) = \\ &= \mu \circ ((S \circ \mu) \otimes \mu) \left(\sum a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2 \right) = \sum \mu(S(a_1 b_1) \otimes a_2 b_2) = \sum S(a_1 b_1) a_2 b_2. \end{aligned}$$

Como Δ y ε son morfismos de álgebras tenemos que $\sum (ab)_1 \otimes (ab)_2 = \sum a_1 b_1 \otimes a_2 b_2$ y $\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) = \varepsilon_{H \otimes H}(a \otimes b)$. Por lo tanto $(\rho \otimes \mu)(a \otimes b) = \sum S((ab)_1)(ab)_2 = u\varepsilon(ab) = u\varepsilon_{H \otimes H}(a \otimes b)$; entonces, $\rho \otimes \mu = u\varepsilon_{H \otimes H}$.

$$\begin{aligned} \text{Ahora veamos que } \mu \otimes \nu &= u\varepsilon_{H \otimes H}. \\ (\mu \otimes \nu)(a \otimes b) &= \mu \circ (\mu \otimes \nu) \circ \Delta_{H \otimes H}(a \otimes b) = \mu \circ (\mu \otimes \nu) \left(\sum a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2 \right) = \\ &= \sum \mu(a_1 b_1 \otimes \nu(a_2 \otimes b_2)) = \sum a_1 b_1 S(b_2) S(a_2), \end{aligned}$$

usando la condición de antípoda en b y luego en a obtenemos

$$\begin{aligned}\mu \circledast \nu(a \otimes b) &= \sum a_1 u \varepsilon(b) S(a_2) = \sum a_1 S(a_2) u \varepsilon(b) = u \varepsilon(a) u \varepsilon(b) = u(\varepsilon(a)) \varepsilon(b) u(1_{\mathbb{k}}) = \\ &= u(\varepsilon(a) \varepsilon(b)) = u_{H \otimes H}(a \otimes b).\end{aligned}$$

ii. Veamos primero que $\varepsilon \circ S = \varepsilon$. Observar que al ser ε morfismo de álgebras, en particular se cumple que $\varepsilon u = Id_{\mathbb{k}}$. Utilizando la condición de counidad y la linealidad de S tenemos que $S(a) = S(\sum a_1 \varepsilon(a_2)) = \sum S(a_1) \varepsilon(a_2)$. Aplicando ε y su linealidad a esta expresión obtenemos

$$\varepsilon(S(a)) = \varepsilon\left(\sum S(a_1) \varepsilon(a_2)\right) = \sum \varepsilon(S(a_1)) \varepsilon(a_2).$$

Como ε es un morfismo de álgebras obtenemos que

$$\varepsilon(S(a)) = \varepsilon\left(\sum S(a_1) a_2\right) = \varepsilon(u \varepsilon(a)) = (\varepsilon u)(\varepsilon(a)) = Id_{\mathbb{k}}(\varepsilon(a)),$$

es decir, $\varepsilon(S(a)) = \varepsilon(a)$ para todo $a \in H$.

Para probar que $\Delta \circ S = (S \otimes S) \circ \Delta^{cop}$ se procede en forma similar que en la parte anterior; como $Hom(H, H \otimes H)$ tiene un producto de convolución, lo escribiremos como \ast , resulta que $(Hom(H, H \otimes H), \ast, u_{H \otimes H} \varepsilon)$ es un monoide con unidad. Probaremos que en este monoide $\Delta \circ S$ es inverso a izquierda de Δ y que $(S \otimes S) \circ \Delta^{cop}$ es inverso a derecha de Δ , y por lo tanto son iguales. Para ello sean $\nu := \beta \circ (S \otimes S) \circ \Delta = (S \otimes S) \circ \Delta^{cop}$ y $\rho := \Delta \circ S$.

Comencemos por $\rho \ast \Delta$ con $a \in H$.

$$\begin{aligned}\rho \ast \Delta(a) &= \mu_{H \otimes H} \circ (\rho \otimes \Delta) \circ \Delta(a) = \mu_{H \otimes H} \circ (\rho \otimes \Delta) \left(\sum a_1 \otimes a_2\right) = \\ &= \sum \mu_{H \otimes H} \circ (\rho(a_1) \otimes \Delta(a_2)) = \sum \mu_{H \otimes H} \circ (\Delta S(a_1) \otimes \Delta(a_2)) = \\ &= \sum \mu_{H \otimes H} \circ (\Delta \otimes \Delta)(S(a_1) \otimes a_2),\end{aligned}$$

como Δ es un morfismo de álgebras obtenemos que

$$\rho \ast \Delta(a) = \sum (\Delta \circ \mu)(S(a_1) \otimes a_2) = \Delta\left(\sum S(a_1) a_2\right) = \Delta(u \varepsilon(a)),$$

en la última igualdad se usó la condición de antípoda. Además, como Δ es morfismo de álgebras, también cumple que $\Delta \circ u = (u \otimes u) \circ \Delta_{\mathbb{k}}$, entonces

$$\begin{aligned}\rho \ast \Delta(a) &= \Delta(u \varepsilon(a)) = (u \otimes u) \circ \Delta_{\mathbb{k}}(\varepsilon(a)) = (u \otimes u)(\varepsilon(a) 1_{\mathbb{k}} \otimes 1_{\mathbb{k}}) = \varepsilon(a) u(1_{\mathbb{k}}) \otimes u(1_{\mathbb{k}}) = \\ &= u_{H \otimes H}(\varepsilon(a)),\end{aligned}$$

la última igualdad es por definición de $u_{H \otimes H}$, por lo tanto $\rho \ast \Delta(a) = u_{H \otimes H} \varepsilon(a)$.

Ahora veamos $\Delta \ast \nu$ con $a \in H$:

$$\begin{aligned}\Delta \ast \nu(a) &= \mu_{H \otimes H} \circ (\Delta \otimes \nu) \circ \Delta(a) = \mu_{H \otimes H} \circ (\Delta \otimes ((S \otimes S) \circ \beta \circ \Delta)) \left(\sum a_1 \otimes a_2\right) = \\ &= \sum \mu_{H \otimes H} \circ (\Delta(a_1) \otimes ((S \otimes S) \circ \beta \circ \Delta)(a_2)) = \sum \mu_{H \otimes H}((a_1 \otimes a_2) \otimes (S(a_4) \otimes S(a_3))) = \\ &= \sum a_1 S(a_4) \otimes a_2 S(a_3),\end{aligned}$$

usando la condición de antípoda a la derecha de \otimes obtenemos que

$$\Delta \ast \nu(a) = \sum a_1 S(a_3) \otimes u \varepsilon(a_2) = \sum a_1 \varepsilon(a_2) S(a_3) \otimes u(1_{\mathbb{k}}) = \sum a_1 S(a_2) \otimes u(1_{\mathbb{k}}),$$

la última igualdad se debe a la Ecuación (1.2). Usando la condición de antípoda obtenemos que

$$\Delta \ast \nu(a) = u \varepsilon(a) \otimes u(1_{\mathbb{k}}) = \varepsilon(a) u(1_{\mathbb{k}}) \otimes u(1_{\mathbb{k}}) = u_{H \otimes H} \varepsilon(a). \quad \square$$

A continuación probaremos una proposición que nos será de utilidad en el próximo ejemplo.

Proposición 1.4.6. Sean $(H, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ una biálgebra, $S : H \rightarrow H$ un antimorfismo de álgebras y $v, w \in H$ tales que

$$(Id * S)(v) = (S * Id)(v) = u\varepsilon(v) \quad \text{y} \quad (Id * S)(w) = (S * Id)(w) = u\varepsilon(w), \quad \text{entonces}$$

$$(Id * S)(\mu(v \otimes w)) = (S * Id)(\mu(v \otimes w)) = u\varepsilon(\mu(v \otimes w)).$$

Demostración.

Consideremos la siguiente expresión $(Id * S)(\mu(v \otimes w)) = \mu \circ (Id \otimes S) \circ \Delta \circ \mu(v \otimes w)$, dado que Δ es un morfismo de álgebras, cumple que $\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ (Id \otimes \beta \otimes Id) \circ (\Delta \otimes \Delta)$, entonces

$$\begin{aligned} (Id * S)(\mu(v \otimes w)) &= \mu \circ (Id \otimes S) \circ (\mu \otimes \mu) \circ (Id \otimes \beta \otimes Id) \circ (\Delta(v) \otimes \Delta(w)) \\ &= \mu \circ (Id \otimes S) \circ (\mu \otimes \mu) \circ (Id \otimes \beta \otimes Id) \circ \left(\left(\sum v_1 \otimes v_2 \right) \otimes \left(\sum w_1 \otimes w_2 \right) \right) \\ &= \mu \circ (Id \otimes S) \left(\sum v_1 w_1 \otimes v_2 w_2 \right) = \mu \left(\sum v_1 w_1 \otimes S(v_2 w_2) \right). \end{aligned}$$

Como S es antimorfismo de álgebras obtenemos que

$$(Id * S)(\mu(v \otimes w)) = \sum v_1 w_1 S(w_2) S(v_2).$$

Dado que se cumple la condición de antípoda por hipótesis en v y w , y además u es lineal, obtenemos que

$$(Id * S)(\mu(v \otimes w)) = \sum v_1 \varepsilon(w) u(1_{\mathbb{k}}) S(v_2) = \sum v_1 S(v_2) \varepsilon(w) 1_H = \varepsilon(v) \varepsilon(w) 1_H.$$

Por último, como ε es un morfismo de álgebras, obtenemos que

$$(Id * S)(\mu(v \otimes w)) = \varepsilon(vw) 1_H = u(\varepsilon(vw)) = u\varepsilon(\mu(v \otimes w)).$$

Procediendo de forma análoga a lo anterior se obtiene que $(S * Id)(\mu(v \otimes w)) = u\varepsilon(\mu(v \otimes w))$, lo que demuestra la Proposición. \square

Ejemplo 1.4.7. Buscaremos la expresión de la antípoda del álgebra tensorial $T(V)$, utilizando los resultados anteriores.

Primero veamos que si $x \in \mathbb{k}$, como $S_{T(V)} \circ u = u = Id_{\mathbb{k}}$, resulta que $S_{T(V)}(x) = Id_{\mathbb{k}}(x) = x$.

Ahora sea $x \in V$ tal que $deg(x) = 1$ por lo que $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ y $\varepsilon(x) = 0$, ahora aplicaremos una de las condiciones de antípoda a x y deduciremos la expresión de $S_{T(V)}$ para elementos de grado 1.

$$\begin{aligned} 0 = u\varepsilon(x) &= \mu(Id \otimes S)\Delta(x) = \mu(Id \otimes S)(1 \otimes x + x \otimes 1) = \mu(1 \otimes S(x) + x \otimes S(1)) = \\ &= S(x) + x. \end{aligned}$$

Deducimos para este caso que $S_{T(V)}(x) = -x$. Lo mismo se deduce si aplicamos $S * Id = u\varepsilon$.

Todo elemento homogéneo en $T(V)$ de grado mayor a 1, es producto de elementos de grado 1; es decir que si $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$, tenemos que $x_1 \dots x_n = \mu(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in V^{\otimes n}$ es un elemento homogéneo de grado n . Dado que, de existir, la antípoda $S_{T(V)}$ debe ser un antimorfismo de álgebras, obtenemos que

$$\begin{aligned} S_{T(V)}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) &= S_{T(V)}(x_1 \dots x_n) = S_{T(V)}(x_n) \dots S_{T(V)}(x_1) = (-x_n) \otimes \dots \otimes (-x_1) \\ &= (-1)^n x_n \otimes \dots \otimes x_1. \end{aligned} \tag{1.4}$$

El argumento que resta brindar para afirmar que la expresión anterior es la antípoda de $T(V)$, es que la expresión anterior cumple con la condición de antípoda. Para ello es suficiente

observar que, por la Proposición 1.4.6, basta que se verifique la condición de antípoda en elementos de grado 1, dado que todo elemento de homogéneo de $T(V)$ es producto de elementos de grado 1 y dado que definimos $S_{T(V)}(x) = -x$ con $\deg(x) = 1$ para que cumpla la condición de antípoda, podemos afirmar que la expresión en (1.4) es la antípoda en $T(V)$.

Con el fin de definir biálgebras graduadas se presentarán algunos conceptos. Estas biálgebras, cumpliendo con condiciones adicionales, veremos que serán álgebras de Hopf, y además obtendremos una fórmula para la antípoda.

Definición 1.4.8.

- Un \mathbb{k} -espacio vectorial B se dice que **es graduado** si es suma directa de espacios vectoriales B_n ; $B = \bigoplus_{n \geq 0} B_n$.

Diremos que B_n es la componente homogénea de B de grado n , y si $a \in B_n$, diremos que a es **homogéneo de grado n** , y lo escribiremos como $\deg(a) = n$.

- Un mapa \mathbb{k} -lineal $f : A \rightarrow B$ entre dos \mathbb{k} espacios vectoriales graduados, es **graduado** si $f(A_n) \subset B_n \forall n$.
- Un espacio vectorial graduado B es **conexo** si $B_0 \cong \mathbb{k}$.

Observación 1.4.9. Observar que si $\{f_n : A_n \rightarrow B_n\}_{n \geq 0}$ es una familia de transformaciones lineales e $\iota_n^B : B_n \rightarrow B$ son las inclusiones $\forall n$, tenemos las composiciones $\iota_n^B \circ f_n : A_n \rightarrow B$ y por lo tanto el morfismo $f := \bigoplus_{n \geq 0} (\iota_n^B \circ f_n) : A \rightarrow B$. Es claro que f es un mapa graduado y abusando notación escribiremos $f = \bigoplus_{n \geq 0} f_n$.

Por otro lado, si $f : A \rightarrow B$ es un mapa graduado, podemos considerar los mapas lineales $f_n : A_n \rightarrow B_n$ definidos como $f_n = f \circ \iota_n^A$ y con la notación anterior tenemos que $f = \bigoplus_{n \geq 0} f_n$.

Por lo tanto es equivalente dar $f : A \rightarrow B$ transformación lineal graduada a dar una familia $\{f_n : A_n \rightarrow B_n\}_{n \geq 0}$ de transformaciones lineales.

Ejemplo 1.4.10. Al espacio vectorial graduado cuya componente en grado 0 es \mathbb{k} y el resto de las componentes son nulas lo notaremos como \mathbb{K} . Es decir que $\mathbb{K}_0 = \mathbb{k}$ y que $\mathbb{K}_n = 0, \forall n > 0$.

Observar que \mathbb{K} resulta un espacio vectorial graduado conexo.

Observación 1.4.11. Sean $B = \bigoplus_{n \geq 0} B_n$ y $C = \bigoplus_{n \geq 0} C_n$ dos espacios vectoriales graduados; una posible graduación para $B \otimes C$ es

$$B \otimes C = \bigoplus_{n \geq 0} (B \otimes C)_n \quad \text{con} \quad (B \otimes C)_n = \bigoplus_{i+j=n} B_i \otimes C_j.$$

Definición 1.4.12. Al espacio vectorial $B \otimes C$ con esta graduación la escribiremos como $B \bullet C$ y lo llamaremos **producto de Cauchy**.

Observación 1.4.13.

- En particular, si $B = C$, tenemos que

$$B \bullet B = \bigoplus_{n \geq 0} (B \bullet B)_n = \bigoplus_{n \geq 0} \left(\bigoplus_{i+j=n} B_i \otimes B_j \right).$$

- Sea $B = \bigoplus_{n \geq 0} B_n$ un espacio vectorial graduado, observar que:

$$B \bullet \mathbb{K} = \bigoplus_{\substack{n=s+t \\ n \geq 0}} B_s \otimes \mathbb{K}_t = \bigoplus_{n \geq 0} (B_n \otimes \mathbb{K}_0) = \left(\bigoplus_{n \geq 0} B_n \right) \otimes \mathbb{K}_0 = B \otimes \mathbb{k}.$$

- De ahora en adelante si no hay lugar a confusión escribiremos al espacio vectorial graduado \mathbb{K} como \mathbb{k} .
- Si V es un espacio vectorial los isomorfismos $\lambda_V : V \rightarrow \mathbb{k} \otimes V$ y $\rho_V : V \rightarrow V \otimes \mathbb{k}$, pueden extenderse a espacios vectoriales graduados. Es decir, que si $B = \bigoplus_{n \geq 0} B_n$ es un espacio vectorial graduado, los isomorfismos anteriores pueden ser vistos como:

- $\lambda_B : B \rightarrow \mathbb{k} \bullet B$ como $\lambda_B = \bigoplus_{n \geq 0} \lambda_{B_n}$ con $\lambda_{B_n} : B_n \rightarrow \mathbb{k} \otimes B_n$ y
- $\rho_B : B \rightarrow B \bullet \mathbb{k}$ como $\rho_B = \bigoplus_{n \geq 0} \rho_{B_n}$ con $\rho_{B_n} : B_n \rightarrow B_n \otimes \mathbb{k}$.

Definición 1.4.14. *Un álgebra (A, μ, u) es graduada si A es un espacio vectorial graduado y si los mapas μ y u son graduados, vistos como $\mu : A \bullet A \rightarrow A$ y $u : \mathbb{K} \rightarrow A$.*

Explícitamente, si $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ y teniendo en cuenta el ejemplo y la observación anterior, esto es que $\mu(A_n \otimes A_m) \subseteq A_{n+m}$, y que $u(\mathbb{k}) \subseteq A_0$.

De forma análoga, una coálgebra (C, Δ, ε) es graduada si C es un espacio vectorial graduado y si los mapas Δ y ε son graduados, vistos como $\Delta : C \rightarrow C \bullet C$ y $\varepsilon : C \rightarrow \mathbb{K}$.

Explícitamente, si $C = \bigoplus_{n \geq 0} C_n$, esto es que $\Delta(C_n) \subseteq \bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes C_j$, y que $\varepsilon(C_n) = 0 \forall n > 0$ y que $\varepsilon(C_0) \subseteq \mathbb{k}$.

Una biálgebra es graduada si es álgebra y coálgebra graduada. Diremos que un álgebra de Hopf es graduada si es una biálgebra graduada y la antípoda es un mapa graduado.

Notación 1.4.15. Observar que en la definición anterior todos los mapas son transformaciones lineales, teniendo en cuenta la Observación 1.4.9 introduciremos la notación para las componentes de esos mapas.

Sea $l \in \mathbb{N}$, como $(A \bullet A)_l = \bigoplus_{l=m+n} A_n \otimes A_m$, y como $\mu : A \bullet A \rightarrow A$, escribiremos μ_l a la componente l del mapa μ , es decir, será el mapa $\mu_l : \bigoplus_{l=m+n} A_n \otimes A_m \rightarrow A_l$, a su vez podemos pensar este mapa como $\mu_l := \bigoplus_{l=m+n} \mu_{n,m}$, donde $\mu_{n,m} : A_n \otimes A_m \rightarrow A_l$, donde $l = m + n$, por lo que el mapa μ se puede escribir como $\mu = \bigoplus_{\substack{l \geq 0 \\ l=m+n}} \mu_{n,m}$.

Análogamente $\Delta_l : A_l \rightarrow \bigoplus_{l=m+n} A_n \otimes A_m$ es la componente l de Δ y podemos escribirla como $\Delta_l = \bigoplus_{l=m+n} \Delta_{n,m}$ con $\Delta_{n,m} : A_l \rightarrow A_n \otimes A_m$.

Al coproducto lo podemos escribir como $\Delta = \bigoplus_{\substack{l \geq 0 \\ l=m+n}} \Delta_{n,m}$.

Por último, dado que $(\mathbb{K})_n = 0$ con $n \neq 0$, tiene sentido sólo considerar la componente cero de u y ε , es decir $u_0 : \mathbb{k} \rightarrow A_0$ y $\varepsilon_0 : A_0 \rightarrow \mathbb{k}$, dado que en las otras componentes valen cero.

Si no hay lugar a confusión prescindiremos de los subíndices.

Observación 1.4.16. Sea $(B, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ una biálgebra graduada conexas.

1. Entonces el mapa $u_0 : \mathbb{k} \rightarrow B_0$ es un isomorfismo cuyo inverso es $\varepsilon|_{B_0} : B_0 \rightarrow \mathbb{k}$. En particular $u \circ \varepsilon|_{B_0} = Id_{B_0}$.

Para probar lo anterior recordar que, como ε es morfismo de álgebras, tenemos que $(\varepsilon \circ u)_0 = Id_{\mathbb{k}}$ y por lo tanto $u \neq 0$. Entonces $0 < \dim(Im(u_0)) \leq \dim(B_0) = 1$. De lo cual se deduce que $u_0 : \mathbb{k} \rightarrow B_0$ es sobreyectiva y, como $\dim_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}) = \dim_{\mathbb{k}}(B_0) = 1$, es un isomorfismo. Más aún, como $\varepsilon|_{B_0} \circ u = Id_{\mathbb{k}}$, su inverso es $\varepsilon|_{B_0}$.

2. Además, dado que ε es un mapa graduado y que $\varepsilon|_{B_0}$ es un isomorfismo, tenemos que

$$Ker(\varepsilon) = \bigoplus_{n \geq 1} B_n.$$

Lema 1.4.17. Sea $(B, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ una biálgebra graduada conexas. Si existe antípoda S , entonces S es un mapa graduado. Es decir, B es un álgebra de Hopf graduada.

Demostración. Probaremos por inducción en n .

Para $n = 0$, como $B_0 = Im(u)$ y al ser S antimorfismo de álgebras se tiene que $S \circ u = u$ concluimos que $S(B_0) \subseteq B_0$.

Ahora sea $n > 0$, supondremos que $S(B_i) \subseteq B_i$ para todo $i < n$ y sea $0 \neq a \in B_n$. Como Δ es un mapa graduado y $\dim(B_0) = 1$ tenemos que

$$\Delta(a) = v \otimes 1_B + z \text{ con } z \in \bigoplus_{i=0}^{i=n-1} B_i \otimes B_{n-i}.$$

Aplicando $Id \otimes \varepsilon$ a la expresión anterior y recordando que ε es un mapa graduado se deduce que $v = a$ y por lo tanto $\Delta(a) = a \otimes 1_B + z$. Nuevamente, como ε es un mapa graduado y $deg(a) > 0$, $u\varepsilon(a) = 0$ y por lo tanto

$$0 = u\varepsilon(a) = S * Id(a) = S(a) + \mu(S \otimes Id)(z).$$

Entonces $S(a) = -\mu(S \otimes Id)(z)$ y como $z \in \bigoplus_{i=0}^{i=n-1} B_i \otimes B_{n-i}$ y μ es un mapa graduado, usando la hipótesis inductiva tenemos que $\mu(S(B_i) \otimes B_{n-i}) \subseteq \mu(B_i \otimes B_{n-i}) \subseteq B_n$. Entonces $S(a) \in B_n$. \square

1.5. Fórmula de Takeuchi para la antípoda

En esta sección probaremos que toda biálgebra graduada conexa tiene antípoda, y por lo tanto es una álgebra de Hopf. Existen varias formas de probarlo, en este trabajo se optó por presentar la fórmula de Takeuchi, ya que no sólo prueba la existencia de la antípoda sino que además brinda una fórmula.

Primero presentaremos algunos resultados necesarios para comprender dicha fórmula.

Definición 1.5.1. Sea $(B, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ una biálgebra. La asociatividad de μ y la coasociatividad de Δ nos permiten realizar las siguientes definiciones,

- el **producto iterado** es el mapa $\mu^k : B^{\otimes k+1} \rightarrow B$ definido como $\mu^k := \mu \circ (Id_B \otimes \mu^{k-1}) = \mu \circ (\mu^{k-1} \otimes Id_B) : B^{\otimes k} \rightarrow B$, con $\mu^0 = Id_B$, y $\mu^{-1} = u$,
- el **coproducto iterado** es el mapa $\Delta^{k-1} : B \rightarrow B^{\otimes k}$ definido como $\Delta^k := (Id_B \otimes \Delta^{k-1}) \circ \Delta = (\Delta^{k-1} \otimes Id_B) \circ \Delta$, con $\Delta^0 = Id_B$ y $\Delta^{-1} = \varepsilon$.

Observación 1.5.2.

Si $B = \bigoplus_{i \geq 0} B_i$ es una biálgebra graduada observar que los mapas $\mu^k : B^{\bullet k+1} \rightarrow B$ y $\Delta^k : B \rightarrow B^{\bullet k+1}$ son mapas graduados. Esto es porque son composición de mapas graduados y porque

$$(B^{\bullet k+1})_n = \bigoplus_{i_1 + \dots + i_{k+1} = n} B_{i_1} \otimes \dots \otimes B_{i_{k+1}} \quad \text{entonces,}$$

$$\mu^k(B_{i_1} \otimes \dots \otimes B_{i_{k+1}}) \subseteq B_{i_1 + \dots + i_{k+1}} = B_n \quad \text{y} \quad \Delta^k(B_n) \subseteq \bigoplus_{i_1 + \dots + i_{k+1} = n} B_{i_1} \otimes \dots \otimes B_{i_{k+1}}.$$

Lema 1.5.3. Sean $(B, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ una biálgebra, $f \in \text{End}(B)$ y $*$ el producto de convolución. Entonces $f^{*k} = \underbrace{f * \dots * f}_{k \text{ veces}} = \mu^{k-1} \circ f^{\otimes k} \circ \Delta^{k-1}$ con $k \in \mathbb{N}$, donde $f^{\otimes 0} = Id_B$ y $f^{\otimes 1} = f$.

Demostración.

Haremos la prueba por inducción en n .

$$\text{Para } k = 1, f^{*1} = \mu^0 \circ f^{\otimes 1} \circ \Delta^0 = Id_B \circ f \circ Id_B = f.$$

Ahora supongamos que se cumple para todo $k \leq n$.

$f^{*(n+1)} = f * f^{*n} = \mu \circ (f \otimes f^{*n}) \circ \Delta$; usando la hipótesis inductiva obtenemos que

$$\begin{aligned} f^{*(n+1)} &= \mu \circ (f \otimes (\mu^{n-1} \circ f^{\otimes n} \circ \Delta^{n-1})) \circ \Delta = \mu \circ (f \otimes (\mu^{n-1} \circ f^{\otimes n})) \circ (Id_B \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta = \\ &= \mu \circ (Id_B \otimes \mu^{n-1}) \circ (f \otimes f^{\otimes n}) \circ (Id_B \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta, \end{aligned}$$

y como $\Delta^n = (Id_B \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta$ y $\mu^n = \mu \circ (Id_B \otimes \mu^{n-1})$, obtenemos que

$$f^{*(n+1)} = \mu^n \circ f^{\otimes n+1} \circ \Delta^n. \quad \square$$

Definición 1.5.4. Sean $(B, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ una biálgebra, $*$ el producto de convolución y $f \in \text{End}(B)$, decimos que f es **localmente nilpotente** si dado $v \in B$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{*m}(v) = 0$, $\forall m > n$.

Lema 1.5.5. *Sea $B = \bigoplus B_n$ una biálgebra graduada y conexa y $f \in \text{End}(B)$ tal que $f|_{B_0} = 0$, entonces f es localmente nilpotente.*

Demostración.

Sea $n > 0$ y $v \in B_n$ veremos que $f^{*m}(v) = 0, \forall m > n$.

Como Δ es un mapa graduado tenemos que

$$\Delta^{m-1}(v) \subseteq \bigoplus_{\substack{i_1 + \dots + i_m = n \\ i_j \geq 0}} B_{i_1} \otimes \dots \otimes B_{i_m}.$$

Si $m > n$, en cada sumando tendremos que $i_j = 0$ para algún j ; es decir, cada sumando tendrá a B_0 como un factor tensorial. Y por lo tanto al componer con $f^{\otimes m}$ tendremos $f(B_0) = 0$ en un factor y entonces $f^{\otimes m} \circ \Delta^{m-1}(v) = 0$. Por lo tanto $f^{*m}(v) = 0$. □

Proposición 1.5.6. *Fórmula de Takeuchi.*

Sea $(B, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ una biálgebra graduada y conexa. Entonces B es un álgebra de Hopf con la antípoda dada por la siguiente fórmula:

$$S = \sum_{k \geq 0} (-1)^k (Id_B - u\varepsilon)^{*k} = u\varepsilon + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \mu^{k-1} \circ (Id_B - u\varepsilon)^{\otimes k} \circ \Delta^{k-1}.$$

Demostración. Sea $f = Id_B - u\varepsilon$, como la biálgebra es conexa, por la Observación 1.4.16 $f|_{B_0} = (Id_B - u\varepsilon)|_{B_0} = 0$, por lo que f es localmente nilpotente. Por lo que en cada $v \in B$, la suma $\sum_{k \geq 0} (-1)^k f^{*k}$ es finita. El mapa S definido se puede expresar como $S = \sum_{k \geq 0} (-1)^k f^{*k}$, veamos que verifica la condición de antípoda:

$$\begin{aligned} S * Id_B &= S * (f + u\varepsilon) = \left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k f^{*k} \right) * (f + u\varepsilon) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k f^{*k+1} + \sum_{k \geq 0} (-1)^k (f^{*k} * u\varepsilon) = \\ &= - \sum_{k \geq 0} (-1)^{k+1} f^{*k+1} + \sum_{k \geq 0} (-1)^k f^{*k} = f^{*0} = u\varepsilon. \end{aligned}$$

Se procede de forma análoga con $Id_B * S$, concluyendo que S es la antípoda de B . □

Observación 1.5.7. Por la Observación 1.4.17 sabemos que la antípoda es graduada y concluimos entonces que toda \mathbb{k} -biálgebra graduada conexa es una \mathbb{k} -álgebra de Hopf graduada.

En algunos casos, usando la fórmula de Takeuchi y/o deduciendo la antípoda por sus propiedades, pueden encontrarse resultados combinatorios interesantes. A continuación ilustraremos lo dicho con un ejemplo.

Ejemplo 1.5.8. Veremos que $(\mathbb{k}[x], \mu_{\mathbb{k}[x]}, u_{\mathbb{k}[x]}, \Delta_{\mathbb{k}[x]}, \varepsilon_{\mathbb{k}[x]})$ **la biálgebra de polinomios** con los mapas del Ejemplo 1.3.6. **es una álgebra de Hopf**. Buscaremos su antípoda de dos formas: (A) Deduciendo la fórmula por las propiedades de la antípoda, y (B) deduciéndola por aplicación directa de la fórmula de Takeuchi.

Observar que $\mathbb{k}[x]$ es un \mathbb{k} -espacio vectorial graduado y conexo, dado que lo podemos expresar como: $\mathbb{k}[x] = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{k}_n[x]$ con $\mathbb{k}_n[x] = \langle x^n \rangle_{\mathbb{k}}$, llamaremos $\mathbb{k}_n[x]$ el \mathbb{k} -espacio vectorial de los polinomios homogéneos de grado n y con $\mathbb{k}_0[x] = \mathbb{k}$.

Recordamos que los mapas de $\mathbb{k}[x]$ fueron definidos sobre elementos homogéneos y cumplen lo siguiente:

- $\mu_{\mathbb{k}[x]}(x^n \otimes x^m) = x^{n+m} \in \mathbb{k}_{n+m}[x], \forall m, n \in \mathbb{N}$.

$$\blacksquare \Delta_{\mathbb{k}[x]}(x^n) = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i} \in \sum_{i=0}^{i=n} \mathbb{k}_i[x] \otimes \mathbb{k}_{n-i}[x].$$

Si $k \in \mathbb{k} = \mathbb{k}_0[x]$ entonces

- $u_{\mathbb{k}[x]}(k) = k \in \mathbb{k}_0[x]$ y
- $\varepsilon_{\mathbb{k}[x]}(k) = k$ y $\varepsilon_{\mathbb{k}[x]}(x^n) = x^n(0) = 0$ si $n > 0$.

Observar que todos los mapas son graduados y por lo tanto es una biálgebra graduada conexa, concluyendo que existe la antípoda.

Ahora deduciremos la antípoda de la forma (A).

Dado que la antípoda es un mapa lineal, basta con deducirla en elementos homogéneos.

La antípoda cumple que: $S_{\mathbb{k}[x]} \circ u_{\mathbb{k}[x]} = u_{\mathbb{k}[x]}$. Entonces para elementos de grado cero obtenemos que $S_{\mathbb{k}[x]}(k) = k$, es decir, $S_{\mathbb{k}[x]}|_{\mathbb{k}} = Id_{\mathbb{k}}$.

Consideremos x , la variable de grado 1 de los polinomios, entonces $\varepsilon_{\mathbb{k}[x]}(x) = 0$ y ya vimos que $\Delta_{\mathbb{k}[x]}(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= u\varepsilon(x) = \mu_{\mathbb{k}[x]}(Id * S)\Delta_{\mathbb{k}[x]}(x) = \mu_{\mathbb{k}[x]}(Id * S)(1 \otimes x + x \otimes 1) = \mu_{\mathbb{k}[x]}(1 \otimes S(x) + x \otimes S(1)) = \\ &= S(x) + xS(1) = S(x) + x. \end{aligned}$$

Por lo tanto $S(x) = -x$.

Como S es un antimorfismo de álgebras, obtenemos que $S(x^2) = S(xx) = S(x)S(x) = (-x)(-x) = x^2$ y generalizando lo anterior para $S(x^n)$, obtenemos el siguiente resultado

$$S_{\mathbb{k}[x]}(x^n) = (-1)^n x^n.$$

Antes de pasar al cálculo de la antípoda de la forma (B), usando la fórmula de Takeuchi, introduciremos el concepto de coeficiente multinomial.

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $0 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, naturales tales que $n = i_1 + \dots + i_k$, entonces el **coeficiente multinomial** es $\binom{n}{i_1, \dots, i_k} = \frac{n!}{i_1! \dots i_k!}$.

En esta parte no escribiremos los mapas con el subíndice $\mathbb{k}[x]$ y llamaremos s_k al coeficiente de x^n obtenido de realizar $(-1)^k \mu^{k-1}(Id - u\varepsilon)^{\otimes k} \Delta^{k-1}(x^n)$. Entonces la antípoda nos quedará expresada como

$$S(x^n) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \mu^{k-1}(Id - u\varepsilon)^{\otimes k} \Delta^{k-1}(x^n) = \left(\sum_{k \geq 0} s_k \right) x^n.$$

Término en $k = 0$:

$$(-1)^0 \mu^{-1}(Id - u\varepsilon)^{\otimes 0} \Delta^{-1}(x^n) = u \circ Id \circ \varepsilon(x^n) = 0, \text{ entonces } s_0 = 0.$$

Término en $k = 1$:

$$\begin{aligned} (-1)^1 \mu^0 (Id - u\varepsilon)^{\otimes 1} \Delta^0(x^n) &= -Id \circ (Id - u\varepsilon) \circ Id(x^n) = -Id \circ (Id - u\varepsilon)(x^n) = \\ &= -Id(x^n) + u\varepsilon(x^n) = -Id(x^n) + 0 = -x^n, \text{ entonces } s_1 = -1. \end{aligned}$$

Término en $k = 2$:

$$\begin{aligned} (-1)^2 \mu^1 (Id - u\varepsilon)^{\otimes 2} \Delta^1(x^n) &= \mu(Id - u\varepsilon)^{\otimes 2} \Delta(x^n) = \mu(Id - u\varepsilon)^{\otimes 2} \left(\sum_{i+j=n} \binom{n}{i} x^i \otimes x^j \right) = \\ &= \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} \mu[(Id - u\varepsilon)(x^i) \otimes (Id - u\varepsilon)(x^j)] = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} (x^i - u\varepsilon(x^i))(x^j - u\varepsilon(x^j)). \end{aligned}$$

Observemos que si j o i son cero, entonces, $x^0 - u\varepsilon(x^0) = 1 - u\varepsilon(1) = 0$, y que si $j, i \neq 0$,

entonces, $u\varepsilon(x^i) = u\varepsilon(x^j) = 0$, por lo que la última expresión nos queda

$$\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \neq 0}} \binom{n}{i} x^{i+j} = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \neq 0}} \binom{n}{i,j} x^n. \quad \text{Entonces } s_2 = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \neq 0}} \binom{n}{i,j}.$$

Término en $k = 3$: $(-1)^3 \mu^2 (Id - u\varepsilon)^{\otimes 3} \Delta^2(x^n)$.

Observar que

$$\Delta^2(x^n) = (Id \otimes \Delta) \Delta(x^n) = (Id \otimes \Delta) \left(\sum_{i+j=n} \binom{n}{i} x^i \otimes x^j \right) = \sum_{\substack{i+j=n \\ l+k=j}} \binom{n}{i} \binom{j}{l} x^i \otimes x^l \otimes x^k.$$

Por la observación anterior sabemos que $u\varepsilon = 0$ si es evaluada en elementos de grado ≥ 1 y que $Id - u\varepsilon = 0$ si es evaluada en elementos de grado cero, entonces el término en $k = 3$ es

$$s_3 x^n = - \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{l=1}^{l=n-i-1} \binom{n}{i} \binom{n-i}{l} x^n, \text{ que también podemos expresar como}$$

$$s_3 = - \sum_{\substack{n=i_1+i_2+i_3 \\ i_j \neq 0}} \binom{n}{i_1, i_2, i_3}.$$

Generalizando el resultado anterior $s_k = (-1)^k \sum_{\substack{n=i_1+\dots+i_k \\ i_j \neq 0}} \binom{n}{i_1, \dots, i_k}$.

Cuando $k > n$ algún elemento en el factor $x^{i_1} \otimes x^{i_2} \otimes \dots \otimes x^{i_k}$ tiene grado cero, entonces el mapa $(Id - u\varepsilon)$ anula la expresión, por lo que la suma en la fórmula de Takeuchi sólo va hasta $k = n$. Por lo tanto

$$S_{k[x]}(x^n) = \left(\sum_{k=1}^{k=n} s_k \right) x^n.$$

Como la antípoda es única, la fórmula obtenida por (A) y por (B) es la misma por lo que además obtenemos la siguiente identidad combinatoria $\sum_{k=1}^{k=n} s_k = (-1)^n$, es decir,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \sum_{\substack{n=i_1+\dots+i_k \\ i_j \neq 0}} \binom{n}{i_1, \dots, i_k} = (-1)^n.}$$

Veamos un ejemplo del resultado obtenido con $n = 4$.

Si $k = 1$, ya vimos que $s_1 = -1$.

$$\text{Para } k = 2, \\ s_2 = \sum_{\substack{i_1+i_2=4 \\ i_1, i_2 \neq 0}} \binom{4}{i_1, i_2} = \binom{4}{1, 3} + \binom{4}{2, 2} + \binom{4}{3, 1} = \frac{4!}{1! 3!} + \frac{4!}{2! 2!} + \frac{4!}{3! 1!} = 4 + 6 + 4 = 14.$$

$$\text{Para } k = 3, \\ s_3 = - \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=4 \\ i_1, i_2, i_3 \neq 0}} \binom{4}{i_1, i_2, i_3} = - \left(\binom{4}{1, 1, 2} + \binom{4}{1, 2, 1} + \binom{4}{2, 1, 1} \right) = -3 \binom{4}{1, 1, 2},$$

$$s_3 = -3 \frac{4!}{1! 1! 2!} = -3 \cdot 12 = -36.$$

Para $k = 4$,

$$s_4 = (-1)^4 \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3+i_4=4 \\ i_1, i_2, i_3, i_4 \neq 0}} \binom{4}{i_1, i_2, i_3, i_4} = \binom{4}{1, 1, 1, 1} = 4! = 24.$$

Si realizamos la suma alterna de s_1 , s_2 , s_3 y s_4 y dado que $n = 4$, obtenemos que

$$-1 + 14 - 36 + 24 = 1 = (-1)^4.$$

1.6. Álgebras de Hopf y dualidad.

En esta sección dualizaremos álgebras graduadas cuyas componentes tienen dimensión finita con el fin de obtener coálgebras. Análogamente, dualizaremos coálgebras para obtener álgebras. Recordar que, si V es un \mathbb{k} -espacio vectorial, entonces el dual de V es el espacio vectorial $V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{k} : f \text{ es lineal}\}$ y que, si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces la transformación dual de T es $T^* : W^* \rightarrow V^*$, con $T^*(f) = f \circ T$. Si $S : W \rightarrow U$ es otra transformación lineal se cumple que $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Definición 1.6.1. Sean V y W dos espacios vectoriales, llamaremos $\gamma_{V,W}$ a la transformación lineal inyectiva $\gamma_{V,W} : V^* \otimes W^* \rightarrow (V \otimes W)^*$ dado por

$$\gamma_{V,W}(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v)g(w) \text{ con } f \in V^*, g \in W^*, v \in V \text{ y } w \in W.$$

Para el caso en que V y W son de dimensión finita $\gamma_{V,W}$ es un isomorfismo lineal.

Lema 1.6.2. Sean V, V', W y W' espacios vectoriales de dimensión finita y $f : V \rightarrow V'$, $g : W \rightarrow W'$ dos transformaciones lineales. Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} (V')^* \otimes (W')^* & \xrightarrow{\gamma_{V',W'}} & (V' \otimes W')^* \\ f^* \otimes g^* \downarrow & & \downarrow (f \otimes g)^* \\ V^* \otimes W^* & \xrightarrow{\gamma_{V,W}} & (V \otimes W)^* \end{array}$$

Demostración. Sean $h \in (V')^*$, $k \in (W')^*$, $v \in V$ y $w \in W$. Tenemos que

$$(f \otimes g)^* \circ \gamma_{V',W'}(h \otimes k)(v \otimes w) = \gamma_{V',W'}(h \otimes k)(f(v) \otimes g(w)) = h(f(v))k(g(w)) = f^*(h)(v)g^*(k)(w),$$

y por otro lado tenemos que

$$\gamma_{V,W} \circ (f^* \otimes g^*)(h \otimes k)(v \otimes w) = \gamma_{V,W}(f^*(h) \otimes g^*(k))(v \otimes w) = f^*(h)(v)g^*(k)(w).$$

Concluyendo que el diagrama anterior conmuta. □

Observación 1.6.3. Sean A, B y $C \in Vect$, es fácil ver que la siguiente composición

$$A^* \otimes B^* \otimes C^* \xrightarrow{\gamma_{A,B} \otimes Id_{C^*}} (A \otimes B)^* \otimes C^* \xrightarrow{\gamma_{(A \otimes B, C)}} (A \otimes B \otimes C)^*$$

evaluada en $\beta_1 \otimes \beta_2 \otimes \beta_3 \in A^* \otimes B^* \otimes C^*$ es la función que manda a $a \otimes b \otimes c \in A \otimes B \otimes C$ en $\beta_1(a)\beta_2(b)\beta_3(c)$ y que también éste es el resultado de evaluar la siguiente composición

$$A^* \otimes B^* \otimes C^* \xrightarrow{Id_{A^*} \otimes \gamma_{B,C}} A^* \otimes (B \otimes C)^* \xrightarrow{\gamma_{(A, B \otimes C)}} (A \otimes B \otimes C)^*$$

en $\beta_1 \otimes \beta_2 \otimes \beta_3 \in A^* \otimes B^* \otimes C^*$.

Concluimos que

$$\gamma_{A \otimes B, C} \circ (\gamma_{A,B} \otimes Id_{C^*}) = \gamma_{A, B \otimes C} \circ (Id_{A^*} \otimes \gamma_{B,C}).$$

Definición 1.6.4. Llamaremos θ al isomorfismo $\theta : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}^*$ dado por $\theta(a)(b) = ab$.

Observación 1.6.5. Es fácil ver que la siguiente composición

$$\mathbb{k} \otimes V^* \xrightarrow{\theta \otimes Id} \mathbb{k}^* \otimes V^* \xrightarrow{\gamma_{\mathbb{k}, V}} (\mathbb{k} \otimes V)^* \xrightarrow{(\lambda_V)^*} V^*,$$

es el isomorfismo $(\lambda_{V^*})^{-1} : \mathbb{k} \otimes V^* \rightarrow V^*$.

Análogamente la composición

$$V^* \otimes \mathbb{k} \xrightarrow{Id \otimes \theta} V^* \otimes \mathbb{k}^* \xrightarrow{\gamma_{V, \mathbb{k}}} (V \otimes \mathbb{k})^* \xrightarrow{(\rho_V)^*} V^*,$$

es el isomorfismo $(\rho_{V^*})^{-1} : V^* \otimes \mathbb{k} \rightarrow V^*$.

Observación 1.6.6. Sean A, B, C y $D \in Vect$, entonces el siguiente diagrama hexagonal conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & (A \otimes B)^* \otimes (C \otimes D)^* & \\
 \swarrow \gamma_{A \otimes B, C \otimes D} & & \nwarrow \gamma_{A, B} \otimes \gamma_{C, D} \\
 (A \otimes B \otimes C \otimes D)^* & & A^* \otimes B^* \otimes C^* \otimes D^* \\
 \downarrow (Id_A \otimes \beta_{B, C} \otimes Id_D)^* & & \downarrow Id_{A^*} \otimes \beta_{B^*, C^*} \otimes Id_{D^*} \\
 (A \otimes C \otimes B \otimes D)^* & & A^* \otimes C^* \otimes B^* \otimes D^* \\
 \swarrow \gamma_{A \otimes C, B \otimes D} & & \nwarrow \gamma_{A, C} \otimes \gamma_{B, D} \\
 & (A \otimes C)^* \otimes (B \otimes D)^* & .
 \end{array}$$

Es decir que las siguientes expresiones coinciden:

$$\begin{aligned}
 & \gamma_{A \otimes C, B \otimes D} \circ (\gamma_{A, C} \otimes \gamma_{B, D}) \circ [Id_{A^*} \otimes \beta_{B^*, C^*} \otimes Id_{D^*}] \text{ y} \\
 & (Id_A \otimes \beta_{B, C} \otimes Id_D)^* \circ \gamma_{A \otimes B, C \otimes D} \circ (\gamma_{A, B} \otimes \gamma_{C, D}).
 \end{aligned}$$

Esto es porque si evaluamos ambas expresiones en $f \otimes g \otimes h \otimes l \in A^* \otimes B^* \otimes C^* \otimes D^*$ el resultado de la primer expresión lleva $a \otimes c \otimes b \otimes d \in A \otimes C \otimes B \otimes D$ en $f(a)g(c)h(b)l(d)$ (es decir intercambia los factores centrales a nivel de funciones) y el resultado de la segunda expresión lo lleva a $f(a)h(b)g(c)l(d)$ (intercambia los factores centrales en el elemento de la evaluación) y como el cuerpo es conmutativo las expresiones coinciden.

Observación 1.6.7. Si (A, μ, u) es un álgebra, dualizamos el mapa $\mu : A \otimes A \rightarrow A$, obtenemos un mapa $\mu^* : A^* \rightarrow (A \otimes A)^*$. Si queremos de esta forma obtener un coproducto Δ_{A^*} en A^* , necesitamos que $\Delta_{A^*} : A^* \rightarrow A^* \otimes A^*$. Si $\dim(A) < \infty$ tenemos que $A^* \otimes A^* \cong (A \otimes A)^*$ pero si $\dim(A) = \infty$ tenemos que $A^* \otimes A^* \subsetneq (A \otimes A)^*$ (vía γ_A) y la imagen de μ^* puede no estar incluida en $A^* \otimes A^*$, por lo que no se puede definir directamente que $\Delta_{A^*} = \mu^*$.

Una posible forma de dar solución al problema anterior es considerar en vez de A^* , lo que se conoce como el dual finito de A . No trataremos este tema en este trabajo; si se desea profundizar se encuentra desarrollado en [MS92].

En lugar de tomar el dual finito, como nos interesa trabajar con álgebras y coálgebras graduadas, consideraremos los duales graduados de A y de μ .

Definición 1.6.8. Sea $V = \bigoplus_{n \geq 0} V_n$ un \mathbb{k} -espacio vectorial graduado.

- Definimos el espacio dual graduado de V como

$$V^{*gr} := \bigoplus_{n \geq 0} (V_n)^*, \quad \text{es decir } (V^{*gr})_n = (V_n)^*.$$

- Si $W = \bigoplus_{n \geq 0} W_n$ es otro espacio vectorial graduado y $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal graduada; es decir, $T = \bigoplus_{n \geq 0} T_n$ con $T_n : V_n \rightarrow W_n$; definimos el dual graduado de T como,

$$T^{*gr} := \bigoplus_{n \geq 0} T_n^* : W^{*gr} \rightarrow V^{*gr}, \quad \text{con } T_n^* : W_n^* \rightarrow V_n^* \text{ el mapa dual de } T_n.$$

Observación 1.6.9. Veamos algunas propiedades de esta construcción.

1. Observar que $(Id_V)^{*gr} = Id_{V^{*gr}}$, dado que $(Id_V)_n^{*gr} = (Id_{V_n})^* = Id_{V_n^*}$.
2. Dadas f y g dos transformaciones lineales graduadas, entonces $(g \circ f)^{*gr} = f^{*gr} \circ g^{*gr}$, (por la propiedad análoga en cada grado).
3. De las observaciones anteriores se deduce que si f es invertible entonces $(f^{-1})^{*gr} = (f^{*gr})^{-1}$.
4. Recordamos que el producto de Cauchy entre dos espacios vectoriales graduados V y W es $V \bullet W = \bigoplus_{n \geq 0} \left(\bigoplus_{s+t=n} V_s \otimes W_t \right)$.

Entonces el espacio dual graduado de $V \bullet W$ es $(V \bullet W)^{*gr} = \bigoplus_{n \geq 0} (V \bullet W)_n^*$.

$$\text{Ahora } (V \bullet W)_n^* = \left(\bigoplus_{s+t=n} V_s \otimes W_t \right)^* = \prod_{s+t=n} (V_s \otimes W_t)^* \cong \bigoplus_{s+t=n} (V_s \otimes W_t)^*,$$

(el producto es isomorfo a la suma directa porque el número de sumandos es finito).

Análogamente si f y g son morfismos espacios vectoriales graduados, tenemos que

$$(f \bullet g)^{*gr} = \bigoplus_{n \geq 0} (f \bullet g)_n^*, \quad \text{donde } (f \bullet g)_n^* \cong \bigoplus_{s+t=n} (f_s \otimes g_t)^*.$$

Por simplicidad, en adelante reemplazaremos los isomorfismos anteriores por igualdades.

5. Si V y W son espacios vectoriales graduados, recordar que para cada par $s, t \in \mathbb{N}$ tenemos el siguiente mapa

$$\gamma_{V_s, W_t} : V_s^* \otimes W_t^* \rightarrow (V_s \otimes W_t)^*.$$

$$\text{Sea } (\gamma_{V, W}^{*gr})_n = \bigoplus_{s+t=n} \gamma_{V_s, W_t} : \bigoplus_{s+t=n} V_s^* \otimes W_t^* \rightarrow \bigoplus_{s+t=n} (V_s \otimes W_t)^*.$$

Por lo anterior tenemos que $(\gamma_{V, W}^{*gr})_n : (V^{*gr} \bullet W^{*gr})_n \rightarrow (V \bullet W)_n^{*gr}$ por lo tanto, tomando

$$\gamma_{V, W}^{*gr} = \bigoplus_n (\gamma_{V, W}^{*gr})_n, \quad \text{tenemos el siguiente mapa graduado}$$

$$\gamma_{V, W}^{*gr} : V^{*gr} \bullet W^{*gr} \rightarrow (V \bullet W)^{*gr} \quad \text{como} \quad \gamma_{V, W}^{*gr} = \bigoplus_{n \geq 0} \bigoplus_{s+t=n} \gamma_{V_s, W_t}.$$

Para el caso que V y W tienen componentes de dimensión finita, $\gamma_{V,W}^{*gr}$ es un isomorfismo y tenemos que $(V \bullet W)^{*gr} \cong V^{*gr} \bullet W^{*gr}$.

De aquí en más escribiremos al mapa γ^{*gr} prescindiendo del supraíndice *gr . Y si $V = W$, escribiremos al mapa $\gamma_{V,V}$ simplemente como γ_V .

6. El isomorfismo $\theta : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}^*$ puede ser extendido a un isomorfismo de espacios vectoriales graduados, que también llamaremos θ , es decir $\theta : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^{*gr}$.
7. Si V es un espacio vectorial graduado con componentes de dimensión finita, por la Observación 1.6.5, tenemos que las siguientes composiciones,

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \bullet V^{*gr} &\xrightarrow{\theta \bullet Id_{V^{*gr}}} \mathbb{K}^{*gr} \bullet V^{*gr} \xrightarrow{\gamma_{\mathbb{K},V}} (\mathbb{K} \bullet V)^{*gr} \xrightarrow{(\lambda_V)^{*gr}} V^{*gr}, \\ V^{*gr} \bullet \mathbb{K} &\xrightarrow{Id_{V^{*gr}} \bullet \theta} V^{*gr} \bullet \mathbb{K}^{*gr} \xrightarrow{\gamma_{V,\mathbb{K}}} (V \bullet \mathbb{K})^{*gr} \xrightarrow{(\rho_V)^{*gr}} V^{*gr}, \end{aligned}$$

son $(\lambda_{V^{*gr}})^{-1} : \mathbb{K} \bullet V^{*gr} \rightarrow V^{*gr}$ y $(\rho_{V^{*gr}})^{-1} : V^{*gr} \bullet \mathbb{K} \rightarrow V^{*gr}$ respectivamente.

A continuación presentaremos una serie de resultados que nos permitirá afirmar que el dual graduado de una álgebra de Hopf graduada con componentes de dimensión finita es otra álgebra de Hopf graduada.

Proposición 1.6.10. *Sea H un espacio vectorial graduado con componentes de dimensión finita.*

- 1) Si (H, μ, u) es una \mathbb{k} -álgebra graduada, entonces la terna $(H^{*gr}, \Delta_{H^{*gr}}, \varepsilon_{H^{*gr}})$ es una \mathbb{k} -coálgebra graduada donde $\Delta_{H^{*gr}} := \gamma_H^{-1} \circ \mu^{*gr}$ y $\varepsilon_{H^{*gr}} := \theta^{-1} \circ u^{*gr}$.
- 2) Si (H, Δ, ε) es una \mathbb{k} -coálgebra graduada, entonces la terna $(H^{*gr}, \mu_{H^{*gr}}, u_{H^{*gr}})$ es una \mathbb{k} -álgebra graduada donde $\mu_{H^{*gr}} := \Delta^{*gr} \circ \gamma_H$ y $u_{H^{*gr}} := \varepsilon^{*gr} \circ \theta$.
- 3) Si además $(H, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ es una \mathbb{k} -biálgebra graduada, entonces $(H^{*gr}, \mu_{H^{*gr}}, u_{H^{*gr}}, \Delta_{H^{*gr}}, \varepsilon_{H^{*gr}})$ es también una \mathbb{k} -biálgebra graduada.
- 4) Si $(H, \mu, u, \Delta, \varepsilon, S)$ es una \mathbb{k} -álgebra de Hopf graduada entonces también lo es $(H^{*gr}, \mu_{H^{*gr}}, u_{H^{*gr}}, \Delta_{H^{*gr}}, \varepsilon_{H^{*gr}}, S_{H^{*gr}})$, donde $S_{H^{*gr}} := S^{*gr}$.

Demostración.

Parte 1)

Consideremos $\varepsilon_{H^{*gr}} = \theta^{-1} \circ u^{*gr} : H^{*gr} \rightarrow \mathbb{K}$; veamos que cumple con la conmutatividad de los diagramas de counidad. Para ello probaremos que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccccc} & & \Delta_{H^{*gr}} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ H^{*gr} & \xrightarrow{\mu^{*gr}} & (H \bullet H)^{*gr} & \xrightarrow{\gamma_H^{-1}} & H^{*gr} \bullet H^{*gr} \\ & \searrow^{(\lambda_H^{*gr})^{-1}} & \downarrow^{(u \bullet Id_H)^{*gr}} & \searrow^{u^{*gr} \bullet Id_{H^{*gr}}} & \downarrow^{u^{*gr} \bullet Id_{H^{*gr}}} \\ & & (\mathbb{K} \bullet H)^{*gr} & \xrightarrow{\gamma_{\mathbb{K},H}^{-1}} & \mathbb{K}^{*gr} \bullet H^{*gr} \\ & & \downarrow & & \downarrow^{\theta^{-1} \bullet Id_{H^{*gr}}} \\ & & & & \mathbb{K} \bullet H^{*gr} \\ & \searrow^{\lambda_{H^{*gr}}} & & & \swarrow^{\varepsilon_{H^{*gr}} \bullet Id_{H^{*gr}}} \\ & & & & \end{array}$$

Cuadrante 1 Cuadrante 2 Cuadrante 3

El Cuadrante 1 es el dual graduado del diagrama de unidad de H y por lo tanto conmuta (tomar duales graduados respeta composición). El Cuadrante 2 por el Lema 1.6.2 conmuta. El Cuadrante 3 conmuta porque

$$\lambda_{H^{*gr}} = (\theta^{-1} \bullet Id_{H^{*gr}}) \circ \gamma_{\mathbb{k}, H}^{-1} \circ (\lambda_H^{*gr})^{-1},$$

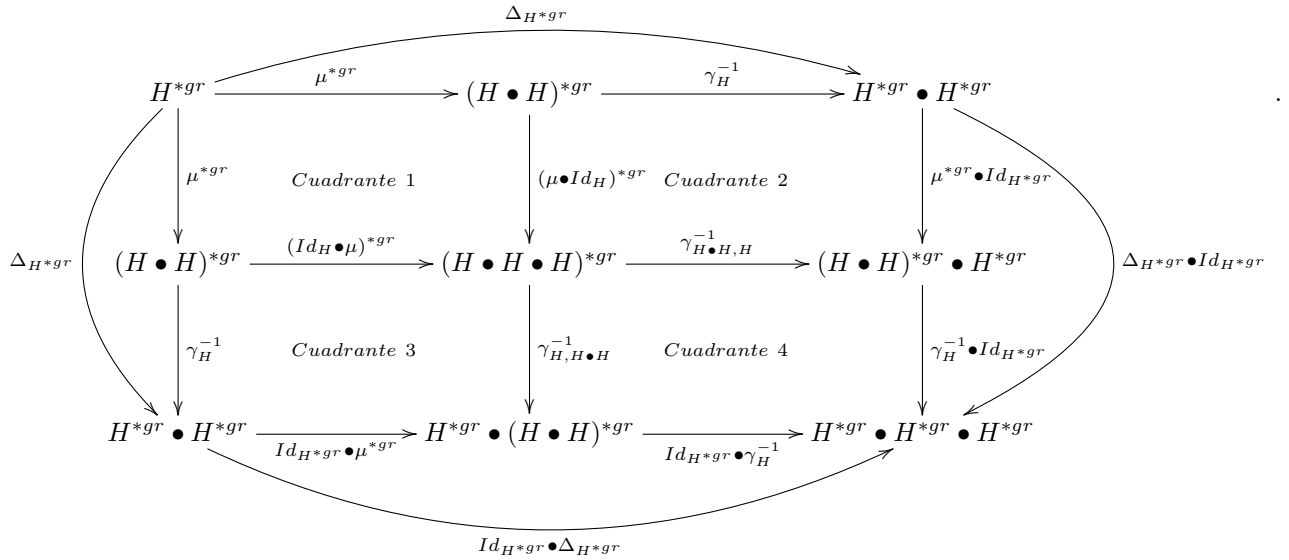
recordar lo visto en la parte 7 de la Observación 1.6.9. Concluimos que todo el diagrama conmuta, probando la igualdad que necesitamos.

Con argumentos análogos y observando además que $\rho_{H^{*gr}} = (Id_{H^{*gr}} \bullet \theta^{-1}) \circ \gamma_{H, \mathbb{k}}^{-1} \circ (\rho_H^{*gr})^{-1}$ tenemos que

$$(Id_{H^{*gr}} \bullet \varepsilon_{H^{*gr}}) \circ \Delta_{H^{*gr}} = (Id_{H^{*gr}} \bullet \theta^{-1}) \circ \gamma_{H, \mathbb{k}}^{-1} \circ (\rho_H^{*gr})^{-1} = \rho_{H^{*gr}},$$

lo que prueba que la conmutatividad de la counidad en H^{*gr} .

A continuación veremos que $\Delta_{H^{*gr}}$ cumple con la conmutatividad del diagrama de coasociatividad. Deberemos probar que $(\Delta_{H^{*gr}} \bullet Id_{H^{*gr}}) \circ \Delta_{H^{*gr}} = (Id_{H^{*gr}} \bullet \Delta_{H^{*gr}}) \circ \Delta_{H^{*gr}}$, para ello consideremos el siguiente diagrama:



Si probamos que los Cuadrantes 1, 2, 3 y 4 conmutan, probaremos que la composición de los mapas que quedan por fuera del diagrama conmutan.

El Cuadrante 1 conmuta porque es el diagrama dual graduado del diagrama de asociatividad del producto en H , porque tomar duales graduados preserva composición.

Si extendemos a espacios vectoriales graduados el Lema 1.6.2, resulta que los Cuadrantes 2 y 3 conmutan.

De forma análoga, si extendemos el resultado de la Observación 1.6.3 a espacios vectoriales graduados, resulta que el Cuadrante 4 conmuta.

Parte 2) La prueba es similar a la anterior.

Parte 3)

Por la Parte 1) y 2), sólo resta probar que $\Delta_{H^{*gr}}$ y $\varepsilon_{H^{*gr}}$ son morfismos de álgebras; para ello consideremos el diagrama *Delta morfismo de álgebras*,

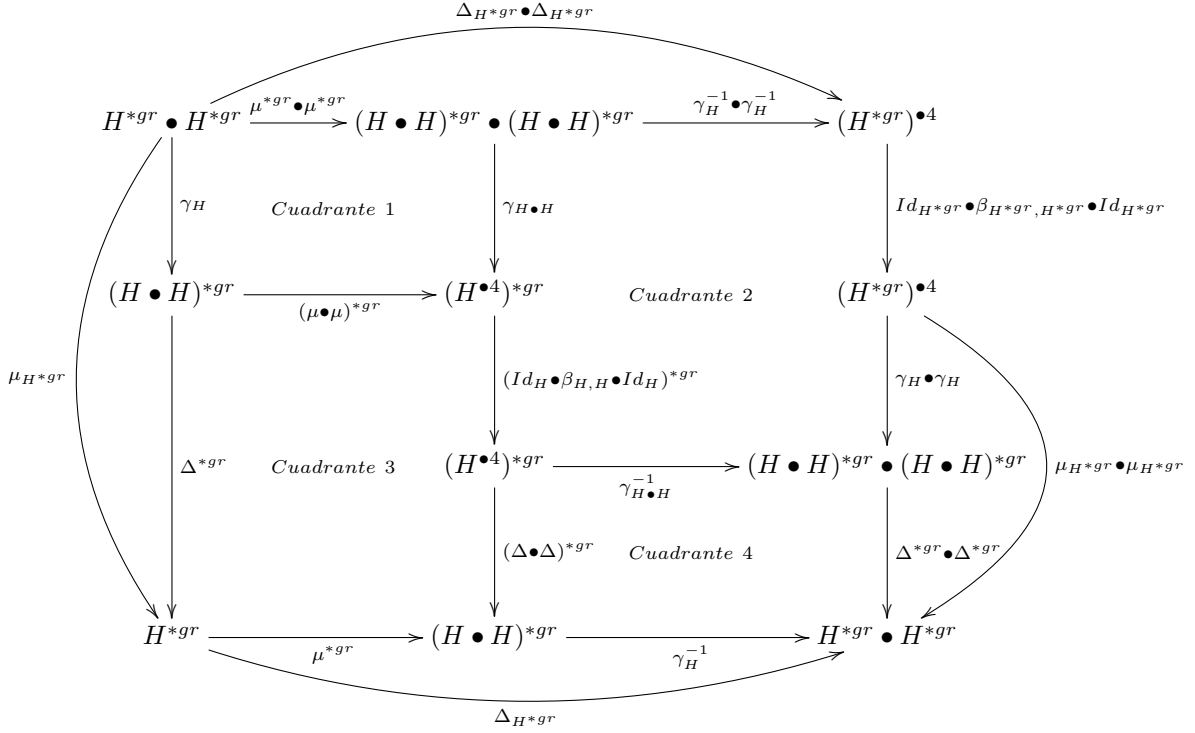


Diagrama Delta morfismo de álgebras.

Observar que si A, B son dos espacios vectoriales graduados y \bullet el producto de Cauchy $\beta_{A,B} : A \bullet B \rightarrow B \bullet A$ es un morfismo graduado, con

$$(\beta_{A,B})_n : (A \bullet B)_n = \bigoplus_{i=0}^{i=n} A_i \otimes B_{n-i} \xrightarrow{\bigoplus_{0 \leq i \leq n} \beta_{A_i, B_{n-i}}^{Vect}} \bigoplus_{i=0}^{i=n} B_{n-i} \otimes A_i .$$

Tiene sentido considerar su dual graduado $(\beta_{A,B})^{*gr}$, por lo tanto podemos considerar el mapa $(Id_H \bullet \beta_{H,H} \bullet Id_H)^{*gr}$ que aparece en el diagrama.

Probando la conmutatividad de los Cuadrantes 1, 2, 3 y 4, se prueba la conmutatividad de la parte exterior del mismo.

Los Cuadrantes 1 y 4 conmutan por el resultado visto en el Lema 1.6.2.

Observar que como $(H, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra, Δ es un morfismo de álgebras, entonces se cumple que

$$(\mu \bullet \mu) \circ (Id_H \bullet \beta \bullet Id_H) \circ (\Delta \bullet \Delta) = \Delta \circ \mu,$$

y dualizando, tenemos que el Cuadrante 3 conmuta.

La conmutatividad del Cuadrante 2 se debe al análogo de la Observación 1.6.6 para espacios vectoriales graduados.

El diagrama anterior es uno de los que debe conmutar para que $\Delta_{H^{*gr}}$ sea morfismo de álgebras. Para las tres condiciones que restan probar, para afirmar que $\Delta_{H^{*gr}}$ y $\varepsilon_{H^{*gr}}$ son morfismos de álgebras, se procede con argumentos análogos a lo visto anteriormente.

Parte 4)

Probaremos que $S_{H^{*gr}}$ satisface la condición de antípoda. Para ello veamos el resultado de la siguiente expresión:

$$S_{H^{*gr}} * Id_{H^{*gr}} = \mu_{H^{*gr}} \circ (S_{H^{*gr}} \bullet Id_{H^{*gr}}) \circ \Delta_{H^{*gr}} = \Delta^{*gr} \circ \gamma_H \circ (S_{H^{*gr}} \bullet Id_{H^{*gr}}) \circ \gamma_H^{-1} \circ \mu^{*gr}$$

Observar que $\gamma_H \circ (S_{H^{*gr}} \bullet Id_{H^{*gr}}) \circ \gamma_H^{-1} = (S \bullet Id_H)^{*gr}$, por el Lema 1.6.2, por lo que la expresión anterior nos queda

$$\begin{aligned} S_{H^{*gr}} * Id_{H^{*gr}} &= \Delta^{*gr} \circ (S \bullet Id_H)^{*gr} \circ \mu^{*gr} = [\mu \circ (S \bullet Id_H) \circ \Delta]^{*gr} = (u \circ \varepsilon)^{*gr} = \varepsilon^{*gr} \circ u^{*gr} = \\ &= \varepsilon^{*gr} \circ Id_{\mathbb{k}^{*gr}} \circ u^{*gr} = \varepsilon^{*gr} \circ \theta \circ \theta^{-1} \circ u^{*gr} = u_{H^{*gr}} \circ \varepsilon_{H^{*gr}}, \end{aligned}$$

donde la última expresión es el neutro en el producto de convolución en $End(H^{*gr})$. Proce- diendo de forma análoga con $Id_{H^{*gr}} * S_{H^{*gr}}$, concluimos que $S_{H^{*gr}}$ es la antípoda de H^{*gr} . \square

Observación 1.6.11. La finitud de la dimensión de las componentes de H en la proposición anterior es sólo utilizada para la existencia de γ^{-1} . Este morfismo no es utilizado en la segunda parte de la proposición, por lo tanto dicha afirmación vale sin la hipótesis de finitud.

Ejemplo 1.6.12. Ya hemos visto en el Ejemplo 1.3.6 que $(\mathbb{k}[x], \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ tiene estructura de álgebra de Hopf. Recordamos el producto y el coproducto en elementos de la base con $l = m+n$: $\mu_{n,m}(x^n \otimes x^m) = x^{n+m}$ y $\Delta_{n,m}(x^l) = \binom{m+n}{n} x^n \otimes x^m$. Veremos en este ejemplo la estructura de $(\mathbb{k}[x])^{*gr}$ y además que $(\mathbb{k}[x])^{*gr} \cong \mathbb{k}[x]$ como álgebras de Hopf graduadas.

Escribiremos $(\mathbb{k}[x])^{*gr}$ como $\mathbb{k}\{x\}$ y a $x^{(n)} \in \mathbb{k}\{x\}$ al elemento que cumple $x^{(n)}(x^n) = 1$.

Observar que $(\mathbb{k}\{x\})_n = (\mathbb{k}[x]_n)^* = (\mathbb{k}x^n)^* = \mathbb{k}x^{(n)}$.

El producto en $\mathbb{k}\{x\}$ según la proposición anterior es $\mu_{\mathbb{k}[x]^{*gr}} = \mu_{\mathbb{k}\{x\}} = \Delta^{*gr} \circ \gamma_{\mathbb{k}[x]}$. Por lo que la componente l es:

$$(\mu_{\mathbb{k}\{x\}})_l = (\Delta^{*gr} \circ \gamma_{\mathbb{k}[x]})_l = \Delta_l^{*gr} \circ (\gamma_{\mathbb{k}[x]})_l = \bigoplus_{l=m+n} \Delta_{n,m}^* \circ \gamma_{\mathbb{k}[x]_n, \mathbb{k}[x]_m}.$$

El mapa a nivel de componentes $\{n, m\}$ es $\mu_{\mathbb{k}\{x\}}_{n,m} = \Delta_{n,m}^* \circ \gamma_{\mathbb{k}[x]_n, \mathbb{k}[x]_m}$.

Entonces, si $l = m + n$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{k}\{x\}}_{n,m}(x^{(n)} \otimes x^{(m)})(x^l) &= \Delta_{n,m}^* \circ \gamma_{\mathbb{k}[x]_n, \mathbb{k}[x]_m}(x^{(n)} \otimes x^{(m)})(x^l) = \\ &= \gamma_{\mathbb{k}[x]_n, \mathbb{k}[x]_m}(x^{(n)} \otimes x^{(m)})(\Delta_{n,m}(x^l)) = \\ &= \gamma_{\mathbb{k}[x]_n, \mathbb{k}[x]_m}(x^{(n)} \otimes x^{(m)}) \left(\binom{n+m}{n} x^n \otimes x^m \right) = \\ &= \binom{n+m}{n} x^{(n)}(x^n) \cdot x^{(m)}(x^m) = \binom{n+m}{n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu_{\mathbb{k}\{x\}}(x^{(n)} \otimes x^{(m)}) = \binom{n+m}{n} x^{(n+m)}$.

El coproducto en $\mathbb{k}\{x\}$ según la proposición anterior es $\Delta_{\mathbb{k}[x]^{*gr}} = \Delta_{\mathbb{k}\{x\}} = \gamma_{\mathbb{k}[x]}^{-1} \circ \mu^{*gr}$. Por lo que la componente en n es

$$(\Delta_{\mathbb{k}\{x\}})_n = (\gamma_{\mathbb{k}[x]}^{-1} \circ \mu^{*gr})_n = (\gamma_{\mathbb{k}[x]}^{-1})_n \circ (\mu^{*gr})_n = \bigoplus_{n=s+t} \gamma_{\mathbb{k}[x]_s, \mathbb{k}[x]_t}^{-1} \circ \bigoplus_{n=s+t} \mu_{s,t}^* = \bigoplus_{n=s+t} \gamma_{\mathbb{k}[x]_s, \mathbb{k}[x]_t}^{-1} \circ \mu_{s,t}^*.$$

Y por lo tanto la componente $\{s, t\}$ es $(\Delta_{\mathbb{k}\{x\}})_{s,t} = \gamma_{\mathbb{k}[x]_s, \mathbb{k}[x]_t}^{-1} \circ \mu_{s,t}^*$.

Afirmación: $(\Delta_{\mathbb{k}\{x\}})_{s,t}(x^{(n)}) = x^{(s)} \otimes x^{(t)}$.

Las expresiones $(\Delta_{\mathbb{k}\{x\}})_{s,t} = \gamma_{\mathbb{k}[x]_s, \mathbb{k}[x]_t}^{-1} \circ \mu_{s,t}^*$ serán iguales si valen lo mismo en todos los elementos o equivalentemente que $\gamma_{\mathbb{k}[x]_s, \mathbb{k}[x]_t} \circ (\Delta_{\mathbb{k}\{x\}})_{s,t} = \mu_{s,t}^*$ valen lo mismo en todos los elementos. Consideremos el elemento $x^s \otimes x^t$ de la base de $\mathbb{k}[x]_s \otimes \mathbb{k}[x]_t$ con $n = s + t$, entonces: por un lado tenemos que

$$\gamma_{\mathbb{k}[x]_s, \mathbb{k}[x]_t} \circ (\Delta_{\mathbb{k}\{x\}})_{s,t}(x^{(n)})(x^s \otimes x^t) = \gamma_{\mathbb{k}[x]_s, \mathbb{k}[x]_t}(x^{(s)} \otimes x^{(t)})(x^s \otimes x^t) = x^{(s)}(x^s)x^{(t)}(x^t) = 1,$$

y por otro lado tenemos

$$\mu_{s,t}^*(x^{(n)})(x^s \otimes x^t) = (x^{(n)})(\mu_{s,t}(x^s \otimes x^t)) = (x^{(n)})(x^{s+t}) = 1.$$

Por lo que ambas expresiones coinciden y por lo tanto

$$(\Delta_{\mathbb{k}\{x\}})_n(x^{(n)}) = \sum_{s+t=n} x^{(s)} \otimes x^{(t)}.$$

El resto de los mapas que le dan estructura de álgebra de Hopf a $\mathbb{k}\{x\}$ son:

- $(u_{\mathbb{k}\{x\}})_0(1) = x^{(0)}$,
- $(\varepsilon_{\mathbb{k}\{x\}})_0(x^{(0)}) = 1$, recordar que u y ε en el resto de las componentes valen cero,
- $(S_{\mathbb{k}\{x\}})_n(x^{(n)}) = (-1)^n x^{(n)}$.

Es inmediato que el morfismo graduado $\Gamma : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}\{x\}$ con componentes dadas por $\Gamma_n(x^n) = n! \cdot x^{(n)}$ es un isomorfismo de álgebras y cóalgebras. Por lo tanto $\mathbb{k}[x] \cong (\mathbb{k}[x])^{*gr} = \mathbb{k}\{x\}$ como álgebras de Hopf graduadas. Observar que Γ_n es biyectivo sólo cuando $\text{char}(\mathbb{k})$ no divide a $n!$, por lo tanto Γ es isomorfismo sólo cuando $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$.

Consideremos ahora $(\mathbb{k}[x], \mu'_{\mathbb{k}[x]}, u_{\mathbb{k}[x]}, \Delta'_{\mathbb{k}[x]}, \varepsilon_{\mathbb{k}[x]}, S'_{\mathbb{k}[x]})$ con los mapas definidos como en el Ejemplo 1.3.7 y antípoda $(S'_{\mathbb{k}[x]})_n(x^n) = (-1)^n x^n$. Es fácil ver que el morfismo $\Phi : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}\{x\}$ con componentes dadas por $\Phi_n(x^n) = x^{(n)}$ es un isomorfismo de álgebras de Hopf graduadas. Es por ello que a esta estructura en polinomios se le suele llamar “estructura dual”.

En los siguientes capítulos de este trabajo, si no hay lugar a confusión, utilizaremos indistintamente los supraíndices *gr y $*$ para indicar espacios o mapas duales graduados.

Capítulo 2

Categorías

En este capítulo se tratarán conceptos y propiedades básicas de la teoría de categorías, que nos servirán para introducir las categorías monoidales y algunas de sus propiedades. Los temas que trataremos se encuentran ampliamente desarrollados en [AM75] y [AM10].

2.1. Conceptos Básicos

Definición 2.1.1. *Una categoría K está conformada por:*

- *clases Obj_K y Arr_K que llamaremos objetos de K y flechas de K (o morfismos de K) respectivamente,*
- *funciones $dom_K, codom_K: Arr_K \rightarrow Obj_K$.
Si $f \in Arr_K$ es tal que $dom(f) = A$ y $codom(f) = B$, escribiremos $f: A \rightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$, y diremos que f va de A en B .*
- *Sean $f, g \in Arr_K$, diremos que f y g son componibles si $dom(f) = codom(g)$.
Llamaremos $Arr \times_K Arr = \{(f, g) \in Arr_K \times Arr_K : f \text{ y } g \text{ son componibles}\}$.*
- *mapas $\circ_K: Arr \times_K Arr \rightarrow Arr_K$ e $Id_K: Obj_K \rightarrow Arr_K$ tales que, si llamamos $Id_K(A) = Id_A$ y $\circ_K(f, g) = f \circ_K g$, se cumple:*
 1. $Id_A: A \rightarrow A, \forall A \in Obj_K$.
 2. $codom(f \circ_K g) = codom(f)$ y $dom(f \circ_K g) = dom(g)$.
 3. $f \circ_K Id_A = Id_B \circ_K f = f, \forall f: A \rightarrow B$.
 4. Si (f, g) y $(g, h) \in Arr \times_K Arr$, entonces $(f \circ_K g) \circ_K h = f \circ_K (g \circ_K h)$.

Si $A, B \in Obj_K$, escribiremos $Hom_K(A, B)$ al conjunto de flechas de A en B . Escribiremos también $A, B \in K$ en lugar de $A, B \in Obj_K$, cuando sea claro que son objetos de la categoría. El mapa \circ_K diremos que es la composición en K y, cuando no exista lugar a confusión, escribiremos simplemente \circ . A Id_K le llamaremos la identidad en K .

Definición 2.1.2. *Dada una categoría K , una subcategoría K' es una categoría K' cuyos objetos son objetos de K y cuyas flechas son flechas de K , de forma tal que si restringimos el dominio, codominio, la identidad y la composición de K a K' , obtenemos el dominio, codominio, la identidad y la composición de K' .*

Ejemplo 2.1.3.

1. Sea \mathbb{I} la categoría con un solo objeto y una sola flecha que es la identidad. Es el ejemplo más sencillo de categoría.
2. La categoría $Vect_{\mathbb{k}}$.
Es la categoría que por objetos tiene a los espacios vectoriales sobre \mathbb{k} y para cada par de objetos A y B , $Hom_{Vect_{\mathbb{k}}}(A, B)$ es el conjunto de las transformaciones lineales de A en B . La composición es la composición usual de transformaciones lineales cuando éstas tienen sentido e Id_A es la transformación lineal identidad del espacio vectorial A .
3. La categoría $gVect_{\mathbb{k}}$.
Es la categoría que tiene por objetos a los espacios vectoriales graduados sobre \mathbb{k} , es decir que los objetos son de la forma $V = \bigoplus_{n \geq 0} V_n$. Los morfismos en esta categoría son las transformaciones lineales graduadas. Es decir que si $V = \bigoplus_{n \geq 0} V_n$ y $W = \bigoplus_{n \geq 0} W_n$,
 $Hom_{gVect}(V, W) = \{T : V \rightarrow W \text{ lineales tales que } T(V_n) \subseteq W_n \forall n \geq 0\}$.
4. La categoría Set .
Los objetos de Set son conjuntos arbitrarios, los morfismos son las funciones entre los conjuntos, con la composición e identidad usuales.
5. La categoría Set^{\times} .
Es la categoría cuyos objetos son los conjuntos finitos y cuyos morfismos son las biyecciones, con la composición e identidad usual.
6. La categoría Grp .
Es la categoría cuyos objetos son los grupos y cuyas flechas son los morfismos de grupos, con la composición e identidad usual.
7. Las categorías $Alg_{\mathbb{k}}$, $Coalg_{\mathbb{k}}$, $Bialg_{\mathbb{k}}$ y $Halg_{\mathbb{k}}$ son las categorías que tienen por objetos a las \mathbb{k} -álgebras, \mathbb{k} -coálgebras, \mathbb{k} -biálgebras y \mathbb{k} -álgebras de Hopf respectivamente y como flechas a los \mathbb{k} -morfismos de álgebras, coálgebras, biálgebras y álgebras de Hopf respectivamente, todas ellas con la composición e identidad usuales.
8. Dada una categoría C , definimos su categoría opuesta C^{op} como la categoría cuyos objetos son los objetos de C y cuyas flechas son Arr_C , pero en el otro sentido. Es decir, que se intercambian los roles de dominio y codominio. Específicamente, si $f \in Arr_C$ con $f \in Hom_C(A, B)$, entonces $f \in Hom_{C^{op}}(B, A)$; es decir $dom_{C^{op}}(f) = codom_C(f)$ y $codom_{C^{op}}(f) = dom_C(f)$. La composición en C^{op} de dos morfismos g, f se define como $g \circ_{C^{op}} f := f \circ_C g$. En este sentido se dice que C^{op} es la categoría C revirtiendo el sentido de las flechas.
9. Dadas dos categorías K y L , definimos **su producto** $K \times L$ como la categoría cuyos objetos son los pares ordenados (A, B) de objetos de $A \in K$ y $B \in L$; cuyos morfismos de $(A, B) \rightarrow (A', B')$ también son pares ordenados (f, g) con $f : A \rightarrow A' \in Hom_K(A, A')$ y $g : B \rightarrow B' \in Hom_L(B, B')$; con $Id_{(A, B)} = (Id_A, Id_B)$ y $(f', g') \circ_{K \times L} (f, g) = (f' \circ_K f, g' \circ_L g)$.

Observemos que:

1. las categorías $Alg_{\mathbb{k}}$ y $Coalg_{\mathbb{k}}$ son subcategorías de $Vect_{\mathbb{k}}$,
2. la categoría $Halg_{\mathbb{k}}$ está incluida tanto en la categoría $Alg_{\mathbb{k}}$ como en la categoría $Coalg_{\mathbb{k}}$.

Como las categorías contienen objetos y flechas, una función entre dos categorías debe constar de dos funciones (una a nivel de objetos y otra a nivel de flechas) que sean compatibles con los dominios, codominios, identidades y composiciones.

Definición 2.1.4. *Un functor covariante de una categoría K a una categoría L es un par de funciones $F = (F_{Obj}, F_{Arr})$ donde $F_{Obj} : Obj_K \rightarrow Obj_L$ y $F_{Arr} : Arr_K \rightarrow Arr_L$ tales que:*

1. $F_{Arr}(Id_A) = Id_{F_{Obj}(A)}, \forall A \in Obj_K$.
2. $F_{Obj}(dom(f)) = dom(F_{Arr}(f))$ y $F_{Obj}(codom(f)) = codom(F_{Arr}(f)), \forall f \in Arr_K$, es decir que si $f : A \rightarrow B$ con $A, B \in Obj_K$, entonces $F_{Arr}(f) : F_{Obj}(A) \rightarrow F_{Obj}(B)$.
3. Si g y f dos flechas componibles en K , entonces $F_{Arr}(g)$ y $F_{Arr}(f)$ son componibles en L y se cumple que $F_{Arr}(g \circ_K f) = F_{Arr}(g) \circ_L F_{Arr}(f)$.

Escribiremos $F = (F_{Obj}, F_{Arr}) : K \rightarrow L$, $F_{Obj}(A) = F(A) = FA$ y $F_{Arr}(f) = F(f) = Ff$.

Decimos que un functor F es un **isomorfismo** si los mapas F_{Obj} y F_{Arr} son biyecciones y dos categorías son **isomorfas** si existe un functor entre ellas que es un isomorfismo.

Por el ítem 2, decimos que F **preserva el sentido de las flechas** ya que si $A \xrightarrow{f} B$, $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$. La noción de **functor contravariante** corresponde a sustituir el ítem 2 por la condición de que F **revierta el sentido de las flechas**; es decir que $F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$ y en consecuencia reemplazar el ítem 3 por la condición $F_{Arr}(g \circ_K f) = F_{Arr}(f) \circ_L F_{Arr}(g)$.

Observación 2.1.5. Sea $F : C \rightarrow D$ un functor contravariante, observar que podemos verlo como un functor covariante revirtiendo el sentido de las flechas en una de las categorías, es decir, tanto $F : C^{op} \rightarrow D$ como $F : C \rightarrow D^{op}$ son funtores covariantes.

Ejemplo 2.1.6. ■ El ejemplo más sencillo de functor (y de isomorfismo) es, dada una categoría K , el **functor Identidad** $Id : K \rightarrow K$, donde $Id_{Obj_K} : Obj_K \rightarrow Obj_K$ se define como $IdA = A$ para todo A en Obj_K e $Idf = f$ para toda $f : A \rightarrow B$ en Arr_K .

- En espacios vectoriales la dualización $(-)^* : Vect \rightarrow Vect$ resulta ser un functor contravariante ya que a nivel de morfismos cumple que $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$. Por lo tanto, por la observación anterior, se puede considerar como functor **covariante** $(-)^* : Vect^{op} \rightarrow Vect$. De forma análoga, por lo visto en las partes 1 y 2 de la Observación 1.6.9, la construcción del dual graduado nos brinda un functor contravariante $(-)^{*gr} : gVect \rightarrow gVect$, o un functor covariante $(-)^{*gr} : gVect^{op} \rightarrow gVect$.
- Cuando los objetos (y mapas) de una categoría A' se obtienen agregando estructura a objetos de otra categoría A , se tiene lo que se conoce como el **functor de olvido** $U : A' \rightarrow A$, que se olvida de la estructura agregada. Por ejemplo, los grupos son conjuntos con una estructura adicional y los morfismos de grupos son funciones entre dichos conjuntos, que cumplen condiciones adicionales. Entonces tenemos un functor $U : Grp \rightarrow Set$, que manda a un grupo (G, \times, e) al conjunto G y a un morfismo de grupos lo manda a él mismo, pensándolo simplemente como función entre conjuntos. De forma similar se tienen los funtores de olvido $U : Vect_{\mathbb{k}} \rightarrow Set$, $U : Alg \rightarrow Vect$, etc.
- Consideremos ahora el functor $F : Set \rightarrow Vect_{\mathbb{k}}$ dado por $FA = \langle A \rangle_{\mathbb{k}}$ para todo $A \in Set$ donde $\langle A \rangle_{\mathbb{k}}$ denota el \mathbb{k} -espacio vectorial con base A y si $f : A \rightarrow B \in Arr_{Set}$, entonces $Ff : FA \rightarrow FB$ es la extensión por linealidad de f .
- Consideremos una extensión del ejemplo anterior cuando la categoría de salida es la categoría de grupos y la categoría de llegada es la de álgebras de Hopf. Definimos el functor $F' : Grp \rightarrow Halg$ dado por, para cada grupo G , $F'_{Obj}(G) = \langle G \rangle_{\mathbb{k}} = \mathbb{k}G$ con la estructura de álgebra de Hopf vista en el Ejemplo 1.4.2. A nivel de morfismos, es fácil comprobar que las extensiones lineales de homomorfismos de grupos resultan en morfismos de álgebras de Hopf entre sus correspondientes álgebras de Hopf asociadas.

- Sea $\otimes : Vect_{\mathbb{k}} \times Vect_{\mathbb{k}} \rightarrow Vect_{\mathbb{k}}$ el **functor producto tensorial** definido a nivel de objetos como $\otimes(V, W) = V \otimes W$ y para dos flechas $f : V \rightarrow V'$ y $g : W \rightarrow W'$ en $Vect_{\mathbb{k}}$, el functor a nivel de flechas es $\otimes(f, g) = f \otimes g$ (o sea que si $v \in V$ y $w \in W$ entonces $\otimes(f, g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$).
- Si K, L y M son categorías y $F : K \times L \rightarrow M$ es un functor, para cada objeto k de K obtenemos un functor $F_k : L \rightarrow M$, que a nivel de objetos es $F_k(l) = F(k, l)$ y a nivel de flechas es $F_k(f) = F(id_k, f)$. A este functor lo escribiremos $F(k, -) : L \rightarrow M$. De forma análoga se define $F(-, l) : K \rightarrow M$ para cada objeto $l \in L$.

Definición 2.1.7. *Dados dos funtores F y G de K en L , una **transformación natural** $\tau : F \rightarrow G$ es una función $\tau : Obj_K \rightarrow Arr_K$ tal que:*

- para cada objeto A de K , $\tau(A) : FA \rightarrow GA$,
- y para toda flecha $f : A \rightarrow B$ en Arr_K el siguiente diagrama en L conmuta:

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\tau(A)} & GA \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FB & \xrightarrow{\tau(B)} & GB. \end{array}$$

En general escribiremos $\tau(A) = \tau_A$ y llamaremos a τ_A la componente A de τ .

Decimos que τ es un **isomorfismo natural** entre dos funtores F y G de K en L , si es un transformación natural tal que τ_A es invertible para todo A objeto en K .

Es decir que para cada objeto $A \in K$ con $\tau_A : FA \rightarrow GA$, existe una transformación natural $\gamma_A : GA \rightarrow FA$, que cumple $\gamma_A \circ \tau_A = Id_{FA}$ y que $\tau_A \circ \gamma_A = Id_{GA}$. A esta transformación natural la escribiremos como τ^{-1} .

Ejemplo 2.1.8.

- Sea F el functor $F : Vect_{\mathbb{k}} \rightarrow Vect_{\mathbb{k}}$ definido a nivel de objetos como $F(V) = \mathbb{k} \otimes V$ y a nivel de morfismos como $F(T) = Id_{\mathbb{k}} \otimes T$.

Es fácil ver que los morfismos $\lambda(V) = \lambda_V : V \rightarrow \mathbb{k} \otimes V$ definen un isomorfismo natural $\lambda : Id \rightarrow F$ entre el functor Identidad y F , ya que si V y $W \in Vect$ y $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} Id(V) = V & \xrightarrow{\lambda(V)=\lambda_V} & FV = \mathbb{k} \otimes V \\ IdT \downarrow & & \downarrow FT=Id_{\mathbb{k}} \otimes T \\ Id(W) = W & \xrightarrow{\lambda(W)=\lambda_W} & FW = \mathbb{k} \otimes W. \end{array}$$

Razonando análogamente los mapas $\rho_V : V \rightarrow V \otimes \mathbb{k}$ definen un isomorfismo natural entre funtores $\rho : Id \rightarrow (-) \otimes \mathbb{k}$.

Lo mismo sucede con las versiones graduadas de λ y ρ .

- Consideremos los funtores covariantes $F, G : Vect^{op} \times Vect^{op} \rightarrow Vect$ dados por

$$F_{Obj}(V, W) = V^* \otimes W^*, F_{Arr}(f, g) = f^* \otimes g^* \text{ y } G_{Obj}(V, W) = (V \otimes W)^*, G_{Arr}(f, g) = (f \otimes g)^*.$$

Observar que por el Lema 1.6.2, los morfismos $\gamma_{V,W} : F(V, W) \rightarrow G(V, W)$ de la Definición 1.6.1, definen una transformación natural $\gamma : F \rightarrow G$ y análogamente para su versión graduada (ver Observación 1.6.9 Item 5).

A continuación presentaremos algunas estructuras y propiedades de categorías.

2.2. Categorías monoidales y monoides de Hopf

Definición 2.2.1. Una *categoría monoidal* es una séxtupla $(V, \bullet, I, \alpha, \lambda, \rho)$ tal que V es una categoría, $\bullet : V \times V \rightarrow V$ es un functor, I es un objeto de V , α es un isomorfismo natural $\alpha : - \bullet (- \bullet -) \rightarrow (- \bullet -) \bullet -$, es decir que dados $A, B, C \in V$, $\alpha_{A,B,C} : A \bullet (B \bullet C) \rightarrow (A \bullet B) \bullet C$, y además $\lambda : - \rightarrow I \bullet -$ y $\rho : - \rightarrow - \bullet I$ son isomorfismos naturales de funtores tales que si $A \in V$, entonces $\lambda_A : A \rightarrow I \bullet A$, y $\rho_A : A \rightarrow A \bullet I$, y son tales que los siguientes diagramas conmutan (llamados de coherencia):

$$\begin{array}{ccc}
 & A \bullet (B \bullet (C \bullet D)) & \\
 \swarrow \text{Id}_A \bullet \alpha_{B,C,D} & & \searrow \alpha_{A,B,C \bullet D} \\
 A \bullet ((B \bullet C) \bullet D) & & (A \bullet B) \bullet (C \bullet D) \\
 \searrow \alpha_{A,B \bullet C,D} & & \swarrow \alpha_{A \bullet B,C,D} \\
 (A \bullet (B \bullet C)) \bullet D & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C} \bullet \text{Id}_D} & ((A \bullet B) \bullet C) \bullet D
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A \bullet (I \bullet B) & \xrightarrow{\alpha_{A,I,B}} & (A \bullet I) \bullet B \\
 \swarrow \text{Id}_A \bullet \lambda_B & & \searrow \rho_A \bullet \text{Id}_B \\
 & A \bullet B &
 \end{array}$$

Al primer diagrama se le llama *diagrama pentagonal*. Al functor \bullet se le llama *producto* y al objeto I se le llama *neutro*.

Observación 2.2.2. Por la Proposición 1.1 de [JYR93], se deduce que $\lambda_I = \rho_I$ y que los siguientes diagramas conmutan,

$$\begin{array}{ccc}
 I \bullet (A \bullet B) & \xrightarrow{\alpha_{I,A,B}} & (I \bullet A) \bullet B \\
 \swarrow \lambda_{A \bullet B} & & \searrow \lambda_A \bullet \text{Id}_B \\
 & A \bullet B &
 \end{array}
 \quad , \quad
 \begin{array}{ccc}
 A \bullet (B \bullet I) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,I}} & (A \bullet B) \bullet I \\
 \swarrow \text{Id}_A \bullet \rho_B & & \searrow \rho_{A \bullet B} \\
 & A \bullet B &
 \end{array}$$

Ejemplo 2.2.3.

- Sean A, B y $C \in \text{Vect}_{\mathbb{k}}$; definimos $\alpha_{\text{Vect}_{\mathbb{k}}} A,B,C : A \otimes (B \otimes C) \rightarrow (A \otimes B) \otimes C$ como el morfismo que manda $a \otimes (b \otimes c)$ en $(a \otimes b) \otimes c$. Es claro que $\alpha_{\text{Vect}_{\mathbb{k}}}$ es un isomorfismo natural. Tomando $\lambda_{\text{Vect}_{\mathbb{k}}}$ y $\rho_{\text{Vect}_{\mathbb{k}}}$ como en el Ejemplo 2.1.8., resulta claro que $(\text{Vect}_{\mathbb{k}}, \otimes, \mathbb{k}, \alpha_{\text{Vect}_{\mathbb{k}}}, \lambda_{\text{Vect}_{\mathbb{k}}}, \rho_{\text{Vect}_{\mathbb{k}}})$ es una categoría monoidal.
- Si consideramos los morfismos graduados de los mapas del punto anterior, obtenemos que $(g\text{Vect}_{\mathbb{k}}, \bullet, \mathbb{K}, \alpha_{g\text{Vect}_{\mathbb{k}}}, \lambda_{g\text{Vect}_{\mathbb{k}}}, \rho_{g\text{Vect}_{\mathbb{k}}})$ es otra categoría monoidal.

Observación 2.2.4. La categoría Set con la unión usual de conjuntos NO es monoidal, ya que la unión no es un functor. Esto se debe a que no se puede definir de forma functorial la unión de funciones $f \cup g : A \cup B \rightarrow A' \cup B'$. Esto se soluciona considerando a la unión disjunta $A \sqcup B$.

Observación 2.2.5. Como α es un isomorfismo natural, para cada objeto A tenemos que $(A \bullet A) \bullet A \cong A \bullet (A \bullet A)$. Llamaremos $A \bullet A \bullet A$, o $A^{\bullet 3}$ a cualquiera de estos objetos.

Iterando este procedimiento, llamaremos $A^{\bullet n} = \underbrace{A \bullet \cdots \bullet A}_{n \text{ veces}}$ a cualquiera de los objetos isomorfos obtenidos de aplicar consecutivamente el functor \bullet , $n - 1$ veces, en cualquiera de los órdenes posibles.

Definición 2.2.6.

(1) Un **monoide en una categoría monoidal** $(V, \bullet, I, \alpha, \lambda, \rho)$ es una terna (A, μ, u) , donde $A \in \text{Obj}_V$, $\mu : A \bullet A \rightarrow A$ y $u : I \rightarrow A$ son morfismos en Arr_V , llamados **producto** (o **multiplicación**) y **unidad** respectivamente, tales que los siguientes diagramas (de asociatividad y unidad) conmutan,

$$\begin{array}{ccc} A \bullet (A \bullet A) & \xrightarrow{\alpha_{A,A,A}} & (A \bullet A) \bullet A \\ \text{Id} \bullet \mu \downarrow & & \downarrow \mu \bullet \text{Id} \\ A \bullet A & \xrightarrow{\mu} & A \xleftarrow{\mu} A \bullet A \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} I \bullet A & \xrightarrow{u \bullet \text{Id}} & A \bullet A \xleftarrow{\text{Id} \bullet u} A \bullet I \\ \cong \swarrow & & \downarrow \mu \cong \\ & & A \end{array}$$

Con la notación de la Observación 2.2.5, el primer diagrama puede escribirse como:

$$\begin{array}{ccc} A \bullet A \bullet A & \xrightarrow{\text{Id} \bullet \mu} & A \bullet A \\ \mu \bullet \text{Id} \downarrow & & \downarrow \mu \\ A \bullet A & \xrightarrow{\mu} & A \end{array} \quad \text{o como} \quad \begin{array}{ccc} A^{\bullet 3} & \xrightarrow{\text{Id} \bullet \mu} & A^{\bullet 2} \\ \mu \bullet \text{Id} \downarrow & & \downarrow \mu \\ A^{\bullet 2} & \xrightarrow{\mu} & A \end{array}$$

(2) Sean dos monoides (A, μ, u) y (A', μ', u') en una categoría monoidal, un **morfismo de monoides** es un mapa $f : A \rightarrow A'$ con $f \in \text{Arr}_V$ tal que $f \circ \mu = \mu' \circ (f \bullet f)$ y $f \circ u = u'$; es decir que los siguientes diagramas conmutan,

$$\begin{array}{ccc} A \bullet A & \xrightarrow{f \bullet f} & A' \bullet A' \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu' \\ A & \xrightarrow{f} & A' \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{u} & A \\ & \searrow u' & \downarrow f \\ & & A' \end{array}$$

(3) Un **comonoide en una categoría monoidal** $(V, \bullet, I, \alpha, \lambda, \rho)$ es una terna (C, Δ, ε) con $C \in \text{Obj}_V$, donde $\Delta : C \rightarrow C \bullet C$ y $\varepsilon : C \rightarrow I$ son morfismos en Arr_V , llamados **coproducto** (o **comultiplicación**) y **counidad** respectivamente, tales que los siguientes diagramas (de coasociatividad y de counidad) conmutan ,

$$\begin{array}{ccc} C \bullet C \bullet C & \xleftarrow{\text{Id} \bullet \Delta} & C \bullet C \\ \Delta \bullet \text{Id} \uparrow & & \uparrow \Delta \\ C \bullet C & \xleftarrow{\Delta} & C \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} I \bullet C & \xleftarrow{\varepsilon \bullet \text{Id}} & C \bullet C \xrightarrow{\text{Id} \bullet \varepsilon} C \bullet I \\ \cong \swarrow & & \uparrow \Delta \cong \\ & & C \end{array}$$

Observar que estos diagramas se obtienen a partir de los diagramas de monoides, sustituyendo μ por Δ , u por ε y revirtiendo el sentido de las flechas.

(4) Sean dos comonoides (C, Δ, ε) y $(C', \Delta', \varepsilon')$ en una categoría monoidal, un **morfismo de comonoides** es un mapa de $f : C \rightarrow C'$ con $f \in \text{Arr}_V$ tal que $(f \bullet f) \circ \Delta = \Delta' \circ f$ y $\varepsilon' \circ f = \varepsilon$, es decir que los siguientes diagramas conmutan,

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & C' \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta' \\ C \bullet C & \xrightarrow{f \bullet f} & C' \bullet C' \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & C' \\ & \searrow \varepsilon & \downarrow \varepsilon' \\ & & \mathbb{k} \end{array} .$$

Ejemplo 2.2.7. ■ En $(\text{Vect}_{\mathbb{k}}, \otimes)$ los monoides y comonoides son las \mathbb{k} -álgebras y \mathbb{k} -coálgebras respectivamente. Esto se deduce fácilmente con sólo observar los diagramas conmutativos que definen estas estructuras.

- De forma análoga, en $(g\text{Vect}_{\mathbb{k}}, \bullet)$, los monoides y comonoides son las \mathbb{k} -álgebras graduadas y las \mathbb{k} -coálgebras graduadas respectivamente.
- La categoría $(\text{Set}, \times, \{\#\})$ es una categoría monoidal, donde $\{\#\}$ es el conjunto con un sólo elemento o singletón. Un monoide (A, μ, u) en esta categoría es un conjunto $A \in \text{Set}$ con $\mu : A \times A \rightarrow A$ un mapa asociativo y $u : \{\#\} \rightarrow A$ que cumple el diagrama de unidad. Por lo tanto $(A, \mu, u(\#\))$ es un monoide (con la noción usual de monoide) es decir, un conjunto con una operación asociativa con unidad.

Para esta categoría resulta que todo conjunto $C \in \text{Set}$ con los mapas $\Delta : C \rightarrow C \times C$ y $\varepsilon : C \rightarrow \{\#\}$ definidos como $\Delta(c) = (c, c)$ y $\varepsilon(c) = \#$ es un comonoide en $(\text{Set}, \times, \{\#\})$ y es fácil ver que ésta es la única estructura de comonoide que se le puede dar a un conjunto C en esta categoría.

A partir de ahora si no hay lugar a confusión a una categoría monoidal $(V, \bullet, I, \alpha, \lambda, \rho)$ la escribiremos sólo como (V, \bullet) .

Definición 2.2.8.

Una **categoría monoidal trenzada**, es una terna (V, \bullet, β) , donde (V, \bullet) es una categoría monoidal y β es un isomorfismo natural $\beta_{A,B} : A \bullet B \rightarrow B \bullet A$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} A \bullet B \bullet C & \xrightarrow{\beta_{A \bullet B, C}} & B \bullet C \bullet A \\ \beta_{A, B} \bullet Id_C \searrow & & \nearrow Id_B \bullet \beta_{A, C} \\ & B \bullet A \bullet C & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} A \bullet B \bullet C & \xrightarrow{\beta_{A \bullet B, C}} & C \bullet A \bullet B \\ Id_A \bullet \beta_{B, C} \searrow & & \nearrow \beta_{A, C} \bullet Id_B \\ & A \bullet C \bullet B & \end{array} .$$

Al isomorfismo β se le llama **trenza**.

Observación 2.2.9. Se puede probar que β satisface la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} A \bullet I & \xrightarrow{\beta_{A, I}} & I \bullet A \\ \rho_A \swarrow & & \nearrow \lambda_A \\ & A & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} I \bullet A & \xrightarrow{\beta_{I, A}} & A \bullet I \\ \lambda_A \swarrow & & \nearrow \rho_A \\ & A & \end{array} \quad \text{y,}$$

$$\begin{array}{ccccc} A \bullet B \bullet C & \xrightarrow{Id_A \bullet \beta_{B, C}} & A \bullet C \bullet B & \xrightarrow{\beta_{A, C} \bullet Id_B} & C \bullet A \bullet B \\ \beta_{A, B} \bullet Id_C \downarrow & & & & \downarrow Id_C \bullet \beta_{A, B} \\ B \bullet A \bullet C & \xrightarrow{Id_B \bullet \beta_{A, C}} & B \bullet C \bullet A & \xrightarrow{\beta_{B, C} \bullet Id_A} & C \bullet B \bullet A \end{array}$$

Y además como $\lambda_I = \rho_I$, se prueba que $\beta_{I,I} = Id_{I \bullet I}$.

Ejemplo 2.2.10. Las categorías monoidales $Vect_{\mathbb{k}}$ y $gVect_{\mathbb{k}}$ son trenzadas con las siguientes trenzas:

- La trenza en $Vect_{\mathbb{k}}$ es $\beta_{Vect_{\mathbb{k}},V,W}(v \otimes w) = w \otimes v$ para todo $v \in V$ y $w \in W$.
- Observar que si $V, W \in gVect_{\mathbb{k}}$, entonces la trenza que definimos en el ítem anterior induce el siguiente isomorfismo de espacios vectoriales graduados $\beta_{gVect_{\mathbb{k}}} : V \bullet W \rightarrow W \bullet V$ definido como:

$$\beta_{gVect_{\mathbb{k}}} = \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ n \geq 0}} \beta_{Vect, V_i, W_j}. \text{ Es fácil verificar que } \beta_{gVect_{\mathbb{k}}} \text{ es una trenza en } gVect_{\mathbb{k}}.$$

Definición 2.2.11.

1. En una categoría monoidal trenzada (V, \bullet) , un **bimonoide** es una quintupla $(H, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ donde (H, μ, u) es un monoide, (H, Δ, ε) es un comonoide y se cumple la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} H \bullet 4 & \xrightarrow{Id \bullet \beta_{H,H} \bullet Id} & H \bullet 4 \\ \Delta \bullet \Delta \uparrow & & \downarrow \mu \bullet \mu \\ H \bullet H & \xrightarrow{\mu} H \xrightarrow{\Delta} & H \bullet H \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{Id} & I \\ u \searrow & & \nearrow \varepsilon \\ & H & \end{array}$$

Diagrama 1

Diagrama 2

$$\begin{array}{ccc} H \bullet H & \xrightarrow{\varepsilon \bullet \varepsilon} & I \bullet I \\ \mu \downarrow & & \downarrow \lambda_I^{-1} \\ H & \xrightarrow{\varepsilon} & I \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{u} & H \\ \lambda_I \downarrow & & \downarrow \Delta \\ I \bullet I & \xrightarrow{u \bullet u} & H \bullet H \end{array}$$

Diagrama 3

Diagrama 4.

2. Un **morfismo de bimonoides** es un morfismo de monoïdes y de comonoïdes.

Observación 2.2.12.

Sea una categoría monoidal trenzada (V, \bullet, β) con (A_1, μ_1, u_1) y (A_2, μ_2, u_2) monoïdes, y $(C_1, \Delta_1, \varepsilon_1)$ y $(C_2, \Delta_2, \varepsilon_2)$ comonoïdes, entonces es fácil ver que:

- $A_1 \bullet A_2$ es un monoïde con los siguientes mapas,

$$\mu_{A_1 \bullet A_2} : A_1 \bullet A_2 \bullet A_1 \bullet A_2 \xrightarrow{Id \bullet \beta \bullet Id} A_1 \bullet A_1 \bullet A_2 \bullet A_2 \xrightarrow{\mu_1 \bullet \mu_2} A_1 \bullet A_2.$$

$$u_{A_1 \bullet A_2} : I \xrightarrow{\lambda_I = \rho_I} I \bullet I \xrightarrow{u_1 \bullet u_2} A_1 \bullet A_2.$$

- $C_1 \bullet C_2$ es un comonoïde con los siguientes mapas,

$$\Delta_{C_1 \bullet C_2} : C_1 \bullet C_2 \xrightarrow{\Delta_1 \bullet \Delta_2} C_1 \bullet C_1 \bullet C_2 \bullet C_2 \xrightarrow{Id_{C_1} \bullet \beta \bullet Id_{C_2}} C_1 \bullet C_2 \bullet C_1 \bullet C_2.$$

$$\varepsilon_{C_1 \bullet C_2} : C_1 \bullet C_2 \xrightarrow{\varepsilon_1 \bullet \varepsilon_2} I \bullet I \xrightarrow{\lambda_I^{-1}} I.$$

- Las ternas (I, λ_I, Id_I) y $(I, \lambda_I^{-1}, Id_I)$ son un comonoïde y un monoïde en (V, \bullet) respectivamente.

La observación anterior nos permite realizar las siguientes afirmaciones:

- La conmutatividad de los Diagramas 1 y 4, y de los Diagramas 2 y 3, equivale a pedir que $\Delta : H \rightarrow H \bullet H$ y $\varepsilon : H \rightarrow I$ sean morfismos de monoides respectivamente.
- La conmutatividad de los Diagramas 1 y 3, y los Diagramas 2 y 4, equivale a pedir que $\mu : H \bullet H \rightarrow H$ y $u : I \rightarrow H$ sean morfismos de comonoides respectivamente.

Concluimos que:

En una categoría monoidal trenzada (V, \bullet) , dada la quintupla $(H, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ con (H, μ, u) monoide y (H, Δ, ε) comonoide, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $(H, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$, es un bimonioide,
- los mapas Δ y ε son morfismos de monoides,
- los mapas μ y u son morfismos de comonoides.

Esta observación en la categoría $Vect_{\mathbb{k}}$ es la Proposición 1.3.1.

Ejemplo 2.2.13.

- Con las trenzas definidas en el Ejemplo 2.2.10, es fácil ver que los bimonoides en $Vect$ son biálgebras y en $gVect$ son biálgebras graduadas.
- En la categoría $(Set, \times, \{\sharp\})$ con la trenza $\beta_{Set} : A \times B \rightarrow B \times A$ definida como $\beta_{Set}(a, b) = (b, a) \forall a \in A$ y $b \in B$, si (B, μ, u) es cualquier monoide, entonces con la estructura diagonal $(\Delta(b) = (b, b)$ y $\varepsilon(b) = \sharp \forall b \in B)$, resulta que $(B, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonioide.

Definición 2.2.14. Sea (V, \bullet) una categoría monoidal, (C, Δ, ε) un comonoide en V y (A, μ, u) un monoide en V , el **producto de convolución** es el mapa $*$: $Hom_V(C, A) \times Hom_V(C, A) \rightarrow Hom_V(C, A)$ definido como

$$f * g = \mu \circ (f \bullet g) \circ \Delta, \quad \forall f, g \in Hom_V(C, A).$$

Observación 2.2.15.

- El producto de convolución es asociativo y el mapa $u\varepsilon : C \rightarrow A$ es el neutro de este producto.
La prueba es análoga a la vista en el Lema 1.3.10.
- En particular si $H \in V$ es un bimonioide en (V, \bullet, β) , resulta que $(Hom(H, H), *, u\varepsilon)$ es un monoide, llamado **monoide de convolución**.

Definición 2.2.16. Un **monoide de Hopf** en V es un bimonioide H , tal que el mapa $Id : H \rightarrow H$ es invertible en $(Hom(H, H), *, u\varepsilon)$. Es decir, existe un mapa $S : H \rightarrow H$ tal que $S * Id = Id * S = u\varepsilon$. Esto es que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} H \bullet H & \xrightarrow{Id \bullet S} & H \bullet H \\ \Delta \uparrow & & \downarrow \mu \\ H & \xrightarrow{\varepsilon} I \xrightarrow{u} & H \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} H \bullet H & \xrightarrow{S \bullet Id} & H \bullet H \\ \Delta \uparrow & & \downarrow \mu \\ H & \xrightarrow{\varepsilon} I \xrightarrow{u} & H \end{array} .$$

Al mapa S le llamaremos **antípoda de H** .

La antípoda de un bimonioide H puede existir o no, pero si existe es única.

Ejemplo 2.2.17.

- Es fácil ver que los monoides de Hopf en $Vect$ son álgebras de Hopf y que en $gVect$ son álgebras de Hopf graduadas.
- Sea H un monoide de Hopf en la categoría $(Set, \times, \{\#\})$, si llamamos $u(\#) = e$, y tomamos el coproducto diagonal, el diagrama para la antípoda se puede expresar como $a * S(a) = e = S(a) * a \forall a \in H$, por lo tanto $S(a)$ es el inverso de a , obteniendo que un monoide de Hopf en esta categoría es un grupo en el sentido usual.

Observación 2.2.18. Existe la noción de categoría monoidal trezada **laxa**: en vez de exigir que β sea un isomorfismo, se pide la conmutatividad de los diagramas de la definición de categoría monoidal trezada y además se pide la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 A \bullet I & \xrightarrow{\beta_{A,I}} & I \bullet A \\
 \rho_A \swarrow & & \nearrow \lambda_A \\
 & A &
 \end{array}
 \quad , \quad
 \begin{array}{ccc}
 I \bullet A & \xrightarrow{\beta_{I,A}} & A \bullet I \\
 \lambda_A \swarrow & & \nearrow \rho_A \\
 & A &
 \end{array}
 .$$

Todo lo visto hasta ahora vale para categorías monoidales trezadas laxas. En este trabajo las trezas serán isomorfismos.

Capítulo 3

Especies

En este capítulo presentaremos las especies vectoriales y sus propiedades básicas. Estas estructuras se verán relacionadas con las álgebras de Hopf graduadas vía los funtores de Fock. Este tema se encuentra ampliamente desarrollado en [AM10].

La categoría de especies con sus operaciones básicas fue introducida por Joyal en [JOY81]. La idea de una especie vectorial es similar a la de espacios vectoriales graduados, pero en vez de tener una graduación dada por $\{n \in \mathbb{N}\}$, se tiene una graduación en conjuntos finitos.

3.1. Definiciones y Ejemplos.

Definición 3.1.1.

- Una **especie conjuntista** es un functor covariante $\mathbf{p} : \text{Set}^\times \rightarrow \text{Set}$ y, una **especie vectorial** es un functor covariante $\mathbf{q} : \text{Set}^\times \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{k}}$.
- Un **morfismo de especies** es una transformación natural $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$, donde \mathbf{p} y \mathbf{q} son especies.
- Un **isomorfismo de especies** es una transformación natural invertible.

Dada una especie \mathbf{p} , notaremos la imagen de un conjunto finito I como $\mathbf{p}[I]$ y diremos que es la I -componente de \mathbf{p} o que es la componente I de \mathbf{p} .

- Diremos que una especie vectorial \mathbf{p} es de **dimensión finita o es finita** si para todo conjunto finito I el espacio vectorial $\mathbf{p}[I]$ es de dimensión finita.

Como trabajaremos con especies vectoriales, sólo nos referiremos a ellas como especies.

Observación 3.1.2. Tenemos entonces que una especie consiste de una familia de espacios vectoriales $\mathbf{p}[I]$ para cada conjunto finito I , y para cada biyección $\sigma : I \rightarrow J$ entre conjuntos finitos tenemos la transformación lineal, $\mathbf{p}[\sigma] : \mathbf{p}[I] \rightarrow \mathbf{p}[J]$ tal que:

- $\mathbf{p}[Id_I] = Id_{\mathbf{p}[I]}$ para todo conjunto finito I , y
- $\mathbf{p}[\tau \circ \sigma] = \mathbf{p}[\tau] \circ \mathbf{p}[\sigma]$, siempre que $I \xrightarrow{\sigma} J \xrightarrow{\tau} K$ sean biyecciones componibles, con I, J y K conjuntos finitos.

Observemos también que si $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ es un morfismo de especies, para cada biyección $\sigma : I \rightarrow J$ entre conjuntos finitos, f es una familia de transformaciones lineales, donde para cada conjunto finito I es $f_I : \mathbf{p}[I] \rightarrow \mathbf{q}[I]$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{p}[I] & \xrightarrow{f_I} & \mathbf{q}[I] \\
 \mathbf{p}[\sigma] \downarrow & & \downarrow \mathbf{q}[\sigma] \\
 \mathbf{p}[J] & \xrightarrow{f_J} & \mathbf{q}[J]
 \end{array}$$

Decimos que f_I es la I -componente de f o la componente I de f .

Definición 3.1.3. La **categoría de especies** es la categoría que tiene por objetos a las especies y como morfismos a los morfismos de especies. Escribiremos \mathbf{Sp} para referirnos a esta categoría.

Afirmación 3.1.4. Para toda $\sigma : I \rightarrow J$ biyección y \mathbf{p} especie, tenemos que $\mathbf{p}[\sigma] : \mathbf{p}[I] \rightarrow \mathbf{p}[J]$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, cuya transformación lineal inversa es $\mathbf{p}[\sigma^{-1}]$.

Demostración. Si $\sigma : I \rightarrow J$ es una biyección, está definida su inversa $\sigma^{-1} : J \rightarrow I$ tal que $\sigma \circ \sigma^{-1} = Id_J$ y $\sigma^{-1} \circ \sigma = Id_I$, y por ser \mathbf{p} un functor, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}[\sigma] \circ \mathbf{p}[\sigma^{-1}] &= \mathbf{p}[\sigma \circ \sigma^{-1}] = \mathbf{p}[Id_J] = Id_{\mathbf{p}[J]}; \text{ de forma análoga obtenemos que} \\
 \mathbf{p}[\sigma^{-1}] \circ \mathbf{p}[\sigma] &= Id_{\mathbf{p}[I]}. \text{ Entonces } \mathbf{p}[\sigma] \text{ es invertible y su inversa es } \mathbf{p}[\sigma^{-1}] : \mathbf{p}[J] \rightarrow \mathbf{p}[I]. \quad \square
 \end{aligned}$$

A continuación veremos algunos ejemplos de especies que nos serán de utilidad más adelante.

Ejemplo 3.1.5. La **especie exponencial** \mathbf{E} es el functor $\mathbf{E} : \mathbf{Set}^\times \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}$, definido como:

- $\mathbf{E}[I] = \mathbb{k}$, $\forall I$ conjunto finito y
- $\mathbf{E}[\sigma] = Id_{\mathbb{k}}$, $\forall \sigma$ biyección.

Fácilmente se puede verificar que \mathbf{E} es una especie.

Llamaremos \triangleright_I al elemento $1 \in \mathbb{k}$ como elemento del espacio vectorial $\mathbf{E}[I]$; observar que $\mathbf{E}[I] = \langle \triangleright_I \rangle_{\mathbb{k}}$ (el \mathbb{k} -espacio vectorial generado por \triangleright_I).

Ejemplo 3.1.6. Definimos a la **especie unidad** $\mathbf{1}$ como:

- $\mathbf{1}[I] = \begin{cases} \mathbb{k} & \text{si } I = \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, con I conjunto finito y,
- para cada biyección $\sigma : I \rightarrow J$ con $I \neq \emptyset$ se define $\mathbf{1}[\sigma] = 0$ y $\mathbf{1}[Id_\emptyset] = Id_{\mathbb{k}}$.

Es fácil verificar que se cumplen las propiedades de la observación 3.1.2, resultando que $\mathbf{1}$ es una especie.

Ejemplo 3.1.7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y B una base. Sea I un conjunto finito, definimos $V^{\otimes I} := \langle f \text{ tal que } f : I \rightarrow B \rangle_{\mathbb{k}}$. La **especie** \mathbf{E}_V es el functor $\mathbf{E}_V : \mathbf{Set}^\times \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}$, definido como:

- $\mathbf{E}_V[I] = V^{\otimes I}$, $\forall I$ conjunto finito y,
- $\mathbf{E}_V[\sigma] : V^{\otimes I} \rightarrow V^{\otimes J}$, $\forall \sigma : I \rightarrow J$ biyección de conjuntos finitos, dada por la linealización de $\mathbf{E}_V[\sigma](f)(j) = f(\sigma^{-1}(j))$, $\forall j \in J$ y $\forall f : I \rightarrow B$.

Ejemplo 3.1.8. Sea I un conjunto finito. Un orden lineal en I es un orden $<$ en que para todo par de elementos $a \neq b \in I$ se tiene que $a < b$ o $b < a$. Si $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ escribiremos el orden $i_1 < \dots < i_n$ como $i_1 \mid \dots \mid i_n$.

La **especie de ordenes lineales** \mathbf{L} es la especie definida como:

- $\mathbf{L}[I] = \langle l \text{ t.q. } l \text{ es un orden lineal de } I \rangle_{\mathbb{k}}$, $\forall I$ conjunto finito y

- si $\sigma : I \rightarrow J$ es una biyección de conjuntos finitos, entonces $\mathbf{L}[\sigma] : \mathbf{L}[I] \rightarrow \mathbf{L}[J]$ al igual que el ejemplo anterior, $\mathbf{L}[\sigma]$ re-etiqueta los elementos de I por los de J , a través de σ , es decir que si $l = i_1 | \dots | i_n$, entonces $\mathbf{L}[\sigma](l) = \sigma(i_1) | \dots | \sigma(i_n)$.

A modo de ejemplo: si $I = \{a, b, c\}$, entonces $\mathbf{L}[I]$ es el espacio vectorial que tiene como base al siguiente conjunto: $\{a | b | c, a | c | b, b | a | c, b | c | a, c | a | b, c | b | a\}$; y si $J = \{p, q, r\}$ y $\sigma : I \rightarrow J$ la biyección definida como $\sigma(a) = p, \sigma(b) = q, \sigma(c) = r$ entonces $\mathbf{L}[\sigma](a | c | b) = p | r | q$.

Es fácil verificar que con las definiciones anteriores \mathbf{L} es una especie.

Observar que si tomamos $V = \bigoplus_{I \in \text{Set}^X} \mathbf{p}[I]$, podemos pensar una especie como un espacio vectorial graduado por conjuntos finitos. Entonces imitando al producto de Cauchy en $gVect$ damos la siguiente definición.

Definición 3.1.9. Si \mathbf{p} y \mathbf{q} son especies vectoriales, definimos el **producto de Cauchy** entre \mathbf{p} y \mathbf{q} como el functor $\bullet : Sp \times Sp \rightarrow Sp$, que escribiremos $\bullet(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \mathbf{p} \bullet \mathbf{q}$, definido como

- a nivel de objetos $(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[I] = \bigoplus_{I=S \sqcup T} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T]$, para I conjunto finito donde $S \sqcup T$ denota una unión ordenada y disjunta de conjuntos $S, T \subseteq I$,
- a nivel de morfismos $(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[\sigma] = \bigoplus_{I=S \sqcup T} \mathbf{p}[\sigma_S] \otimes \mathbf{q}[\sigma_T]$ para toda $\sigma : I \rightarrow J$ biyección entre conjuntos finitos, donde $\sigma_S = \sigma|_S : S \rightarrow \sigma(S)$ y $\sigma_T = \sigma|_T : T \rightarrow \sigma(T)$.

En la suma de $(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[I]$ están incluidas las descomposiciones $\emptyset \sqcup I$ e $I \sqcup \emptyset$. También podemos escribir el producto de Cauchy como

$$(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[I] = \bigoplus_{S \subseteq I} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[I \setminus S].$$

El lema que sigue nos permite asegurar que $\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}$ es una especie.

Lema 3.1.10. Sean \mathbf{p} y \mathbf{q} dos especies, entonces $\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}$ es una nueva especie.

Demostración. Veamos que $\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}$ es un functor de $\text{Set}^X \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{k}}$.

- Es claro que lleva los objetos de Set^X en objetos de $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$.
- Si $\sigma : I \rightarrow J$ es una biyección, entonces $(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[\sigma] = \underbrace{\bigoplus_{I=S \sqcup T} \mathbf{p}[\sigma_S] \otimes \mathbf{q}[\sigma_T]}_{\text{es una transformación lineal}}$.
- Para todo conjunto finito I , consideremos Id_I , la identidad en I . Tenemos que

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[Id_I] &= \bigoplus_{I=S \sqcup T} \mathbf{p}[Id_I|_S] \otimes \mathbf{q}[Id_I|_T] = \bigoplus_{I=S \sqcup T} \mathbf{p}[Id_S] \otimes \mathbf{q}[Id_T] = \bigoplus_{I=S \sqcup T} Id_{\mathbf{p}[S]} \otimes Id_{\mathbf{q}[T]} \\ &= \bigoplus_{I=S \sqcup T} Id_{\mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T]} = Id_{\bigoplus_{I=S \sqcup T} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T]} = Id_{(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[I]}. \end{aligned}$$
- Si σ y τ son dos biyecciones $\sigma : I \rightarrow J$ y $\tau : J \rightarrow L$, con I, J y L conjuntos finitos; como \mathbf{p} y \mathbf{q} son especies tenemos que

$$\mathbf{p}[(\tau \circ \sigma)|_S] = \mathbf{p}[\tau|_{\sigma(S)}] \circ \mathbf{p}[\sigma_S] \quad \text{y} \quad \mathbf{q}[(\tau \circ \sigma)|_S] = \mathbf{q}[\tau|_{\sigma(S)}] \circ \mathbf{q}[\sigma_S]. \quad \text{Entonces}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[\tau \circ \sigma] &= \bigoplus_{I=S \sqcup T} \mathbf{p}[(\tau \circ \sigma)|_S] \otimes \mathbf{q}[(\tau \circ \sigma)|_T] = \\
&= \bigoplus_{I=S \sqcup T} (\mathbf{p}[\tau|_{\sigma(S)}] \circ \mathbf{p}[\sigma|_S]) \otimes (\mathbf{q}[\tau|_{\sigma(T)}] \circ \mathbf{q}[\sigma|_T]) = \\
&= \left(\bigoplus_{I=S \sqcup T} \mathbf{p}[\tau|_{\sigma(S)}] \otimes \mathbf{q}[\tau|_{\sigma(T)}] \right) \circ \left(\bigoplus_{I=S \sqcup T} \mathbf{p}[\sigma|_S] \otimes \mathbf{q}[\sigma|_T] \right).
\end{aligned}$$

Observar que $\sigma(S) \sqcup \sigma(T) = J$ por lo que

$$(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[\tau \circ \sigma] = \left(\bigoplus_{J=\sigma(S) \sqcup \sigma(T)} \mathbf{p}[\tau|_{\sigma(S)}] \otimes \mathbf{q}[\tau|_{\sigma(T)}] \right) \circ (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[\sigma] = (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[\tau] \circ (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[\sigma]. \quad \square$$

A continuación daremos a la categoría $\mathcal{S}\mathbf{p}$, una estructura monoidal trenzada con el producto de Cauchy. En cada componente I , utilizaremos la estructura monoidal trenzada en $(Vect, \otimes, \mathbb{k}, \alpha_{Vect}, \rho_{Vect}, \lambda_{Vect}, \beta_{Vect})$ vista en los Ejemplos 2.2.3. y 2.2.10.

Sean \mathbf{p}, \mathbf{q} y $\mathbf{r} \in \mathcal{S}\mathbf{p}$, para definir $\alpha_{\mathcal{S}\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}} : \mathbf{p} \bullet (\mathbf{q} \bullet \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) \bullet \mathbf{r}$ lo haremos en cada componente I . Pero antes observar que

$$\mathbf{p} \bullet (\mathbf{q} \bullet \mathbf{r})[I] = \bigoplus_{I=R \sqcup S \sqcup T} \mathbf{p}[R] \otimes (\mathbf{q}[S] \otimes \mathbf{r}[T]) \quad \text{y} \quad (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) \bullet \mathbf{r}[I] = \bigoplus_{I=R \sqcup S \sqcup T} (\mathbf{p}[R] \otimes \mathbf{q}[S]) \otimes \mathbf{r}[T].$$

Por la estructura monoidal de $Vect$ para cada descomposición $I = R \sqcup S \sqcup T$, tenemos el mapa lineal $\alpha_{Vect, \mathbf{p}[R], \mathbf{q}[S], \mathbf{r}[T]} : \mathbf{p}[R] \otimes (\mathbf{q}[S] \otimes \mathbf{r}[T]) \rightarrow (\mathbf{p}[R] \otimes \mathbf{q}[S]) \otimes \mathbf{r}[T]$; por simplicidad a este mapa le llamaremos $\alpha_{R, S, T}$.

Definición 3.1.11. Definimos entonces $\alpha_{\mathcal{S}\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}}$, en la componente I como

$$\alpha_{\mathcal{S}\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, I} := \bigoplus_{R \sqcup S \sqcup T = I} \alpha_{R, S, T}.$$

Es decir, que si $x \in \mathbf{p}[R], y \in \mathbf{q}[S]$ y $z \in \mathbf{r}[T]$ entonces $\alpha_{\mathcal{S}\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, I}(x \otimes (y \otimes z)) = (x \otimes y) \otimes z$.

Para definir $\lambda_{\mathcal{S}\mathbf{p}, \mathbf{p}} : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{1} \bullet \mathbf{p}$, observar que

$$(\mathbf{1} \bullet \mathbf{p})[I] = \bigoplus_{I=S \sqcup T} \mathbf{1}[S] \otimes \mathbf{p}[T] = \mathbf{1}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[I] = \mathbb{k} \otimes \mathbf{p}[I],$$

y por lo tanto utilizando la estructura de $Vect$ tenemos al mapa $\lambda_{Vect, \mathbf{p}[I]} : \mathbf{p}[I] \rightarrow \mathbb{k} \otimes \mathbf{p}[I]$.

Definición 3.1.12. Se define $\lambda_{\mathcal{S}\mathbf{p}, \mathbf{p}} : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{1} \bullet \mathbf{p}$ en cada componente I como el mapa

$$\lambda_{\mathcal{S}\mathbf{p}, \mathbf{p}, I} : \mathbf{p}[I] \rightarrow \mathbb{k} \otimes \mathbf{p}[I] \quad \text{dado por} \quad \lambda_{\mathcal{S}\mathbf{p}, \mathbf{p}, I} := \lambda_{Vect, \mathbf{p}[I]}.$$

De forma análoga a la definición anterior, es decir, utilizando la estructura monoidal trenzada de $Vect$, definiremos los siguientes mapas:

- el mapa $\rho_{\mathcal{S}\mathbf{p}, \mathbf{p}} : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \bullet \mathbf{1}$ en la componente I ,

$$\rho_{\mathcal{S}\mathbf{p}, \mathbf{p}, I} : \mathbf{p}[I] \rightarrow \mathbf{p}[I] \otimes \mathbb{k} \quad \text{como} \quad \rho_{\mathcal{S}\mathbf{p}, \mathbf{p}, I} := \rho_{Vect, \mathbf{p}[I]}.$$

- el mapa $\beta_{\mathcal{S}\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} : \mathbf{p} \bullet \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} \bullet \mathbf{p}$ en la componente I ,

$$\beta_{\mathcal{S}\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, I} : (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[I] = \bigoplus_{I=S \sqcup T} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T] \rightarrow (\mathbf{q} \bullet \mathbf{p})[I] = \bigoplus_{I=S \sqcup T} \mathbf{q}[T] \otimes \mathbf{p}[S] \quad \text{como}$$

$$\beta_{Sp, \mathbf{p}, \mathbf{q}, I} := \bigoplus_{S \sqcup T = I} \beta_{Vect, \mathbf{p}[S], \mathbf{q}[T]}.$$

Por simplicidad escribiremos $\beta_{S,T}$ al mapa $\beta_{Vect, \mathbf{p}[S], \mathbf{q}[T]}$, por lo que podemos escribir al mapa anterior omitiendo el subíndice de la categoría como $\beta_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, I} := \bigoplus_{S \sqcup T = I} \beta_{S,T}$.

Proposición 3.1.13. Con los mapas recién definidos, tenemos que $(Sp, \bullet, \mathbf{1}, \alpha, \lambda, \rho)$ es una categoría monoidal y $(Sp, \bullet, \mathbf{1}, \alpha, \lambda, \rho, \beta)$ es trenzada.

Diremos si no hay lugar a confusión que (Sp, \bullet, β) es la categoría monoidal trenzada en especies con el producto de Cauchy.

Demostración.

Oservar que $\bullet, \alpha, \lambda, \rho$ y β fueron definidos en cada componente utilizando los correspondientes mapas de la estructura monoidal de $Vect$, claramente los diagramas de coherencia y de trenza laxa conmutan, ya que lo hacen en cada componente. Además como en cada componente los mapas $\alpha_{R,S,T}, \lambda_I, \rho_I$ y $\beta_{S,T}$ son invertibles, también lo son $\alpha_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}}, \lambda_{\mathbf{p}}, \rho_{\mathbf{p}}$ y $\beta_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}$. Por lo tanto resta ver que $\alpha_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}}, \lambda_{\mathbf{p}}, \rho_{\mathbf{p}}$ y $\beta_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}$ son morfismos de especies y que además definen transformaciones naturales.

Comencemos mostrando que el mapa $\alpha : Sp \times (Sp \times Sp) \rightarrow (Sp \times Sp) \times Sp$ es una transformación natural.

Sean $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{p}', \mathbf{q}'$ y \mathbf{r}' especies, observar que si $f \in Hom_{Sp \times Sp \times Sp}((\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}), (\mathbf{p}', \mathbf{q}', \mathbf{r}'))$, entonces existen f_1, f_2 y $f_3 \in Hom_{Sp}$ tal que $f = (f_1, f_2, f_3)$.

Definimos dos funtores $F_1, F_2 : Sp \times Sp \times Sp \rightarrow Sp$, como $F_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathbf{p} \bullet (\mathbf{q} \bullet \mathbf{r})$ y $F_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) \bullet \mathbf{r}$. Veamos que α es una transformación natural entre esos dos funtores, es decir que para $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{p}', \mathbf{q}'$ y \mathbf{r}' especies y el morfismo $f = (f_1, f_2, f_3) : (\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{p}', \mathbf{q}', \mathbf{r}')$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p} \times \mathbf{q} \times \mathbf{r} & , & F_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathbf{p} \bullet (\mathbf{q} \bullet \mathbf{r}) \xrightarrow{\alpha_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}}} F_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) \bullet \mathbf{r} \\ \downarrow f & & \downarrow F_2 f = (f_1 \bullet f_2) \bullet f_3 \\ \mathbf{p}' \times \mathbf{q}' \times \mathbf{r}' & & F_1(\mathbf{p}', \mathbf{q}', \mathbf{r}') = \mathbf{p}' \bullet (\mathbf{q}' \bullet \mathbf{r}') \xrightarrow{\alpha_{\mathbf{p}', \mathbf{q}', \mathbf{r}'}} F_2(\mathbf{p}', \mathbf{q}', \mathbf{r}') = (\mathbf{p}' \bullet \mathbf{q}') \bullet \mathbf{r}' \end{array}$$

Observar que la componente I de $(f_1 \bullet f_2) \bullet f_3$ es $[(f_1 \bullet f_2) \bullet f_3]_I = \bigoplus_{R \sqcup S \sqcup T = I} (f_{1,R} \otimes f_{2,S}) \otimes f_{3,T}$, con $f_{1,R} : \mathbf{p}[R] \rightarrow \mathbf{p}'[R]$ y de forma análoga con $f_{2,S}$ y $f_{3,T}$. Por lo que la componente I de $[f_1 \bullet (f_2 \bullet f_3)]_I = \bigoplus_{R \sqcup S \sqcup T = I} f_{1,R} \otimes (f_{2,S} \otimes f_{3,T})$.

Por lo tanto el diagrama anterior conmuta, pues para cada componente $\{R, S, T\}$ del mismo conmuta por la naturalidad de $\alpha_{R,S,T}$ en $Vect$.

También resulta claro que para cada componente $\{R, S, T\}$ de I y para toda $\sigma : I \rightarrow J$ biyección entre conjuntos finitos se cumple la siguiente igualdad en $Vect$

$$((\mathbf{p}[\sigma_R] \otimes \mathbf{q}[\sigma_S]) \otimes \mathbf{r}[\sigma_T]) \circ \alpha_{R,S,T} = \alpha_{\sigma(R), \sigma(S), \sigma(T)} \circ (\mathbf{p}[\sigma_R] \otimes (\mathbf{q}[\sigma_S] \otimes \mathbf{r}[\sigma_T])),$$

por lo que $\alpha_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}}$ resulta un morfismo de especies.

Veamos ahora que $\lambda : Sp \rightarrow Sp \times Sp$ es una transformación natural. Para ello sea G_1 el functor definido a nivel de objetos como $G_1(\mathbf{p}) = \mathbf{1} \bullet \mathbf{p}$ y a nivel de flechas como $G_1 f = Id_{\mathbf{1}} \bullet f$ donde en una componente I (conjunto finito) vale que

$$(G_1 f)_I = \bigoplus_{I=S \sqcup T} Id_{\mathbf{1}[S]} \otimes f_T = Id_{\mathbf{1}[\emptyset]} \otimes f_I = Id_{\mathbf{k}} \otimes f_I.$$

Consideremos también al functor Identidad que a nivel de objetos es $Id(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ y a nivel de flechas es $Id_f = f$, entonces $\lambda : Id \rightarrow G_1$. Abajo esán representados, a la izquierda, el diagrama que debe conmutar para que $\lambda_{\mathbf{p}}$ sea una transformación natural en $\mathcal{S}\mathbf{p}$ con $f \in Hom_{\mathcal{S}\mathbf{p}}$ tal que $f(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$, y a la derecha, el mismo diagrama expresado en la componente I

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p} & , & Id(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \xrightarrow{\lambda_{\mathbf{p}}} G_1(\mathbf{p}) = \mathbf{1} \bullet \mathbf{p} & , & \mathbf{p}[I] \xrightarrow{\lambda_{\mathbf{p},I}} \mathbb{k} \otimes \mathbf{p}[I] \\ \downarrow f & & Id_f \downarrow & & \downarrow f_I & & \downarrow Id_{\mathbb{k}} \otimes f_I \\ \mathbf{p}' & & Id(\mathbf{p}') = \mathbf{p}' \xrightarrow{\lambda_{\mathbf{p}'}} G_1(\mathbf{p}') = \mathbf{1} \bullet \mathbf{p}' & & \mathbf{p}'[I] \xrightarrow{\lambda_{\mathbf{p}',I}} \mathbb{k} \otimes \mathbf{p}'[I] \end{array} .$$

Notar que el último diagrama conmuta para todo conjunto finito I , dado que $\lambda_{\mathbf{p},I} = \lambda_{\mathbf{p}[I]} \in Vect$, por lo que resulta que $\lambda_{\mathbf{p}}$ es una transformación natural por la naturalidad de $\lambda_{\mathbf{p}[I]}$.

Es fácil ver que se cumple $\lambda_{\mathbf{p},J} \circ \mathbf{p}[\sigma] = (Id_{\mathbb{k}} \otimes \mathbf{p}[\sigma]) \circ \lambda_{\mathbf{p},I}$ para toda $\sigma : I \rightarrow J$ biyección entre conjuntos finitos, lo que prueba que $\lambda_{\mathbf{p}}$ es un morfismo de especies.

De forma análoga a lo anterior, concluimos que $\rho_{\mathcal{S}\mathbf{p},\mathbf{p}}$ es un morfismo de especies, que da lugar a un isomorfismo natural entre Id y $\bullet \mathbf{1}$.

Como adelantamos, es inmediato demostrar la conmutatividad de los diagramas de coherencia, trenza y estructura laxa de categorías monoidales en el caso de especies, dado que a nivel de sus componentes, estos mapas son los mismos que los definidos en la categoría $Vect$, heredando todas sus propiedades. □

3.2. Monoides y comonoides en $(\mathcal{S}\mathbf{p}, \bullet)$

Como $(\mathcal{S}\mathbf{p}, \bullet)$ es una categoría monoidal trenzada, vimos en el Capítulo de Categorías que esto nos permite definir monoides, comonoides y sus morfismos. En esta sección tomaremos esos conceptos y explicitaremos en cada caso los mapas involucrados para la categoría de especies.

MONOIDE EN ESPECIES.

Sea (\mathbf{p}, μ, u) un monoide en $(\mathcal{S}\mathbf{p}, \bullet)$, es decir, que $\mu : \mathbf{p} \bullet \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$ y $u : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{p}$ son morfismos de especies tales que verifican los diagramas de asociatividad y unidad.

A continuación explicitaremos para estos mapas la condición de morfismos de especies y las condiciones de asociatividad y unidad.

El mapa $\mu : \mathbf{p} \bullet \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$, sobre cada conjunto finito I es un mapa lineal $\mu_I = \bigoplus_{I=S \sqcup T} \mu_{S,T}$ (la I componente del producto μ) con $\mu_{S,T} : \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] \rightarrow \mathbf{p}[I]$.

Que μ sea un morfismo de especies es equivalente pedir que para cada biyección $\sigma : I \rightarrow J$ entre conjuntos finitos y descomposición $S \sqcup T$ de I , el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] & \xrightarrow{\mu_{S,T}} & \mathbf{p}[I] \\ \downarrow \mathbf{p}[\sigma|_S] \otimes \mathbf{p}[\sigma|_T] & & \downarrow \mathbf{p}[\sigma] \\ \mathbf{p}[\sigma(S)] \otimes \mathbf{p}[\sigma(T)] & \xrightarrow{\mu_{\sigma(S),\sigma(T)}} & \mathbf{p}[J] \end{array}$$

Según la Definición 2.2.6, el diagrama conmutativo de asociatividad, para cada descomposición $I = R \sqcup S \sqcup T$ es

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[R] \otimes \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] & \xrightarrow{Id_R \otimes \mu_{S,T}} & \mathbf{p}[R] \otimes \mathbf{p}[S \sqcup T] \\ \mu_{R,S} \otimes Id_T \downarrow & & \downarrow \mu_{R,S \sqcup T} \\ \mathbf{p}[R \sqcup S] \otimes \mathbf{p}[T] & \xrightarrow{\mu_{R \sqcup S, T}} & \mathbf{p}[R \sqcup S \sqcup T] \end{array}$$

Ahora consideremos $u : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{p}$, la **unidad** en el monoide (\mathbf{p}, μ, u) . Observar que si $I \neq \emptyset$, entonces $\mathbf{1}[I] = 0$ por lo que el mapa u_I es cero para esas componentes; pero si $I = \emptyset$ entonces $\mathbf{1}[\emptyset] = \mathbb{k}$. Por lo expuesto, sólo consideramos la componente \emptyset de u , es decir, $u_\emptyset : \mathbb{k} \rightarrow \mathbf{p}[\emptyset]$. Por esto, la naturalidad de u la podemos expresar como $\mathbf{p}[Id_\emptyset] \circ u_\emptyset = u_\emptyset$, y la conmutatividad de los diagramas de la unidad, para cada componente I se reduce a:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k} \otimes \mathbf{p}[I] & \xrightarrow{u_\emptyset \otimes Id_I} & \mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[I] & y & \mathbf{p}[I] \otimes \mathbf{p}[\emptyset] & \xleftarrow{Id_I \otimes u_\emptyset} & \mathbf{p}[I] \otimes \mathbb{k} \\ & \searrow \cong & \downarrow \mu_{\emptyset, I} & & \downarrow \mu_{I, \emptyset} & & \swarrow \cong \\ & \lambda^{-1} & \mathbf{p}[I] & & \mathbf{p}[I] & & \rho^{-1} \end{array}$$

Observación 3.2.1.

- Si (\mathbf{p}, μ, u) es un monoide de especies, en particular tenemos que $\mathbf{p}[\emptyset]$ es un \mathbb{k} -espacio vectorial y los mapas $\mu_{\emptyset, \emptyset} : \mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[\emptyset] \rightarrow \mathbf{p}[\emptyset]$ y $u_\emptyset : \mathbb{k} \rightarrow \mathbf{p}[\emptyset]$ verifican los diagramas de asociatividad y de unidad de álgebras, por lo tanto $(\mathbf{p}[\emptyset], \mu_{\emptyset, \emptyset}, u_\emptyset)$ es una \mathbb{k} -álgebra.
- Vimos en la Definición 2.2.6 el concepto de morfismo de monoides en una categoría monoidal, por lo que pasaremos a explicitarlos en el caso de (Sp, \bullet) .

Sean $(\mathbf{p}, \mu^{\mathbf{p}}, u^{\mathbf{p}})$ y $(\mathbf{q}, \mu^{\mathbf{q}}, u^{\mathbf{q}})$ dos monoides en especies, un **morfismo de monoides en especies** es un morfismo de especies $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ tal que para todo conjunto finito I y toda descomposición $I = S \sqcup T$, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] & \xrightarrow{\mu_{S,T}^{\mathbf{p}}} & \mathbf{p}[I] & y & \mathbb{k} & \xrightarrow{u_\emptyset^{\mathbf{p}}} & \mathbf{p}[\emptyset] \\ f_S \otimes f_T \downarrow & & \downarrow f_I & & \downarrow u_\emptyset^{\mathbf{q}} & & \swarrow f_\emptyset \\ \mathbf{q}[S] \otimes \mathbf{q}[T] & \xrightarrow{\mu_{S,T}^{\mathbf{q}}} & \mathbf{q}[I] & & \mathbf{q}[\emptyset] & & \end{array}$$

Definición 3.2.2. Decimos que un monoide (\mathbf{p}, μ, u) es **conmutativo** si para todo conjunto finito I y descomposiciones $S \sqcup T = I$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] & \xrightarrow{\beta_{S,T}} & \mathbf{p}[T] \otimes \mathbf{p}[S] \\ & \searrow \mu_{S,T} & \swarrow \mu_{T,S} \\ & \mathbf{p}[I] & \end{array}$$

Es decir que $\mu = \mu \circ \beta : \mathbf{p} \bullet \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$.

COMONOIDE EN ESPECIES.

Sea $(\mathbf{p}, \Delta, \varepsilon)$ un comonoide en $(\mathcal{S}\mathbf{p}, \bullet)$, con $\Delta : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \bullet \mathbf{p}$ y $\varepsilon : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{1}$ morfismos de especies que verifican los diagramas de coasociatividad y de counidad.

A continuación explicitaremos para estos mapas las condiciones de morfismos de especies y de conmutatividad de los diagramas de coasociatividad y de counidad.

El mapa $\Delta : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \bullet \mathbf{p}$ es el **coproducto** en el comonoide $(\mathbf{p}, \Delta, \varepsilon)$, donde para cada descomposición $S \sqcup T$ de I conjunto finito, la **componente** $\{S, T\}$ del coproducto es $\Delta_{S,T} : \mathbf{p}[I] \rightarrow \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T]$, por lo que el mapa lineal Δ_I lo podemos expresar como

$$\Delta_I = \bigoplus_{S \sqcup T = I} \Delta_{S,T}.$$

Sea $\sigma : I \rightarrow J$ una biyección entre conjuntos finitos, entonces el diagrama conmutativo que verifica Δ por ser una transformación natural es

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] & \xleftarrow{\Delta_{S,T}} & \mathbf{p}[I] \\ \mathbf{p}[\sigma|_S] \otimes \mathbf{p}[\sigma|_T] \downarrow & & \downarrow \mathbf{p}[\sigma] \\ \mathbf{p}[\sigma(S)] \otimes \mathbf{p}[\sigma(T)] & \xleftarrow{\Delta_{\sigma(S), \sigma(T)}} & \mathbf{p}[J] \end{array}$$

Además el diagrama de coasociatividad es conmutativo; en este caso para una descomposición en conjuntos disjuntos de I en $I = R \sqcup S \sqcup T$ es

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[R \sqcup S \sqcup T] & \xrightarrow{\Delta_{R \sqcup S, T}} & \mathbf{p}[R \sqcup S] \otimes \mathbf{p}[T] \\ \Delta_{R, S \sqcup T} \downarrow & & \downarrow \Delta_{R, S} \otimes Id_T \\ \mathbf{p}[R] \otimes \mathbf{p}[S \sqcup T] & \xrightarrow{Id_R \otimes \Delta_{S, T}} & \mathbf{p}[R] \otimes \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] \end{array}$$

Consideremos ahora $\varepsilon : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{1}$ la **counidad** en el comonoide $(\mathbf{p}, \Delta, \varepsilon)$. De forma análoga a u , se deduce que ε sólo tiene un mapa lineal no nulo en la componente \emptyset y es $\varepsilon_\emptyset : \mathbf{p}[\emptyset] \rightarrow \mathbb{k}$.

Entonces la conmutatividad de los diagramas de counidad, equivalen a la conmutatividad de los siguientes diagramas, para cada componente I :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k} \otimes \mathbf{p}[I] & \xleftarrow{\varepsilon_\emptyset \otimes Id_I} & \mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[I] \\ & \cong \swarrow & \uparrow \Delta_{\emptyset, I} \\ & \mathbf{p}[I] & \end{array} \quad , y \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{p}[I] \otimes \mathbf{p}[\emptyset] & \xrightarrow{Id_I \otimes \varepsilon_\emptyset} & \mathbf{p}[I] \otimes \mathbb{k} \\ \Delta_{I, \emptyset} \downarrow & & \cong \nearrow \rho \\ \mathbf{p}[I] & & \end{array}$$

Observación 3.2.3. Si $(\mathbf{p}, \Delta, \varepsilon)$ es un comonoide de especies, en particular tenemos que $\mathbf{p}[\emptyset]$ es un \mathbb{k} -espacio vectorial y los mapas $\Delta_{\emptyset, \emptyset} : \mathbf{p}[\emptyset] \rightarrow \mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[\emptyset]$ y $\varepsilon_\emptyset : \mathbf{p}[\emptyset] \rightarrow \mathbb{k}$ verifican los diagramas de coasociatividad y de counidad de coálgebras, por lo tanto $(\mathbf{p}[\emptyset], \Delta_{\emptyset, \emptyset}, \varepsilon_\emptyset)$ es una \mathbb{k} -coálgebra.

Observación 3.2.4. Recordar que en la Definición 2.2.6 vimos el concepto de morfismo de comonoides en una categoría monoidal. Ahora llevaremos este concepto al contexto de $(\mathcal{S}\mathbf{p}, \bullet)$.

Sean $(\mathbf{p}, \Delta^{\mathbf{p}}, \varepsilon^{\mathbf{p}})$ y $(\mathbf{q}, \Delta^{\mathbf{q}}, \varepsilon^{\mathbf{q}})$ dos comonoides en especies, un **morfismo de comonoides en especies** es un morfismo de especies $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ tal que para todo I conjunto finito y toda

descomposición $I = S \sqcup T$, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[I] & \xrightarrow{\Delta_{S,T}^{\mathbf{p}}} & \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] \\ f_I \downarrow & & \downarrow f_S \otimes f_T \\ \mathbf{q}[I] & \xrightarrow{\Delta_{S,T}^{\mathbf{q}}} & \mathbf{q}[S] \otimes \mathbf{q}[T] \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{p}[\emptyset] & \xrightarrow{f_\emptyset} & \mathbf{q}[\emptyset] \\ & \searrow \varepsilon_\emptyset^{\mathbf{p}} & \downarrow \varepsilon_\emptyset^{\mathbf{q}} \\ & & \mathbf{k} \end{array}$$

Observación 3.2.5. Con el fin de definir producto y coproducto iterado, observemos que anteriormente vimos que $\mu_{R \sqcup S, T} \circ (\mu_{R, S} \otimes Id_T) = \mu_{R, S \sqcup T} \circ (Id_R \otimes \mu_{S, T})$ y que $(\Delta_{R, S} \otimes Id_T) \circ \Delta_{R \sqcup S, T} = (Id_R \otimes \Delta_{S, T}) \circ \Delta_{R, S \sqcup T}$, para una descomposición particular del conjunto finito I en tres conjuntos disjuntos R, S y T .

Si $\mathbf{h}_I^{\bullet 3} = (\mathbf{h} \bullet \mathbf{h} \bullet \mathbf{h})_I = \bigoplus_{S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3 = I} \mathbf{h}[S_1] \otimes \mathbf{h}[S_2] \otimes \mathbf{h}[S_3]$, entonces podemos definir el mapa

$$\mu_I^2 : \mathbf{h}_I^{\bullet 3} \rightarrow \mathbf{h}_I \text{ como}$$

$$\mu_I^2 = \bigoplus_{S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3 = I} \mu_{S_1, S_2 \sqcup S_3} \circ (Id_{S_1} \otimes \mu_{S_2, S_3}) = \bigoplus_{S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3 = I} \mu_{S_1 \sqcup S_2, S_3} \circ (\mu_{S_1, S_2} \otimes Id_{S_3}),$$

la última igualdad se debe a la asociatividad de μ , por lo tanto podemos escribir

$$\mu_{S_1, S_2, S_3} = \mu_{S_1, S_2 \sqcup S_3} \circ (Id_{S_1} \otimes \mu_{S_2, S_3}) = \mu_{S_1 \sqcup S_2, S_3} \circ (\mu_{S_1, S_2} \otimes Id_{S_3})$$

y decimos que $\mu_{S_1, S_2, S_3} : \mathbf{h}[S_1] \otimes \mathbf{h}[S_2] \otimes \mathbf{h}[S_3] \rightarrow \mathbf{h}[I]$ es la componente $\{S_1, S_2, S_3\}$ del producto μ , por lo que finalmente escribimos a μ_I^2 como

$$\mu_I^2 = \bigoplus_{S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3 = I} \mu_{S_1, S_2, S_3}.$$

Análogamente definimos $\Delta_I^2 : \mathbf{h}_I \rightarrow \mathbf{h}_I^{\bullet 3}$ como

$$\Delta_I^2 = \bigoplus_{S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3 = I} (Id_{S_1} \otimes \Delta_{S_2, S_3}) \circ \Delta_{S_1, S_2 \sqcup S_3} = \bigoplus_{S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3 = I} (\Delta_{S_1, S_2} \otimes Id_{S_3}) \circ \Delta_{S_1 \sqcup S_2, S_3},$$

la última igualdad se debe a la coasociatividad de Δ , y definimos

$\Delta_{S_1, S_2, S_3} : \mathbf{h}[I] \rightarrow \mathbf{h}[S_1] \otimes \mathbf{h}[S_2] \otimes \mathbf{h}[S_3]$, la componente $\{S_1, S_2, S_3\}$ del coproducto, como

$$\Delta_{S_1, S_2, S_3} = (Id_{S_1} \otimes \Delta_{S_2, S_3}) \circ \Delta_{S_1, S_2 \sqcup S_3} = (\Delta_{S_1, S_2} \otimes Id_{S_3}) \circ \Delta_{S_1 \sqcup S_2, S_3}. \text{ Entonces}$$

$$\Delta_I^2 = \bigoplus_{S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3 = I} \Delta_{S_1, S_2, S_3}.$$

Con este ejemplo de descomposiciones de I en 3 conjuntos disjuntos, pasaremos a definir las operaciones iteradas para una descomposición en j conjuntos disjuntos de I .

Definición 3.2.6. Consideremos I un conjunto finito y sean $S_1 \sqcup \dots \sqcup S_j = I$ una descomposición disjunta y ordenada de subconjuntos de I , entonces definiremos en forma inductiva las siguientes mapas.

- **El producto iterado en un monoide en especie \mathbf{h} es**

$$\mu^{j-1} = \mu \circ (Id \otimes \mu^{j-2}) = \mu \circ (\mu^{j-2} \otimes Id),$$

cuya componente en $\{S_1, \dots, S_j\}$ es $\mu_{S_1, \dots, S_j}^{j-1} = \mu_{S_1, \dots, S_j} : \mathbf{h}[S_1] \otimes \dots \otimes \mathbf{h}[S_j] \rightarrow \mathbf{h}[I]$.

Se define además que $\mu^0 = Id$.

- El coproducto iterado en un comonoide en especie \mathbf{h} se define como

$$\Delta^{j-1} = (Id \otimes \Delta^{j-2}) \circ \Delta = (\Delta^{j-2} \otimes Id) \circ \Delta,$$

donde la componente $\{S_1, \dots, S_j\}$ es $\Delta_{S_1, \dots, S_j}^{j-1} = \Delta_{S_1, \dots, S_j} : \mathbf{h}[I] \rightarrow \mathbf{h}[S_1] \otimes \dots \otimes \mathbf{h}[S_j]$.

Se define además que $\Delta^0 = Id$.

Estas operaciones están bien definidas por la asociatividad del producto y coasociatividad del coproducto.

Definición 3.2.7. Decimos que un comonoide $(\mathbf{p}, \Delta, \varepsilon)$ es *coconmutativo* si para todo conjunto finito I y descomposiciones $S \sqcup T = I$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] & \xrightarrow{\beta_{S,T}} & \mathbf{p}[T] \otimes \mathbf{p}[S] \\ & \swarrow \Delta_{S,T} \quad \searrow \Delta_{T,S} & \\ & \mathbf{p}[I] & \end{array}$$

Es decir que $\beta \circ \Delta = \Delta : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \bullet \mathbf{p}$.

Ejemplo 3.2.8. Daremos a la especie $\mathbf{1}$ estructura de monoide y comonoide en (Sp, \bullet) .

Dado que $\mathbf{1}[I] = 0$ en un conjunto $I \neq \emptyset$ y $\mathbf{1}[\emptyset] = \mathbb{k}$, en la única componente en que los mapas no son cero es en la componente \emptyset . Por lo tanto, definimos los siguientes mapas en esa componente:

- Producto, $\mu_{\mathbf{1}, \emptyset, \emptyset} : \mathbf{1}[\emptyset] \otimes \mathbf{1}[\emptyset] \rightarrow \mathbf{1}[\emptyset]$ con $a, b \in \mathbb{k} = \mathbf{1}[\emptyset]$ como $\mu_{\mathbf{1}, \emptyset, \emptyset}(a \otimes b) = ab$, el producto usual en \mathbb{k} .
- Unidad, $u_{\mathbf{1}, \emptyset} : \mathbb{k} \rightarrow \mathbf{1}[\emptyset] = \mathbb{k}$ como $u_{\mathbf{1}, \emptyset} = Id_{\mathbb{k}}$.
- Coproducto, $\Delta_{\mathbf{1}, \emptyset, \emptyset} : \mathbf{1}[\emptyset] \rightarrow \mathbf{1}[\emptyset] \otimes \mathbf{1}[\emptyset]$, como $\Delta_{\mathbf{1}, \emptyset, \emptyset}(a) = 1_{\mathbb{k}} \otimes a = a \otimes 1_{\mathbb{k}} \forall a \in \mathbb{k}$.
- Counidad, $\varepsilon_{\mathbf{1}, \emptyset} : \mathbf{1}[\emptyset] = \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$, como $\varepsilon_{\mathbf{1}, \emptyset} = Id_{\mathbb{k}}$.

Es fácil ver que $(\mathbf{1}, \mu_{\mathbf{1}}, u_{\mathbf{1}})$ es un monoide y que $(\mathbf{1}, \Delta_{\mathbf{1}}, \varepsilon_{\mathbf{1}})$ es un comonoide en (Sp, \bullet) . Observamos además que los mapas definidos coinciden con los mapas que le dan estructura de álgebra y cóalgebra a \mathbb{k} .

Ejemplo 3.2.9. A continuación definiremos los mapas producto, unidad, coproducto y counidad que dan estructura de monoide y comonoide de especies a la especie exponencial \mathbf{E} .

- El producto para \mathbf{E} es $\mu_{\mathbf{E}, S, T} : \mathbf{E}[S] \otimes \mathbf{E}[T] \rightarrow \mathbf{E}[I]$ lo definimos como $\mu_{\mathbf{E}, S, T}(\triangleright_S \otimes \triangleright_T) = \triangleright_{S \sqcup T} = \triangleright_I$, y la unidad $u_{\mathbf{E}, \emptyset} : \mathbb{k} \rightarrow \mathbf{E}[\emptyset]$ definida como $u_{\mathbf{E}, \emptyset}(1_{\mathbb{k}}) = \triangleright_{\emptyset}$.
- El coproducto para \mathbf{E} es $\Delta_{\mathbf{E}, S, T} : \mathbf{E}[I] \rightarrow \mathbf{E}[S] \otimes \mathbf{E}[T]$ definido como $\Delta_{\mathbf{E}, S, T}(\triangleright_I) = \triangleright_S \otimes \triangleright_T$ y la counidad como $\varepsilon_{\mathbf{E}, \emptyset} : \mathbf{E}[\emptyset] \rightarrow \mathbb{k}$ definida como $\varepsilon_{\mathbf{E}, \emptyset}(\triangleright_{\emptyset}) = 1_{\mathbb{k}}$.

Fácilmente se prueba que $(\mathbf{E}, \mu_{\mathbf{E}}, u_{\mathbf{E}})$ es un monoide de especies y que $(\mathbf{E}, \Delta_{\mathbf{E}}, \varepsilon_{\mathbf{E}})$, es un comonoide de especies.

Ejemplo 3.2.10. Daremos a la especie $\mathbf{E}_{\mathbf{V}}$ estructura de monoide y comonoide en (Sp, \bullet) .

Dados I, S y T conjuntos finitos, tales que $I = S \sqcup T$ y $f : I \rightarrow B \in \mathbf{E}_{\mathbf{V}}[I]$ que notaremos como f^I ; definimos los siguientes mapas:

- Producto, $\mu_{\mathbf{E}_{\mathbf{V}}, S, T} : \mathbf{E}_{\mathbf{V}}[S] \otimes \mathbf{E}_{\mathbf{V}}[T] \rightarrow \mathbf{E}_{\mathbf{V}}[I]$, con $h \in \mathbf{E}_{\mathbf{V}}[S]$ y $g \in \mathbf{E}_{\mathbf{V}}[T]$ como $\mu_{\mathbf{E}_{\mathbf{V}}, S, T}(h \otimes g) = f^I$, tal que $f^I|_S = h$ y que $f^I|_T = g$.

- Unidad, $u_{\mathbf{E}_V, \emptyset} : \mathbb{k} \rightarrow \mathbf{E}_V[\emptyset]$ como $u_{\mathbf{E}_V}(1_{\mathbb{k}}) = f^0$ donde $f^0 : \emptyset \rightarrow 1_{\mathbb{k}}$.
- Coproducto, $\Delta_{\mathbf{E}_V, I} : \mathbf{E}_V[I] \rightarrow \bigoplus_{I=S \sqcup T} \mathbf{E}_V[S] \otimes \mathbf{E}_V[T]$, definido como

$$\Delta_{\mathbf{E}_V, I}(f^I) = \sum_{I=S \sqcup T} f^I|_S \otimes f^I|_T.$$
- Counidad, $\varepsilon_{\mathbf{E}_V, \emptyset} : \mathbf{E}_V[\emptyset] \rightarrow \mathbb{k}$, definida como $\varepsilon_{\mathbf{E}_V, \emptyset}(f^0) = 1_{\mathbb{k}}$.

Es inmediato ver que $(\mathbf{E}_V, \mu_{\mathbf{E}_V}, u_{\mathbf{E}_V})$ es un monoide y que $(\mathbf{E}_V, \Delta_{\mathbf{E}_V}, \varepsilon_{\mathbf{E}_V})$ es un comonoide en (SP, \bullet) .

Ejemplo 3.2.11. Definiremos los mapas para que \mathbf{L} , la especie de órdenes lineales, sea un monoide y comonoide en especies. Para ello, sean I un conjunto finito y $S \sqcup T = I$ una descomposición de subconjuntos de I :

- la unidad en \mathbf{L} en la componente \emptyset es $u_{\mathbf{L}, \emptyset}(1_{\mathbb{k}}) = l_0$ extendido por linealidad, donde $\langle l_0 \rangle_{\mathbb{k}} = \mathbf{L}[\emptyset]$,
- la counidad $\varepsilon_{\mathbf{L}, \emptyset} : \mathbf{L}[\emptyset] \rightarrow \mathbb{k}$ es $\varepsilon_{\mathbf{L}, \emptyset}(l_0) = 1_{\mathbb{k}}$ extendido por linealidad,
- sean $l_1 \in \mathbf{L}[S]$ y $l_2 \in \mathbf{L}[T]$, entonces la componente $\{S, T\}$ del producto es $\mu_{\mathbf{L}, S, T} : \mathbf{L}[S] \otimes \mathbf{L}[T] \rightarrow \mathbf{L}[I]$ y lo definimos como la **concatenación**, es decir que $\mu_{\mathbf{L}, S, T}(l_1 \otimes l_2) = l_1 \cdot l_2$.

A modo de ejemplo, concatenar los siguientes elementos $l_1 = 1 \mid 4$ y $l_2 = 3 \mid 2$ es $l_1 \cdot l_2 = 1 \mid 4 \mid 3 \mid 2$,

- sea $l \in \mathbf{L}[I]$, entonces a la componente $\{S, T\}$ del coproducto es $\Delta_{\mathbf{L}, S, T} : \mathbf{L}[I] \rightarrow \mathbf{L}[S] \otimes \mathbf{L}[T]$ y lo definimos como $\Delta_{\mathbf{L}, S, T}(l) = l|_S \otimes l|_T$ donde $l|_S$ es restringir el orden establecido por l a los elementos de S .

A modo de ejemplo, restringir $l = 4 \mid 1 \mid 3 \mid 2$ con $S = \{1, 2\}$ y $T = \{3, 4\}$ es: $l|_S = 1 \mid 2$ y $l|_T = 4 \mid 3$.

Fácilmente se puede verificar que estos mapas le dan estructura a $(\mathbf{L}, \mu_{\mathbf{L}}, u_{\mathbf{L}})$ y a $(\mathbf{L}, \Delta_{\mathbf{L}}, \varepsilon_{\mathbf{L}})$ de monoide y comonoide de especies respectivamente.

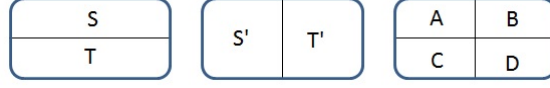
Observar que $(\mathbf{L}, \mu_{\mathbf{L}}, u_{\mathbf{L}})$ es un monoide en especies **no conmutativo**, dado que concatenar no es una operación conmutativa y $(\mathbf{L}, \Delta_{\mathbf{L}}, \varepsilon_{\mathbf{L}})$ es un comonoide **coconmutativo**, porque el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}[S] \otimes \mathbf{L}[T] & \xrightarrow{\beta_{S, T}} & \mathbf{L}[T] \otimes \mathbf{L}[S] \\ & \searrow \Delta_{\mathbf{L}, S, T} & \nearrow \Delta_{\mathbf{L}, T, S} \\ & \mathbf{L}[I] & \end{array}$$

Sea $l \in \mathbf{L}[I]$, entonces $\beta_{S, T} \circ \Delta_{\mathbf{L}, S, T}(l) = \beta_{S, T}(l|_S \otimes l|_T) = l|_T \otimes l|_S = \Delta_{\mathbf{L}, T, S}(l)$.

A continuación, a partir de un monoide (resp. comonoide) de una especie, daremos explícitamente la estructura de monoide (resp. comonoide) a la especie $\mathbf{p} \bullet \mathbf{p}$ con \bullet el producto de Cauchy, según lo visto en la Observación 2.2.12. Antes veamos la siguiente observación.

Observación 3.2.12. Sea I un conjunto finito y sean $S \sqcup T$ y $S' \sqcup T'$ dos descomposiciones de I , entonces existen únicos subconjuntos A, B, C y D de I tales que $S = A \sqcup B, T = C \sqcup D, S' = A \sqcup C$ y $T' = B \sqcup D$.



La única posibilidad es que $A = S \cap S', B = S \cap T', C = T \cap S'$ y $D = T \cap T'$.

Observación 3.2.13. Sea \mathbf{p} una especie, (\mathbf{p}, μ, u) un monoide en especies y $(\mathbf{p}, \Delta, \varepsilon)$ un comonoide en especies, entonces a la especie $\mathbf{p} \bullet \mathbf{p}$ le podemos dar una estructura de monoide y de comonoide en especies con los mapas definidos en la Observación 2.2.12.

Teniendo en cuenta la observación anterior sobre las particiones de conjuntos, explicitaremos para el caso de especies estos mapas.

Para comenzar tomemos I conjunto finito y $S \sqcup T = I$; recordamos que el producto de Cauchy $\mathbf{p} \bullet \mathbf{p}$ en un conjunto finito es

$$(\mathbf{p} \bullet \mathbf{p})[I] = \bigoplus_{I=S \sqcup T} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T], \text{ entonces}$$

- el producto $\mu_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{p}}$ es el mapa definido por la siguiente composición

$$\mu_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{p}} : \mathbf{p} \bullet \mathbf{p} \bullet \mathbf{p} \bullet \mathbf{p} \xrightarrow{Id \bullet \beta \bullet Id} \mathbf{p} \bullet \mathbf{p} \bullet \mathbf{p} \bullet \mathbf{p} \xrightarrow{\mu \bullet \mu} \mathbf{p} \bullet \mathbf{p}.$$

La componente I del producto para un conjunto finito I es un mapa

$$\mu_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{p}, I} : ((\mathbf{p} \bullet \mathbf{p}) \bullet (\mathbf{p} \bullet \mathbf{p})) [I] = \bigoplus_{I=S \sqcup T} (\mathbf{p} \bullet \mathbf{p})[S] \otimes (\mathbf{p} \bullet \mathbf{p})[T] \rightarrow (\mathbf{p} \bullet \mathbf{p})[I].$$

Por lo que la componente $\{S, T\}$ es $\mu_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{p}, S, T} : (\mathbf{p} \bullet \mathbf{p})[S] \otimes (\mathbf{p} \bullet \mathbf{p})[T] \rightarrow (\mathbf{p} \bullet \mathbf{p})[I]$.

El siguiente diagrama muestra la composición de mapas que definen al producto según las componentes de subconjuntos disjuntos de I ,

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{p} \bullet \mathbf{p})[S] \otimes (\mathbf{p} \bullet \mathbf{p})[T] & = & \left(\bigoplus_{A \sqcup B = S} \mathbf{p}[A] \otimes \mathbf{p}[B] \right) \otimes \left(\bigoplus_{C \sqcup D = T} \mathbf{p}[C] \otimes \mathbf{p}[D] \right) \\ \downarrow \mu_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{p}, S, T} & & \downarrow \bigoplus Id_{\mathbf{p}[A]} \otimes \beta_{\mathbf{p}[B], \mathbf{p}[C]} \otimes Id_{\mathbf{p}[D]} \\ & & \bigoplus_{\substack{A \sqcup B = S \\ C \sqcup D = T}} \mathbf{p}[A] \otimes \mathbf{p}[C] \otimes \mathbf{p}[B] \otimes \mathbf{p}[D] \\ & & \downarrow \bigoplus \mu_{A, C} \otimes \mu_{B, D} \\ (\mathbf{p} \bullet \mathbf{p})[I] = \bigoplus_{S' \sqcup T' = I} \mathbf{p}[S'] \otimes \mathbf{p}[T'] & = & \bigoplus_{\substack{A \sqcup B = S \\ C \sqcup D = T}} \mathbf{p}[A \sqcup C] \otimes \mathbf{p}[B \sqcup D], \end{array}$$

- la unidad es un mapa $u_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{p}, \emptyset} : \mathbb{k} \rightarrow (\mathbf{p} \bullet \mathbf{p})_{\emptyset}$, dado por la siguiente composición

$$u_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{p}, \emptyset} : \mathbb{k} \xrightarrow[\lambda_{\mathbb{k}}]{\cong} \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} \xrightarrow{u_{\emptyset} \otimes u_{\emptyset}} \mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[\emptyset],$$

- el coproducto es $\Delta_{\mathbf{p}\bullet\mathbf{p},S,T} : (\mathbf{p}\bullet\mathbf{p})[I] \rightarrow (\mathbf{p}\bullet\mathbf{p})[S] \otimes (\mathbf{p}\bullet\mathbf{p})[T]$, que según la Observación 2.2.12 se define como la siguiente composición

$$\Delta_{\mathbf{p}\bullet\mathbf{p}} : \mathbf{p}\bullet\mathbf{p} \xrightarrow{\Delta\bullet\Delta} \mathbf{p}\bullet\mathbf{p}\bullet\mathbf{p}\bullet\mathbf{p} \xrightarrow{Id_{\mathbf{p}\bullet\mathbf{p}}\bullet\beta\bullet Id_{\mathbf{p}}} \mathbf{p}\bullet\mathbf{p}\bullet\mathbf{p}\bullet\mathbf{p}.$$

Por lo que explícitamente al mapa anterior lo escribimos como

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{p}\bullet\mathbf{p})[I] & = & \bigoplus_{S'\sqcup T'=I} \mathbf{p}[S'] \otimes \mathbf{p}[T'] \\ \downarrow \Delta_{\mathbf{p}\bullet\mathbf{p},S,T} & & \downarrow \Delta_{A,C} \otimes \Delta_{B,D} \\ \bigoplus_{S\sqcup T=I} (\mathbf{p}\bullet\mathbf{p})[S] \otimes (\mathbf{p}\bullet\mathbf{p})[T] & = & \left(\bigoplus_{A\sqcup C=S'} \mathbf{p}[A] \otimes \mathbf{p}[C] \right) \otimes \left(\bigoplus_{B\sqcup D=T} \mathbf{p}[B] \otimes \mathbf{p}[D] \right) \\ & & \downarrow \bigoplus Id_{\mathbf{p}[A]} \otimes \beta_{\mathbf{p}[C],\mathbf{p}[B]} \otimes Id_{\mathbf{p}[D]} \\ \bigoplus_{S\sqcup T=I} (\mathbf{p}\bullet\mathbf{p})[S] \otimes (\mathbf{p}\bullet\mathbf{p})[T] & = & \bigoplus_{\substack{A\sqcup B=S \\ C\sqcup D=T}} \mathbf{p}[A] \otimes \mathbf{p}[B] \otimes \mathbf{p}[C] \otimes \mathbf{p}[D], \end{array}$$

- la counidad es el mapa $\varepsilon_{\mathbf{p}\bullet\mathbf{p},\emptyset} : (\mathbf{p}\bullet\mathbf{p})[\emptyset] \rightarrow \mathbb{k}$ que está definido como la siguiente composición

$$\varepsilon_{\mathbf{p}\bullet\mathbf{p},\emptyset} : \mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[\emptyset] \xrightarrow{\varepsilon_{\emptyset} \otimes \varepsilon_{\emptyset}} \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} \xrightarrow[\lambda_{\mathbb{k}}^{-1}]{\cong} \mathbb{k}.$$

Con estas estructuras podemos ahora explicitar los mapas involucrados en los bimonoides de especies.

3.3. Bimonoides y monoides de Hopf en (Sp, \bullet) .

En esta sección trabajaremos sobre la categoría monoidal trenzada (Sp, \bullet, β) .

BIMONOIDE EN ESPECIES.

Recordemos que ya vimos la definición de bimonoides en una categoría monoidal trenzada (ver Definición 2.2.11), ahora lo veremos explícitamente al caso de especies.

- Un **bimonoide** en (Sp, \bullet, β) es una especie \mathbf{h} tal que (\mathbf{h}, μ, u) es un monoide, $(\mathbf{h}, \Delta, \varepsilon)$ es un comonoide y Δ, ε son morfismos de monoides. Escribiremos $(\mathbf{h}, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ al bimonoide con estas estructuras.
- Sean \mathbf{p} y \mathbf{q} dos bimonoides en especies, entonces un **morfismo de bimonoides de especies** es un mapa $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ que es morfismo de monoides y de comonoides en especies.

Observación 3.3.1. Si la quintupla $(\mathbf{h}, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonoide, los siguientes diagramas conmutan para todo conjunto I finito y descomposición $S \sqcup T = I$:

- estos diagramas provienen de que Δ es un morfismo de monoides:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h}[S] \otimes \mathbf{h}[T] & \xrightarrow{\mu_{S,T}} & \mathbf{h}[I] & y & \mathbb{k} & \xrightarrow{u_{\emptyset}} & \mathbf{h}[\emptyset], \\ \Delta_S \otimes \Delta_T \downarrow & & \downarrow \Delta_I & & \downarrow u_{\mathbf{h}\bullet\mathbf{h},\emptyset} & \swarrow \Delta_{\emptyset} & \\ (\mathbf{h}\bullet\mathbf{h})[S] \otimes (\mathbf{h}\bullet\mathbf{h})[T] & \xrightarrow{\mu_{\mathbf{h}\bullet\mathbf{h},S,T}} & (\mathbf{h}\bullet\mathbf{h})[I] & & (\mathbf{h}\bullet\mathbf{h})[\emptyset] \end{array}$$

- y los siguientes diagramas provienen de que ε es un morfismo de monoides:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h}[\emptyset] \otimes \mathbf{h}[\emptyset] & \xrightarrow{\mu_{\emptyset, \emptyset}} & \mathbf{h}[\emptyset] \\ \varepsilon_{\emptyset} \otimes \varepsilon_{\emptyset} \downarrow & & \downarrow \varepsilon_{\emptyset} \\ \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} & \xrightarrow{\mu_{\mathbb{k}}} & \mathbb{k} \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{k} & \xrightarrow{u_{\emptyset}} & \mathbf{h}[\emptyset] \\ Id_{\mathbb{k}} \downarrow & \swarrow \varepsilon_{\emptyset} & \\ \mathbb{k} & & \end{array} .$$

Al igual que como se vio en la Proposición 1.3.1, observamos que los diagramas conmutativos anteriores son los mismos diagramas que se obtienen si le pedimos a μ y a u sean morfismos de comonoides.

Desarrollaremos el primer diagrama, dado que involucra la estructura de monoide de $\mathbf{h} \bullet \mathbf{h}$.

Primero observemos que $(\mathbf{h} \bullet \mathbf{h})[S] = \bigoplus_{A \sqcup B = S} \mathbf{h}[A] \otimes \mathbf{h}[B]$ y $(\mathbf{h} \bullet \mathbf{h})[T] = \bigoplus_{C \sqcup D = T} \mathbf{h}[C] \otimes \mathbf{h}[D]$ siguiendo la notación de la Observación 3.2.12., la conmutatividad del primer diagrama, equivale a la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{h}[S] \otimes \mathbf{h}[T] & \xrightarrow{\mu_{S,T}} & \mathbf{h}[I] & \xrightarrow{\Delta_{S',T'}} & \mathbf{h}[S'] \otimes \mathbf{h}[T'] \\ \Delta_{A,B} \otimes \Delta_{C,D} \downarrow & & & & \uparrow \mu_{A,C} \otimes \mu_{B,D} \\ \mathbf{h}[A] \otimes \mathbf{h}[B] \otimes \mathbf{h}[C] \otimes \mathbf{h}[D] & \xrightarrow{Id_A \otimes \beta_{B,C} \otimes Id_D} & \mathbf{h}[A] \otimes \mathbf{h}[C] \otimes \mathbf{h}[B] \otimes \mathbf{h}[D]. & & \end{array}$$

Observación 3.3.2. Si $(\mathbf{h}, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonoides en especies, ya vimos que $(\mathbf{h}[\emptyset], \mu_{\emptyset, \emptyset}, u_{\emptyset})$ es una \mathbb{k} -álgebra y que $(\mathbf{h}[\emptyset], \Delta_{\emptyset, \emptyset}, \varepsilon_{\emptyset})$ es una \mathbb{k} -coálgebra, y dado que para un bimonoides pedimos que Δ y ε sean morfismos de comonoides (o equivalentemente que μ y u sean morfismos de comonoides) de la conmutatividad de esos diagramas en la componente \emptyset , concluimos entonces que $(\mathbf{h}[\emptyset], \mu_{\emptyset, \emptyset}, u_{\emptyset}, \Delta_{\emptyset, \emptyset}, \varepsilon_{\emptyset})$ es una \mathbb{k} -biálgebra.

Ejemplo 3.3.3. Las especies $\mathbf{1}$, \mathbf{E} , \mathbf{E}_V y \mathbf{L} con las estructuras de monoides y comonoides vistas en los Ejemplos 3.2.8 hasta 3.2.11, son todas bimonoides. Es fácil verificar que el producto y unidad definidos en esos ejemplos son morfismos de comonoides.

A modo de ejemplo, veremos que se cumple la conmutatividad del último diagrama de la Observación 3.3.1 en $(\mathbf{L}, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$. Para ello tomemos $a \in \mathbf{L}[S]$ y $b \in \mathbf{L}[T]$ y siguiendo la notación de los conjuntos de la Observación 3.2.12, tenemos que

$$\Delta_{S',T'} \circ \mu_{S,T}(a \otimes b) = (a \cdot b) |_{S'} \otimes (a \cdot b) |_{T'} .$$

Observar que $(a \cdot b) |_{S'} = a |_{S'} \cdot b |_{S'} = a |_{S \cap S'} \cdot b |_{T \cap S'} = a |_A \cdot b |_C$ y de forma análoga tenemos que $(a \cdot b) |_{T'} = a |_{T'} \cdot b |_{T'} = a |_{S \cap T'} \cdot b |_{T \cap T'} = a |_B \cdot b |_D$, por lo que

$$\Delta_{S',T'} \circ \mu_{S,T}(a \otimes b) = a |_A \cdot b |_C \otimes a |_B \cdot b |_D .$$

Por otro lado tenemos que $(\mu_{A,C} \otimes \mu_{B,D}) \circ (Id_A \otimes \beta_{B,C} \otimes Id_D) \circ (\Delta_{A,B} \otimes \Delta_{C,D})(a \otimes b) = (\mu_{A,C} \otimes \mu_{B,D}) \circ (Id_A \otimes \beta_{B,C} \otimes Id_D)((a |_A \otimes a |_B) \otimes (b |_C \otimes b |_D)) = a |_A \cdot b |_C \otimes a |_B \cdot b |_D$, por lo que resulta que el diagrama es conmutativo.

Ahora pasaremos a estudiar los monoides de Hopf en especies.

Más explícitamente lo anterior en un conjunto I no vacío es

$$\begin{aligned} (S * Id)_I : \mathbf{p}[I] &\xrightarrow{\Delta_I} \bigoplus_{S \sqcup T = I} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] \xrightarrow{\bigoplus_{S \sqcup T = I} S_S \otimes Id_T} \bigoplus_{S \sqcup T = I} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] \xrightarrow{\mu_I} \mathbf{p}[I], \\ (Id * S)_I : \mathbf{p}[I] &\xrightarrow{\Delta_I} \bigoplus_{S \sqcup T = I} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] \xrightarrow{\bigoplus_{S \sqcup T = I} Id_S \otimes S_T} \bigoplus_{S \sqcup T = I} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] \xrightarrow{\mu_I} \mathbf{p}[I]. \end{aligned}$$

□

Observación 3.3.5. Si $(\mathbf{h}, \mu, u, \Delta, \varepsilon, S)$ es un monoide de Hopf en especies, ya hemos observado que $(\mathbf{h}[\emptyset], \mu_{\emptyset, \emptyset}, u_{\emptyset}, \Delta_{\emptyset, \emptyset}, \varepsilon_{\emptyset})$ es una \mathbb{k} -biálgebra. Las ecuaciones de la primera parte del lema anterior muestran que S_{\emptyset} es la antípoda de la biálgebra $\mathbf{h}[\emptyset]$ y por lo tanto $(\mathbf{h}[\emptyset], \mu_{\emptyset, \emptyset}, u_{\emptyset}, \Delta_{\emptyset, \emptyset}, \varepsilon_{\emptyset}, S_{\emptyset})$ es una \mathbb{k} -álgebra de Hopf.

De ahora en adelante si no hay lugar a confusión, por simplicidad, omitiremos en los mapas los subíndices que indican la especie.

Ejemplo 3.3.6. Si encontramos un mapa que satisface las ecuaciones del Lema 3.3.4., por unicidad encontramos la antípoda para esa especie. En este ejemplo daremos un mapa en $Hom(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ y probaremos que es su antípoda. Los mapas que le dan estructura de bimonioide a \mathbf{E} son los dados en el Ejemplo 3.2.9.

Se define el siguiente mapa en $End(\mathbf{E})$ para I conjunto finito: $S_I(\triangleright_I) = (-1)^{|I|} \triangleright_I$, extendido por linealidad.

Evaluaremos $(S * Id_{\mathbf{E}})_I$ en el elemento \triangleright_I que es base de $\mathbf{E}[I]$. Para un conjunto finito I , escribiremos $Id_{\mathbf{E}[I]}$ y $S_{\mathbf{E}[I]}$ simplemente como Id_I y S_I respectivamente.

$$\begin{aligned} (S * Id)_I(\triangleright_I) &= \sum_{S \sqcup T = I} \mu_{S, T} \circ (S_S \otimes Id_T) \circ \Delta_{S, T}(\triangleright_I) = \sum_{S \sqcup T = I} \mu_{S, T} \circ (S_S \otimes Id_T)(\triangleright_S \otimes \triangleright_T) = \\ &= \sum_{S \sqcup T = I} \mu_{S, T} \left((-1)^{|S|} \triangleright_S \otimes \triangleright_T \right) = \sum_{S \sqcup T = I} (-1)^{|S|} \triangleright_I = \left(\sum_{S \sqcup T = I} (-1)^{|S|} \right) \triangleright_I. \end{aligned}$$

Observar que si $k = 0, \dots, |I|$, entonces la cantidad de subconjuntos $S \subseteq I$ de tamaño k es $\binom{|I|}{k}$, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} (S * Id)_I(\triangleright_I) &= \left(\sum_{k=0}^{k=|I|} (-1)^k \binom{|I|}{k} \right) \triangleright_I = \begin{cases} (1 + (-1))^{|I|} & \forall I \neq \emptyset \\ \triangleright_{\emptyset} & \text{si } I = \emptyset \end{cases}, \\ (S * Id)_I(\triangleright_I) &= \begin{cases} 0 & \forall I \neq \emptyset \\ \triangleright_{\emptyset} & \text{si } I = \emptyset \end{cases} = (u \circ \varepsilon)_I(\triangleright_I). \end{aligned}$$

Se procede de forma análoga con $(Id * S)_I(\triangleright_I) = (u \circ \varepsilon)_I(\triangleright_I)$ y se concluye que S es antípoda de \mathbf{E} por lo que \mathbf{E} es un monoide de Hopf.

A continuación probaremos, de forma análoga a lo hecho en biálgebras graduadas, que los bimonoides conexos en especie tienen antípoda, por lo tanto son monooides de Hopf. Antes veamos el siguiente resultado.

Lema 3.3.7. Sea $(\mathbf{h}, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ un bimonioide en especies, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $dim(\mathbf{h}[\emptyset]) = 1$

$$2. u_\emptyset \circ \varepsilon_\emptyset = Id_{\mathbb{k}}$$

3. u_\emptyset y ε_\emptyset son isomorfismos de biálgebras inversos entre \mathbb{k} y $\mathbf{h}[\emptyset]$.

Demostración. Como \mathbf{h} es un bimonoides, ε es un morfismo de monoides, por lo que tenemos que $\varepsilon_\emptyset \circ u_\emptyset = Id_{\mathbb{k}}$, es decir que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k} & \xrightarrow{u_\emptyset} & \mathbf{h}[\emptyset] \\ Id_{\mathbb{k}} \downarrow & & \swarrow \varepsilon_\emptyset \\ \mathbb{k} & & \end{array} ,$$

por lo tanto $\varepsilon_\emptyset, u_\emptyset \neq 0$, entonces las equivalencias entre las afirmaciones son obvias. \square

Definición 3.3.8. *Un bimonoides en especies es conexo si se verifica cualquiera de las afirmaciones del Lema anterior.*

Observación 3.3.9. En el caso de álgebras de Hopf, en la demostración de que la antípoda es un antimorfismo de álgebras y coálgebras (Proposición 1.4.5), no se utilizó nada específico de la categoría $Vect$. Únicamente se utilizó la definición de bimonoides, propiedades de la trenza β y la condición de antípoda, es decir que $S * Id = Id * S = u\varepsilon$.

Por lo tanto, esa demostración se puede hacer en general y concluir que:

Proposición 3.3.10. *Si $(\mathbf{p}, \mu, u, \Delta, \varepsilon, S)$ es un monoides de Hopf en $(\mathcal{C}, \bullet, \mathbb{I}, \alpha, \lambda, \rho, \beta)$ una categoría monoidal trezada, entonces:*

- $S \circ \mu = \mu \circ \beta \circ (S \bullet S)$
- $(S \bullet S) \circ \Delta = \beta \circ \Delta \circ S$.

Es decir, S es un antimorfismo de monoides y comonoides.

FORMULA DE TAKEUCHI PARA ESPECIES.

Proposición 3.3.11. *Sea \mathbf{h} un bimonoides conexo de especies. Entonces \mathbf{h} es un monoides de Hopf, con antípoda dada por $S_\emptyset = Id_{\mathbb{k}}$ y, para un conjunto finito $I \neq \emptyset$, la I -componente de la antípoda tiene la siguiente fórmula:*

$$S_I = \sum_{\substack{T_1 \sqcup \dots \sqcup T_k = I \\ T_i \neq \emptyset, k \geq 1}} (-1)^k \mu_{T_1, \dots, T_k} \circ \Delta_{T_1, \dots, T_k}.$$

La suma es sobre todas las descomposiciones ordenadas de I en subconjuntos no vacíos. Por definición, ambos mapas Δ_I y μ_I (es el caso $k = 1$) son la identidad en $\mathbf{h}[I]$.

Demostración. De forma análoga a la demostración de la fórmula de Takeuchi para biálgebras graduadas y conexas, tomando $f = Id - u\varepsilon$, al ser $u_\emptyset \varepsilon_\emptyset = Id_{\mathbf{h}[\emptyset]}$, se concluye que f es localmente nilpotente, ya que $|I| = n$ entonces $(f^{*k})_I = 0 \forall k > n$. Esto es porque

$$(f^{*k})_I = \sum_{T_1 \sqcup \dots \sqcup T_k = I} \mu_{T_1, \dots, T_k} \circ (f_{T_1} \otimes \dots \otimes f_{T_k}) \circ \Delta_{T_1, \dots, T_k},$$

y si $k > n = |I|$ entonces $T_j = \emptyset$ para algún j entonces $f_{T_j} = f_\emptyset = Id_{\mathbf{h}[\emptyset]} - u_\emptyset \varepsilon_\emptyset = 0$. Por lo tanto, para cada I , la suma $S_I = \sum_{k \geq 0} (-1)^k (f^{*k})_I$ es finita, por lo que el morfismo

$S = \sum_{k \geq 0} (-1)^k f^{*k}$ está bien definido. Veamos que es antípoda,

$$S * Id = \left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k f^{*k} \right) * (f + u\varepsilon) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k f^{*(k+1)} + \sum_{k \geq 0} (-1)^k f^{*k} = f^{*0} = u\varepsilon,$$

y de forma análoga tenemos que $Id * S = u\varepsilon$ y por lo tanto S es la antípoda de \mathbf{h} . Desarrollando S obtenemos que

$$S = u\varepsilon + \sum_{k \geq 1} (-1)^k f^{*k}, \text{ que en cada componente } I \text{ es}$$

$$S_I = (u\varepsilon)_I + \sum_{\substack{T_1 \sqcup \dots \sqcup T_k = I \\ k \geq 1}} (-1)^k \mu_{T_1, \dots, T_k} \circ (f|_{T_1} \otimes \dots \otimes f|_{T_k}) \circ \Delta_{T_1, \dots, T_k}.$$

Observar que si $T_j = \emptyset$ entonces $f|_{T_j = \emptyset} = (Id - u\varepsilon)_\emptyset = Id_{\mathbf{h}[\emptyset]} - Id_{\mathbf{h}[\emptyset]} = 0$ y si $T_j \neq \emptyset$ entonces $f|_{T_j} = (Id - u\varepsilon)_{T_j} = Id_{\mathbf{h}[T_j]} - (u\varepsilon)_{T_j} = Id_{\mathbf{h}[T_j]}$, dado que $\varepsilon_{T_j} = 0$.

Resumiendo $f|_{T_j} = \begin{cases} Id_{\mathbf{h}[T_j]} & \text{si } T_j \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ entonces,

$$S_I = (u\varepsilon)_I + \sum_{\substack{T_1 \sqcup \dots \sqcup T_k = I \\ T_j \neq \emptyset, k \geq 1}} (-1)^k \mu_{T_1, \dots, T_k} \circ (Id|_{\mathbf{h}[T_1]} \otimes \dots \otimes Id|_{\mathbf{h}[T_k]}) \circ \Delta_{T_1, \dots, T_k} =$$

$$= (u\varepsilon)_I + \sum_{\substack{T_1 \sqcup \dots \sqcup T_k = I \\ T_j \neq \emptyset, k \geq 1}} (-1)^k \mu_{T_1, \dots, T_k} \circ \Delta_{T_1, \dots, T_k}.$$

y por lo tanto si $I = \emptyset$ tenemos que $S_\emptyset = (u\varepsilon)_\emptyset = Id_{\mathbf{h}[\emptyset]} = Id_{\mathbf{k}}$ y si $I \neq \emptyset$ como $(u\varepsilon)_I = 0$ tenemos que

$$S_I = \sum_{\substack{T_1 \sqcup \dots \sqcup T_k = I \\ T_j \neq \emptyset, k \geq 1}} (-1)^k \mu_{T_1, \dots, T_k} \circ \Delta_{T_1, \dots, T_k}.$$

□

Ejemplo 3.3.12. Ya hemos observado que $(\mathbf{L}, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonoides en especie con los mapas dados en el Ejemplo 3.2.11. Observamos además que es conexo, ya que $\mathbf{L}[\emptyset] = \langle l_0 \rangle_{\mathbf{k}} \cong \mathbf{k}$, sabemos entonces que tiene antípoda por Takeuchi, y por lo tanto es un monoides de Hopf.

En este ejemplo buscaremos la expresión de la antípoda para \mathbf{L} de dos formas, una de ellas usando que la antípoda es un antimorfismo de monoides y por otro lado usando la fórmula de Takeuchi.

Si $I = \emptyset$, $\mathbf{L}[\emptyset] \cong \mathbf{k}$ entonces $S_\emptyset = Id_{\mathbf{L}[\emptyset]}$.

Si $|I| = 1$; $I = \{a\}$, entonces el único orden lineal es $l = a$, por lo que

$$\Delta_I(a) = \bigoplus_{S \sqcup T = \{a\}} l|_S \otimes l|_T = l|_{\{a\}} \otimes l|_\emptyset + l|_\emptyset \otimes l|_{\{a\}} = l \otimes l_0 + l_0 \otimes l \in (\mathbf{L} \bullet \mathbf{L})(\{a\}).$$

Evaluaremos el siguiente mapa $\mu \circ (S \otimes Id)$ en $l_0 = 1_{\mathbf{L}}$ y $S(l_0) = l_0$, entonces

$$\mu \circ (S \otimes Id)(\Delta_I(a)) = \mu \circ (S \otimes Id)(l \otimes l_0 + l_0 \otimes l) = \mu(S(l) \otimes l_0 + l_0 \otimes l) = S(l) + l,$$

como $\deg(l) = 1$ entonces $\varepsilon(l) = 0$, por lo que $0 = u\varepsilon(l) = (S * Id)_I(l) = S(l) + l$ entonces $S(l) = -l$.

Ahora si $|I| = n$ y $l = l_1 | \dots | l_n = \mu_{\{l_1\}, \dots, \{l_n\}}(l_1 \otimes \dots \otimes l_n)$, como hemos visto que la antípoda S es un antimorfismo de monoides entonces

$$S(l) = S(\mu_{\{l_1\}, \dots, \{l_n\}}(l_1 \otimes \dots \otimes l_n)) = \mu(S(l_n) \otimes \dots \otimes S(l_1)) = -l_n | \dots | -l_1 = (-1)^n l_n | \dots | l_1.$$

Al elemento $l_n | \dots | l_1$ se dice que tiene el orden inverso de $l = l_1 | \dots | l_n$ y se escribe como \bar{l} . Con esta notación la antípoda es $S(l) = (-1)^n \bar{l}$.

Por otro lado, usando Takeuchi, tenemos que

$$\begin{aligned} S_I(l) &= \sum_{\substack{S_1 \sqcup \dots \sqcup S_k = I \\ S_i \neq \emptyset}} (-1)^k \mu_{S_1, \dots, S_k} \circ \Delta_{S_1, \dots, S_k}(l) = \sum_{\substack{S_1 \sqcup \dots \sqcup S_k = I \\ S_i \neq \emptyset}} (-1)^k l_{S_1} \cdot l_{S_2} \cdot \dots \cdot l_{S_n} = \\ &= \sum_{\substack{l' \text{ orden en } I}} a_{l'} l', \end{aligned}$$

donde $a_{l'} = \sum_j (-1)^j |\{S_1 \sqcup \dots \sqcup S_j = I, \text{ con } S_i \neq \emptyset \text{ tal que } l_{S_1} | \dots | l_{S_j} = l'\}|$, donde por simplicidad escribiremos $l|_S = l_S \forall S \subseteq I$.

Las dos fórmulas para $S_I(l)$ nos lleva al siguiente resultado combinatorio:

$$a_{l'} = \sum_j \sum_{\substack{S_1 \sqcup \dots \sqcup S_j = I \text{ tal que} \\ l_{S_1} | \dots | l_{S_j} = l', S_i \neq \emptyset}} (-1)^j = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } l' = \bar{l}. \\ 0 & \text{si } l' \neq \bar{l} \end{cases}$$

A modo de ejemplo, consideremos $I = \{a, b, c, d\}$, $l = a | b | c | d$ y $l' = b | a | c | d$, entonces veamos que conjuntos S_1, S_2, \dots no vacíos son tales que $l_{S_1} | l_{S_2} | \dots = l'$:

$$\begin{array}{llll} S_1 = \{b\} & S_2 = \{a, c, d\} & & j = 2 \\ S_1 = \{b\} & S_2 = \{a\} & S_3 = \{c, d\} & j = 3 \\ S_1 = \{b\} & S_2 = \{a\} & S_3 = \{c\} & S_4 = \{d\} \quad j = 4 \\ S_1 = \{b\} & S_2 = \{a, c\} & S_3 = \{d\} & j = 3. \end{array}$$

Por lo que $a_{l'} = (-1)^2 \cdot 1 + (-1)^3 \cdot 2 + (-1)^4 \cdot 1 = 1 - 2 + 1 = 0$, dado que en este caso $l' \neq \bar{l}$.

Para este ejemplo, la única forma que un orden $l' = \bar{l}$ es que $S_1 = \{d\}$, $S_2 = \{c\}$, $S_3 = \{b\}$ y $S_4 = \{a\}$, por lo tanto $j = 4$ y $a_{\bar{l}} = (-1)^4 \cdot 1 = (-1)^4$.

3.4. Especies duales

Continuando con la analogía entre especies y espacios vectoriales graduados, definiremos la especie dual de una especie. Esta construcción en \mathbf{Sp} es la análoga al dual graduado en $gVect$.

Definición 3.4.1. Sea \mathbf{p} una especie, definimos a su **especie dual** \mathbf{p}^* de la siguiente forma:

- para cada conjunto finito I , $\mathbf{p}^*[I] := \mathbf{p}[I]^*$ donde este último es el espacio vectorial dual de $\mathbf{p}[I]$, y
- para cada biyección $\sigma : I \rightarrow J$ entre conjuntos finitos definimos $\mathbf{p}^*[\sigma] : \mathbf{p}^*[I] \rightarrow \mathbf{p}^*[J]$ como $\mathbf{p}^*[\sigma] = \mathbf{p}[\sigma^{-1}]^*$.

Observar que como $\sigma : I \rightarrow J$, $\sigma^{-1} : J \rightarrow I$ entonces $\mathbf{p}[\sigma^{-1}] : \mathbf{p}[J] \rightarrow \mathbf{p}[I]$ y por lo tanto su transformación dual es $\mathbf{p}[\sigma^{-1}]^* : \mathbf{p}[I]^* \rightarrow \mathbf{p}[J]^*$. Es por ello que al mapa $\mathbf{p}^*[\sigma]$ se ha definido de esa forma.

Proposición 3.4.2. Si \mathbf{p} es una especie entonces, \mathbf{p}^* su especie dual es una especie, es decir, es un functor covariante $\mathbf{p}^* : \mathbf{Set}^\times \rightarrow \mathbf{Vect}$.

Demostración. Para probar que es un functor tenemos que probar que

- lleva al mapa identidad de Set^\times al mapa identidad de $Vect$. Para ello sea $Id_I \in Arr_{Set^\times}$ la identidad, es decir $Id_I : I \rightarrow I$ entonces

$$\mathbf{p}^*[Id_I] = \mathbf{p}[Id_I^{-1}]^* = \mathbf{p}[Id_I]^* = (Id_{\mathbf{p}[I]})^* = Id_{\mathbf{p}^*[I]}.$$

- que si $\sigma : I \rightarrow J$ y $\tau : K \rightarrow J$ son biyecciones de conjuntos finitos entonces $\mathbf{p}^*[\sigma \circ \tau] = \mathbf{p}^*[\sigma] \circ \mathbf{p}^*[\tau]$, lo que probaría que es un functor covariante, veamos la prueba,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^*[\sigma \circ \tau] &= \mathbf{p}[(\sigma \circ \tau)^{-1}]^* = \mathbf{p}[\tau^{-1} \circ \sigma^{-1}]^* = (\mathbf{p}[\tau^{-1}] \circ \mathbf{p}[\sigma^{-1}])^* = \mathbf{p}[\sigma^{-1}]^* \circ \mathbf{p}[\tau^{-1}]^* = \\ &= \mathbf{p}^*[\sigma] \circ \mathbf{p}^*[\tau]. \quad \square \end{aligned}$$

De forma análoga a la definición de dual graduado de un morfismo en $gVect$, definiremos el dual de un morfismo de especies.

Definición 3.4.3. Dado $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ un morfismo de especies, definimos el **morfismo dual de f** , como el mapa $f^* : \mathbf{q}^* \rightarrow \mathbf{p}^*$ que en un conjunto finito I es $f_I^* = f^*[I] = (f[I])^* : \mathbf{q}^*[I] \rightarrow \mathbf{p}^*[I]$.

Lema 3.4.4. Si $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ es un morfismo de especies entonces f^* también lo es.

Demostración. Si $\sigma : I \rightarrow J$ es una biyección entre conjuntos finitos, debemos probar que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{q}^*[I] & \xrightarrow{f_I^*} & \mathbf{p}^*[I] \\ \mathbf{q}^*[\sigma] \downarrow & & \downarrow \mathbf{p}^*[\sigma] \\ \mathbf{q}^*[J] & \xrightarrow{f_J^*} & \mathbf{p}^*[J] \end{array}$$

Es decir que tenemos que probar que $f_J^* \circ \mathbf{q}^*[\sigma] = \mathbf{p}^*[\sigma] \circ f_I^*$.

Como f es un morfismo de especies y considerando la biyección $\sigma^{-1} : J \rightarrow I$ tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[J] & \xrightarrow{f_J} & \mathbf{q}[J] \\ \mathbf{p}[\sigma^{-1}] \downarrow & & \downarrow \mathbf{q}[\sigma^{-1}] \\ \mathbf{p}[I] & \xrightarrow{f_I} & \mathbf{q}[I] \end{array}, \quad \text{y obviamente implica que:} \\ \mathbf{q}[\sigma^{-1}] \circ f_J = f_I \circ \mathbf{p}[\sigma^{-1}].$$

Trabajemos entonces con la siguiente expresión,

$$f_J^* \circ \mathbf{q}^*[\sigma] = (f_J)^* \circ \mathbf{q}[\sigma^{-1}]^* = (\mathbf{q}[\sigma^{-1}] \circ f_J)^* = (f_I \circ \mathbf{p}[\sigma^{-1}])^* = (\mathbf{p}[\sigma^{-1}])^* \circ (f_I)^* = \mathbf{p}^*[\sigma] \circ f_I^*,$$

lo que prueba que f^* es un morfismo de especies. \square

Observación 3.4.5.

1. Observar que $(-)^* : Sp \rightarrow Sp$ es un functor contravariante. A este functor le llamaremos **functor dualidad**.
2. Si \mathbf{p} es una especie finita, entonces $(\mathbf{p}^*)^* \cong \mathbf{p}$, dado que sus componentes son de dimensión finita y entonces cada componente es isomorfa a su espacio bidual, además de que tomar inversos es una involución.

3. De forma análoga a lo realizado en $gVect$ (ver Observación 1.6.9), trabajaremos ahora en el dual de $\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}$, entonces tenemos para un conjunto finito I que:

$$(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})^*[I] = (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})_I^* = \left(\bigoplus_{S \sqcup T = I} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T] \right)^* \cong \prod_{S \sqcup T = I} (\mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T])^* = \bigoplus_{S \sqcup T = I} (\mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T])^*.$$

Y si f y g son morfismos de especies tenemos que $(f \bullet g)_I^* \cong \bigoplus_{S \sqcup T = I} (f_S \otimes g_T)^*$.

4. De forma análoga a lo visto en espacios vectoriales graduados tenemos que:

- para dos especies $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{Sp}$ el mapa $\gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} : \mathbf{p}^* \bullet \mathbf{q}^* \rightarrow (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})^*$ definido en la componente I como $(\gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{q}})_I = \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \gamma_{\mathbf{p}[S], \mathbf{q}[T]}$, resulta un morfismo de especies, por la naturalidad de γ en espacios vectoriales.

Además γ es una transformación natural entre los funtores $(-)^* \bullet (-)^*$ y $(-\bullet -)^* : \mathcal{Sp}^{op} \times \mathcal{Sp}^{op} \rightarrow \mathcal{Sp}$ y si las especies son finitas, $\gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}$ es un isomorfismo, por lo tanto

$$\mathbf{p}^* \bullet \mathbf{q}^* \cong (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})^*.$$

- para las especies $\mathbf{1}$ y $\mathbf{1}^*$ definimos al mapa $\theta_{\mathbf{1}} : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1}^*$ en la componente no nula como $\theta_{\mathbf{1}, \emptyset} = \theta : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}^*$.

Proposición 3.4.6. *Sea \mathbf{p} una especie finita, entonces:*

- 1) Si (\mathbf{p}, μ, u) es un monoide de especies, entonces la terna $(\mathbf{p}^*, \Delta_{\mathbf{p}^*}, \varepsilon_{\mathbf{p}^*})$ es un comonoide de especies donde $\Delta_{\mathbf{p}^*} := \gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{p}}^{-1} \circ \mu^*$ y $\varepsilon_{\mathbf{p}^*} := \theta_{\mathbf{1}}^{-1} \circ u^*$.
- 2) Si $(\mathbf{p}, \Delta, \varepsilon)$ es un comonoide de especies, entonces la terna $(\mathbf{p}^*, \mu_{\mathbf{p}^*}, u_{\mathbf{p}^*})$ es un monoide de especies donde $\mu_{\mathbf{p}^*} := \Delta^* \circ \gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{p}}$ y $u_{\mathbf{p}^*} := \varepsilon^* \circ \theta_{\mathbf{1}}$.
- 3) Si además $(\mathbf{p}, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonioide de especies, entonces $(\mathbf{p}^*, \mu_{\mathbf{p}^*}, u_{\mathbf{p}^*}, \Delta_{\mathbf{p}^*}, \varepsilon_{\mathbf{p}^*})$ es también un bimonioide de especies.
- 4) Si $(\mathbf{p}, \mu, u, \Delta, \varepsilon, S)$ es un monoide de Hopf de especies entonces también lo es $(\mathbf{p}^*, \mu_{\mathbf{p}^*}, u_{\mathbf{p}^*}, \Delta_{\mathbf{p}^*}, \varepsilon_{\mathbf{p}^*}, S_{\mathbf{p}^*})$, donde $S_{\mathbf{p}^*} := S^*$.

Demostración. La demostración es análoga a lo realizado en la Proposición 1.6.10, ya que se utilizó que $(-)^*$ es un functor contravariante y que en dimensión finita preserva el producto de Cauchy. \square

Definición 3.4.7. *Un monoide de Hopf $\mathbf{h} \in (\mathcal{Sp}, \bullet)$ es **autodual** si $\mathbf{h}^* \cong \mathbf{h}$ como monoides de Hopf.*

Ejemplo 3.4.8. Ya hemos observado que $(\mathbf{L}, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonioide en \mathcal{Sp} con los mapas dados en el Ejemplo 3.2.11. Observamos además que es conexo, ya que $\mathbf{L}[\emptyset] = \langle l_0 \rangle_{\mathbb{k}} \cong \mathbb{k}$, y por lo tanto (por Takeuchi) sabemos que tiene antípoda, y es un monoide de Hopf.

Ahora dualizaremos los mapas definidos antes, con el fin de obtener en \mathbf{L}^* la estructura de monoide de Hopf.

Sean $I \in \text{Set}^\times$ y los conjuntos S, T tales que $I = S \sqcup T$ y $l \in \mathbf{L}[I]$ entonces $l^* \in \mathbf{L}^*[I]$ es el funcional $l^* : \mathbf{L}[I] \rightarrow \mathbb{k}$ que verifica $l^*(l') = \delta_{l, l'}$, de forma análoga tomamos $l_1 \in \mathbf{L}[S]$, $l_2 \in \mathbf{L}[T]$, $l_1^* \in \mathbf{L}^*[S]$, $l_2^* \in \mathbf{L}^*[T]$ que verifican $l_1^*(l') = \delta_{l_1, l'}$ y $l_2^*(l') = \delta_{l_2, l'}$ respectivamente. A continuación veremos los mapas que dan la estructura de monoide de Hopf a \mathbf{L}^* para este caso.

- El producto en \mathbf{L}^* es el mapa $\mu_{\mathbf{L}^*} = \Delta^* \circ \gamma_{\mathbf{L}} : \mathbf{L}^* \bullet \mathbf{L}^* \rightarrow \mathbf{L}^*$ por lo que $\mu_{\mathbf{L}^*,S,T} : \mathbf{L}^*[S] \otimes \mathbf{L}^*[T] \rightarrow \mathbf{L}^*[I]$ entonces

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{L}^*,S,T}(l_1^* \otimes l_2^*)(l) &= \Delta_{S,T}^* \circ \gamma_{\mathbf{L}[S],\mathbf{L}[T]}(l_1^* \otimes l_2^*)(l) = \gamma_{\mathbf{L}[S],\mathbf{L}[T]}(l_1^* \otimes l_2^*)(\Delta_{S,T}(l)) = \\ &= \gamma_{\mathbf{L}[S],\mathbf{L}[T]}(l_1^* \otimes l_2^*)(l \mid_S \otimes l \mid_T) = \delta_{l_1, l \mid_S} \delta_{l_2, l \mid_T}, \end{aligned}$$

es decir que la expresión anterior es distinta de cero, sólo en los casos en que $l_1 = l \mid_S$ y $l_2 = l \mid_T$, y en esos casos es igual a 1.

Definimos a los barajamientos de órdenes de $l_1 \in \mathbf{L}[S]$ y $l_2 \in \mathbf{L}[T]$ como el siguiente conjunto

$$sh(l_1, l_2) := \{l \in \mathbf{L}[I] \text{ tal que } l \mid_S = l_1 \text{ y } l \mid_T = l_2\}.$$

Por lo que el producto en las componentes $\{S, T\}$ de \mathbf{L}^* , evaluado en $l \in \mathbf{L}$ es:

$$\mu_{\mathbf{L}^*,S,T}(l_1^* \otimes l_2^*) = \sum_{l \in sh(l_1, l_2)} l^*.$$

- El coproducto en \mathbf{L}^* , es el mapa, $\Delta_{\mathbf{L}^*} = \gamma_{\mathbf{L}}^{-1} \circ \mu^* : \mathbf{L}^* \rightarrow \mathbf{L}^* \bullet \mathbf{L}^*$, donde

$$(\mu_I^*)_{S,T} : \mathbf{L}^*[I] \rightarrow (\mathbf{L}[S] \otimes \mathbf{L}[T])^*, \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} (\Delta_{\mathbf{L}^*,I})_{S,T}(l^*)(l'_1 \otimes l'_2) &= \gamma_{\mathbf{L}[S],\mathbf{L}[T]}^{-1} \circ (\mu_I^*)_{S,T}(l^*)(l'_1 \otimes l'_2) = \gamma_{\mathbf{L}[S],\mathbf{L}[T]}^{-1}(l^*)(\mu_{\mathbf{L},S,T}(l'_1 \otimes l'_2)) = \\ &= \gamma_{\mathbf{L}[S],\mathbf{L}[T]}^{-1}(l^*)(l'_1 \bullet l'_2), \end{aligned}$$

cuya expresión es distinta de cero, sólo si $l = l'_1 \bullet l'_2$, como $l'_1 \in \mathbf{L}[S]$ y $l'_2 \in \mathbf{L}[T]$ es equivalente a decir que $l \mid_S = l'_1$, $l \mid_T = l'_2$ y que todo elemento de S es menor a todo elementos de T en el orden dado por l , que escribiremos $S <_l T$.

Si S cumple esa propiedad diremos que S es segmento inicial de l . Por lo que definiremos el siguiente mapa:

$$\delta_{S <_l T} = \begin{cases} 1 & \text{si } S \text{ es segmento inicial de } l. \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Deducimos que $\Delta_{\mathbf{L}^*,S,T}(l^*) = l^* \mid_S \otimes l^* \mid_T \delta_{S <_l T}$, y en su componente I es,

$$\Delta_{\mathbf{L}^*,I}(l^*) = \sum_{S \sqcup T = I} (l \mid_S)^* \otimes (l \mid_T)^* \delta_{S <_l T}.$$

Por ejemplo si consideramos $l = 1 \mid 3 \mid 4 \mid 2$, los conjuntos iniciales de l son:

$S = \emptyset$, $S = \{1\}$, $S = \{1, 3\}$, $S = \{1, 3, 4\}$ y $S = \{1, 3, 4, 2\}$, por lo que el coproducto en l^* es

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{L}^*,[4]}((1 \mid 3 \mid 4 \mid 2)^*) &= ()^* \otimes (1 \mid 3 \mid 4 \mid 2)^* + (1)^* \otimes (3 \mid 4 \mid 2)^* + (1 \mid 3)^* \otimes (4 \mid 2)^* + \\ &+ (1 \mid 3 \mid 4)^* \otimes (2)^* + (1 \mid 3 \mid 4 \mid 2)^* \otimes ()^*. \end{aligned}$$

- Como $u_{\emptyset}(1) = l_0$ y $\varepsilon_{\emptyset}(l_0) = 1$ entonces $u_{\mathbf{L}^*,\emptyset}(1) = l_0^*$ y $\varepsilon_{\mathbf{L}^*,\emptyset}(l_0^*) = 1$.

Observar además que

- \mathbf{L}^* es conmutativo, dado a que $sh(l_1, l_2) = sh(l_2, l_1)$.
- \mathbf{L}^* no es coconmutativo, porque la condición de ser segmento inicial de un orden no es conmutativo. Si $l^* \in \mathbf{L}^*[I]$ entonces

$$\beta_{S,T} \circ \Delta_{\mathbf{L}^*,S,T}(l^*) = \beta_{S,T}((l \mid_S)^* \otimes (l \mid_T)^* \delta_{S <_l T}) = (l \mid_T)^* \otimes (l \mid_S)^* \delta_{S <_l T},$$

por otro lado tenemos que, $\Delta_{\mathbf{L}^*, T, S}(l^*) = (l|_T)^* \otimes (l|_S)^* \delta_{T <_l S}$.

Esas expresiones no pueden ser iguales, observar que si $I = S \sqcup T$, con $S \neq \emptyset$ y si todo elemento de S es menor que todo elemento de T , según el orden de l , no se puede cumplir simultáneamente que $T <_l S$. Por lo que concluimos que \mathbf{L}^* no es coconmutativo.

En el Ejemplo 3.2.11 vimos que \mathbf{L} era coconmutativa y no conmutativa; el resultado anterior nos permite afirmar que $\mathbf{L}^* \not\cong \mathbf{L}$, es decir \mathbf{L} no es autodual.

Ejemplo 3.4.9. Veremos que la especie \mathbf{E} es autodual.

Para ello consideremos los mapas brindados en el Ejemplo 3.2.9 para \mathbf{E} . A continuación explicitaremos los mapas que dan estructura a \mathbf{E}^* , considerando a $\triangleright_I^* \in \mathbf{E}^*[I]$ que cumple que $\triangleright_I^*(\triangleright_I) = 1$ con $\triangleright_J \in \mathbf{E}[J]$. Comencemos por el coproducto, y con $S \sqcup T = I$

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{E}^* S, T}(\triangleright_I^*)(\triangleright_S \otimes \triangleright_T) &= \gamma_{\mathbf{E}[S], \mathbf{E}[T]}^{-1} \circ \mu_{\mathbf{E}^* S, T}^*(\triangleright_I^*)(\triangleright_S \otimes \triangleright_T) = \gamma_{\mathbf{E}[S], \mathbf{E}[T]}^{-1}(\triangleright_I^*)(\mu_{\mathbf{E}^* S, T}(\triangleright_S \otimes \triangleright_T)) = \\ &= \gamma_{\mathbf{E}[S], \mathbf{E}[T]}^{-1}(\triangleright_I^*)(\triangleright_{S \sqcup T}), \end{aligned}$$

deducimos que $\Delta_{\mathbf{E}^* S, T}(\triangleright_I^*) = \triangleright_S^* \otimes \triangleright_T^*$.

Ahora explicitaremos el producto, con $S \sqcup T = I$

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{E}^* S, T}(\triangleright_S^* \otimes \triangleright_T^*)(\triangleright_I) &= (\Delta_{\mathbf{E}^*}^*)_{S, T} \circ \gamma_{\mathbf{E}[S], \mathbf{E}[T]}(\triangleright_S^* \otimes \triangleright_T^*)(\triangleright_I) = \gamma_{\mathbf{E}[S], \mathbf{E}[T]}(\triangleright_S^* \otimes \triangleright_T^*) \Delta_{\mathbf{E}^* S, T}(\triangleright_I) = \\ &= \gamma_{\mathbf{E}[S], \mathbf{E}[T]}(\triangleright_S^* \otimes \triangleright_T^*)(\triangleright_S \otimes \triangleright_T) = 1, \end{aligned}$$

por lo que $\mu_{\mathbf{E}^* S, T}(\triangleright_S^* \otimes \triangleright_T^*) = \triangleright_I^*$.

Es inmediato ver que $\varepsilon_{\mathbf{E}^*, \emptyset}(\triangleright_{\emptyset}^*) = 1$ y que $u_{\mathbf{E}^*, \emptyset}(1_{\mathbf{k}}) = \triangleright_{\emptyset}^*$.

Finalmente si identificamos \triangleright_I^* con \triangleright_I , concluimos que $\mathbf{E}^* \cong \mathbf{E}$.

Capítulo 4

Funtores de Fock

De monoides de Hopf en especies a álgebras de Hopf graduadas.

En este capítulo definiremos los funtores de Fock, que son funtores de la categoría de especies en la categoría de espacios vectoriales graduados. Estos funtores son monoidales es decir, que vienen con una estructura adicional (monoidal laxa, colaxa o bilaxa) que nos permitirá construir monoides (resp. comonoides o bimonoides) en la categoría de espacios vectoriales graduados como imagen de monoides (resp. comonoides o bimonoides) en la categoría de especies. Comenzaremos por lo tanto definiendo funtores monoidales laxos, colaxos y bilaxos entre dos categorías monoidales cualesquiera y estudiando algunas propiedades de los mismos.

4.1. Funtores monoidales laxos, colaxos y bilaxos

Sean $(\mathcal{C}, \bullet_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}})$ y $(\mathcal{D}, \bullet_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}})$ dos categorías monoidales y sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un functor; consideremos $\mathcal{F}(-) \bullet_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(-)$ y $\mathcal{F}(- \bullet_{\mathcal{C}} -)$ a los funtores de $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, tales que si $A, B \in \text{Obj}_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{F}(-) \bullet_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(-)(A, B) := \mathcal{F}(A) \bullet_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(B)$ y $\mathcal{F}(- \bullet_{\mathcal{C}} -)(A, B) := \mathcal{F}(A \bullet_{\mathcal{C}} B)$, y definiéndolos en forma análoga a nivel de morfismos .

Definición 4.1.1. *Un functor monoidal laxo es una terna $(\mathcal{F}, \varphi, \varphi_0)$ tal que $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor, $\varphi_0 : I_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{F}(I_{\mathcal{C}})$ es un morfismo en \mathcal{D} y $\varphi : \mathcal{F}(-) \bullet_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(-) \rightarrow \mathcal{F}(- \bullet_{\mathcal{C}} -)$ es una transformación natural, es decir $\varphi_{A,B} : \mathcal{F}(A) \bullet_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{F}(A \bullet_{\mathcal{C}} B)$, que cumplen las siguientes condiciones:*

(1) *La transformación φ hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) \bullet_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(B) \bullet_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(C) & \xrightarrow{\text{Id} \bullet_{\mathcal{D}} \varphi_{B,C}} & \mathcal{F}(A) \bullet_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(B \bullet_{\mathcal{C}} C) \\ \varphi_{A,B} \bullet_{\mathcal{D}} \text{Id} \downarrow & & \downarrow \varphi_{A,B \bullet_{\mathcal{C}} C} \\ \mathcal{F}(A \bullet_{\mathcal{C}} B) \bullet_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(C) & \xrightarrow{\varphi_{A \bullet_{\mathcal{C}} B, C}} & \mathcal{F}(A \bullet_{\mathcal{C}} B \bullet_{\mathcal{C}} C) \end{array} \quad (\text{diagrama de asociatividad de } \varphi).$$

(2) *La transformación φ es unital a izquierda y derecha, es decir que los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{array}{ccc} I_{\mathcal{D}} \bullet_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(A) & \xleftarrow{\lambda_{\mathcal{F}(A)}} & \mathcal{F}(A) \\ \varphi_0 \bullet_{\mathcal{D}} \text{Id} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(\lambda_A) \\ \mathcal{F}(I_{\mathcal{C}}) \bullet_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\varphi_{I_{\mathcal{C}}, A}} & \mathcal{F}(I_{\mathcal{C}} \bullet_{\mathcal{C}} A) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) \bullet_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} & \xleftarrow{\rho_{\mathcal{F}(A)}} & \mathcal{F}(A) \\ \text{Id} \bullet_{\mathcal{D}} \varphi_0 \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(\rho_A) \\ \mathcal{F}(A) \bullet_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(I_{\mathcal{C}}) & \xrightarrow{\varphi_{A, I_{\mathcal{C}}}} & \mathcal{F}(A \bullet_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{D}}) \end{array} \quad , \quad (\text{diagramas unitales de } \varphi).$$

De ahora en adelante escribiremos simplemente \bullet al functor en cada categoría monoidal y el neutro en cada categoría monoidal como I .

Observación 4.1.2.

Los diagramas de la definición anterior son análogos a los axiomas de asociatividad y unidad de monoides.

Ejemplo 4.1.3. Recordar que en el Ejemplo 2.1.8 vimos que $\gamma_{V,W} : V^* \otimes W^* \rightarrow (V \otimes W)^*$, define una transformación natural $\gamma : (-)^* \otimes (-)^* \rightarrow (- \otimes -)^*$.

Además la Observación 1.6.3 nos dice que γ cumple el diagrama de asociatividad en la definición anterior. Si definimos γ_0 como el isomorfismo $\theta : \mathbb{k} \cong \mathbb{k}^*$, por la Observación 1.6.5 tenemos que γ y γ_0 cumplen con la conmutatividad de los diagramas unitales de la definición anterior,

Por tanto tenemos que $((-)^*, \gamma, \gamma_0)$ es un functor monoidal laxo de $Vect^{op}$ en $Vect$.

De forma análoga obtenemos ejemplos en la categoría de espacios vectoriales graduados y de especies. Es decir que $(-)^{*gr} : gVect^{op} \rightarrow gVect$ y $(-)^* : Sp^{op} \rightarrow Sp$ son funtores monoidales laxos con las correspondientes estructuras γ y γ_0 .

Definición 4.1.4. Un **functor monoidal colaxo** es una terna $(\mathcal{F}, \psi, \psi_0)$ tal que $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor, $\psi_0 : \mathcal{F}(I) \rightarrow I$ un morfismo en \mathcal{D} y $\psi : \mathcal{F}(- \bullet_{\mathcal{C}} -) \rightarrow \mathcal{F}(-) \bullet_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(-)$ es una transformación natural, es decir $\psi_{A,B} : \mathcal{F}(A \bullet B) \rightarrow \mathcal{F}(A) \bullet \mathcal{F}(B)$, que cumplen los axiomas duales de la definición anterior. Es decir que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) \bullet \mathcal{F}(B) \bullet \mathcal{F}(C) & \xleftarrow{Id \bullet \psi_{B,C}} & \mathcal{F}(A) \bullet \mathcal{F}(B \bullet C) & \text{(diagrama de coasociatividad de } \psi), \\ \psi_{A,B} \bullet Id \uparrow & & \uparrow \psi_{A,B \bullet C} & \\ \mathcal{F}(A \bullet B) \bullet \mathcal{F}(C) & \xleftarrow{\psi_{A \bullet B,C}} & \mathcal{F}(A \bullet B \bullet C) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} I \bullet \mathcal{F}(A) & \xleftarrow{\lambda_{\mathcal{F}(A)}} & \mathcal{F}(A) & , & \mathcal{F}(A) \bullet I & \xleftarrow{\rho_{\mathcal{F}(A)}} & \mathcal{F}(A) & \text{(diagramas counitales de } \psi). \\ \psi_0 \bullet Id \uparrow & & \downarrow \mathcal{F}(\lambda_A) & & Id \bullet \psi_0 \uparrow & & \downarrow \mathcal{F}(\rho_A) & \\ \mathcal{F}(I) \bullet \mathcal{F}(A) & \xleftarrow{\psi_{I,A}} & \mathcal{F}(I \bullet A) & & \mathcal{F}(A) \bullet \mathcal{F}(I) & \xleftarrow{\psi_{A,I}} & \mathcal{F}(A \bullet I) & \end{array}$$

Observación 4.1.5. Los diagramas de la definición anterior son análogos a los axiomas de coasociatividad y counidad de comonoides.

Por otro lado, observemos que si $(\mathcal{F}, \varphi, \varphi_0)$ es monoidal laxo con φ y φ_0 invertibles, entonces $(\mathcal{F}, \varphi^{-1}, \varphi_0^{-1})$ es monoidal colaxo. Recíprocamente, si $(\mathcal{F}, \psi, \psi_0)$ es monoidal colaxo con ψ y ψ_0 invertibles, entonces $(\mathcal{F}, \psi^{-1}, \psi_0^{-1})$ es monoidal laxo.

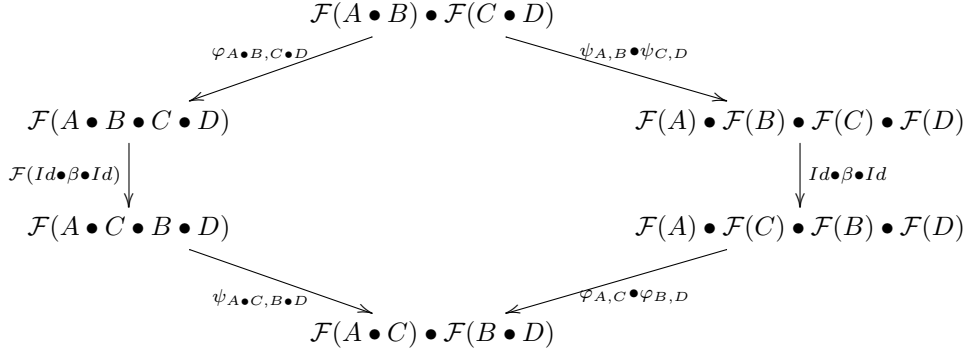
En este sentido si restringimos γ del Ejemplo 4.1.3 a la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita $Vect_{fin}$, resulta que γ es invertible, por lo tanto por lo observado anteriormente tenemos que $((-)^*, \gamma^{-1}, \gamma_0^{-1})$ en $Vect_{fin}$ es monoidal colaxo. De forma análoga obtenemos ejemplos en la categoría de espacios vectoriales graduados con componentes finitas y de especies finitas. Es decir que $(-)^{*gr} : gVect_{fin}^{op} \rightarrow gVect_{fin}$ y $(-)^* : Sp_{fin}^{op} \rightarrow Sp_{fin}$ son funtores monoidales colaxos con las correspondientes estructuras γ^{-1} y γ_0^{-1} .

Definición 4.1.6. Sean $(\mathcal{C}, \bullet, \beta)$ y $(\mathcal{D}, \bullet, \beta)$ dos categorías monoidales trenzadas, un **functor monoidal bilaxo** es una quintupla $(\mathcal{F}, \varphi, \varphi_0, \psi, \psi_0)$ tal que $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor que cumple con las siguientes propiedades:

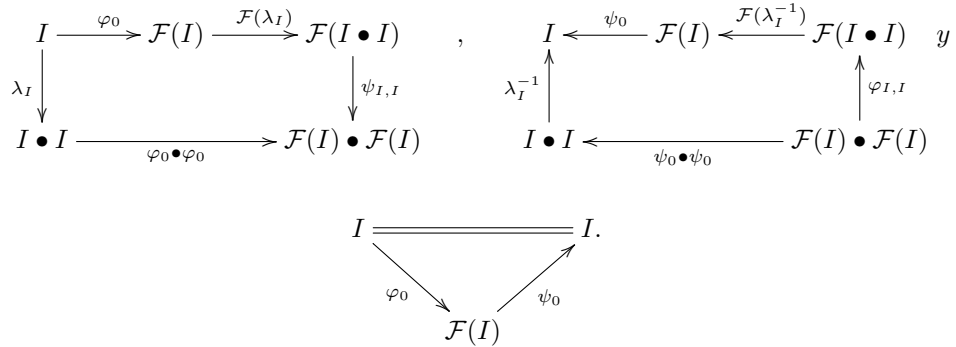
1. la terna $(\mathcal{F}, \varphi, \varphi_0)$ es un functor monoidal laxo,

2. la terna $(\mathcal{F}, \psi, \psi_0)$ es un functor monoidal colaxo,

3. el siguiente diagrama hexagonal conmuta



4. y además los siguientes diagramas con unidades conmutan



Observar que los diagramas son análogos a los axiomas de compatibilidad para bimonoides.

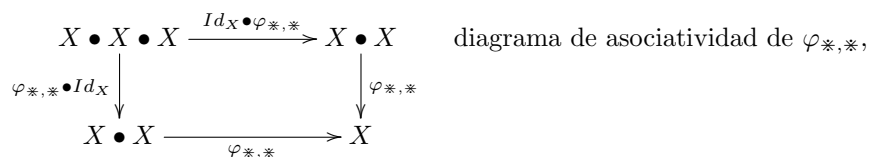
Ejemplo 4.1.7. Por la Observación 1.6.6 se deduce que en $Vect_{fin}$, $((-)^*, \gamma, \gamma_0, \gamma^{-1}, \gamma_0^{-1})$ es un functor monoidal bilaxo y análogamente para las versiones en espacios vectoriales graduados y especies (ambos con componentes finitas).

Ahora veremos unas construcciones con el fin de establecer un paralelismo entre monoides (resp. comonoides / bimonoides) y funtores monoidales laxos (resp. colaxos / bilaxos).

Ejemplo 4.1.8.

- Sea \mathbb{I} la categoría con un único objeto \ast y una única flecha (Id_\ast) . Observar que definiendo $\bullet_{\mathbb{I}}(\ast, \ast) = \ast \bullet_{\mathbb{I}} \ast = \ast$ y mapas $\alpha_{\mathbb{I}}, \rho_{\mathbb{I}}, \lambda_{\mathbb{I}}$ y $\beta_{\mathbb{I}}$ como Id_\ast resulta que $(\mathbb{I}, \bullet, \ast, \alpha_{\mathbb{I}}, \lambda_{\mathbb{I}}, \rho_{\mathbb{I}}, \beta_{\mathbb{I}})$ es una categoría monoidal trenzada.
- Sea $(\mathcal{D}, \bullet, I)$ otra categoría monoidal y $(\mathcal{F}, \varphi, \varphi_0)$ un functor monoidal laxo con $\mathcal{F} : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{D}$ y sea $X = \mathcal{F}(\ast) \in \mathcal{D}$. Observar que $\mathcal{F}(\ast) \bullet \mathcal{F}(\ast) = X \bullet X$ y $\mathcal{F}(\ast \bullet \ast) = \mathcal{F}(\ast) = X$ y por lo tanto $\varphi_{\ast, \ast} : X \bullet X \rightarrow X$ y $\varphi_0 : I \rightarrow X$.

Por lo tanto, los diagramas de asociatividad y unitales de la definición de functor monoidal laxo, en este caso quedan:



$$\begin{array}{ccc}
I \bullet X & \xleftarrow{\lambda_X} & X \\
\varphi_0 \bullet Id_X \downarrow & & \parallel Id_X \\
X \bullet X & \xrightarrow{\varphi_{*,*}} & X
\end{array}
, \quad
\begin{array}{ccc}
X \bullet I & \xleftarrow{\rho_X} & X \\
Id_X \bullet \varphi_0 \downarrow & & \parallel Id_X \\
X \bullet X & \xrightarrow{\varphi_{*,*}} & X
\end{array}
, \text{ diagramas unitales de } \varphi.$$

Estos diagramas son los que deben conmutar para que $(X, \varphi_{*,*}, \varphi_0)$ sea un monoide en \mathcal{D} .

Por lo tanto $(\mathcal{F}, \varphi, \varphi_0)$ es un functor monoidal laxo si y sólo si $(X, \varphi_{*,*}, \varphi_0)$ es un monoide en \mathcal{D} .

Recíprocamente, dado un monoide (X, μ, u) en \mathcal{D} , si definimos el functor $\mathcal{F}_X : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{D}$ como $\mathcal{F}_X(*) = X$, $\varphi_{*,*} = \mu$ y $\varphi_0 = u$ resulta que el functor $(\mathcal{F}_X, \varphi_{*,*}, \varphi_0)$ es monoidal laxo.

Procediendo de forma análoga para comonoides, tenemos que dado (C, Δ, ε) un comonoide en la categoría $(\mathcal{D}, \bullet, I)$, el functor $(\mathcal{F}_C, \Delta, \varepsilon)$ es monoidal colaxo. A su vez, dado $(\mathcal{F}, \psi, \psi_0)$ un functor monoidal colaxo de \mathbb{I} en \mathcal{D} , tenemos que $(\mathcal{F}(*), \psi_{*,*}, \psi_0)$ es un comonoide en \mathcal{D} .

Procediendo además de forma análoga para bimonoides, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.1.9. *Dada una categoría monoidal (\mathcal{D}, \bullet) , existe una equivalencia entre*

1. *los monoides de la categoría (\mathcal{D}, \bullet) y los funtores monoidales laxos de (\mathbb{I}, \bullet) a (\mathcal{D}, \bullet) ,*
2. *los comonoides de la categoría (\mathcal{D}, \bullet) y los funtores monoidales colaxos de (\mathbb{I}, \bullet) a (\mathcal{D}, \bullet) ,*
3. *si además la categoría (\mathcal{D}, \bullet) es bilaxa y trenzada, existe una equivalencia entre los bimonoides de la categoría y los funtores monoidales bilaxos de (\mathbb{I}, \bullet) a (\mathcal{D}, \bullet) .*

Lema 4.1.10. *La composición de funtores monoidales laxos (resp. colaxos / bilaxos) es también un functor monoidal laxo (resp. colaxo / bilaxo).*

Demostración. Sólo describiremos la estructura laxa y colaxa de la composición. Para demostrar que efectivamente estas estructuras verifican las condiciones de laxo y colaxo se utiliza la conmutatividad de los diagramas para cada functor y propiedades functoriales. No escribiremos esta demostración, los detalles se encuentran en Teorema 3.21 de [AM10].

Sean $(\mathcal{F}, \varphi^{\mathcal{F}}, \varphi_0^{\mathcal{F}})$ y $(\mathcal{G}, \varphi^{\mathcal{G}}, \varphi_0^{\mathcal{G}})$ dos funtores monoidales laxos $\mathcal{F} : (\mathcal{C}, \bullet) \rightarrow (\mathcal{D}, \bullet)$ y $\mathcal{G} : (\mathcal{D}, \bullet) \rightarrow (\mathcal{E}, \bullet)$. Entonces su composición es también un functor monoidal laxo con la siguiente estructura

$$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}, \mathcal{G}(\varphi^{\mathcal{F}}) \circ \varphi^{\mathcal{G}}, \mathcal{G}(\varphi_0^{\mathcal{F}}) \circ \varphi_0^{\mathcal{G}}).$$

Es decir, por ejemplo, que $\varphi_{A,B}^{\mathcal{G} \circ \mathcal{F}}$ está dada por el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(A) \bullet_{\mathcal{E}} (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(B) = \mathcal{G}(\mathcal{F}A) \bullet_{\mathcal{E}} \mathcal{G}(\mathcal{F}B) & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{F}A, \mathcal{F}B}^{\mathcal{G}}} & \mathcal{G}(\mathcal{F}A \bullet_{\mathcal{D}} \mathcal{F}B) \\
& \searrow \varphi_{A,B}^{\mathcal{G} \circ \mathcal{F}} & \downarrow \mathcal{G}(\varphi_{A,B}^{\mathcal{F}}) \\
& & \mathcal{G}(\mathcal{F}A \bullet_{\mathcal{C}} B)
\end{array}$$

En el caso que $(\mathcal{F}, \psi^{\mathcal{F}}, \psi_0^{\mathcal{F}})$ y $(\mathcal{G}, \psi^{\mathcal{G}}, \psi_0^{\mathcal{G}})$ sean dos funtores monoidales colaxos, entonces su composición es también un functor monoidal colaxo con la siguiente estructura

$$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}, \psi^{\mathcal{G}} \circ \mathcal{G}(\psi^{\mathcal{F}}), \psi_0^{\mathcal{G}} \circ \mathcal{G}(\psi_0^{\mathcal{F}})).$$

Si además $(\mathcal{F}, \psi^{\mathcal{F}}, \psi_0^{\mathcal{F}}, \varphi^{\mathcal{F}}, \varphi_0^{\mathcal{F}})$ y $(\mathcal{G}, \psi^{\mathcal{G}}, \psi_0^{\mathcal{G}}, \varphi^{\mathcal{G}}, \varphi_0^{\mathcal{G}})$ son funtores monoidales bilaxos entonces también lo es su composición con la siguiente estructura

$$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}, \mathcal{G}(\varphi^{\mathcal{F}}) \circ \varphi^{\mathcal{G}}, \mathcal{G}(\varphi_0^{\mathcal{F}}) \circ \varphi_0^{\mathcal{G}}, \psi^{\mathcal{G}} \circ \mathcal{G}(\psi^{\mathcal{F}}), \psi_0^{\mathcal{G}} \circ \mathcal{G}(\psi_0^{\mathcal{F}})).$$

□

A continuación veremos el resultado principal de esta sección, que nos dice que un functor monoidal laxo (colaxo / bilaxo) lleva monoides (comonoides / bimonoides) en monoides (comonoides / bimonoides, respectivamente). Con algunas hipótesis extra, se puede también probar que los funtores bilaxos preservan monoides de Hopf. Este resultado no lo veremos en este trabajo ya que únicamente utilizaremos estos funtores para el caso de bimonoides conexos en especies (y la condición de preservar monoides de Hopf en este caso es directa). Por más detalle en el resultado para monoides de Hopf, ver Sección 3.4.3 de [AM10].

Proposición 4.1.11.

- Sea $\mathcal{F} : (\mathcal{C}, \bullet) \rightarrow (\mathcal{D}, \bullet)$ un functor monoidal laxo con estructura $(\mathcal{F}, \varphi, \varphi_0)$ y sea (B, μ, u) un monoide en (\mathcal{C}, \bullet) , entonces $(\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(\mu) \circ \varphi, \mathcal{F}(u) \circ \varphi_0)$, es un monoide en (\mathcal{D}, \bullet) .
- Si $\mathcal{F} : (\mathcal{C}, \bullet) \rightarrow (\mathcal{D}, \bullet)$ es un functor monoidal colaxo con estructura $(\mathcal{F}, \psi, \psi_0)$ y sea $(B, \Delta, \varepsilon) \in (\mathcal{C}, \bullet)$ un comonoide, entonces $(\mathcal{F}(B), \psi \circ \mathcal{F}(\Delta), \psi_0 \circ \mathcal{F}(\varepsilon))$, es un comonoide en (\mathcal{D}, \bullet) .
- Y si $\mathcal{F} : (\mathcal{C}, \bullet) \rightarrow (\mathcal{D}, \bullet)$ un functor monoidal bilaxo con estructura $(\mathcal{F}, \varphi, \varphi_0, \psi, \psi_0)$ y $(B, \mu, u, \Delta, \varepsilon) \in (\mathcal{C}, \bullet)$ es un bimonioide, entonces

$$(\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(\mu) \circ \varphi, \mathcal{F}(u) \circ \varphi_0, \psi \circ \mathcal{F}(\Delta), \psi_0 \circ \mathcal{F}(\varepsilon)), \text{ es un bimonioide en } (\mathcal{D}, \bullet).$$

Demostración.

La demostración en los tres casos se basa en la correspondencia entre monoides, comonoides y bimonoides en una categoría y funtores monoidales laxos, colaxos y bilaxos vista en la Proposición 4.1.9 y en el resultado para composiciones visto en el lema anterior.

A modo de ejemplo, veamos el caso de bimonoides. Si $(B, \mu, u, \Delta, \varepsilon) \in (\mathcal{C}, \bullet)$ es un bimonioide, entonces (por la Proposición 4.1.9) el functor $\mathcal{F}_B : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{C}$ es monoidal bilaxo con estructura $(\mathcal{F}_B, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$. Por el Lema 4.1.10 tenemos entonces que $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}_B : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{D}$ es también monoidal bilaxo con estructura

$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{F}_B, \mathcal{F}(\mu) \circ \varphi, \mathcal{F}(u) \circ \varphi_0, \psi \circ \mathcal{F}(\Delta), \psi_0 \circ \mathcal{F}(\varepsilon)).$$

Observar que $(\mathcal{F} \circ \mathcal{F}_B)(*) = \mathcal{F}(B)$; utilizando nuevamente la correspondencia de la Proposición 4.1.9 tenemos entonces que

$$(\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(\mu) \circ \varphi, \mathcal{F}(u) \circ \varphi_0, \psi \circ \mathcal{F}(\Delta), \psi_0 \circ \mathcal{F}(\varepsilon))$$

es un bimonioide.

□

Observación 4.1.12. Aplicaremos la primer parte de la proposición anterior para el functor monoidal laxo $((-)^*, \gamma, \gamma_0) : Vect^{op} \rightarrow Vect$, observar que un monoide en $Vect^{op}$ es un comonoide en $Vect$, es decir es una coálgebra. Por lo tanto, obtenemos que si (C, Δ, ε) es una coálgebra (un monoide en $Vect^{op}$), entonces $(C^*, \Delta^* \circ \gamma, \varepsilon^* \circ \gamma_0)$ es un monoide en $Vect$; es decir, es un álgebra.

Análogamente, aplicando la segunda parte de la proposición anterior al functor monoidal colaxo $((-)^*, \gamma^{-1}, \gamma_0^{-1}) : Vect_{fin}^{op} \rightarrow Vect_{fin}$, como un comonoide en $Vect_{fin}^{op}$ es un álgebra de dimensión finita, obtenemos que si (A, μ, u) es un álgebra de dimensión finita entonces

$(A^*, \gamma^{-1} \circ \mu^*, \gamma_0^{-1} \circ u^*)$ es una coálgebra.

Y aplicando la tercera parte de la proposición al functor monoidal bilaxo $((-)^*, \gamma, \gamma_0, \gamma^{-1}, \gamma_0^{-1}) : Vect_{fin}^{op} \rightarrow Vect_{fin}$, obtenemos que si $(B, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra de dimensión finita, $(B, \Delta^* \circ \gamma, \varepsilon^* \circ \gamma_0, \gamma^{-1} \circ \mu^*, \gamma_0^{-1} \circ u^*)$ es también una biálgebra de dimensión finita.

En general si $(\mathcal{F}, \varphi, \varphi_0, \psi, \psi_0)$ es un functor bilaxo y $(h, \mu, u, \Delta, \varepsilon, S)$ un monoide de Hopf no se puede asegurar que $\mathcal{F}(h)$ sea un monoide de Hopf. En la Proposición 3.50 de [AM10] se prueba que si φ y φ_0 son invertibles entonces $\mathcal{F}(S)$ es antípoda para el bimonioide de la proposición anterior. Por lo tanto en el caso de $Vect_{fin}$ con el functor bilaxo $(-)^*$ resulta que $(S)^*$ es antípoda para la biálgebra dual.

De forma análoga obtenemos estos resultados para las versiones graduadas de espacios vectoriales y de especies. Esto es exactamente lo que se probó en las Proposiciones 1.6.10 y 3.4.6.

En la siguiente sección utilizaremos estos resultados para funtores monoidales de la categoría de especies a espacios vectoriales graduados.

4.2. Functor de Fock completo \mathcal{K}

Antes de definir los funtores de Fock, es necesario acordar notaciones e introducir algunos conceptos.

Observación 4.2.1. Sean s, t y $n \in \mathbb{N}$, escribiremos

- $[n]$ al conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$,
- $[s+1, s+t]$ al conjunto $\{s+1, s+2, \dots, s+t\}$,
- si $S \subseteq [n]$, escribiremos como $|S|$ al cardinal del conjunto S ,
- y si \mathbf{p} es una especie, escribiremos simplemente $\mathbf{p}[n]$ en vez de $\mathbf{p}[[n]]$.

Observar que dados dos conjuntos $A, B \subseteq [n]$ con el mismo cardinal, existe una única biyección $\sigma : A \rightarrow B$ que preserva el orden.

Sean $s, t \in \mathbb{N}$, $A = [t]$ y $B = [s+1, s+t]$, entonces la biyección que preserva el orden entre A y B la escribiremos como $shift_s : A \rightarrow B$. Es claro que si i es tal que $0 \leq i \leq t$, $shift_s(i) = s+i$; a esta biyección la llamaremos **shifting**.

Por otro lado si $a \in \mathbb{N}$ y $A = \{s_1 < s_2 < \dots < s_a\} \subseteq \mathbb{N}$ (con $|A| = a$), y $B = [a]$, la biyección que preserva el orden entre A y B la escribiremos como $std_{A \rightarrow [a]} : A \rightarrow [a]$ y está definida como $std_{A \rightarrow [a]}(s_j) = j$. Llamaremos a esta biyección **estandarización**, dado que *estandariza* las entradas de A al segmento inicial $\{1, 2, \dots, a\}$.

Cuando no se conozca la cantidad de elementos de un conjunto A , al mapa $std_{A \rightarrow [a]}$ lo escribiremos como $std_{A \rightarrow |A|}$.

Definición 4.2.2.

Si \mathbf{p} es una especie, sea $\mathcal{K} : Sp \rightarrow gVect_{\mathbb{k}}$ el functor definido, a nivel de objetos como:

$$\mathcal{K}(\mathbf{p}) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{p}[n],$$

y si $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ es un morfismo de especies, se define al functor a nivel de flechas como:

$$\mathcal{K}(f) := \bigoplus_n f_{[n]}, \quad \text{donde } f_{[n]} : \mathbf{p}[n] \rightarrow \mathbf{q}[n].$$

A continuación procederemos a dar al functor \mathcal{K} estructura de functor monoidal bilaxo, donde tanto para espacios como para espacios vectoriales graduados consideramos el producto de Cauchy.

Definición 4.2.3. *Estructura monoidal bilaxa de \mathcal{K} .*

Necesitamos definir mapas:

$$\mathcal{K}(\mathbf{p}) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{q}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}} \\ \xleftarrow{\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}} \end{array} \mathcal{K}(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}),$$

basta con definir las componentes de grado n , esto es:

$$\bigoplus_{s+t=n} \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{q}[t] \begin{array}{c} \xrightarrow{(\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}})_n} \\ \xleftarrow{(\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}})_n} \end{array} \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T].$$

Definimos $(\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}})_n$ en $s+t=n$ como la suma directa de los siguientes mapas:

$$(\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}})_{s,t} : \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{q}[t] \xrightarrow{\mathbf{p}[Id_{[s]}] \otimes \mathbf{q}[shift_s]} \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{q}[s+1, s+t] \text{ y,}$$

definimos $(\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}})_n$ en $S \sqcup T = [n]$ como la suma directa de los siguientes mapas:

$$\mathbf{p}[|S|] \otimes \mathbf{q}[|T|] \xleftarrow{\mathbf{p}[std_{S \rightarrow |S|}] \otimes \mathbf{q}[std_{T \rightarrow |T|}]} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T] : (\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}})_{S,T}.$$

Como $\mathcal{K}(\mathbf{1}) = \mathbb{K}$, definimos $\varphi_0 = \psi_0 = Id_{\mathbb{K}}$, estos mapas son $Id_{\mathbb{K}}$ en grado cero y nulos en las otras componentes, escribiremos

$$\mathbb{K} \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_0} \\ \xleftarrow{\psi_0} \end{array} \mathbb{K} (= \mathcal{K}(\mathbf{1})_0).$$

Observación 4.2.4.

Observar que si $A = [s]$ y $B = [s+1, s+t]$, entonces $std_{A \rightarrow |A|} = Id_A$ y $std_{B \rightarrow |B|} = shift_s^{-1}$. Por lo tanto en este caso, la componente $\{A, B\}$ de $\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ es $\mathbf{p}[Id_{[s]}] \otimes \mathbf{q}[shift_s^{-1}]$, que es la inversa de la componente $\{s, t\}$ de $\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$; es decir $(\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}})_{s,t} = (\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}})_{A,B}^{-1}$. Por lo tanto la composición $\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \circ \varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}} = Id_{\mathcal{K}(\mathbf{p}) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{q})}$.

Sin embargo, en general estos mapas no son invertibles dado que la imagen de φ involucra sólo particiones de $[n]$ de la forma $[s] \cup [s+1, s+t]$.

Proposición 4.2.5. *Sea el functor \mathcal{K} y los mapas φ, φ_0, ψ y ψ_0 definidos anteriormente.*

Entonces

- la terna $(\mathcal{K}, \varphi, \varphi_0)$ es un functor monoidal laxo,
- la terna $(\mathcal{K}, \psi, \psi_0)$ es un functor monoidal colaxo, y
- la quintupla $(\mathcal{K}, \varphi, \varphi_0, \psi, \psi_0)$ es un functor monoidal bilaxo.

Demostración.

Comenzaremos probando que ψ es una transformación natural. Para ello tomemos $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$ y $g : \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}'$ dos morfismos de especies. Debemos probar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) & \xrightarrow{\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}} & \mathcal{K}(\mathbf{p}) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{q}) \\ \mathcal{K}(f \bullet g) \downarrow & & \downarrow \mathcal{K}(f) \bullet \mathcal{K}(g) \\ \mathcal{K}(\mathbf{p}', \mathbf{q}') & \xrightarrow{\psi_{\mathbf{p}',\mathbf{q}'}} & \mathcal{K}(\mathbf{p}') \bullet \mathcal{K}(\mathbf{q}') \end{array}$$

Basta probar que conmuta en una componente $\{S, T\}$ con $S \sqcup T = [n]$, es decir que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T] & \xrightarrow{\mathbf{p}[std_{S \rightarrow |S|}] \otimes \mathbf{q}[std_{T \rightarrow |T|}]} & \mathbf{p}[|S|] \otimes \mathbf{q}[|T|] . \\ f_S \otimes g_T \downarrow & & \downarrow f_{|S|} \otimes g_{|T|} \\ \mathbf{p}'[S] \otimes \mathbf{q}'[T] & \xrightarrow{\mathbf{p}'[std_{S \rightarrow |S|}] \otimes \mathbf{q}'[std_{T \rightarrow |T|}]} & \mathbf{p}'[|S|] \otimes \mathbf{q}'[|T|] \end{array}$$

Como f y g son morfismos de especies, tenemos que si $\sigma : S \rightarrow S'$ y $\alpha : T \rightarrow T'$ son biyecciones, los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[S] & \xrightarrow{\mathbf{p}[\sigma]} & \mathbf{p}[S'] & , & \mathbf{q}[T] & \xrightarrow{\mathbf{q}[\alpha]} & \mathbf{q}[T'] . \\ f_S \downarrow & & \downarrow f_{S'} & & g_T \downarrow & & \downarrow g_{T'} \\ \mathbf{p}'[S] & \xrightarrow{\mathbf{p}'[\sigma]} & \mathbf{p}'[S'] & & \mathbf{q}'[T] & \xrightarrow{\mathbf{q}'[\alpha]} & \mathbf{q}'[T'] \end{array}$$

En particular si $\sigma = std_{S \rightarrow |S|}$ y $\alpha = std_{T \rightarrow |T|}$, aplicando el producto tensorial entre ambos diagramas, obtenemos la conmutatividad del diagrama en la componente $\{S, T\}$ de $\psi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}$; lo que prueba la naturalidad de ψ .

Para probar la naturalidad de φ se utilizan argumentos similares.

Ahora procederemos a probar que ψ es un mapa coasociativo. Para ello hay que probar que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q} \bullet \mathbf{r}) & \xrightarrow{\psi_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \bullet \mathbf{r}}} & \mathcal{K}(\mathbf{p}) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{q} \bullet \mathbf{r}) . \\ \psi_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}, \mathbf{r}} \downarrow & & \downarrow Id_{\mathbf{p}} \bullet \psi_{\mathbf{q}, \mathbf{r}} \\ \mathcal{K}(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{r}) & \xrightarrow{\psi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \bullet Id_{\mathbf{r}}} & \mathcal{K}(\mathbf{p}) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{q}) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{r}) \end{array}$$

Si $S \sqcup T \sqcup U = [n]$, tenemos que

$$\begin{aligned} & ((Id_{\mathbf{p}} \bullet \psi_{\mathbf{q}, \mathbf{r}}) \circ \psi_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \bullet \mathbf{r}})_{S, T, U} = (Id_{\mathbf{p}} \bullet \psi_{\mathbf{q}, \mathbf{r}}) \circ \left(\mathbf{p}[std_{S \rightarrow |S|}] \otimes (\mathbf{q} \bullet \mathbf{r})[std_{T \sqcup U \rightarrow |T \sqcup U|}] \right) \\ & = (Id_{\mathbf{p}} \bullet \psi_{\mathbf{q}, \mathbf{r}}) \circ \left(\mathbf{p}[std_{S \rightarrow |S|}] \otimes \left(\mathbf{q}[std_{T \sqcup U \rightarrow |T \sqcup U|} | T] \otimes \mathbf{r}[std_{T \sqcup U \rightarrow |T \sqcup U|} | U] \right) \right) . \end{aligned}$$

Por simplicidad llamaremos $T' = std_{T \sqcup U \rightarrow |T \sqcup U|}(T)$ y $U' = std_{T \sqcup U \rightarrow |T \sqcup U|}(U)$, y además tenemos que $|T'| = |T|$, $|U'| = |U|$ por lo tanto

$$\begin{aligned} & ((Id_{\mathbf{p}} \bullet \psi_{\mathbf{q}, \mathbf{r}}) \circ \psi_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \bullet \mathbf{r}})_{S, T, U} = \left(\mathbf{p}[Id_{|S|}] \otimes \mathbf{q}[std_{T' \rightarrow |T|}] \otimes \mathbf{r}[std_{U' \rightarrow |U|}] \right) \circ \\ & \quad \left(\mathbf{p}[std_{S \rightarrow |S|}] \otimes \mathbf{q}[std_{T \sqcup U \rightarrow |T \sqcup U|} | T] \otimes \mathbf{r}[std_{T \sqcup U \rightarrow |T \sqcup U|} | U] \right) . \end{aligned}$$

Observar que $std_{T' \rightarrow |T|} \circ std_{T \sqcup U \rightarrow |T \sqcup U|} | T$ es una biyección de T en $[|T|]$ que preserva el orden, y por lo tanto es la biyección $std_{T \rightarrow |T|}$; de forma análoga para el factor con U .

Por lo tanto tenemos que

$$((Id_{\mathbf{p}} \bullet \psi_{\mathbf{q}, \mathbf{r}}) \circ \psi_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \bullet \mathbf{r}})_{S, T, U} = \mathbf{p}[std_{S \rightarrow |S|}] \otimes \mathbf{q}[std_{T \rightarrow |T|}] \otimes \mathbf{r}[std_{U \rightarrow |U|}] .$$

Procediendo de forma análoga a lo anterior obtendremos que

$$((\psi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \bullet Id_{\mathbf{r}}) \circ \psi_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}, \mathbf{r}})_{S, T, U} = \mathbf{p}[std_{S \rightarrow |S|}] \otimes \mathbf{q}[std_{T \rightarrow |T|}] \otimes \mathbf{r}[std_{U \rightarrow |U|}] ,$$

concluyendo que $\psi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}$ es un mapa coasociativo.

Considerando la Observación 4.2.4, y que ψ es coasociativa, se prueba fácilmente la asociatividad de φ .

Los mapas ψ y φ son unitales izquierdos y derechos; se puede chequear que los diagramas en las definiciones 4.1.1 (2) y 4.1.4 conmutan dado que

- $\mathcal{K}(\mathbf{1}) = \mathbb{k}$,
- $\varphi_0 = \psi_0 = Id_{\mathbb{k}}$,
- dadas las componentes S, T de $[n]$ tales que $S \sqcup T = [n]$, el mapa $(\psi_{\mathbf{1}, \mathbf{p}})_{S, T}$ es un mapa con dominio $\mathbf{1}[S] \otimes \mathbf{p}[T]$ y codominio $\mathbf{1}[|S|] \otimes \mathbf{p}[|T|]$; cuando $S \neq \emptyset$ tenemos que $\mathbf{1}[S] = 0$ en este caso $(\psi_{\mathbf{1}, \mathbf{p}})_{S, T} = 0$ y para cuando $S = \emptyset$ y $T = [n]$ tenemos que $\mathbf{1}[\emptyset] = \mathbb{k}$, es decir que $(\psi_{\mathbf{1}, \mathbf{p}})_{\emptyset, [n]} : \mathbb{k} \otimes \mathbf{p}[n] \rightarrow \mathbb{k} \otimes \mathbf{p}[n]$ por lo que

$$(\psi_{\mathbf{1}, \mathbf{p}})_{\emptyset, [n]} = Id_{\mathbb{k}} \otimes \mathbf{p}[std_{[n] \rightarrow [n]}] = Id_{\mathbb{k}} \otimes \mathbf{p}[Id_{[n]}] = Id_{\mathbb{k} \otimes \mathbf{p}[n]},$$

- análogamente, en la componente $\{0, n\}$ el mapa $\varphi_{\mathbf{1}, \mathbf{p}}$ es

$$(\varphi_{\mathbf{1}, \mathbf{p}})_{0, n} = Id_{\mathbb{k}} \otimes \mathbf{p}[shift_0] = Id_{\mathbb{k}} \otimes \mathbf{p}[Id_{[n]}] = Id_{\mathbb{k} \otimes \mathbf{p}[n]}.$$

- de forma análoga obtenemos que $(\psi_{\mathbf{p}, \mathbf{1}})_{[n], \emptyset} = Id_{\mathbf{p}[n] \otimes \mathbb{k}}$ y que $(\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{1}})_{n, 0} = Id_{\mathbf{p}[n] \otimes \mathbb{k}}$.

Con los argumentos dados, hemos probado que $(\mathcal{K}, \varphi, \varphi_0)$ es un functor monoidal laxo y que $(\mathcal{K}, \psi, \psi_0)$ es un functor monoidal colaxo.

Resta probar que $(\mathcal{K}, \varphi, \varphi_0, \psi, \psi_0)$ es bilaxo. Para ello mostraremos que los diagramas de la Definición 4.1.6 de trenza (3) y de unidad (4) conmutan.

Si seguimos ambos lados del hexágono de trenzas y consideramos $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ y $\mathbf{u} \in \mathcal{S}\mathbf{p}$, se verá que en ambos lados se definen mapas de $\mathcal{K}(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{r} \bullet \mathbf{u}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbf{p} \bullet \mathbf{r}) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{q} \bullet \mathbf{u})$. La idea en esta prueba es mostrar que son el mismo mapa y por lo tanto el diagrama hexagonal conmuta.

Observar que $\mathcal{K}(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{r} \bullet \mathbf{u})$ en la componente n es:

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{r} \bullet \mathbf{u}))_n &= \bigoplus_{s+t=n} (\mathcal{K}(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}))_s \otimes (\mathcal{K}(\mathbf{r} \bullet \mathbf{u}))_t = \bigoplus_{s+t=n} (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[s] \otimes (\mathbf{r} \bullet \mathbf{u})[t] = \\ &= \bigoplus_{\substack{s+t=n \\ S_1 \sqcup S_2 = [s] \\ T_1 \sqcup T_2 = [t]}} \mathbf{p}[S_1] \otimes \mathbf{q}[S_2] \otimes \mathbf{r}[T_1] \otimes \mathbf{u}[T_2]. \end{aligned}$$

Por lo tanto para probar la conmutatividad del diagrama de trenzas, es suficiente hacerlo en componentes $\{S_1, S_2, T_1, T_2\}$ tales que $S_1 \sqcup S_2 = [s]$, $T_1 \sqcup T_2 = [t]$ y $s+t=n$. Comenzaremos recorriendo el diagrama por el lado izquierdo, es decir aplicando φ , luego $\mathcal{K}(Id \bullet \beta \bullet id)$ y por último ψ . El mapa $\varphi_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}, \mathbf{r} \bullet \mathbf{u}}$ en esta componente es

$$\begin{aligned} (\varphi_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}, \mathbf{r} \bullet \mathbf{u}})_{S_1, S_2, T_1, T_2} &= (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[Id_{S_1 \sqcup S_2}] \otimes (\mathbf{r} \bullet \mathbf{u})[shift_s] = \\ &= \mathbf{p}[Id_{S_1}] \otimes \mathbf{q}[Id_{S_2}] \otimes \mathbf{r}[shift_s |_{T_1}] \otimes \mathbf{u}[shift_s |_{T_2}]. \end{aligned}$$

Observar que luego de aplicar $\mathcal{K}(Id \bullet \beta \bullet Id)$ llegamos al siguiente espacio vectorial $\mathbf{p}[S_1] \otimes \mathbf{r}[shift_s(T_1)] \otimes \mathbf{q}[S_2] \otimes \mathbf{u}[shift_s(T_2)]$. Por lo tanto ahora debemos considerar las componentes $\{S_1, shift_s(T_1), S_2, shift_s(T_2)\}$ de $\psi_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{r}, \mathbf{q} \bullet \mathbf{u}}$; esto es

$$\begin{aligned} (\psi_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{r}, \mathbf{q} \bullet \mathbf{u}})_{S_1, shift_s(T_1), S_2, shift_s(T_2)} &= \\ &= (\mathbf{p} \bullet \mathbf{r})[std_{S_1 \sqcup shift_s(T_1) \rightarrow |S_1 \sqcup shift_s(T_1)|}] \otimes (\mathbf{q} \bullet \mathbf{u})[std_{S_2 \sqcup shift_s(T_2) \rightarrow |S_2 \sqcup shift_s(T_2)|}]. \end{aligned}$$

Para simplificar notación escribiremos $std_{S_i \sqcup shift_s(T_i) \rightarrow |S_i \sqcup shift_s(T_i)|} = std_{ST_i \rightarrow |ST_i|}$, para $i = 1$ e $i = 2$, entonces la expresión anterior queda

$$= \mathbf{p}[std_{ST_1 \rightarrow |ST_1|} |_{S_1}] \otimes \mathbf{r}[std_{ST_1 \rightarrow |ST_1|} |_{shift_s(T_1)}] \otimes \mathbf{q}[std_{ST_2 \rightarrow |ST_2|} |_{S_2}] \otimes \mathbf{u}[std_{ST_2 \rightarrow |ST_2|} |_{shift_s(T_2)}]. \quad (4.1)$$

Por otro lado, realizando razonamiento análogo para la parte derecha del diagrama de trenzas, es decir aplicando $(\varphi \bullet \varphi) \circ (Id \bullet \beta \bullet Id) \circ (\psi \bullet \psi)$, en las componentes $\{S_1, S_2, T_1, T_2\}$ obtenemos el siguiente mapa

$$\mathbf{p}[std_{S_1 \rightarrow |S_1|}] \otimes \mathbf{r}[shift_{|S_1|} |_{|T_1|}] \otimes \mathbf{q}[std_{S_2 \rightarrow |S_2|}] \otimes \mathbf{u}[shift_{|S_2|} |_{|T_2|}]. \quad (4.2)$$

Observar que como todos los elementos de S_i son menores que todos los elementos de $shift_s(T_i)$ con $i = 1$ e $i = 2$ y que los mapas std y $shift$ preservan órdenes, resulta claro que tenemos las siguientes igualdades

1. $std_{ST_i \rightarrow |ST_i|} |_{S_i} = std_{S_i \rightarrow |S_i|}$ y que,
2. $std_{ST_i \rightarrow |ST_i|} |_{shift_s(T_i)} = shift_{|S_i|} |_{|T_i|}$.

Considerando las expresiones anteriores, observar que para cada uno de los factores de la expresión (4.1) es igual a su correspondiente factor en la expresión (4.2), concluyendo que el diagrama hexagonal de trenza conmuta.

Es fácil ver que los diagramas de unidad de la Definición 4.1.6 (4) conmutan, pues $\mathcal{K}(\mathbf{1}) = \mathbb{k}$ y $\varphi_0 = \psi_0 = Id_{\mathbb{k}}$.

Esto completa la prueba de que $(\mathcal{K}, \varphi, \varphi_0, \psi, \psi_0)$ es bilaxo. □

Acabamos de ver que \mathcal{K} es un functor monoidal bilaxo, por lo tanto tiene las propiedades vistas en la sección anterior de Functores Monoidales. En particular en referencia a la Proposición 4.1.11 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.2.6. *Sea \mathbf{h} una especie.*

1. Si (\mathbf{h}, μ, u) es un monoide en $\mathcal{S}\mathbf{p}$, entonces $(\mathcal{K}(\mathbf{h}), \mathcal{K}(\mu) \circ \varphi_{\mathbf{h}, \mathbf{h}}, \mathcal{K}(u) \circ \varphi_0) \in gVect_{\mathbb{k}}$ es una álgebra graduada.
2. Si $(\mathbf{h}, \Delta, \varepsilon)$ es un comonoide en $\mathcal{S}\mathbf{p}$, entonces $(\mathcal{K}(\mathbf{h}), \psi_{\mathbf{h}, \mathbf{h}} \circ \mathcal{K}(\Delta), \psi_0 \circ \mathcal{K}(\varepsilon)) \in gVect_{\mathbb{k}}$ es una coálgebra graduada.
3. Si $(\mathbf{h}, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonioide en $\mathcal{S}\mathbf{p}$,
 - a) entonces $(\mathcal{K}(\mathbf{h}), \mathcal{K}(\mu) \circ \varphi_{\mathbf{h}, \mathbf{h}}, \mathcal{K}(u) \circ \varphi_0, \psi_{\mathbf{h}, \mathbf{h}} \circ \mathcal{K}(\Delta), \psi_0 \circ \mathcal{K}(\varepsilon)) \in gVect_{\mathbb{k}}$ es una \mathbb{k} -biálgebra graduada,
 - b) y si además \mathbf{h} es conexo, entonces $\mathcal{K}(\mathbf{h})$ es una \mathbb{k} -álgebra de Hopf graduada y conexa.

Demostración. Las afirmaciones 1, 2, y 3 a) se deducen por aplicación directa de la Proposición 4.1.11, dado que los funtores monoidales laxos, colaxos y bilaxos, preservan monoides, comonoides y bimonoides con la estructura vista en dicha proposición. Y hemos observado que los monoides, comonoides y bimonoides en $gVect_{\mathbb{k}}$ son álgebras, coálgebras y biálgebras graduadas respectivamente.

Por lo anterior, resta probar la afirmación 3 b).

Como \mathbf{h} es un bimonioide conexo, como $[0] = [\emptyset]$, tenemos que $(\mathcal{K}(\mathbf{h}))_0 = \mathbf{h}[\emptyset] \cong \mathbb{k}$, resultando que $\mathcal{K}(\mathbf{h})$ es una biálgebra graduada conexa; y por la Proposición 1.5.6 (Fórmula de Takeuchi), sabemos que tiene antípoda, por lo tanto $\mathcal{K}(\mathbf{h})$ es una álgebra de Hopf graduada y conexa. □

Observación 4.2.7.

- El resultado anterior también se obtiene si pedimos que $\mathbf{h}[\emptyset]$ sea una álgebra de Hopf, no necesariamente unidimensional. Se deduce de un resultado de Takeuchi, ver Lema 14 en [MT71].
- Si $(\mathbf{h}, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonoides en especies, de acuerdo a lo visto en la sección de Functores Monoidales (ver Proposición 4.1.11), los mapas que dan estructura de biálgebra graduada a $\mathcal{K}(\mathbf{h})$ son los siguientes:

$$\begin{array}{lcl}
\mu_{\mathcal{K}(\mathbf{h})} : & \mathcal{K}(\mathbf{h}) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{h}) & \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{h},\mathbf{h}}} \mathcal{K}(\mathbf{h} \bullet \mathbf{h}) \xrightarrow{\mathcal{K}(\mu)} \mathcal{K}(\mathbf{h}) \\
u_{\mathcal{K}(\mathbf{h})} : & \mathbb{k} & \xrightarrow{\varphi_0} \mathcal{K}(\mathbf{1}) \xrightarrow{\mathcal{K}(u)} \mathcal{K}(\mathbf{h}) \\
\Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{h})} : & \mathcal{K}(\mathbf{h}) & \xrightarrow{\mathcal{K}(\Delta)} \mathcal{K}(\mathbf{h} \bullet \mathbf{h}) \xrightarrow{\psi_{\mathbf{h},\mathbf{h}}} \mathcal{K}(\mathbf{h}) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{h}) \\
\varepsilon_{\mathcal{K}(\mathbf{h})} : & \mathcal{K}(\mathbf{h}) & \xrightarrow{\mathcal{K}(\varepsilon)} \mathcal{K}(\mathbf{1}) \xrightarrow{\psi_0} \mathbb{k}
\end{array}$$

Más explícitamente en la componente n de $\mathcal{K}(\mathbf{h})$ el coproducto y el producto son:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{h}[n] & \xrightarrow{\bigoplus \Delta_{S,T}} \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{h}[S] \otimes \mathbf{h}[T] & \text{y} \\
& \searrow \Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{h})} & \downarrow \bigoplus \mathbf{h}[std] \otimes \mathbf{h}[std] \\
& & \bigoplus_{s+t=n} \mathbf{h}[s] \otimes \mathbf{h}[t] \\
\bigoplus_{s+t=n} \mathbf{h}[s] \otimes \mathbf{h}[t] & \xrightarrow{\bigoplus \mathbf{h}[Id] \otimes \mathbf{h}[shift_s]} \bigoplus \mathbf{h}[s] \otimes \mathbf{h}[s+1, s+t]. & \\
& \searrow \mu_{\mathcal{K}(\mathbf{h})} & \downarrow \bigoplus \mu_{[s],[s+1,s+t]} \\
& & \mathbf{h}[n]
\end{array}$$

Ejemplo 4.2.8. Ya vimos en el ejemplo 3.3.6, que la especie exponencial \mathbf{E} es un monoide de Hopf conexo. En este ejemplo le aplicaremos el functor de Fock \mathcal{K} a esta especie. Veamos la estructura de $\mathcal{K}(\mathbf{E})$ como biálgebra.

$$\begin{aligned}
\blacksquare \mu_{\mathcal{K}(\mathbf{E})}^{s,t}(\triangleright_{[s]} \otimes \triangleright_{[t]}) &= \mu_{\mathbf{E}}^{[s],[s+1,s+t]} \circ \varphi_{\mathbf{E},\mathbf{E}}^{s,t}(\triangleright_{[s]} \otimes \triangleright_{[t]}) = \\
&= \mu_{\mathbf{E}}^{[s],[s+1,s+t]} \circ (\mathbf{E}[Id_s] \otimes \mathbf{E}[shift_s])(\triangleright_{[s]} \otimes \triangleright_{[t]}) = \\
&= \mu_{\mathbf{E}}^{[s],[s+1,s+t]}(\triangleright_{[s]} \otimes \triangleright_{[s+1,s+t]}) = \triangleright_{[s+t]}, \\
\blacksquare \Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{E})}^{s,t}(\triangleright_{[n]}) &= \psi_{\mathbf{E},\mathbf{E}} \circ \left(\sum_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ |S|=s, |T|=t}} \Delta_{\mathbf{E},\{S,T\}} \right) (\triangleright_{[n]}) = \psi_{\mathbf{E},\mathbf{E}} \left(\sum_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ |S|=s, |T|=t}} \triangleright_S \otimes \triangleright_T \right) = \\
&= \left(\sum_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ |S|=s, |T|=t}} \mathbf{E}[std_{S \rightarrow [s]}] \otimes \mathbf{E}[std_{T \rightarrow [t]}] \right) \left(\sum_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ |S|=s, |T|=t}} \triangleright_S \otimes \triangleright_T \right) = \\
&= \sum_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ |S|=s, |T|=t}} \triangleright_{[s]} \otimes \triangleright_{[t]} = \binom{s+t}{s} \triangleright_{[s]} \otimes \triangleright_{[t]}.
\end{aligned}$$

- $u_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)_0}(\lambda) = u_{\mathbf{E}_V,0} \circ \varphi_0(\lambda) = u_{\mathbf{E}_V,0} \circ Id_{\mathbb{k}}(\lambda) = u_{\mathbf{E}_V,0}(\lambda) = \lambda(\triangleright_0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{k} \text{ y,}$
- $\varepsilon_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)_0}(\triangleright_{[0]}) = \psi_0 \circ \varepsilon_{\mathbf{E}_V,0}(\triangleright_{\emptyset}) = Id_{\mathbb{k}} \circ \varepsilon_{\mathbf{E}_V,0}(\triangleright_{\emptyset}) = 1.$

Ejemplo 4.2.9. Recordar que $(\mathbf{E}_V, \mu_{\mathbf{E}_V}, u_{\mathbf{E}_V}, \Delta_{\mathbf{E}_V}, \varepsilon_{\mathbf{E}_V})$ es un bimonoido conexo con los mapas dados en el Ejemplo 3.2.10. Como el functor \mathcal{K} es bilaxo, sabemos que la imagen de \mathbf{E}_V por este functor es un bimonoido en $(gVect_{\mathbb{k}}, \bullet)$; es decir, una biálgebra graduada que además es conexas. Esto nos permite afirmar que $\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)$ (por la fórmula de Takeuchi) es una álgebra de Hopf graduada. En este ejemplo probaremos que $\mathcal{K}(\mathbf{E}_V) \cong T(V)$ como espacios vectoriales graduados vía un isomorfismo ϕ (de esp. vect. graduados) y por lo tanto la estructura de la biálgebra $\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)$ define vía ϕ una estructura de biálgebra en $T(V)$. La estructura resultante en $T(V)$ es la vista en los Ejemplos 1.1.8 y 1.2.6 lo que completa la prueba de que $T(V)$ con estas estructuras es una coálgebra y biálgebra.

Comencemos por explicitar el coproducto de $\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)$ en grado n ,

$$\Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)_n} = (\psi_{\mathbf{E}_V, \mathbf{E}_V} \circ \mathcal{K}(\Delta_{\mathbf{E}_V}))_n = \sum_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{E}_V[std_{S \rightarrow [s]}] \otimes \mathbf{E}_V[std_{T \rightarrow [t]}] \circ \sum_{S \sqcup T = [n]} \Delta_{\mathbf{E}_V, S, T},$$

donde $s = |S|$ y $t = |T|$. Si B es base de V , sea $f : [n] \rightarrow B$ un elemento de la base de $\mathbf{E}_V[n]$, por lo tanto

$$\Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)}(f) = \sum_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ s = |S|, t = |T|}} \mathbf{E}_V[std_{S \rightarrow [s]}] \otimes \mathbf{E}_V[std_{T \rightarrow [t]}] \circ \left(\sum_{S \sqcup T = [n]} f|_S \otimes f|_T \right).$$

Recordamos que por definición tenemos que $\mathbf{E}_V[std_{S \rightarrow [s]}] \circ f|_S = f|_S \circ std_{S \rightarrow [s]}^{-1}$ y que $\mathbf{E}_V[std_{T \rightarrow [t]}] \circ f|_T = f|_T \circ std_{T \rightarrow [t]}^{-1}$, por lo que

$$\Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)}(f) = \sum_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ s = |S|, t = |T|}} f|_S \circ std_{S \rightarrow [s]}^{-1} \otimes f|_T \circ std_{T \rightarrow [t]}^{-1}.$$

Observar que en la componente \emptyset el mapa $\varepsilon_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)}$ es

$$(\varepsilon_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)})_{\emptyset} = \psi_0 \circ (\mathcal{K}(\varepsilon_{\mathbf{E}_V}))_{\emptyset} = Id_{\mathbb{k}} \circ \varepsilon_{\mathbf{E}_V, \emptyset} = \varepsilon_{\mathbf{E}_V, \emptyset}.$$

Ahora explicitaremos el producto de $\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)$, considerando $f \in \mathbf{E}_V[s]$ y $g \in \mathbf{E}_V[t]$ con $s + t = n$,

$$\begin{aligned} (\mu_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)})_{s,t}(f \otimes g) &= \mathcal{K}(\mu_{\mathbf{E}_V}) \circ (\varphi_{\mathbf{E}_V, \mathbf{E}_V})_{s,t}(f \otimes g) = \mathcal{K}(\mu_{\mathbf{E}_V}) \circ (\mathbf{E}_V[Id_{[s]}] \otimes \mathbf{E}_V[shift_s]) (f \otimes g) = \\ &= \mathcal{K}(\mu_{\mathbf{E}_V}) (f \otimes (\mathbf{E}_V[shift_s](g))) = \mathcal{K}(\mu_{\mathbf{E}_V}) (f \otimes (g \circ shift_s^{-1})) = h, \end{aligned}$$

donde $h \in \mathbf{E}_V[n]$ es el mapa que cumple que $h|_{[s]} = f$ y $h|_{[1+s, t+s]}(x) = g(x-s)$.

Observar que $\forall n \neq 0$, tenemos que $(u_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)})_n = 0$ y que $(u_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)})_0(1_{\mathbb{k}}) = f^0$.

Explicitados los mapas que dan estructura a $\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)$, definiremos el isomorfismo de espacios vectoriales graduados entre $\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)$ y $T(V)$.

Para definir un morfismo $\phi : \mathcal{K}(\mathbf{E}_V) \rightarrow T(V)$ de espacios vectoriales graduados, basta con definir sus componentes en grado n , $\phi_n : \mathbf{E}_V[n] \rightarrow V^{\otimes n}$. Recordar que fijada una base B de V , $\mathbf{E}_V[n]$ es el espacio vectorial con base $B^{[n]} = \{f : [n] \rightarrow B\}$. Para cada $f \in B^{[n]}$ definimos $\phi_n(f) := f(1) \otimes \dots \otimes f(n)$.

Observar que ϕ_n lleva biyectivamente $B^{[n]}$ al conjunto $\{v_1 \otimes \dots \otimes v_n \text{ tal que } v_i \in B\}$ que es base de $V^{\otimes n}$ y por lo tanto ϕ es un isomorfismo.

Comencemos probando que ϕ es un morfismo de álgebras considerando en $T(V)$ la estructura de álgebra vista en el Ejemplo 1.1.8; es decir veamos que se cumple que $\phi \circ \mu_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)} = \mu_{T(V)} \circ (\phi \otimes \phi)$ y que $\phi(f^0) = 1_{T(V)}$, Tomando $f \in \mathbf{E}_V[s]$ y $g \in \mathbf{E}_V[t]$, tenemos que

$$\begin{aligned} \phi \circ (\mu_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)}(f \otimes g)) &= \phi(h) = h(1) \otimes \cdots \otimes h(s+t) = f(1) \otimes \cdots \otimes f(s) \otimes g(1) \otimes \cdots \otimes g(t) = \\ &= \mu_{T(V)}(\phi(f) \otimes \phi(g)), \end{aligned}$$

y por otro lado como $\phi(f^0) = 1_{\mathbf{k}} = 1_{T(V)}$, probamos que ϕ es un morfismo de álgebras.

Como no hemos probado que $T(V)$ es una coálgebra usaremos ϕ para darle a $T(V)$ estructura de coálgebra $(T(V), \Delta^\phi, \varepsilon^\phi)$ (de forma tal que ϕ resulte morfismo de coálgebras). Expícitamente estos mapas son $\Delta^\phi := (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)} \circ \phi^{-1}$ y $\varepsilon^\phi := \varepsilon_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)} \circ \phi^{-1}$. Veremos que $\Delta^\phi = \Delta_{T(V)}$ y que $\varepsilon^\phi = \varepsilon_{T(V)}$ como en el Ejemplo 1.2.6. Es decir que deberemos probar que $(\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)} \circ \phi^{-1} = \Delta_{T(V)}$ y que $\varepsilon_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)} \circ \phi^{-1} = \varepsilon_{T(V)}$, o equivalentemente que $(\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)} = \Delta_{T(V)} \circ \phi$ y que $\varepsilon_{T(V)} \circ \phi = \varepsilon_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)}$.

Si f es un elemento en la base de $\mathbf{E}_V[n]$, es decir $f : [n] \rightarrow B$, entonces

$$\begin{aligned} (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)}(f) &= \\ &= \sum_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ s=|S|, t=|T|}} \left[f|_S \circ \text{std}_{S \rightarrow [s]}^{-1}(1) \otimes \cdots \otimes f|_S \circ \text{std}_{S \rightarrow [s]}^{-1}(s) \right] \otimes \left[f|_T \circ \text{std}_{T \rightarrow [t]}^{-1}(1) \otimes \cdots \otimes f|_T \circ \text{std}_{T \rightarrow [t]}^{-1}(t) \right]. \end{aligned}$$

Sea $\sigma \in S_n$ definida como, $\sigma(i) = \begin{cases} \text{std}_{S \rightarrow [s]}^{-1}(i) & \text{si } i \leq |S| \\ \text{std}_{T \rightarrow [t]}^{-1}(i-s) & \text{si } i > |S| \end{cases}$. Observemos que $\sigma \in \text{shf}(s, t)$,

porque para cada par de conjuntos S y T , la biyección std^{-1} preserva órdenes y observemos además que hay tantas biyecciones en $\text{shf}(s, t)$ como cantidad de conjuntos $S \subseteq [n]$ con $|S| = s$. Entonces,

$$\begin{aligned} (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)}(f) &= \\ &= \sum_{\substack{s+t=n \\ \sigma \in \text{shf}(s,t)}} [f|_S \circ \sigma(1) \otimes \cdots \otimes f|_S \circ \sigma(s)] \otimes [f|_T \circ \sigma(s+1) \otimes \cdots \otimes f|_T \circ \sigma(s+t)]. \end{aligned}$$

Dado que $\sigma([s]) = S$ y que $\sigma([s+1, s+t]) = T$, se puede prescindir de las restricciones, obteniendo que

$$(\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)}(f) = \sum_{\substack{s+t=n \\ \sigma \in \text{shf}(s,t)}} f(\sigma(1)) \otimes \cdots \otimes f(\sigma(n)) = \Delta_{T(V)}(f(1) \otimes \cdots \otimes f(n)) = \Delta_{T(V)} \circ \phi(f).$$

Resta probar que $\varepsilon_{T(V)} \circ \phi = \varepsilon_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)}$. Si f^0 es elemento de la base en $\mathbf{E}_V[0] = \mathbf{E}_V[\emptyset]$, entonces

$$\varepsilon_{T(V)_0} \circ \phi(f^0) = \varepsilon_{T(V)_0}(f^0) = 1 = \varepsilon_{\mathcal{K}(\mathbf{E}_V)_0}(f^0),$$

finalizando la prueba.

Observación 4.2.10. Sea $(\mathbf{h}, \mu, u, \Delta, \varepsilon, S) \in \mathbf{Sp}$ un monoide de Hopf conexo. Hemos visto que la imagen por el functor \mathcal{K} de \mathbf{h} , es una biálgebra graduada conexa y la Proposición 1.5.6 (Fórmula de Takeuchi) nos asegura que $\mathcal{K}(\mathbf{h})$ tiene antípoda.

Ya hemos mencionado que **no podemos asegurar** que la antípoda de $\mathcal{K}(\mathbf{h})$ es $\mathcal{K}(S)$. Veamos esto.

Recordemos una de las condiciones de antípoda para \mathbf{h} (conmutatividad del primer diagrama) y el resultado de aplicar un functor \mathcal{K} a los mapas involucrados (segundo diagrama):

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h} \bullet \mathbf{h} & \xrightarrow{S \bullet Id} & \mathbf{h} \bullet \mathbf{h} \\ \Delta \uparrow & & \downarrow \mu \\ \mathbf{h} & \xrightarrow{u \varepsilon} & \mathbf{h} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{K}(\mathbf{h} \bullet \mathbf{h}) & \xrightarrow{\mathcal{K}(S \bullet Id)} & \mathcal{K}(\mathbf{h} \bullet \mathbf{h}) \\ \mathcal{K}(\Delta) \uparrow & & \downarrow \mathcal{K}(\mu) \\ \mathcal{K}(\mathbf{h}) & \xrightarrow{\mathcal{K}(u \varepsilon)} & \mathcal{K}(\mathbf{h}) \end{array}$$

Observar que el segundo diagrama no es el diagrama de la antípoda de $\mathcal{K}(\mathbf{h})$; en particular porque $\Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{h})} \neq \mathcal{K}(\Delta)$. Como $\mathcal{K}(Id_{\mathbf{h}}) = Id_{\mathcal{K}(\mathbf{h})}$ y $\mathcal{K}(u \circ \varepsilon) = \mathcal{K}(u) \circ \mathcal{K}(\varepsilon) = \mathcal{K}(u) \circ \varphi_0 \circ \psi_0 \circ \mathcal{K}(\varepsilon) = u_{\mathcal{K}(\mathbf{h})} \circ \varepsilon_{\mathcal{K}(\mathbf{h})}$, para que $\mathcal{K}(S)$ sea la antípoda de $\mathcal{K}(\mathbf{h})$, el borde exterior del siguiente diagrama debe conmutar:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(\mathbf{h}) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{h}) & \xrightarrow{\mathcal{K}(S) \bullet Id_{\mathcal{K}(\mathbf{h})}} & \mathcal{K}(\mathbf{h}) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{h}) \\ \psi \uparrow & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{K}(\mathbf{h} \bullet \mathbf{h}) & \xrightarrow{\mathcal{K}(S \bullet Id)} & \mathcal{K}(\mathbf{h} \bullet \mathbf{h}) \\ \mathcal{K}(\Delta) \uparrow & & \downarrow \mathcal{K}(\mu) \\ \mathcal{K}(\mathbf{h}) & \xrightarrow{u_{\mathcal{K}(\mathbf{h})} \circ \varepsilon_{\mathcal{K}(\mathbf{h})}} & \mathcal{K}(\mathbf{h}) \end{array}$$

Para ello basta que el diagrama superior conmute, dado que el diagrama inferior conmuta porque \mathcal{K} es functor.

Se puede asegurar que si los mapas φ y ψ son invertibles, el diagrama superior conmuta y por lo tanto $\mathcal{K}(S)$ es antípoda de $\mathcal{K}(\mathbf{h})$.

A continuación explicitaremos lo anterior en un ejemplo.

Ejemplo 4.2.11. Sea $(\mathbf{L}, \mu, u, \Delta, \varepsilon, S)$ el monoide de Hopf conexo en la especie de órdenes lineales. La antípoda de \mathbf{L} en $\mathbf{L}[n]$ es $S(l) = (-1)^n \bar{l}$, donde \bar{l} es el orden inverso de $l \in \mathbf{L}[n]$.

Si $\mathcal{K}(S)$ fuera la antípoda para $\mathcal{K}(\mathbf{L})$, tendríamos que $\mathcal{K}(S) * Id_{\mathcal{K}(\mathbf{L})} = u_{\mathcal{K}(\mathbf{L})} \varepsilon_{\mathcal{K}(\mathbf{L})}$; y como $(\varepsilon_{\mathbf{L}})_I = 0 \forall I \neq \emptyset$ tenemos que $(\mathcal{K}(S) * Id_{\mathcal{K}(\mathbf{L})})_n = 0 \forall n > 0$.

Aplicaremos este mapa al orden lineal $l = 2 \mid 1 \in \mathbf{L}[2]$ (con $n = 2$).

$$(\mathcal{K}(S) * Id_{\mathcal{K}(\mathbf{L})})_2 (2 \mid 1) = \mathcal{K}(\mu) \circ \varphi \circ (\mathcal{K}(S) \otimes \mathcal{K}(Id_{\mathbf{L}})) \circ \psi \circ \mathcal{K}(\Delta)(2 \mid 1).$$

Entonces veamos cuánto es $\mathcal{K}(\Delta)(2 \mid 1)$, para luego ir aplicando los mapas correspondientes para hallar $(\mathcal{K}(S) * Id_{\mathcal{K}(\mathbf{L})})_2 (2 \mid 1)$.

Si $R \sqcup T = [2]$, entonces $R \in \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, [2]\}$ y T para cada caso es $T = [2] \setminus R$. Sea $r = |R|$. Como $\Delta_{R,T}(l) = l \mid_R \otimes l \mid_T$, tenemos que

$$\mathcal{K}(\Delta)(2 \mid 1) = \emptyset \otimes 2 \mid 1 + 1 \otimes 2 + 2 \otimes 1 + 2 \mid 1 \otimes \emptyset.$$

Aplicando $\psi = \sum_{R \sqcup T = [3]} \mathbf{L}[std_{R \rightarrow |R|}] \otimes \mathbf{L}[std_{T \rightarrow |T|}]$ a la expresión anterior, obtenemos

$$\emptyset \otimes 2 \mid 1 + 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 + 2 \mid 1 \otimes \emptyset = \emptyset \otimes 2 \mid 1 + 2 \cdot (1 \otimes 1) + 2 \mid 1 \otimes \emptyset.$$

Aplicando $\mathcal{K}(S) \otimes \mathcal{K}(Id_{\mathbf{L}})$, a la expresión anterior tenemos que

$$\emptyset \otimes 2 \mid 1 - 2 \cdot (1 \otimes 1) + 1 \mid 2 \otimes \emptyset.$$

Aplicando $\varphi = \sum_{0 \leq r \leq n} \mathbf{L}[Id_r] \otimes \mathbf{L}[shift_r]$, a la última expresión obtenemos que

$$\emptyset \otimes 2 \mid 1 - 2 \cdot (1 \otimes 2) + 1 \mid 2 \otimes \emptyset.$$

Y por último, a la expresión anterior, aplicamos $\mathcal{K}(\mu)$, y obtenemos

$$2 \mid 1 - 2 \cdot (1 \mid 2) + 1 \mid 2, \text{ y nos queda que} \\ (\mathcal{K}(S) * \mathcal{K}(Id_{\mathbf{L}}))_2 (2 \mid 1) = 2 \mid 1 - 1 \mid 2 \neq 0,$$

lo que muestra que $\mathcal{K}(S)$ no es la antípoda de $\mathcal{K}(\mathbf{L})$.

Observar que esto se debe al hecho de que el diagrama superior de la observación anterior no conmuta apicado al sumando $2 \otimes 1$ de $\mathcal{K}(\Delta)(2 \mid 1)$; es decir $\varphi \circ (\mathcal{K}(S) \bullet \mathcal{K}(Id_{\mathbf{L}})) \circ \psi(2 \otimes 1) = -1 \otimes 2 \neq -2 \otimes 1 = \mathcal{K}(S \bullet Id)(2 \otimes 1)$.

Utilizando la fórmula de Takeuchi en $gVect$ (ver Proposición 1.5.6), se puede obtener la fórmula de la antípoda de $\mathcal{K}(\mathbf{L})$, resultando por ejemplo que $S(2 \mid 1) = 2 \cdot (1 \mid 2) - 2 \mid 1$.

Ahora que estamos familiarizados con la estructura de \mathcal{K} , la utilizaremos para definir otro functor de Fock.

4.3. Functor de Fock bosónico $\overline{\mathcal{K}}$

Antes de pasar a la definición del functor, repasaremos las nociones de acción lineal y de subespacio vectorial coinvariante.

Definición 4.3.1. Sea S_n el grupo de permutaciones de n elementos y sea V un \mathbb{k} -espacio vectorial. **Una acción lineal** de S_n sobre V es un mapa $\diamond : S_n \times V \rightarrow V$, que envía el par (σ, v) en $\sigma \diamond v$ con $\sigma \in S_n$ y $v \in V$, tal que:

- a) si Id es el neutro de S_n entonces $Id \diamond v = v, \forall v \in V$,
- b) si $\sigma, \tau \in S_n$ entonces $(\sigma \circ \tau) \diamond v = \sigma \diamond (\tau \diamond v), \forall v \in V$,
- c) y para toda $\sigma \in S_n$, $\sigma \diamond - : V \rightarrow V$ es una transformación lineal, es decir que si $v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{k}$ entonces $\sigma \diamond (v + \lambda w) = \sigma \diamond v + \lambda(\sigma \diamond w)$.

Observación 4.3.2. Sean $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ una biyección en S_n y \mathbf{p} una especie, entonces tenemos que:

- $\mathbf{p}[\sigma] : \mathbf{p}[n] \rightarrow \mathbf{p}[n]$ es una transformación lineal,
- sea $Id \in S_n$, entonces $\mathbf{p}[Id] = Id_{\mathbf{p}[n]}$,
- y además si σ y $\tau \in S_n$ se cumple que $\mathbf{p}[\sigma \circ \tau] = \mathbf{p}[\sigma] \circ \mathbf{p}[\tau]$.

Por lo tanto si definimos al siguiente mapa $\diamond : S_n \times \mathbf{p}[n] \rightarrow \mathbf{p}[n]$ como,

$$\sigma \diamond v := \mathbf{p}[\sigma](v) \quad \forall v \in \mathbf{p}[n],$$

se puede ver fácilmente que \diamond verifica todos los axiomas de la definición anterior; es decir que \diamond es una acción lineal en $\mathbf{p}[n]$.

Definición 4.3.3. Dados \diamond una acción lineal y S_n el conjunto de biyecciones de n elementos, el *espacio coinvariante* de $V \in \text{Vect}_{\mathbb{k}}$ por S_n es el siguiente espacio cociente

$$V_{S_n} := V / \langle v - \sigma \diamond v, v \in V \text{ y } \sigma \in S_n \rangle.$$

Definición 4.3.4. Definimos $\bar{\mathcal{K}} : \mathcal{S}\mathbf{p} \rightarrow \mathcal{g}\text{Vect}_{\mathbb{k}}$ al functor definido, a nivel de objetos, como:

$$\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p}) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{p}[n]_{S_n}.$$

Si $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ es un morfismo de especies, tenemos en cada componente $[n]$ un mapa $f_{[n]} : \mathbf{p}[n] \rightarrow \mathbf{q}[n]$, se define $\bar{\mathcal{K}}$ a nivel de flechas como:

$$\bar{\mathcal{K}}(f) := \bigoplus_n \overline{f_{[n]}},$$

donde $\overline{f_{[n]}} : \mathbf{p}[n]_{S_n} \rightarrow \mathbf{q}[n]_{S_n}$, con $\overline{f_{[n]}}(\bar{v}) = \overline{f_{[n]}(v)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $v \in \mathbf{p}[n]$.

Veamos que el functor $\bar{\mathcal{K}}$ a nivel de flechas está bien definido. Es decir que si $v, w \in \mathbf{p}[n]$, son tales que $\bar{v} = \bar{w}$ entonces $\overline{f_{[n]}(v)} = \overline{f_{[n]}(w)}$.

Para ello consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f'_{[n]} = \pi_{\mathbf{q}} \circ f_{[n]} : \mathbf{p}[n] \rightarrow \mathbf{q}[n]_{S_n}$, donde $\pi_{\mathbf{q}} : \mathbf{q}[n] \rightarrow \mathbf{q}[n]_{S_n}$ es la proyección al cociente.

Dado que f es morfismo de especies, cumple que $f_{[n]}(\mathbf{p}[\sigma]) = \mathbf{q}[\sigma](f_{[n]}) \forall \sigma \in S_n$ entonces,

$$f'_{[n]}(v - \mathbf{p}[\sigma](v)) = \overline{f_{[n]}(v) - f_{[n]}(\mathbf{p}[\sigma](v))} = \overline{f_{[n]}(v) - \mathbf{q}[\sigma](f_{[n]}(v))} = \bar{0} \in \mathbf{q}[n]_{S_n}.$$

Es decir que $\{v - \mathbf{p}[\sigma](v), v \in \mathbf{p}[n] \text{ y } \sigma \in S_n\} \subseteq \text{Ker}(f')$ y utilizando la propiedad universal del cociente, existe una única $\overline{f_{[n]}}$ tal que $\overline{f_{[n]}}(\bar{v}) = \overline{f_{[n]}(v)}$ para todo $v \in \mathbf{p}[n]$.

Esto es, a nivel de diagramas, que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[n] & \xrightarrow{f_{[n]}} & \mathbf{q}[n] \\ \pi_{\mathbf{p}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbf{q}} \\ \mathbf{p}[n]_{S_n} & \xrightarrow{\overline{f_{[n]}}} & \mathbf{q}[n]_{S_n} \end{array}$$

Observación 4.3.5. El último diagrama, además expresa que el mapa π es una transformación natural entre los funtores \mathcal{K} y $\bar{\mathcal{K}}$. Es decir que hemos probado que si $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ es un morfismo de especie el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(\mathbf{p}) & \xrightarrow{\mathcal{K}(f)} & \mathcal{K}(\mathbf{q}) \\ \pi_{\mathbf{p}} = \pi(\mathbf{p}) \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbf{q}} = \pi(\mathbf{q}) \\ \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p}) & \xrightarrow{\bar{\mathcal{K}}(f)} & \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{q}) \end{array}$$

Procederemos a continuación a dar a $\bar{\mathcal{K}}$ una estructura de functor monoidal bilaxo.

$$\begin{array}{ccc}
S & \xrightarrow{std_{S \rightarrow [s]}} & [s] \\
\sigma|_S \downarrow & & \downarrow \alpha \\
\sigma(S) & \xrightarrow{std_{\sigma(S) \rightarrow [s]}} & [s]
\end{array}
, \quad
\begin{array}{ccc}
T & \xrightarrow{std_{T \rightarrow [t]}} & [t] \\
\sigma|_T \downarrow & & \downarrow \tau \\
\sigma(T) & \xrightarrow{std_{\sigma(T) \rightarrow [t]}} & [t]
\end{array}$$

Por lo tanto se cumplen las siguientes igualdades

$$\alpha \circ std_{S \rightarrow [s]} = std_{\sigma(S) \rightarrow [s]} \circ \sigma|_S \quad \text{y} \quad \tau \circ std_{T \rightarrow [t]} = std_{\sigma(T) \rightarrow [t]} \circ \sigma|_T, \text{ y por lo tanto}$$

$$\mathbf{p}[\alpha \circ std_{S \rightarrow [s]}] = \mathbf{p}[std_{\sigma(S) \rightarrow [s]} \circ \sigma|_S] \quad \text{y} \quad \mathbf{q}[\tau \circ std_{T \rightarrow [t]}] = \mathbf{q}[std_{\sigma(T) \rightarrow [t]} \circ \sigma|_T].$$

Dado que \mathbf{p} y \mathbf{q} son especies, con α y τ como antes, se cumple que

$$\alpha \diamond \mathbf{p}[std_{S \rightarrow [s]}](v_S) = \mathbf{p}[\alpha] \circ \mathbf{p}[std_{S \rightarrow [s]}](v_S) = \mathbf{p}[std_{\sigma(S) \rightarrow [s]}] \circ \mathbf{p}[\sigma|_S](v_S), \text{ y que}$$

$$\tau \diamond \mathbf{q}[std_{T \rightarrow [t]}](v_T) = \mathbf{q}[\tau] \circ \mathbf{q}[std_{T \rightarrow [t]}](v_T) = \mathbf{q}[std_{\sigma(T) \rightarrow [t]}] \circ \mathbf{q}[\sigma|_T](v_T).$$

Entonces el mapa $\psi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}$ se puede expresar como,

$$(\psi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}})_n(x) = (\mathbf{p}[std_{S \rightarrow [s]}] \otimes \mathbf{q}[std_{T \rightarrow [t]}])(v) - (\mathbf{p}[\alpha] \otimes \mathbf{q}[\tau]) \circ (\mathbf{p}[std_{S \rightarrow [s]}] \otimes \mathbf{q}[std_{T \rightarrow [t]}])(v).$$

Es claro que si aplicamos $\pi_{\mathbf{p}} \bullet \pi_{\mathbf{q}}$ a la expresión anterior, resulta que

$$(\pi_{\mathbf{p}} \bullet \pi_{\mathbf{q}}) \circ (\psi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}})_n(x) = \bar{0} \in \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p}) \bullet \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{q}), \text{ probando que } \bar{\psi} \text{ está bien definida.}$$

Ahora pasaremos a la prueba de que $\bar{\varphi}$ está bien definida.

Para ello veamos primero el diagrama que la define en la componente de grado n ,

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{q}[t] & \xrightarrow{\mathbf{p}[Id_s] \otimes \mathbf{q}[shift_s]} & \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{q}[s+1, s+t], \\
\pi_{\mathbf{p}[s]} \otimes \pi_{\mathbf{q}[t]} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}} \\
\mathbf{p}[s]/X_s \otimes \mathbf{q}[t]/X_t & \xrightarrow{\bar{\varphi}_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}_n} & ((\mathbf{p} \otimes \mathbf{q})[n])_{S_n}
\end{array}$$

$$\text{con } X_s = \langle v - \alpha \diamond v : v \in \mathbf{p}[s] \text{ y } \alpha \in S_s \rangle, \text{ donde } \alpha \diamond v = \mathbf{p}[\alpha](v), \text{ y}$$

$$X_t = \langle w - \tau \diamond w : w \in \mathbf{q}[t] \text{ y } \tau \in S_t \rangle, \text{ donde } \tau \diamond w = \mathbf{q}[\tau](w).$$

Debemos probar que si $v \in \mathbf{p}[s]$ y $w \in \mathbf{q}[t]$, $\bar{\varphi}_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(\bar{v} \otimes \bar{w}) = \overline{\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(v \otimes w)}$, sin importar el representante de cada clase que tomemos. Es suficiente con probar que si $x \in X_s$ e $y \in X_t$ entonces $\overline{\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}((v+x) \otimes (w+y))} = \overline{\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(v \otimes w)}$.

Y para probar lo anterior basta probar que

- $\overline{\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(x \otimes w)} = \bar{0}$ con $x \in X_s$ y $w \in \mathbf{q}[t]$ y que
- $\overline{\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(v \otimes y)} = \bar{0}$ con $y \in X_t$ y $v \in \mathbf{p}[s]$.

Para la prueba del primer ítem, es decir que $\overline{\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(x \otimes w)} = \bar{0}$ con $x \in X_s$ y $w \in \mathbf{q}[t]$, basta probarlo con x de la forma $v_s - \alpha \diamond v_s$ con $v_s \in \mathbf{p}[s]$.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(x \otimes w) &= \varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}((v_s - \alpha \diamond v_s) \otimes w) = \\
&= \varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(v_s \otimes w) - \varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}((\alpha \diamond v_s) \otimes w) = \varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(v_s \otimes w) - \varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(\mathbf{p}[\alpha](v_s) \otimes w) = \\
&= (\mathbf{p}[Id_s] \otimes \mathbf{q}[shift_s])(v_s \otimes w) - (\mathbf{p}[Id_s] \otimes \mathbf{q}[shift_s]) \circ (\mathbf{p}[\alpha](v_s) \otimes w) = \\
&= (\mathbf{p}[Id_s] \otimes \mathbf{q}[shift_s])(v_s \otimes w) - (\mathbf{p}[\alpha] \otimes \mathbf{q}[shift_s])(v_s \otimes w).
\end{aligned}$$

Para probar que la clase de $\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(x \otimes w)$ es cero, definiremos una biyección σ en $[n]$ y trabajaremos sobre la acción lineal que induce. Para ello sean $0 \leq s \leq n$, $\alpha : [s] \rightarrow [s] \in S_s$, y si $S = [s]$ tomamos $T = [n] \setminus S$, definimos $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma|_S = \alpha$ y $\sigma|_T = Id_T$.

Como $\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}$ es una especie, la acción lineal sobre esta especie con $\sigma \in S_n$ es $(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[\sigma] = \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}[\sigma|_S] \otimes \mathbf{q}[\sigma|_T]$, en particular para la σ que definimos anteriormente y dado que $\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}$ es una especie, obtenemos que

$$(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[\sigma] \circ (\mathbf{p}[Id_s] \otimes \mathbf{q}[shift_s]) = \mathbf{p}[\alpha] \otimes \mathbf{q}[shift_s]. \quad (4.3)$$

Observar que si $z \in \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{q}[s+1, s+t]$ y $\sigma \in S_n$, por definición tenemos que

$$\overline{z - (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[\sigma](z)} = \overline{0} \in \overline{\mathcal{K}(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})}. \quad (4.4)$$

Por la igualdad de (4.3), $\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(x \otimes w)$ se puede expresar como

$$\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(x \otimes w) = (\mathbf{p}[Id_s] \otimes \mathbf{q}[shift_s])(v_s \otimes w) - (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[\sigma] \circ (\mathbf{p}[Id_s] \otimes \mathbf{q}[shift_s])(v_s \otimes w),$$

y si definimos $z = (\mathbf{p}[Id_s] \otimes \mathbf{q}[shift_s])(v_s \otimes w)$, observemos que $z \in \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{q}[s+1, s+t]$, obtenemos que

$\varphi(x \otimes w) = z - (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[\sigma](z)$, y por (4.4) tenemos que $\overline{\varphi(x \otimes w)} = \overline{0} \in \overline{\mathcal{K}(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})}$, lo que finaliza la prueba del primer ítem.

Para probar que $\overline{\varphi(v \otimes y)} = \overline{0}$, se procede de forma análoga a lo anterior. □

Observación 4.3.8. Ya hemos observado que $\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \circ \varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ es la identidad y por lo tanto $\overline{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \circ \overline{\varphi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ es también la identidad. Observar que el mapa $\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \circ \psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ está dado por la acción de permutaciones en el conjunto $[n]$, induciendo la identidad en espacios coinvariantes, es decir, $\overline{\varphi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \circ \overline{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ es la identidad. Veamos con más detalle esto último.

Observar que el mapa $\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \circ \psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ restringido a la componente $\mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{q}[1+s, t+s]$ con $s+t = n$ es la identidad. Para probar que $\overline{\varphi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \circ \overline{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ es la identidad, consideremos $S \sqcup T = [n]$ y $\sigma \in S_n$ definida como $\sigma|_S = std_{S \rightarrow |S|}$ y $\sigma|_T = shift_{|S|} \circ std_{T \rightarrow |T|}$.

Por lo tanto $\forall v \in \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T]$ tenemos que $\sigma \diamond v \in \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{q}[1+s, t+s]$ con $s = |S|$ y $t = |T|$ y por lo observado tenemos que $\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \circ \psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\sigma \diamond v) = \sigma \diamond v$.

Por otro lado al estar $\overline{\psi}$ bien definida tenemos que $\overline{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\overline{v}) = \overline{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\overline{\sigma \diamond v})$, por lo que

$$\overline{\varphi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \circ \overline{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\overline{v}) = \overline{\varphi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \circ \overline{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\overline{\sigma \diamond v}) = \overline{\sigma \diamond v} = \overline{v}.$$

Dado que \mathcal{K} es bilaxo y que los mapas $\overline{\varphi}$ y $\overline{\psi}$ son simplemente pasar al cociente los mapas φ y ψ , por lo que verifican los diagramas asociatividad, coasociatividad, trenza, y de unidad, obtenemos el siguiente lema.

Lema 4.3.9. Sea el functor $\overline{\mathcal{K}}$ y los mapas $\overline{\varphi}, \overline{\varphi}_0, \overline{\psi}$ y $\overline{\psi}_0$ definidos anteriormente.

Entonces

- la terna $(\overline{\mathcal{K}}, \overline{\varphi}, \overline{\varphi}_0)$ es un functor monoidal laxo,
- la terna $(\overline{\mathcal{K}}, \overline{\psi}, \overline{\psi}_0)$ es un functor monoidal colaxo, y
- la quintupla $(\overline{\mathcal{K}}, \overline{\varphi}, \overline{\varphi}_0, \overline{\psi}, \overline{\psi}_0)$ es un functor monoidal bilaxo.

Por lo tanto $\overline{\mathcal{K}}$, tiene las propiedades vistas en el capítulo de Functores Monoidales. En particular en referencia a la Proposición 4.1.11 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.3.10. *Sea \mathbf{h} una especie.*

1. Si (\mathbf{h}, μ, u) es un monoide en \mathbf{Sp} , entonces $(\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h}), \overline{\mathcal{K}}(\mu) \circ \overline{\varphi}_{\mathbf{h}, \mathbf{h}}, \overline{\mathcal{K}}(u) \circ \overline{\varphi}_0) \in gVect_{\mathbb{k}}$ es un álgebra graduada.
2. Si $(\mathbf{h}, \Delta, \varepsilon)$ es un comonoide en \mathbf{Sp} , entonces $(\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h}), \overline{\psi}_{\mathbf{h}, \mathbf{h}} \circ \overline{\mathcal{K}}(\Delta), \overline{\psi}_0 \circ \overline{\mathcal{K}}(\varepsilon)) \in gVect_{\mathbb{k}}$ es una coálgebra graduada.
3. Si $(\mathbf{h}, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonioide en \mathbf{Sp} ,
 - a) entonces $(\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h}), \overline{\mathcal{K}}(\mu) \circ \overline{\varphi}_{\mathbf{h}, \mathbf{h}}, \overline{\mathcal{K}}(u) \circ \overline{\varphi}_0, \overline{\psi}_{\mathbf{h}, \mathbf{h}} \circ \overline{\mathcal{K}}(\Delta), \overline{\psi}_0 \circ \overline{\mathcal{K}}(\varepsilon)) \in gVect_{\mathbb{k}}$ es una \mathbb{k} -biálgebra graduada.
 - b) Si además \mathbf{h} es conexo, entonces $\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h})$ es una \mathbb{k} -álgebra de Hopf graduada y conexa.

La prueba es análoga a la vista en el Corolario (análogo) para el functor \mathcal{K} , dado que sólo se utilizaron propiedades monoidales del functor y la conexión de la especie.

Como mencionamos en la Observación 4.2.10, la invertibilidad de los mapas que dan estructura laxa y colaxa a los funtores de Fock, está relacionada con la propiedad de los funtores de preservar antípodas. Específicamente, si $(\mathbf{h}, \mu, u, \Delta, \varepsilon, S)$ es un monoide de Hopf con antípoda $S : \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h}$ y si $(\mathcal{F}, \varphi, \psi, \varphi_0, \psi_0)$ es un functor bilaxo tal que $\psi = \varphi^{-1}$ y $\psi_0 = \varphi_0^{-1}$ (functor bilaxo *bifuerte*) entonces $\mathcal{F}(S) : \mathcal{F}(\mathbf{h}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{h})$ es antípoda del bimonioide $\mathcal{F}(\mathbf{h})$. Los detalles de este resultado se encuentran por ejemplo en la Sección 3.6 de [AM10]. En la Observación 4.3.8 vimos que $\overline{\varphi}$ y $\overline{\psi}$ son inversas una de la otra (y $\overline{\psi}_0 = \overline{\varphi}_0 = Id$) por lo que el functor $\overline{\mathcal{K}}$ lleva antípodas en antípodas y por lo tanto si \mathbf{h} es un monoide de Hopf en especies con antípoda S , $\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h})$ es un álgebra de Hopf graduada con antípoda $\overline{\mathcal{K}}(S)$.

Observación 4.3.11. Específicamente si $(\mathbf{h}, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonioide en especies, de acuerdo a lo visto en la Proposición 4.1.11, los mapas que dan estructura de biálgebra a $\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h})$ son los siguientes:

$$\begin{array}{lclcl}
 \mu_{\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h})} : & \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h}) \bullet \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h}) & \xrightarrow{\overline{\varphi}_{\mathbf{h}, \mathbf{h}}} & \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h} \bullet \mathbf{h}) & \xrightarrow{\overline{\mathcal{K}}(\mu)} & \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h}) \\
 u_{\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h})} : & \mathbb{k} & \xrightarrow{\overline{\varphi}_0} & \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{1}) & \xrightarrow{\overline{\mathcal{K}}(u)} & \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h}) \\
 \Delta_{\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h})} : & \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h}) & \xrightarrow{\overline{\mathcal{K}}(\Delta)} & \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h} \bullet \mathbf{h}) & \xrightarrow{\overline{\psi}_{\mathbf{h}, \mathbf{h}}} & \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h}) \bullet \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h}) \\
 \varepsilon_{\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h})} : & \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{h}) & \xrightarrow{\overline{\mathcal{K}}(\varepsilon)} & \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{1}) & \xrightarrow{\overline{\psi}_0} & \mathbb{k} .
 \end{array}$$

Ejemplo 4.3.12. Sea $(\mathbf{L}, \mu, u, \Delta, \varepsilon, S)$ el monoide de Hopf de órdenes lineales, con la estructura de bimonioide del Ejemplo 3.2.11 y recordamos que si $l \in \mathbf{L}[n]$ la antípoda es $S(l) = (-1)^n \bar{l}$.

Veremos a continuación que $\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{L}) \cong \mathbb{k}[x]$ como biálgebras graduadas (y por lo tanto por la Proposición 1.4.4, como álgebras de Hopf graduadas); donde $\mathbb{k}[x]$ tiene la estructura del Ejemplo 1.5.8.

Si $l = l_1 | \dots | l_n \in \mathbf{L}[n]$ lo escribimos como $l = l_1 l_2 \dots l_n$. Observar que tomando $\sigma \in S_n$ con $\sigma(i) = l_i$, resulta que $\sigma \circ 1 \ 2 \dots n = l$ y por lo tanto en $\mathbf{L}[n]_{S_n}$ tenemos que $\bar{l} = \overline{1 \ 2 \dots n}$. Si llamamos $x^{[n]} = \overline{1 \ 2 \dots n}$, tenemos entonces que $\mathbf{L}[n]_{S_n} = \mathbb{k}x^{[n]}$ y por lo tanto $\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{L}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{k}x^{[n]}$.

Ahora pasaremos a especificar los mapas que le dan estructura de Hopf a $\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{L})$.

■ Coproducto en $\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{L})$:

$$\Delta_{\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{L})}(x^{[n]}) = \overline{\psi} \circ \overline{\mathcal{K}}(\Delta)(x^{[n]}) = \overline{\psi} \circ \overline{\Delta}(1 \ 2 \dots n) = (\pi_{\mathbf{L}} \bullet \pi_{\mathbf{L}}) \circ \psi(\Delta(1 \ 2 \dots n)) =$$

$$\begin{aligned}
&= (\pi_{\mathbf{L}} \bullet \pi_{\mathbf{L}}) \circ \psi \left(\sum_{S \sqcup T = [n]} (1 \ 2 \cdots n) |_S \otimes (1 \ 2 \cdots n) |_T \right) = \\
&= (\pi_{\mathbf{L}} \bullet \pi_{\mathbf{L}}) \circ \left(\bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{L}[std_{S \rightarrow |S|}] \otimes \mathbf{L}[std_{T \rightarrow |T|}] \right) \circ \left(\sum_{S \sqcup T = [n]} (1 \ 2 \cdots n) |_S \otimes (1 \ 2 \cdots n) |_T \right) = \\
&= (\pi_{\mathbf{L}} \bullet \pi_{\mathbf{L}}) \circ \left(\sum_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{L}[std_{S \rightarrow |S|}]((1 \ 2 \cdots n) |_S) \otimes \mathbf{L}[std_{T \rightarrow |T|}]((1 \ 2 \cdots n) |_T) \right) = \\
&= \sum_{S \sqcup T = [n]} x^{[|S|]} \otimes x^{[|T|]}.
\end{aligned}$$

Como para cada $s \in [n]$, existen $\binom{n}{s}$ subconjuntos $S \subseteq [n]$ tal que $s = |S|$, tenemos que

$$\Delta_{\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{L})}(x^{[n]}) = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} x^{[s]} \otimes x^{[n-s]}.$$

- Producto en $\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{L})$:

$$\begin{aligned}
\mu_{\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{L})}(x^{[s]} \otimes x^{[t]}) &= \mu_{\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{L})}(\overline{1 \ 2 \cdots s} \otimes \overline{1 \cdots t}) = \bar{\mathcal{K}}(\mu) \circ \bar{\varphi}(\overline{1 \ 2 \cdots s} \otimes \overline{1 \cdots t}) = \\
&= \bar{\mathcal{K}}(\mu) \circ \bar{\varphi}(\overline{1 \ 2 \cdots s} \otimes \overline{1 \cdots t}) = \\
&= \bar{\mathcal{K}}(\mu) \circ \overline{(\mathbf{L}[Id_{[s]}] \otimes \mathbf{L}[shift_s])}(\overline{1 \ 2 \cdots s} \otimes \overline{1 \ 2 \cdots t}) = \\
&= \bar{\mathcal{K}}(\mu) \circ \overline{(1 \ 2 \cdots s} \otimes \overline{1 + s \mid 2 + s \mid \cdots \mid n}) = \\
&= \overline{\mu_{[s],[s+1,s+t]}(1 \ 2 \cdots s \otimes 1 + s \mid 2 + s \mid \cdots \mid n)} \\
&= \overline{1 \mid 2 \mid \cdots \mid s \mid 1 + s \mid 2 + s \mid \cdots \mid n} = x^{[n]}, \text{ es decir que} \\
\mu_{\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{L})}(x^{[s]} \otimes x^{[t]}) &= x^{[n]}.
\end{aligned}$$

- Counidad en $\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{L})$,

$$\varepsilon_{\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{L})}(x^{[n]}) = \bar{\psi}_0 \circ \bar{\mathcal{K}}(\varepsilon)(x^{[n]}) = \bar{\psi}_0 \circ \varepsilon(\overline{1 \ 2 \cdots n}) = \bar{\psi}_0(\overline{\delta_{0,n}}) = \overline{\delta_{0,n}}.$$

- Unidad en $\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{L})$,

$$u_{\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{L})}(1) = \bar{\mathcal{K}}(u) \circ \bar{\varphi}_0(1) = \bar{\mathcal{K}}(u)(\overline{1}) = \overline{u(1)} = x^{[0]}.$$

Claramente el morfismo $\phi : \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{L}) \rightarrow \mathbb{k}[x]$ dado por $\phi(x^{[n]}) = x^n$ es un isomorfismo de biálgebras, lo que finaliza la prueba.

Ahora pasaremos a definir a otro functor de Fock.

4.4. Functor de Fock completo \mathcal{K}^\vee

Definición 4.4.1. Sea $\mathcal{K}^\vee : Sp \rightarrow gVect_{\mathbb{k}}$ el functor definido, a nivel de objetos como:

$$\mathcal{K}^\vee(\mathbf{q}) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{q}[n].$$

Sea $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ un morfismo de especies, cuya componente en $[n]$ es $f_{[n]} : \mathbf{p}[n] \rightarrow \mathbf{q}[n]$, entonces se define el functor a nivel de flechas como:

$$\mathcal{K}^\vee(f) := \bigoplus_n f_{[n]}.$$

Observar que la definición del functor \mathcal{K}^\vee no es diferente a la definición dada al functor \mathcal{K} . La diferencia estará en la estructura monoidal que definiremos a continuación. Con \bullet el producto de Cauchy en las categorías Sp y $gVect_{\mathbb{k}}$.

Definición 4.4.2. Necesitamos definir mapas tales que

$$\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}) \bullet \mathcal{K}^\vee(\mathbf{q}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee} \\ \xleftarrow{\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee} \end{array} \mathcal{K}^\vee(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}),$$

por lo que en sus componentes de grado n en los espacios vectoriales graduados son de la siguiente forma:

$$\bigoplus_{s+t=n} \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{q}[t] \begin{array}{c} \xrightarrow{(\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee)_n} \\ \xleftarrow{(\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee)_n} \end{array} \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T].$$

Para la estructura laxa definimos a $(\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee)_n$ como la suma directa de los siguientes mapas; habrá uno para cada s y t ,

$$\mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{q}[t] \xrightarrow[\substack{S \sqcup T = [n] \\ |S|=s \quad |T|=t}]{\bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p} \left[\text{std}_{S \rightarrow [s]}^{-1} \right] \otimes \mathbf{q} \left[\text{std}_{T \rightarrow [t]}^{-1} \right]} (\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee)_{n=s+t}^{s,t} \bigoplus_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ |S|=s \quad |T|=t}} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T].$$

Para la estructura colaxa definimos a $(\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee)_n$ como la suma directa de los siguientes mapas:

$$\mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{q}[s+1, s+t] \xrightarrow{\mathbf{p}[Id_{[s]}] \otimes \mathbf{q}[shift_s^{-1}]} \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{q}[t],$$

y en aquellas componentes en que $S \neq [s]$, y por lo tanto $T \neq [s+1, s+t]$, el mapa $\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee$ es cero.

Definimos φ_0^\vee y ψ_0^\vee como los mapas identidad en \mathbb{k} , $\mathbb{k} \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi_0^\vee} \\ \xleftarrow{\varphi_0^\vee} \end{array} \mathcal{K}^\vee(\mathbf{1}) = \mathbb{k}$.

Observación 4.4.3. Observar que la composición $\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee \circ \psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee$ es la identidad, pero en general estos mapas no son inversos. Veamos esto último en la componente n de $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})$;

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[n] & \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee = \bigoplus_{s \geq 0} \mathbf{p}[Id_{[s]}] \otimes \mathbf{q}[shift_s^{-1}]} & \bigoplus_{s+t=n} \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{q}[t], \\ \parallel & & \downarrow \psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee = \bigoplus_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ |S|=s, |T|=t}} \mathbf{p} \left[\text{std}_{S \rightarrow [s]}^{-1} \right] \otimes \mathbf{q} \left[\text{std}_{T \rightarrow [t]}^{-1} \right] \\ \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T] & \xrightarrow{\neq Id_{(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[n]}} & \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T] \end{array}$$

observar que si $S \neq [s]$, φ^\vee es cero para esa componente, entonces la composición $\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee \circ \varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee$ también, y por lo tanto para esa componente, la composición no es la identidad.

Observar que cada sumando de $\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee$ es el inverso del correspondiente sumando de ψ (la estructura colaxa de \mathcal{K}). Utilizando esto, al ser ψ coasociativa, se prueba que ψ^\vee es asociativa. También vale la observación análoga en $\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee$, es decir, que una componente no nula de $\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee$ es la inversa de la correspondiente componente de $\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ y al ser φ asociativa, se deduce que φ^\vee es coasociativa. Teniendo presente argumentos análogos para el resto de los diagramas (trenza, unitales, etc.), tenemos los siguientes resultados.

Lema 4.4.4. Sea el functor \mathcal{K}^\vee y los mapas $\varphi^\vee, \varphi_0^\vee, \psi^\vee$ y ψ_0^\vee definidos anteriormente.

Entonces

- la terna $(\mathcal{K}^\vee, \psi^\vee, \psi_0^\vee)$ es un functor monoidal laxo,
- la terna $(\mathcal{K}^\vee, \varphi^\vee, \varphi_0^\vee)$ es un functor monoidal colaxo, y
- la quintupla $(\mathcal{K}^\vee, \psi^\vee, \psi_0^\vee, \varphi^\vee, \varphi_0^\vee)$ es un functor monoidal bilaxo.

Corolario 4.4.5. Sea \mathbf{h} una especie.

1. Si (\mathbf{h}, μ, u) es un monoide en $\mathcal{S}\mathbf{p}$, entonces

$$(\mathcal{K}^\vee(\mathbf{h}), \mathcal{K}^\vee(\mu) \circ \psi_{\mathbf{h}, \mathbf{h}}^\vee, \mathcal{K}^\vee(u) \circ \psi_0^\vee) \in gVect_{\mathbb{k}} \text{ es una álgebra graduada.}$$

2. Si $(\mathbf{h}, \Delta, \varepsilon)$ es un comonoide en $\mathcal{S}\mathbf{p}$, entonces

$$(\mathcal{K}^\vee(\mathbf{h}), \varphi_{\mathbf{h}, \mathbf{h}}^\vee \circ \mathcal{K}^\vee(\Delta), \varphi_0^\vee \circ \mathcal{K}^\vee(\varepsilon)) \in gVect_{\mathbb{k}} \text{ es una coálgebra graduada.}$$

3. Si $(\mathbf{h}, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonioide en $\mathcal{S}\mathbf{p}$

- a) entonces $(\mathcal{K}^\vee(\mathbf{h}), \mathcal{K}^\vee(\mu) \circ \psi_{\mathbf{h}, \mathbf{h}}^\vee, \mathcal{K}^\vee(u) \circ \psi_0^\vee, \varphi_{\mathbf{h}, \mathbf{h}}^\vee \circ \mathcal{K}^\vee(\Delta), \varphi_0^\vee \circ \mathcal{K}^\vee(\varepsilon)) \in gVect_{\mathbb{k}}$ es una \mathbb{k} -bialgebra graduada,
- b) y además si \mathbf{h} es conexo, entonces $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{h})$ es una \mathbb{k} -álgebra de Hopf graduada y conexa.

Observar que para \mathcal{K}^\vee , los mapas que le dan estructura de álgebra de Hopf son los siguientes:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{h})} : \quad & \mathcal{K}^\vee(\mathbf{h}) \bullet \mathcal{K}^\vee(\mathbf{h}) \xrightarrow{\psi_{\mathbf{h}, \mathbf{h}}^\vee} \mathcal{K}^\vee(\mathbf{h} \bullet \mathbf{h}) \xrightarrow{\mathcal{K}^\vee(\mu)} \mathcal{K}^\vee(\mathbf{h}) \\ u_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{h})} : \quad & \mathbb{k} \xrightarrow{\psi_0^\vee} \mathcal{K}^\vee(\mathbf{1}) \xrightarrow{\mathcal{K}^\vee(u)} \mathcal{K}^\vee(\mathbf{h}) \\ \Delta_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{h})} : \quad & \mathcal{K}^\vee(\mathbf{h}) \xrightarrow{\mathcal{K}^\vee(\Delta)} \mathcal{K}^\vee(\mathbf{h} \bullet \mathbf{h}) \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{h}, \mathbf{h}}^\vee} \mathcal{K}^\vee(\mathbf{h}) \bullet \mathcal{K}^\vee(\mathbf{h}) \\ \varepsilon_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{h})} : \quad & \mathcal{K}^\vee(\mathbf{h}) \xrightarrow{\mathcal{K}^\vee(\varepsilon)} \mathcal{K}^\vee(\mathbf{1}) \xrightarrow{\varphi_0^\vee} \mathbb{k} \end{aligned}$$

Veamos un ejemplo explícito de $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p})$.

Ejemplo 4.4.6. En este ejemplo describiremos la estructura de $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})$ y la utilizaremos para deducir algunas propiedades de \mathcal{K}^\vee .

Comencemos con el coproducto de $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})$.

$$\Delta_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})} : \mathcal{K}^\vee(\mathbf{L}) \xrightarrow{\mathcal{K}^\vee(\Delta_{\mathbf{L}})} \mathcal{K}^\vee(\mathbf{L} \bullet \mathbf{L}) \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{L}, \mathbf{L}}^\vee} \mathcal{K}^\vee(\mathbf{L}) \bullet \mathcal{K}^\vee(\mathbf{L}).$$

Sea $l_n \in \mathbf{L}[n]$ tenemos que,

$$\Delta_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})}(l_n) = \varphi_{\mathbf{L}, \mathbf{L}}^\vee \circ \mathcal{K}^\vee(\Delta_{\mathbf{L}})(l_n) = \varphi_{\mathbf{L}, \mathbf{L}}^\vee \left(\sum_{S \sqcup T = [n]} l_n |_S \otimes l_n |_T \right).$$

Recordar que si $S \neq [s]$ (y en consecuencia $T \neq [s+1, s+t]$), $\varphi_{\mathbf{L}, \mathbf{L}}^\vee = 0$. Escribiremos para el caso $S = [s]$ y $T = [s+1, s+t]$, el elemento $\mathbf{L}[shift_s^{-1}](l_n |_T)$ como $l_n |_{T \rightarrow [t]}$. Entonces la expresión anterior nos queda,

$$\Delta_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})}(l_n) = \sum_{\substack{S=[s], T=[s+1, s+t] \\ s+t=n}} l_n |_{[s]} \otimes l_n |_{T \rightarrow [t]} = \sum_{0 \leq s \leq n} l_n |_{[s]} \otimes l_n |_{[s+1, s+t] \rightarrow [t]}.$$

A modo de ejemplo si $l = 1 \mid 3 \mid 2$ con $l \in \mathbf{L}[3]$, entonces $[s] \in \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, [3]\}$, por lo tanto,

$$\Delta_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})}(l) = () \otimes 1 \mid 3 \mid 2 + 1 \otimes 2 \mid 1 + 1 \mid 2 \otimes 1 + 1 \mid 3 \mid 2 \otimes ().$$

De este ejemplo resulta que $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})$ **no es coconmutativo**, pues

$$\Delta_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})}^{1,2}(1 \mid 3 \mid 2) = 1 \otimes 2 \mid 1 \text{ y } \Delta_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})}^{2,1}(1 \mid 3 \mid 2) = 1 \mid 2 \otimes 1, \text{ por lo que}$$

$$\beta_{1,2} \circ \Delta_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})}^{1,2}(1 \mid 3 \mid 2) = \beta_{1,2}(1 \otimes 2 \mid 1) = 2 \mid 1 \otimes 1, \text{ resultando que } \beta_{1,2} \circ \Delta_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})}^{1,2} \neq \circ \Delta_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})}^{2,1}.$$

Recordar que en el Ejemplo 3.2.11, vimos que la especie \mathbf{L} es coconmutativa, por lo tanto \mathcal{K}^\vee no preserva coconmutatividad. Más adelante veremos que \mathcal{K}^\vee preserva conmutatividad e investigaremos las mismas propiedades para el resto de los funtores.

Recordar que la antípoda de \mathbf{L} es $S_{\mathbf{L}}(l) = (-1)^{n\bar{l}}$ con $l \in \mathbf{L}[n]$, siendo \bar{l} el orden inverso; a continuación veremos que $\mathcal{K}^\vee(S_{\mathbf{L}})$ no es antípoda de $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})$.

Explicitaremos a continuación la componente n del mapa $\mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})}$,

$$\mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})} = \mathcal{K}^\vee(\mu_{\mathbf{L}}) \circ \psi_{\mathbf{L}, \mathbf{L}}^\vee = \mathcal{K}^\vee(\mu_{\mathbf{L}}) \circ \left(\sum_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ |S|=s \quad |T|=t}} \mathbf{L}[\text{std}_{S \rightarrow [s]}^{-1}] \otimes \mathbf{L}[\text{std}_{T \rightarrow [t]}^{-1}] \right),$$

y si tomamos órdenes tales que $l_s \in \mathbf{L}[s]$ y $l_t \in \mathbf{L}[t]$, entonces

$$\mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})}^{s,t}(l_s \otimes l_t) = \sum_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ |S|=s \quad |T|=t}} \mathbf{L}[\text{std}_{S \rightarrow [s]}^{-1}](l_s) \cdot \mathbf{L}[\text{std}_{T \rightarrow [t]}^{-1}](l_t).$$

A modo de ejemplo calcularemos $\mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})}^{2,1}(2 \mid 1 \otimes 1)$; es decir que $s = 2$ y $t = 1$ por lo que $S \in \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ y $T \in \{\{3\}, \{2\}, \{1\}\}$, entonces

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})}^{2,1}(2 \mid 1 \otimes 1) &= \sum_{\substack{S \sqcup T = [3] \\ |S|=2 \quad |T|=1}} \mathbf{L}[\text{std}_{S \rightarrow [2]}^{-1}](2 \mid 1) \cdot \mathbf{L}[\text{std}_{T \rightarrow [1]}^{-1}](1) = \\ &= 2 \mid 1 \cdot 3 + 3 \mid 1 \cdot 2 + 3 \mid 2 \cdot 1 = 2 \mid 1 \mid 3 + 3 \mid 1 \mid 2 + 3 \mid 2 \mid 1. \end{aligned}$$

De forma similar tenemos que $\mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})}^{1,2}(1 \otimes 2 \mid 1) = 3 \mid 2 \mid 1 + 2 \mid 3 \mid 1 + 1 \mid 3 \mid 2$.

Ahora veremos que $(\mathcal{K}^\vee(S_{\mathbf{L}}) * \mathcal{K}^\vee(Id))(l) \neq u_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})} \varepsilon_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})}(l)$ para $l = 1 \mid 3 \mid 2$.

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}^\vee(S_{\mathbf{L}}) * \mathcal{K}^\vee(Id))(1 \mid 3 \mid 2) &= \mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})} \circ (\mathcal{K}^\vee(S_{\mathbf{L}}) \otimes \mathcal{K}^\vee(Id)) \circ \Delta_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})}((1 \mid 3 \mid 2)) = \\ &= \mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})} \circ (\mathcal{K}^\vee(S_{\mathbf{L}}) \otimes \mathcal{K}^\vee(Id))((\) \otimes 1 \mid 3 \mid 2 + 1 \otimes 2 \mid 1 + 1 \mid 2 \otimes 1 + 1 \mid 3 \mid 2 \otimes (\)) = \\ &= \mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})}((\) \otimes 1 \mid 3 \mid 2 - 1 \otimes 2 \mid 1 + 2 \mid 1 \otimes 1 - 2 \mid 3 \mid 1 \otimes (\)) = \\ &= 1 \mid 3 \mid 2 - 3 \mid 2 \mid 1 - 2 \mid 3 \mid 1 - 1 \mid 3 \mid 2 + 2 \mid 1 \mid 3 + 3 \mid 1 \mid 2 + 3 \mid 2 \mid 1 - 2 \mid 3 \mid 1 = \\ &= 2 \mid 1 \mid 3 + 3 \mid 1 \mid 2 - 2 \cdot (2 \mid 3 \mid 1). \end{aligned}$$

El resultado anterior nos permite decir que **no podemos asegurar en general** que el functor \mathcal{K}^\vee preserve antípodas. Dado que si $\mathcal{K}^\vee(S_{\mathbf{L}})$ fuera antípoda de $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{L})$, la expresión $(\mathcal{K}^\vee(S_{\mathbf{L}}) * \mathcal{K}^\vee(Id))(1 \mid 3 \mid 2)$ debería ser cero.

Ahora pasaremos a definir el último functor de Fock, que utiliza la estructura de \mathcal{K}^\vee y a los subespacios vectoriales invariantes.

4.5. Functor de Fock bosónico $\overline{\mathcal{K}}^\vee$

Definición 4.5.1. Dada $\diamond : S_n \times V \rightarrow V$ una acción lineal, el subespacio invariante de V por \diamond , es el subespacio

$$V^{S_n} := \{v \in V \text{ tal que } \sigma \diamond v = v \ \forall \sigma \in S_n\}.$$

De forma análoga a lo visto para el functor $\overline{\mathcal{K}}$, dada una especie \mathbf{p} , la acción lineal que trabajaremos en estos espacios es $\sigma \diamond v := \mathbf{p}[\sigma](v)$ con $v \in \mathbf{p}[n]$.

Definición 4.5.2. Sea $\overline{\mathcal{K}}^\vee : \mathcal{S}\mathbf{p} \rightarrow gVect_{\mathbb{k}}$ el functor definido, a nivel de objetos, como:

$$\overline{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{q}) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{q}[n]^{S_n}.$$

Sea $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ un morfismo de especies tal que en su componente n es $f_{[n]} : \mathbf{p}[n] \rightarrow \mathbf{q}[n]$, entonces se define el functor a nivel de flechas como:

$$\overline{\mathcal{K}}^\vee(f) := \bigoplus_n f_{[n]}^{S_n},$$

donde $f_{[n]}^{S_n} = f_{[n]}|_{\mathbf{p}[n]^{S_n}}$ es decir, la restricción de $f_{[n]}$ al subespacio $\mathbf{p}[n]^{S_n}$.

Observación 4.5.3.

- Veamos que $\overline{\mathcal{K}}^\vee(f)$ está bien definida.
Es decir que probaremos que si $v \in \mathbf{p}[n]^{S_n}$, entonces $f_{[n]}(v) \in \mathbf{q}[n]^{S_n}$.

Dados $\sigma \in S_n$ y $v \in \mathbf{p}[n]^{S_n}$, como f es morfismo de especies se cumple que

$$\sigma \diamond (f_{[n]}(v)) = \mathbf{q}[\sigma](f_{[n]}(v)) = f_{[n]}(\mathbf{p}[\sigma](v)) = f_{[n]}(\sigma \diamond v) = f_{[n]}(v),$$

por lo tanto $f_{[n]}(v) \in \mathbf{q}[n]^{S_n}$.

Podemos expresar este resultado como la conmutatividad del siguiente diagrama, donde ι es el mapa inclusión

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[n]^{S_n} & \xrightarrow{\iota} & \mathbf{p}[n], \\ f_{[n]}^{S_n} \downarrow & & \downarrow f_{[n]} \\ \mathbf{p}[n]^{S_n} & \xrightarrow{\iota} & \mathbf{q}[n] \end{array}$$

- Si escribimos al mapa ι con subíndices en las especies correspondientes en el diagrama anterior, observemos que la conmutatividad de ese diagrama implica que ι es una transformación natural entre los funtores $\overline{\mathcal{K}}^\vee$ y \mathcal{K}^\vee . Es decir que dada $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ morfismo de especies, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{p}} = \iota(\mathbf{p})} & \mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}), \\ \overline{\mathcal{K}}^\vee(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{K}^\vee(f) \\ \overline{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{q}) & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{q}} = \iota(\mathbf{q})} & \mathcal{K}^\vee(\mathbf{q}) \end{array}$$

A continuación procederemos a darle a $\overline{\mathcal{K}}^\vee$ una estructura de functor monoidal bilaxo (con el producto de Cauchy en ambas categorías).

Definición 4.5.4. Estructura monoidal de $\bar{\mathcal{K}}^\vee$.

Definimos $\bar{\varphi}_0^\vee$ y $\bar{\psi}_0^\vee$ como los mapas identidad en \mathbb{k} , $\mathbb{k} \xrightleftharpoons[\bar{\varphi}_0^\vee]{\bar{\psi}_0^\vee} \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{1}) = \mathbb{k}$.

Se definen los mapas $\bar{\varphi}^\vee$ y $\bar{\psi}^\vee$ como las restricciones de los mapas φ^\vee y ψ^\vee a los subespacios invariantes. Es decir, de forma tal que los siguientes diagramas conmuten,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}) \bullet \mathcal{K}^\vee(\mathbf{q}) & \xrightleftharpoons[\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee]{\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee} & \mathcal{K}^\vee(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}). \\ \uparrow \iota & & \uparrow \iota \\ \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) \bullet \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{q}) & \xrightleftharpoons[\bar{\varphi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee]{\bar{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee} & \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) \end{array}$$

Proposición 4.5.5. Los mapas $\bar{\varphi}^\vee$ y $\bar{\psi}^\vee$ están bien definidos.

Demostración. Comencemos con $\bar{\varphi}^\vee$, para ello deberemos probar que

$$\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee \circ \iota \left(\bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) \right) \subseteq \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) \bullet \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{q});$$

es decir que si $v \in (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[n]^{S_n}$ entonces $\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee(v) \in \bigoplus_{s+t=n} \mathbf{p}[s]^{S_s} \otimes \mathbf{q}[t]^{S_t}$.

Si $v \in (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[n]^{S_n}$ entonces es de la forma $v = \sum_{S \sqcup T = [n]} v_{S,T}$ con $v_{S,T} \in \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T]$ y cumple que $\sigma \diamond v = v \forall \sigma \in S_n$, donde

$$\sigma \diamond v = \left(\bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}[\sigma|_S] \otimes \mathbf{q}[\sigma|_T] \right) (v) = \sum_{S \sqcup T = [n]} \left(\mathbf{p}[\sigma|_S] \otimes \mathbf{q}[\sigma|_T] \right) (v_{S,T}).$$

Como $\sigma \diamond v = v$, para cada $S' \sqcup T' = [n]$, las componentes $\{S', T'\}$ de $\sigma \diamond v$ y de v son iguales. Observar además $\left(\mathbf{p}[\sigma|_S] \otimes \mathbf{q}[\sigma|_T] \right) (v_{S,T}) \in \mathbf{p}[\sigma(S)] \otimes \mathbf{q}[\sigma(T)]$ y por lo tanto si $S' = \sigma(S)$ y $T' = \sigma(T)$ obtenemos que $\mathbf{p}[\sigma|_S] \otimes \mathbf{q}[\sigma|_T] (v_{S,T}) = v_{S',T'}$, y en el caso particular que $\sigma(S) = S$ y $\sigma(T) = T$ tenemos que

$$\mathbf{p}[\sigma|_S] \otimes \mathbf{q}[\sigma|_T] (v_{S,T}) = v_{S,T}. \quad (4.5)$$

Recordar que φ^\vee es no nula únicamente en aquellas componentes de v que son de la forma $v_{[s],[s+1,s+t]}$; para esta componente tenemos que

$$\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee(v_{[s],[s+1,s+t]}) = \left(\mathbf{p}[Id] \otimes \mathbf{q}[shift_s^{-1}] \right) ((v_{[s],[s+1,s+t]}),$$

por lo tanto debemos probar que este elemento está en $\mathbf{p}[s]^{S_s} \otimes \mathbf{q}[t]^{S_t}$; es decir que $\forall \alpha \in S_s$ y $\forall \tau \in S_t$, el elemento es $\mathbf{p}[\alpha] \otimes \mathbf{q}[\tau]$ invariante. Para ello dados α y τ como antes, sea $\sigma \in S_n$ la biyección tal que $\sigma|_{[s]} = \alpha$ y $\sigma|_{[s+1,s+t]} = shift_s \circ \tau \circ shift_s^{-1}$, es decir

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma|_{[s]}: [s] & \xrightarrow{Id} & [s] & \xrightarrow{\alpha \in S_s} & [s] & \xrightarrow{Id} & [s], \\ \sigma|_{[s+1,s+t]}: [s+1, s+t] & \xrightarrow{shift_s^{-1}} & [t] & \xrightarrow{\tau \in S_t} & [t] & \xrightarrow{shift_s} & [s+1, s+t], \\ \sigma: [s] \sqcup [s+1, s+t] = [n] & \dashrightarrow & & \dashrightarrow & & \dashrightarrow & [s] \sqcup [s+1, s+t] = [n]. \end{array}$$

Observar que,

$$\begin{aligned}\sigma \diamond v_{[s],[s+1,s+t]} &= (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[\sigma](v_{[s],[s+1,s+t]}) = (\mathbf{p}[\sigma|_{[s]}] \otimes \mathbf{q}[\sigma|_{[s+1,s+t]}])(v_{[s],[s+1,s+t]}) = \\ &= (\mathbf{p}[Id] \otimes \mathbf{q}[shift_s]) \circ (\mathbf{p}[\alpha] \otimes \mathbf{q}[\tau]) \circ (\mathbf{p}[Id] \otimes \mathbf{q}[shift_s^{-1}])(v_{[s],[s+1,s+t]}).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(\mathbf{p}[Id] \otimes \mathbf{q}[shift_s]) \circ (\mathbf{p}[\alpha] \otimes \mathbf{q}[\tau]) \circ (\mathbf{p}[Id] \otimes \mathbf{q}[shift_s^{-1}])(v_{[s],[s+1,s+t]}) = v_{[s],[s+1,s+t]},$$

y se obtiene que

$$(\mathbf{p}[\alpha] \otimes \mathbf{q}[\tau]) \circ (\mathbf{p}[Id] \otimes \mathbf{q}[shift_s^{-1}])(v_{[s],[s+1,s+t]}) = (\mathbf{p}[Id] \otimes \mathbf{q}[shift_s^{-1}])(v_{[s],[s+1,s+t]}),$$

lo que prueba que el elemento $(\mathbf{p}[Id] \otimes \mathbf{q}[shift_s^{-1}])(v_{[s],[s+1,s+t]}) = \varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee(v_{[s],[s+1,s+t]})$ es $\mathbf{p}[\alpha] \otimes \mathbf{q}[\tau]$ invariante, por lo que $\bar{\varphi}^\vee$ está bien definida.

La prueba de que $\bar{\psi}^\vee$ está bien definida, es similar a la prueba anterior, teniendo que probar esta vez que,

$$\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee \circ \iota \left(\bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) \bullet \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{q}) \right) \subseteq \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}),$$

es decir que si $v \in \bigoplus_{s+t=n} \mathbf{p}[s]^{S_s} \otimes \mathbf{q}[t]^{S_t}$ entonces $\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee(v) \in (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[n]^{S_n} \forall n \geq 0$. Basta probarlo con $v = v_s \otimes v_t$ con $v_s \in \mathbf{p}[s]^{S_s}$ y $v_t \in \mathbf{q}[t]^{S_t}$, para ello sea $\sigma \in S_n$,

$$\begin{aligned}\sigma \diamond (\psi^\vee(v_s \otimes v_t)) &= \sigma \diamond \left(\sum_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}[std_{S \rightarrow [s]}^{-1}] \otimes \mathbf{q}[std_{T \rightarrow [t]}^{-1}] \right) = \\ &= \sum_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}[\sigma|_S \circ std_{S \rightarrow [s]}^{-1}](v_s) \otimes \mathbf{q}[\sigma|_T \circ std_{T \rightarrow [t]}^{-1}](v_t).\end{aligned}$$

Observar que $\sigma|_S \circ std_{S \rightarrow [s]}^{-1} = std_{\sigma(S) \rightarrow [s]}^{-1}$ y que $\sigma|_T \circ std_{T \rightarrow [t]}^{-1} = std_{\sigma(T) \rightarrow [t]}^{-1}$, y si llamamos $S' = \sigma(S)$ y $T' = \sigma(T)$ la expresión anterior nos queda

$$\begin{aligned}\sigma \diamond (\psi^\vee(v_s \otimes v_t)) &= \sum_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}[std_{\sigma(S) \rightarrow [s]}^{-1}](v_s) \otimes \mathbf{q}[std_{\sigma(T) \rightarrow [t]}^{-1}](v_t) = \\ &= \sum_{S' \sqcup T' = [n]} \mathbf{p}[std_{S' \rightarrow [s]}^{-1}](v_s) \otimes \mathbf{q}[std_{T' \rightarrow [t]}^{-1}](v_t) = \\ &= \psi^\vee(v_s \otimes v_t).\end{aligned}$$

Lo que prueba que $\psi^\vee(v_s \otimes v_t)$ es $(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})[\sigma]$ invariante. □

Observación 4.5.6. Los mapas $\bar{\varphi}^\vee$ y $\bar{\psi}^\vee$ son inversos uno del otro.

Si $v_s \otimes v_t \in \mathbf{p}[s]^{S_s} \otimes \mathbf{q}[t]^{S_t}$ con $s+t=n$, es claro que $\bar{\varphi}^\vee \circ \bar{\psi}^\vee = Id_{\bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) \bullet \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{q})}$, dado que si escribimos $\bar{\psi}^\vee(v_s \otimes v_t) = \sum_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ |S|=s, |T|=t}} v_S \otimes v_T$ con $v_S \otimes v_T \in \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T]$, como $\bar{\varphi}^\vee$ es cero en las componentes $S \neq [s]$, tenemos que:

$$\bar{\varphi}^\vee \circ \bar{\psi}^\vee(v_s \otimes v_t) = \bar{\varphi}^\vee(v_{[s]} \otimes v_{[s+1,s+t]}) = v_s \otimes v_t.$$

Por otro lado, sea $v_n \in \left(\bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) \right)_n = \left(\bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T] \right)^{S_n}$, v_n es de la forma $v_n = \sum_{S \sqcup T = [n]} v_{S,T}$. Para ver que $\bar{\psi}^\vee \circ \bar{\varphi}^\vee = Id_{\bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})}$, como $\bar{\varphi}^\vee$ es cero en las componentes $v_S \otimes v_T$ con $S \neq [s]$, debemos probar que $v_n = \sum_{s+t=n} \bar{\psi}^\vee \circ \bar{\varphi}^\vee(v_{[s],[s+1,s+t]})$.

Recordamos que como v_n es S_n invariante $\forall \sigma \in S_n$ y $S' \sqcup T' = [n]$ tenemos que $v_{\sigma(S'), \sigma(T')} = \sigma \diamond v_{S', T'} = v_{S', T'}$. En particular, fijados S, T , tomando $S' = [s]$ y $T' = [s+1, s+t]$ y $\sigma \in S_n$ dada por

$$\begin{array}{ccccc} S' = [s] & \xrightarrow{Id_{[s]}} & [s] & \xrightarrow{Std_{S \rightarrow [s]}^{-1}} & S \\ T' = [1+s, s+t] & \xrightarrow{shift_s^{-1}} & [t] & \xrightarrow{Std_{T \rightarrow [t]}^{-1}} & T \\ \sigma : S' \sqcup T' = [n] & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & S \sqcup T = [n], \end{array}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} v_{S, T} &= v_{\sigma(S'), \sigma(T')} = \sigma \diamond v_{S', T'} = \\ &= \left(\mathbf{p} \left[Std_{S \rightarrow [s]}^{-1} \right] \otimes \mathbf{q} \left[Std_{T \rightarrow [t]}^{-1} \right] \right) \circ \left(\mathbf{p} [Id_{[s]}] \otimes \mathbf{q} [Shift_s^{-1}] \right) (v_{[s], [s+1, s+t]}) = \\ &= \left(\mathbf{p} \left[Std_{S \rightarrow [s]}^{-1} \right] \otimes \mathbf{q} \left[Std_{T \rightarrow [t]}^{-1} \right] \right) (\bar{\varphi}^\vee (v_{[s], [s+1, s+t]})), \end{aligned}$$

por lo tanto sumando en todos los $S \sqcup T = [n]$ obtenemos

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{S \sqcup T = [n]} v_{S, T} = \sum_{s+t=n} \sum_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ |S|=s, |T|=t}} \left(\mathbf{p} \left[Std_{S \rightarrow [s]}^{-1} \right] \otimes \mathbf{q} \left[Std_{T \rightarrow [t]}^{-1} \right] \right) (\bar{\varphi}^\vee (v_{[s], [s+1, s+t]})) = \\ &= \sum_{s+t=n} \bar{\psi}^\vee \circ \bar{\varphi}^\vee (v_{[s], [s+1, s+t]}). \quad \square \end{aligned}$$

Al ser $\bar{\varphi}^\vee$ y $\bar{\psi}^\vee$ restricciones de $\bar{\varphi}$ y $\bar{\psi}$ cumplen las mismas propiedades monoidales. Por lo que tenemos los siguientes resultados.

Lema 4.5.7. *Sea el functor $\bar{\mathcal{K}}^\vee$ y los mapas $\bar{\varphi}^\vee, \bar{\varphi}_0^\vee, \bar{\psi}^\vee$ y $\bar{\psi}_0^\vee$ definidos anteriormente.*

Entonces

- la terna $(\bar{\mathcal{K}}^\vee, \bar{\psi}^\vee, \bar{\psi}_0^\vee)$ es un functor monoidal laxo,
- la terna $(\bar{\mathcal{K}}^\vee, \bar{\varphi}^\vee, \bar{\varphi}_0^\vee)$ es un functor monoidal colaxo, y
- la quintupla $(\bar{\mathcal{K}}^\vee, \bar{\psi}^\vee, \bar{\psi}_0^\vee, \bar{\varphi}^\vee, \bar{\varphi}_0^\vee)$ es un functor monoidal bilaxo.

Corolario 4.5.8. *Sea \mathbf{h} una especie.*

1. Si (\mathbf{h}, μ, u) es un monoide en \mathbf{Sp} , entonces

$$(\bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{h}), \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mu) \circ \bar{\psi}_{\mathbf{h}, \mathbf{h}}^\vee, \bar{\mathcal{K}}^\vee(u) \circ \bar{\psi}_0^\vee) \in gVect_{\mathbb{k}} \text{ es una álgebra graduada.}$$

2. Si $(\mathbf{h}, \Delta, \varepsilon)$ es un comonoide en \mathbf{Sp} , entonces

$$(\bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{h}), \bar{\varphi}_{\mathbf{h}, \mathbf{h}}^\vee \circ \bar{\mathcal{K}}^\vee(\Delta), \bar{\varphi}_0^\vee \circ \bar{\mathcal{K}}^\vee(\varepsilon)) \in gVect_{\mathbb{k}} \text{ es una coálgebra graduada.}$$

3. Si $(\mathbf{h}, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonioide en \mathbf{Sp}

- a) entonces $(\bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{h}), \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mu) \circ \bar{\psi}_{\mathbf{h}, \mathbf{h}}^\vee, \bar{\mathcal{K}}^\vee(u) \circ \bar{\psi}_0^\vee, \bar{\varphi}_{\mathbf{h}, \mathbf{h}}^\vee \circ \bar{\mathcal{K}}^\vee(\Delta), \bar{\varphi}_0^\vee \circ \bar{\mathcal{K}}^\vee(\varepsilon)) \in gVect_{\mathbb{k}}$ es una \mathbb{k} -biálgebra graduada,
- b) además si \mathbf{h} es conexo, entonces $\bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{h})$ es una \mathbb{k} -álgebra de Hopf graduada y conexa.

De forma análoga a lo observado para $\bar{\mathcal{K}}$, en este caso también tenemos que $\bar{\psi}^\vee = \bar{\varphi}^{\vee-1}$ (Observación 4.5.6) y $\bar{\psi}_0^\vee = Id = \bar{\varphi}_0^\vee$, y por lo tanto $\bar{\mathcal{K}}^\vee$ lleva un monoide de Hopf en especies \mathbf{h} con antípoda S en un álgebra de Hopf $\bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{h})$ con antípoda $\bar{\mathcal{K}}^\vee(S)$.

Ejemplo 4.5.9. En el Ejemplo 4.2.8 ya vimos la estructura de biálgebra de $\mathcal{K}(\mathbf{E})$. En este ejemplo, aplicaremos los otros tres funtores de Fock a la especie exponencial \mathbf{E} y estableceremos relaciones entre las biálgebras resultantes.

Dado que $\mathbf{E}[n] = \mathbb{k}\triangleright_{[n]}$ y que dada $\sigma \in S_n$ tenemos que $\sigma \diamond \triangleright_{[n]} = Id_{\mathbf{E}[n]}(\triangleright_{[n]}) = \triangleright_{[n]}$, es decir, que $\triangleright_{[n]}$ queda fijo por todas las biyecciones en S_n , entonces $\mathbf{E}[n]^{S_n} = \mathbf{E}[n]$ y $\mathbf{E}[n]_{S_n} = \mathbf{E}[n] \setminus \{0\} \cong \mathbf{E}[n]$, por lo tanto $\mathcal{K}(\mathbf{E}) = \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{E})$ y $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{E}) \cong \overline{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{E})$ como espacios vectoriales.

- Recordamos la estructura de $\mathcal{K}(\mathbf{E})$ como biálgebra.

- $\mu_{\mathcal{K}(\mathbf{E})}^{s,t}(\triangleright_{[s]} \otimes \triangleright_{[t]}) = \triangleright_{[s+t]}$,
- $\Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{E})}^{s,t}(\triangleright_{[n]}) = \binom{s+t}{s} \triangleright_{[s]} \otimes \triangleright_{[t]}$,
- $u_{\mathcal{K}(\mathbf{E})_0}(\lambda) = \lambda(\triangleright_\emptyset)$ y $\varepsilon_{\mathcal{K}(\mathbf{E})_0}(\triangleright_\emptyset) = 1$.

- Por lo tanto el morfismo $\Gamma : \mathcal{K}(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbb{k}[x]$ dado por $\Gamma(\triangleright_{[n]}) = x^n$, es un isomorfismo de álgebras de Hopf graduadas. Como en este caso proyectar sobre espacios coinvariantes es el isomorfismo que manda la clase del elemento en el propio elemento, obtenemos que $\mathcal{K}(\mathbf{E}) \cong \mathbb{k}[x] \cong \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{E})$.

- Ahora veremos la estructura de $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{E})$ como biálgebra.

- $\mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{E})}^{s,t}(\triangleright_{[s]} \otimes \triangleright_{[t]}) = \mathcal{K}^\vee(\mu_{\mathbf{E}}) \circ \psi_{\mathbf{E},\mathbf{E}}^\vee(\triangleright_{[s]} \otimes \triangleright_{[t]}) = \mathcal{K}^\vee(\mu_{\mathbf{E}}) \circ \left(\sum_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ |S|=s, |T|=t}} \triangleright_{[S]} \otimes \triangleright_{[T]} \right) =$
 $= \binom{s+t}{s} \triangleright_{[S \sqcup T]} = \binom{n}{s} \triangleright_{[n]}$,
- $\Delta_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{E})}^{s,t}(\triangleright_{[n]}) = \varphi_{\mathbf{E},\mathbf{E}}^\vee \circ \mathcal{K}^\vee(\Delta_{\mathbf{E}})(\triangleright_{[n]}) = \varphi_{\mathbf{E},\mathbf{E}}^\vee \left(\sum_{S \sqcup T = [n]} \triangleright_{[S]} \otimes \triangleright_{[T]} \right) = \sum_{s+t=n} \triangleright_{[s]} \otimes \triangleright_{[t]}$,
- $u_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{E})_0}(\lambda) = \lambda(\triangleright_\emptyset)$ y $\varepsilon_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{E})_0}(\triangleright_\emptyset) = 1$.

- Es fácil probar que el morfismo $\Gamma' : \mathcal{K}^\vee(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbb{k}\{x\}$ dado por $\Gamma'(\triangleright_{[n]}) = x^{(n)}$ es un isomorfismo de álgebras de Hopf graduadas. Entonces $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{E}) \cong \mathbb{k}\{x\} \cong \overline{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{E})$, dado que los espacios vectoriales de cada componente coinciden con sus subespacios invariantes.

Entonces resumiendo, en este ejemplo tenemos los siguientes isomorfismos,

$$\mathcal{K}^\vee(\mathbf{E}) \cong \overline{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{E}) \cong \mathbb{k}\{x\} = (\mathbb{k}[x])^{*gr} \cong (\mathcal{K}(\mathbf{E}))^{*gr} \cong (\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{E}))^{*gr}.$$

Esto es un caso particular de un resultado más general que estudiaremos en la siguiente sección.

4.6. Functores de Fock y dualidad

En esta sección veremos algunas relaciones entre los funtores de Fock aplicado a especies y sus duales. Mostraremos que algunos de los isomorfismos vistos en el ejemplo anterior se dan para toda especie finita.

Teorema 4.6.1.

Si \mathbf{p} un bimonoides en especies de dimensión finita, entonces:

$$\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}^*) = (\mathcal{K}(\mathbf{p}))^{*gr}$$

Demostración. Observar que como espacios vectoriales $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}^*)$ y $(\mathcal{K}(\mathbf{p}))^{*gr}$ coinciden, ya que sus componentes en grado n son $\mathbf{p}^*[n] = (\mathbf{p}[n])^*$.

A continuación probaremos que los productos de ambos espacios son el mismo, es decir que $\mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}^*)} = \mu_{(\mathcal{K}(\mathbf{p}))^{*gr}}$.

Por simplicidad escribiremos $*$ en vez de $*gr$.

$$\mu_{(\mathcal{K}(\mathbf{p}))^*} = (\Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{p})})^* \circ \gamma_{\mathcal{K}(\mathbf{p})} = (\psi_{\mathbf{p},\mathbf{p}} \circ \mathcal{K}(\Delta_{\mathbf{p}}))^* \circ \gamma_{\mathcal{K}(\mathbf{p})} = (\mathcal{K}(\Delta_{\mathbf{p}}))^* \circ (\psi_{\mathbf{p},\mathbf{p}})^* \circ \gamma_{\mathcal{K}(\mathbf{p})}.$$

$$\mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}^*)} = \mathcal{K}^\vee(\mu_{\mathbf{p}^*}) \circ \psi_{\mathbf{p}^*,\mathbf{p}^*}^\vee = \mathcal{K}^\vee(\Delta_{\mathbf{p}}^* \circ \gamma_{\mathbf{p},\mathbf{p}}) \circ \psi_{\mathbf{p}^*,\mathbf{p}^*}^\vee = \mathcal{K}^\vee(\Delta_{\mathbf{p}}^*) \circ \mathcal{K}^\vee(\gamma_{\mathbf{p},\mathbf{p}}) \circ \psi_{\mathbf{p}^*,\mathbf{p}^*}^\vee.$$

Observar que si $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ es un morfismo de especies $(\mathcal{K}(f))^{*gr} = \mathcal{K}^\vee(f^*)$, dado que $\mathcal{K}(f)_n^* = (f_n)^* = (f^*)_n = \mathcal{K}^\vee(f^*)_n$. Para probar la igualdad de las multiplicaciones, basta probar que,

$$(\psi_{\mathbf{p},\mathbf{p}})^* \circ \gamma_{\mathcal{K}(\mathbf{p})} = \mathcal{K}^\vee(\gamma_{\mathbf{p},\mathbf{p}}) \circ \psi_{\mathbf{p}^*,\mathbf{p}^*}^\vee. \quad (4.6)$$

Observar que,

$$(\psi_{\mathbf{p},\mathbf{p}})^*_n = \left(\bigoplus_{\substack{s+t=n \\ |S|=s, |T|=t}} \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} (\mathbf{p}[std_{S \rightarrow [s]}] \otimes \mathbf{p}[std_{T \rightarrow [t]}]) \right)^* \cong \bigoplus_{\substack{s+t=n \\ |S|=s, |T|=t}} \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} (\mathbf{p}[std_{S \rightarrow [s]}] \otimes \mathbf{p}[std_{T \rightarrow [t]}])^*,$$

y que

$$(\psi_{\mathbf{p}^*,\mathbf{p}^*}^\vee)_n = \bigoplus_{\substack{s+t=n \\ |S|=s, |T|=t}} \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}^*[std_{S \rightarrow [s]}^{-1}] \otimes \mathbf{p}^*[std_{T \rightarrow [t]}^{-1}].$$

Por definición de especie dual, para toda biyección σ tenemos que, $(\mathbf{p}[\sigma])^* = \mathbf{p}^*[\sigma^{-1}]$, por lo que,

$$(\psi_{\mathbf{p}^*,\mathbf{p}^*}^\vee)_n = \bigoplus_{\substack{s+t=n \\ |S|=s, |T|=t}} \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} (\mathbf{p}[std_{S \rightarrow [s]}])^* \otimes (\mathbf{p}[std_{T \rightarrow [t]}])^*.$$

Recordemos que,

$$(\mathcal{K}^\vee(\gamma_{\mathbf{p},\mathbf{p}}))_n = (\gamma_{\mathbf{p},\mathbf{p}})_n = \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \gamma_{\mathbf{p}[S],\mathbf{p}[T]} \quad \text{y que} \quad (\gamma_{\mathcal{K}(\mathbf{p}),\mathcal{K}(\mathbf{p}))}_n = \bigoplus_{s+t=n} \gamma_{\mathbf{p}[s],\mathbf{p}[t]}.$$

Por lo tanto para probar la igualdad 4.6, basta probar que para cada s, t con $s + t = n$ y $S \sqcup T = [n]$, con $|S| = s$ y $|T| = t$, la correspondiente componente en ambos lados de la igualdad coinciden. Es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{p}^*[s] \otimes \mathbf{p}^*[t] & \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{p}[s], \mathbf{p}[t]}} & (\mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[t])^* \\
\downarrow (\mathbf{p}[std_{S \rightarrow [s]})^* \otimes (\mathbf{p}[std_{T \rightarrow [t]})^* & & \downarrow (\mathbf{p}[std_{S \rightarrow [s]}] \otimes \mathbf{p}[std_{T \rightarrow [t]}])^* \\
\mathbf{p}^*[S] \otimes \mathbf{p}^*[T] & \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{p}[S], \mathbf{p}[T]}} & (\mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T])^*
\end{array}$$

lo cual es cierto por la naturalidad de γ para espacios vectoriales (Ver Lema 1.6.2).

Ahora probaremos que los coproductos de ambos espacios coinciden, es decir que

$$\Delta_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}^*)} = \Delta_{(\mathcal{K}(\mathbf{p}))^*}.$$

$$\Delta_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}^*)} = \varphi_{\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*}^\vee \circ \mathcal{K}^\vee(\Delta_{\mathbf{p}^*}) = \varphi_{\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*}^\vee \circ \mathcal{K}^\vee(\gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{p}}^{-1} \circ \mu_{\mathbf{p}}^*) = \varphi_{\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*}^\vee \circ \mathcal{K}^\vee(\gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{p}}^{-1}) \circ \mathcal{K}^\vee(\mu_{\mathbf{p}}^*),$$

$$\Delta_{(\mathcal{K}(\mathbf{p}))^*} = \gamma_{\mathcal{K}(\mathbf{p}), \mathcal{K}(\mathbf{p})}^{-1} \circ \mu_{\mathcal{K}(\mathbf{p})}^* = \gamma_{\mathcal{K}(\mathbf{p}), \mathcal{K}(\mathbf{p})}^{-1} \circ (\mathcal{K}(\mu_{\mathbf{p}}) \circ \varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}})^* = \gamma_{\mathcal{K}(\mathbf{p}), \mathcal{K}(\mathbf{p})}^{-1} \circ (\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}})^* \circ (\mathcal{K}(\mu_{\mathbf{p}}))^*,$$

para probar que $\Delta_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}^*)} = \Delta_{(\mathcal{K}(\mathbf{p}))^*}$, es suficiente con probar que

$$\varphi_{\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*}^\vee \circ \mathcal{K}^\vee(\gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{p}}^{-1}) = \gamma_{\mathcal{K}(\mathbf{p}), \mathcal{K}(\mathbf{p})}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}}^*. \quad (4.7)$$

Observar que,

$$(\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}})_n : \bigoplus_{s+t=n} \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[t] \rightarrow \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T],$$

puede escribirse como la suma de los siguientes mapas:

$$(\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}})_{s,t} : \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[t] \rightarrow \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T], \text{ donde}$$

$$(\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}})_{s,t} = \iota_{\mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[s+1, s+t]} \circ (\mathbf{p}[Id_s] \otimes \mathbf{p}[shift_s]),$$

donde el mapa $\iota_{\mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[s+1, s+t]}$ es la siguiente inclusión $\mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[s+1, s+t] \hookrightarrow \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T]$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
((\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}})_{s,t})^* &= (\iota_{\mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[s+1, s+t]} \circ (\mathbf{p}[Id_s] \otimes \mathbf{p}[shift_s]))^* = (\mathbf{p}[Id_s] \otimes \mathbf{p}[shift_s])^* \circ (\iota_{\mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[s+1, s+t]})^* = \\
&= (\mathbf{p}[Id_s] \otimes \mathbf{p}[shift_s])^* \circ \pi_{(\mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[s+1, s+t])^*},
\end{aligned}$$

siendo el mapa $\pi_{(\mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[s+1, s+t])^*}$ la proyección: $\bigoplus_{S \sqcup T = [n]} (\mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T])^* \rightarrow (\mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[s+1, s+t])^*$.

Por otro lado, $(\varphi_{\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*})_n : \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}^*[S] \otimes \mathbf{p}^*[T] \rightarrow \bigoplus_{s+t=n} \mathbf{p}^*[s] \otimes \mathbf{p}^*[t]$, que tiene componentes

$$(\varphi_{\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*})_{s,t} : \bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}^*[S] \otimes \mathbf{p}^*[T] \rightarrow \mathbf{p}^*[s] \otimes \mathbf{p}^*[t], \text{ donde}$$

$$(\varphi_{\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*})_{s,t} = \mathbf{p}^*[Id_s] \otimes \mathbf{p}^*[shift_s^{-1}] \circ \pi_{\mathbf{p}^*[s] \otimes \mathbf{p}^*[t]},$$

siendo $\pi_{\mathbf{p}^*[s] \otimes \mathbf{p}^*[t]}$ la proyección $\bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}^*[S] \otimes \mathbf{p}^*[T] \rightarrow \mathbf{p}^*[s] \otimes \mathbf{p}^*[t]$.

Por lo tanto la componente $\{s, t\}$ de la igualdad 4.7 es la parte exterior del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
& & & & (\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}}^*)_{s, t} \\
& & \searrow & & \nearrow \\
\bigoplus_{S \sqcup T = [n]} (\mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T])^* & \xrightarrow{\pi_{(\mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[s+1, s+t])^*}} & (\mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[s+1, s+t])^* & \xrightarrow{(\mathbf{p}[Id_s] \otimes \mathbf{p}[shift_s])^*}} & (\mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[t])^* \\
(\gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{p}})_n^{-1} \downarrow & & \downarrow (\gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{p}})_{[s], [s+1, s+t]}^{-1} & & \downarrow (\gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{p}})_{s, t}^{-1} \\
\bigoplus_{S \sqcup T = [n]} \mathbf{p}^*[S] \otimes \mathbf{p}^*[T] & \xrightarrow{\pi_{\mathbf{p}^*[S] \otimes \mathbf{p}^*[T]}} & \mathbf{p}^*[s] \otimes \mathbf{p}^*[s+1, s+t] & \xrightarrow{\mathbf{p}^*[Id_s] \otimes \mathbf{p}^*[shift_s^{-1}]} & \mathbf{p}^*[s] \otimes \mathbf{p}^*[t] \\
& & & & (\varphi_{\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*}^\vee)_{s, t} \\
& & \nearrow & & \searrow
\end{array}$$

Observar que el primer cuadrante conmuta por definición y el segundo por la naturalidad de γ , lo que nos permite afirmar que la composición de los mapas exteriores del diagrama conmuta es decir que,

$$(\varphi_{\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*}^\vee)_{s, t} \circ (\gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{p}})_n^{-1} = (\gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{p}})_{s, t}^{-1} \circ (\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}}^*)_{s, t},$$

lo que prueba que el coproducto en ambos espacios es el mismo.

Resta probar que la counidad y la unidad de los espacios $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}^*)$ y $(\mathcal{K}(\mathbf{p}))^{*gr}$ coinciden.

Para ello, recordemos la definición de $\varepsilon_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}^*)}$ y de $\varepsilon_{(\mathcal{K}(\mathbf{p}))^{*gr}}$ mediante los siguientes diagramas,

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}^*) & \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}^*)}} & \mathbb{K} \\
\mathcal{K}^\vee(\varepsilon_{\mathbf{p}^*}) \downarrow & \nearrow \varphi_0^\vee & \\
\mathcal{K}^\vee(\mathbf{1}) & & \\
\mathcal{K}(\mathbf{p}) & \xrightarrow{u_{\mathcal{K}(\mathbf{p})}^*} & \mathbb{K} \\
u_{\mathcal{K}(\mathbf{p})}^* \downarrow & \nearrow \theta^{-1} & \\
\mathbb{K}^* & &
\end{array}$$

Basta probar que ambas composiciones coinciden en grado cero.

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}^*)})_0 &= (\varphi_0^\vee)_0 \circ (\mathcal{K}^\vee(\varepsilon_{\mathbf{p}^*}))_0 = Id_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon_{\mathbf{p}^*})_\emptyset = Id_{\mathbb{K}} \circ (\theta_{\mathbf{1}}^{-1} \circ (u_{\mathcal{K}(\mathbf{p})}^*))_\emptyset = \\
&= Id_{\mathbb{K}} \circ \theta_{\mathbb{K}}^{-1} \circ (u_{\mathbf{p}})_\emptyset^* = \theta_{\mathbb{K}}^{-1} \circ (u_{\mathbf{p}})_\emptyset^* \quad y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{(\mathcal{K}(\mathbf{p}))^{*gr}})_0 &= (\theta_{\mathbb{K}}^{-1})_0 \circ (u_{\mathcal{K}(\mathbf{p})}^*)_0 = \theta_{\mathbb{K}}^{-1} \circ (\mathcal{K}(u_{\mathbf{p}}) \circ \varphi_0)_0^* = \theta_{\mathbb{K}}^{-1} \circ (\varphi_0)_0^* \circ (\mathcal{K}(u_{\mathbf{p}}))_0^* = \\
&= \theta_{\mathbb{K}}^{-1} \circ Id_{\mathbb{K}^*} \circ (u_{\mathbf{p}})_\emptyset^* = \theta_{\mathbb{K}}^{-1} \circ (u_{\mathbf{p}})_\emptyset^*,
\end{aligned}$$

que claramente coinciden.

De forma análoga se prueba que los mapas $u_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}^*)}$ y $u_{(\mathcal{K}(\mathbf{p}))^{*gr}}$ coinciden, finalizando la prueba del teorema. \square

Lo que dice el resultado anterior es que los funtores $\mathcal{K}^\vee \circ (-)^*$ y $(-)^{*gr} \circ \mathcal{K}$ son funtores bilaxos y que las ecuaciones (4.6) y (4.7) valen para cualquier par de especies finitas, demostrando que las estructuras laxas y colaxas de ambos funtores son las mismas y que por lo tanto ambos funtores monoidales bilaxos coinciden.

Corolario 4.6.2. Si \mathbf{p} es una especie autodual, entonces $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}) \cong (\mathcal{K}(\mathbf{p}))^{*gr}$.

Demostración. El resultado se obtiene con la aplicación directa del teorema anterior. \square

Ejemplo 4.6.3. Observar que la especie exponencial \mathbf{E} es autodual, aplicando el corolario anterior obtenemos los isomorfismos dados en el ejemplo 4.5.9.

Ejemplo 4.6.4. Hemos visto en el Ejemplo 3.2.10 una estructura de bimonoides conexo para la especie \mathbf{E}_V . En este ejemplo veremos que esta especie es autodual y usando el corolario anterior obtendremos una nueva álgebra de Hopf.

Sea I un conjunto finito, S y T una descomposición disjunta de I . Llamaremos $B_I := \{f : I \rightarrow B, \text{ tal que } B \text{ es base de } V\}$ y e_f a los elementos de $\mathbf{E}_V^*[I]$, tales que si $f \in B_I$ y $g \in B_I$ entonces $e_f(g) = \delta_{f,g}$. Observar que B_I es base de $\mathbf{E}_V[I]$ y que $\{e_f \text{ con } f \in B_I\}$ es base de $\mathbf{E}_V^*[I]$.

Según la Proposición 3.4.6 la estructura de la especie \mathbf{E}_V^* es la siguiente:

- Sean $e_g \in \mathbf{E}_V^*[S]$, $e_h \in \mathbf{E}_V^*[T]$, y $\alpha \in \mathbf{E}_V[I]$, entonces

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{E}_V^*, S, T}(e_g \otimes e_h)(\alpha) &= ((\Delta_{\mathbf{E}_V})^* \circ \gamma_{\mathbf{E}_V, \mathbf{E}_V})_{S, T}(e_g \otimes e_h)(\alpha) = \\ &= \gamma_{\mathbf{E}_V[S], \mathbf{E}_V[T]}(e_g \otimes e_h) \circ \Delta_{\mathbf{E}_V, S, T}(\alpha) = \\ &= e_g(\alpha|_S) e_h(\alpha|_T) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = \alpha|_S \text{ y si } h = \alpha|_T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \\ &= \delta_{\alpha, \mu_{\mathbf{E}_V^*, S, T}(g \otimes h)}, \text{ es decir} \end{aligned}$$

$$\mu_{\mathbf{E}_V^*, S, T}(e_g \otimes e_h) = e_{\mu_{\mathbf{E}_V^*, S, T}(g \otimes h)}.$$

- $u_{\mathbf{E}_V^*, \emptyset}(1_{\mathbb{k}})(f^0) = (\varepsilon_{\mathbf{E}_V, \emptyset})^* \circ \theta(1_{\mathbb{k}})(f^0) = \theta(1_{\mathbb{k}})\varepsilon_{\mathbf{E}_V, \emptyset}(f^0) = 1 = e_{f^0}(f^0)$ por lo que $u_{\mathbf{E}_V^*, \emptyset}(1_{\mathbb{k}}) = e_{f^0}$.
- $\Delta_{\mathbf{E}_V^*, S, T}(e_\alpha)(g \otimes h) = \gamma_{\mathbf{E}_V[S], \mathbf{E}_V[T]}^{-1} \circ (\mu_{\mathbf{E}_V, S, T})^*(e_\alpha)(g \otimes h) =$
 $= \gamma_{\mathbf{E}_V[S], \mathbf{E}_V[T]}^{-1}(e_\alpha)\mu_{\mathbf{E}_V, S, T}(g \otimes h),$

componiendo con $\gamma_{\mathbf{E}_V[S], \mathbf{E}_V[T]}$ a la izquierda de ambos miembros deducimos que $\alpha|_S = g$ y que $\alpha|_T = h$ por lo que,

$$\Delta_{\mathbf{E}_V^*, S, T}(e_\alpha) = e_{\alpha|_S} \otimes e_{\alpha|_T}.$$

- La counidad en la componente \emptyset es

$$\varepsilon_{\mathbf{E}_V^*, \emptyset}(e_{f^0})(1_{\mathbb{k}}) = \theta^{-1}(u_{\mathbf{E}_V, \emptyset})^*(e_{f^0})(1_{\mathbb{k}}) = \theta^{-1}(e_{f^0})(f^0),$$

se deduce que $\varepsilon_{\mathbf{E}_V^*, \emptyset}(e_{f^0}) = 1$

Claramente bajo la identificación de $f \in \mathbf{E}_V[I]$ con $e_f \in \mathbf{E}_V^*[I]$, resulta que el bimonoides conexo \mathbf{E}_V es autodual, por lo que obtenemos que $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{E}_V) \cong (\mathcal{K}(\mathbf{E}_V))^{*gr}$, por el corolario anterior. También hemos visto que $\mathcal{K}(\mathbf{E}_V) \cong T(V)$, por lo que $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{E}_V) \cong (T(V))^{*gr}$.

Al álgebra de Hopf $(T(V))^{*gr}$ generalmente se la denota $T^\vee(V)$ y se la conoce como la *álgebra de Hopf de barajamientos*, definida como $T^\vee(V) = \bigoplus_{k \geq 0} V^{\otimes k}$ y con estructura de biálgebra de la siguiente forma:

$$\blacksquare \mu_{T^\vee(V)}((v_1 \otimes \dots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \dots \otimes v_n)) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \text{ es } i\text{-shuffle}}} v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Una permutación $\sigma \in S_n$ será un *i-shuffle* si $r < s$ entonces sucede una de las siguientes opciones $\begin{cases} \sigma(r) < \sigma(s) \leq \sigma(i) \\ \sigma(i) < \sigma(r) < \sigma(s) \end{cases}$.

De aquí el nombre del álgebra, dado que se *barajan* $v_1 \otimes \dots \otimes v_i$ y $v_{i+1} \otimes \dots \otimes v_n$ sin perder el orden. Ejemplo si $n = 4$ e $i = 2$ un barajamiento de $v_1 \otimes v_2$ con $v_3 \otimes v_4$ es $v_1 \otimes v_3 \otimes v_2 \otimes v_4$ y la σ *i-shuffle* $\in S_n$ es $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\blacksquare u_{T^\vee(V)}(1_{\mathbb{k}}) = 1_{\mathbb{k}}.$$

$$\blacksquare \Delta_{T^\vee(V)}(v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)}) = \sum_{i=0}^{i=n} (v_1 \otimes \dots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \dots \otimes v_n).$$

Para el caso $i = 0$ e $i = n$ los sumandos valen $1 \otimes (v_1 \otimes \dots \otimes v_n)$ y $(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \otimes 1$ respectivamente. Al coproducto se le llama *deconcatenación*.

$$\blacksquare \varepsilon_{T^\vee(V)}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = \delta_{0,n} Id_{\mathbb{k}}.$$

Presentada el álgebra de barajamientos, concluimos que $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{E}_V) \cong T^\vee(V)$.

4.7. Functores de Fock y (co)conmutatividad

En esta sección estudiaremos si los funtores de Fock preservan conmutatividad y coconmutatividad.

Proposición 4.7.1. \mathcal{K} y $\bar{\mathcal{K}}$ preservan coconmutatividad.

Demostración. Si probamos que \mathcal{K} preserve coconmutatividad, dado que los mapas que le dan estructura monoidal a $\bar{\mathcal{K}}$ son los de \mathcal{K} , pero definidos en espacios coinvariantes, concluimos que también $\bar{\mathcal{K}}$ preserve coconmutatividad. Entonces haremos la prueba sólo para el functor \mathcal{K} .

Sea $(\mathbf{p}, \Delta_{\mathbf{p}}, \varepsilon_{\mathbf{p}})$ un comonoide coconmutativo, es decir que se cumple que $\beta_{S,T} \circ \Delta_{\mathbf{p}}^{S,T} = \Delta_{\mathbf{p}}^{T,S}$, probaremos entonces que $\beta_{s,t} \circ \Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{p})}^{s,t} = \Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{p})}^{t,s}$.

$$\text{Ya hemos visto que } \Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{p})}^{s,t} = \left(\bigoplus_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ |S|=s, |T|=t}} \mathbf{p}[std_{S \rightarrow [s]}] \otimes \mathbf{p}[std_{T \rightarrow [t]}] \right) \circ \Delta_{\mathbf{p}}^{S,T}.$$

$$\text{Observar que } \beta_{s,t} \circ \Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{p})}^{s,t} = \left(\bigoplus_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ |S|=s, |T|=t}} \mathbf{p}[std_{T \rightarrow [t]}] \otimes \mathbf{p}[std_{S \rightarrow [s]}] \right) \circ \beta_{S,T} \circ \Delta_{\mathbf{p}}^{S,T}, \text{ usando la}$$

coconmutatividad de \mathbf{p} y obtenemos que

$$\beta_{s,t} \circ \Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{p})}^{s,t} = \left(\bigoplus_{\substack{S \sqcup T = [n] \\ |S|=s, |T|=t}} \mathbf{p}[std_{T \rightarrow [t]}] \otimes \mathbf{p}[std_{S \rightarrow [s]}] \right) \circ \Delta_{\mathbf{p}}^{T,S} = \Delta_{\mathcal{K}(\mathbf{p})}^{t,s}.$$

□

Observación 4.7.2. El functor \mathcal{K} no preserva conmutatividad.

En el ejemplo 3.4.8, vimos que \mathbf{L}^* era un monoide conmutativo. Veremos que $\mathcal{K}(\mathbf{L}^*) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{L}^*[n]$ no es conmutativo. Comencemos viendo el producto en $\mathcal{K}(\mathbf{L}^*)$.

$$\mu_{\mathcal{K}(\mathbf{L}^*)} : \mathcal{K}(\mathbf{L}^*) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{L}^*) \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{L}^*, \mathbf{L}^*}} \mathcal{K}(\mathbf{L}^* \otimes \mathbf{L}^*) \xrightarrow{\mathcal{K}(\mu_{\mathbf{L}^*})} \mathcal{K}(\mathbf{L}^*) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{L}^*) ,$$

$$\text{entonces para } s + t = n, \quad \mu_{\mathcal{K}(\mathbf{L}^*)}(l_s^* \otimes l_t^*) = \mathcal{K}(\mu_{\mathbf{L}^*}) \circ \varphi_{\mathbf{L}^*, \mathbf{L}^*}(l_s^* \otimes l_t^*).$$

Escribiremos a $\mathbf{L}^*[shift_s](l_t^*)$ como $shift_s(l_t^*)$, y a $\mathbf{L}[shift_s](l_t)$ como $shift_s(l_t)$. Entonces,

$$\mu_{\mathcal{K}(\mathbf{L}^*)}(l_s^* \otimes l_t^*) = \mathcal{K}(\mu_{\mathbf{L}^*})(l_s^* \otimes shift_s(l_t^*)) = \sum_{\substack{l \in sh(l_s, shift_s(l_t)) \\ l \in \mathbf{L}[n]}} l^*.$$

Ejemplo: si $s = 2$ y $t = 3$ con $l_2^* = (1 \mid 2)^*$ y $l_3^* = (3 \mid 2 \mid 1)^*$ entonces, $shift_2(l_3) = 5 \mid 4 \mid 3$, y

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{K}(\mathbf{L}^*)}(l_2^* \otimes l_3^*) &= (1 \mid 2 \mid 5 \mid 4 \mid 3)^* + (1 \mid 5 \mid 2 \mid 4 \mid 3)^* + (1 \mid 5 \mid 4 \mid 2 \mid 3)^* + \\ &+ (1 \mid 5 \mid 4 \mid 3 \mid 2)^* + (5 \mid 1 \mid 2 \mid 4 \mid 3)^* + (5 \mid 1 \mid 4 \mid 2 \mid 3)^* + \\ &+ (5 \mid 1 \mid 4 \mid 3 \mid 2)^* + (5 \mid 4 \mid 1 \mid 2 \mid 3)^* + (5 \mid 4 \mid 1 \mid 3 \mid 2)^* + (5 \mid 4 \mid 3 \mid 1 \mid 2)^*. \end{aligned}$$

Para ver que $\mathcal{K}(\mathbf{L}^*)$ no es conmutativo, probaremos que,

$$\mu_{\mathcal{K}(\mathbf{L}^*)}^{t,s} \circ \beta_{s,t}(l_s^* \otimes l_t^*) \neq \mu_{\mathcal{K}(\mathbf{L}^*)}^{s,t}(l_s^* \otimes l_t^*).$$

$$\mu_{\mathcal{K}(\mathbf{L}^*)}^{t,s} \circ \beta_{s,t}(l_s^* \otimes l_t^*) = \mu_{\mathcal{K}(\mathbf{L}^*)}^{t,s}(l_t^* \otimes l_s^*) = \sum_{\substack{l \in sh(l_t, shift_t(l_s)) \\ l \in \mathbf{L}[n]}} l^* \quad \text{y}$$

$$\mu_{\mathcal{K}(\mathbf{L}^*)}^{s,t}(l_s^* \otimes l_t^*) = \sum_{\substack{l' \in sh(l_s, shift_s(l_t)) \\ l' \in \mathbf{L}[n]}} l'^*.$$

Estas expresiones pueden no ser iguales. Si seguimos con el ejemplo dado anteriormente con $l_2 = 1 \mid 2$ y $l_3 = 3 \mid 2 \mid 1$, vemos que todos los ordenes en $sh(l_2, shift_2(l_3))$ comienzan por 1 o por 5, mientras que en $sh(l_3, shift_3(l_2))$ comienzan con 3 o con 4,

$$\begin{aligned} sh(l_3, shift_3(l_2)) &= sh(3 \mid 2 \mid 1, 4 \mid 5) = \{3 \mid 2 \mid 1 \mid 4 \mid 5 + 3 \mid 2 \mid 4 \mid 1 \mid 5 + \\ &+ 3 \mid 2 \mid 4 \mid 5 \mid 1 + 3 \mid 4 \mid 2 \mid 5 \mid 1 + 3 \mid 4 \mid 5 \mid 2 \mid 1 + 4 \mid 3 \mid 5 \mid 1 \mid 2 + \\ &+ 4 \mid 5 \mid 3 \mid 2 \mid 1 + 3 \mid 4 \mid 2 \mid 1 \mid 5 + 4 \mid 3 \mid 2 \mid 1 \mid 5 + 4 \mid 3 \mid 2 \mid 5 \mid 1\}. \end{aligned}$$

Proposición 4.7.3. El functor $\bar{\mathcal{K}}$ preserva conmutatividad.

Demostración. Debemos probar que $\mu_{\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p})}^{t,s} \circ \beta_{s,t} = \mu_{\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p})}^{s,t}$ con $(\mathbf{p}, \mu_{\mathbf{p}}, u_{\mathbf{p}})$ un monoide conmutativo.

Observar que, $\mu_{\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p})}^{s,t} = \mu_{\mathbf{p}}^{[s],[s+1],[s+t]} \circ (\mathbf{p}[Id_{[s]}] \otimes \mathbf{p}[shift_s])$ y que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[t] & \xrightarrow{\beta_{s,t}} & \mathbf{p}[t] \otimes \mathbf{p}[s] \\ \mathbf{p}[shift_t] \otimes \mathbf{p}[Id_{[t]}] \downarrow & & \downarrow \mathbf{p}[Id_{[t]}] \otimes \mathbf{p}[shift_t] \\ \mathbf{p}[1+t, s+t] \otimes \mathbf{p}[t] & & \mathbf{p}[t] \otimes \mathbf{p}[1+t, s+t] \\ \beta_{[1+t, s+t], [t]} \downarrow & & \downarrow \mu_{\mathbf{p}}^{[t], [1+t], [s+t]} \\ \mathbf{p}[t] \otimes \mathbf{p}[1+t, s+t] & \xrightarrow{\mu_{\mathbf{p}}^{[t], [1+t], [s+t]}} & \mathbf{p}[n] \end{array}$$

entonces,

$$\mu_{\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{p})}^{t,s} \circ \beta_{s,t} = \mu_{\mathbf{p}}^{[t],[1+t,s+t]} \circ \beta_{[1+t,s+t],[t]} \circ (\mathbf{p}[\mathit{shift}_t] \otimes \mathbf{p}[\mathit{Id}_{[t]}]),$$

como \mathbf{p} es conmutativo obtenemos que,

$$\mu_{\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{p})}^{t,s} \circ \beta_{s,t} = \mu_{\mathbf{p}}^{[1+t,s+t],[t]} \circ (\mathbf{p}[\mathit{shift}_t] \otimes \mathbf{p}[\mathit{Id}_{[t]}]).$$

Observar que,

- $\mu_{\mathbf{p}}$ es un morfismo de especies, entonces para $\sigma \in S_n$ cumple para $S \sqcup T = [n]$ que,

$$\mathbf{p}[\sigma] \circ \mu_{\mathbf{p}}^{S,T} = \mu_{\mathbf{p}}^{\sigma(S),\sigma(T)} \circ (\mathbf{p}[\sigma|_S] \otimes \mathbf{p}[\sigma|_T]),$$

en particular si $S = [1+t, s+t]$, $T = [t]$ y defino a σ como la siguiente biyección en $[n]$: $\sigma|_S = \mathit{shift}_t^{-1}$ y $\sigma|_T = \mathit{shift}_s$, tenemos que

$$\mathbf{p}[\sigma] \circ \mu_{\mathbf{p}}^{[1+t,s+t],[t]} = \mu_{\mathbf{p}}^{[s],[s+1,s+t]} \circ (\mathbf{p}[\mathit{shift}_t^{-1}] \otimes \mathbf{p}[\mathit{shift}_s]).$$

- como estamos trabajando en espacios coinvariantes $\bar{v} = \overline{\mathbf{p}[\sigma](v)}$, $\forall v \in \mathbf{p}[n]$.

Entonces con σ definida en la observación anterior tenemos que,

$$\begin{aligned} \overline{\mu_{\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{p})}^{t,s} \circ \beta_{s,t}} &= \overline{\mathbf{p}[\sigma] \circ \mu_{\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{p})}^{t,s} \circ \beta_{s,t}} = \overline{\mu_{\mathbf{p}}^{[s],[s+1,s+t]} \circ (\mathbf{p}[\mathit{shift}_t^{-1}] \otimes \mathbf{p}[\mathit{shift}_s]) \circ (\mathbf{p}[\mathit{shift}_t] \otimes \mathbf{p}[\mathit{Id}_{[t]}])} = \\ &= \overline{\mu_{\mathbf{p}}^{[s],[s+1,s+t]} \circ (\mathbf{p}[\mathit{Id}_{[s]}] \otimes \mathbf{p}[\mathit{shift}_s])} = \overline{\mu_{\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{p})}^{s,t}}, \end{aligned}$$

concluyendo que $\overline{\mathcal{K}}$ preserva conmutatividad. \square

Proposición 4.7.4. *Los funtores \mathcal{K}^\vee y $\overline{\mathcal{K}}^\vee$ preservan conmutatividad.*

Demostración. De forma similar a la afirmación anterior, si probamos que \mathcal{K}^\vee preserva conmutatividad, dado que $\overline{\mathcal{K}}^\vee$ es restringirnos a espacios invariantes, concluiremos que también preserva conmutatividad. Por lo tanto haremos la prueba sólo para el functor \mathcal{K}^\vee .

Sea $(\mathbf{p}, \mu_{\mathbf{p}}, u_{\mathbf{p}})$ un monoide conmutativo, cumple que: $\mu_{\mathbf{p}}^{T,S} \circ \beta_{S,T} = \mu_{\mathbf{p}}^{S,T}$, debemos probar que $\mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p})}^{t,s} \circ \beta_{s,t} = \mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p})}^{s,t}$.

Observar que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[t] & \xrightarrow{\beta_{s,t}} & \mathbf{p}[t] \otimes \mathbf{p}[s] \\ \downarrow \sum_{|T|=t, |S|=s} \mathbf{p}[\mathit{std}_{S \rightarrow [s]}^{-1}] \otimes \mathbf{p}[\mathit{std}_{T \rightarrow [t]}^{-1}] & & \downarrow \psi^\vee \sum_{|T|=t, |S|=s} \mathbf{p}[\mathit{std}_{T \rightarrow [t]}^{-1}] \otimes \mathbf{p}[\mathit{std}_{S \rightarrow [s]}^{-1}] \\ \sum \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] & & \sum \mathbf{p}[T] \otimes \mathbf{p}[S] \\ \downarrow \sum \beta_{S,T} & & \downarrow \sum \mu_{\mathbf{p}}^{T,S} \\ \sum \mathbf{p}[T] \otimes \mathbf{p}[S] & \xrightarrow{\sum \mu_{\mathbf{p}}^{T,S}} & \mathbf{p}[n] \end{array}$$

entonces el mapa $\mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p})}^{t,s} \circ \beta_{s,t} = \sum_{|S|=s, |T|=t} \mu_{\mathbf{p}}^{T,S} \circ \beta_{S,T} \circ (\mathbf{p}[\mathit{std}_{S \rightarrow [s]}^{-1}] \otimes \mathbf{p}[\mathit{std}_{T \rightarrow [t]}^{-1}])$, usamos que \mathbf{p} es conmutativo y obtenemos que

$$\mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p})}^{t,s} \circ \beta_{s,t} = \sum_{|S|=s, |T|=t} \mu_{\mathbf{p}}^{S,T} \circ \left(\mathbf{p}[std_{S \rightarrow [s]}^{-1}] \otimes \mathbf{p}[std_{T \rightarrow [t]}^{-1}] \right) = \mu_{\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p})}^{s,t}.$$

□

Observación 4.7.5.

Ya vimos para la especie \mathbf{L} en el Ejemplo 4.4.6 que \mathcal{K}^\vee **no preserva coconmutatividad**.

También es fácil ver este resultado en el Ejemplo 4.6.4. Dado que la especie \mathbf{E}_V es coconmutativa pues,

$$\beta_{S,T} \circ \Delta_{\mathbf{E}_V}^{S,T}(f) = f|_T \otimes f|_S = \Delta_{\mathbf{E}_V}^{T,S}(f), \quad \text{con } f \in \mathbf{E}_V[I] \text{ y } S \sqcup T = I.$$

La componente $\{s, t\}$ del coproducto en $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{E}_V) (\cong T^\vee(V))$ es quedarnos con las s primeras componentes y las t restantes,

$$\beta_{s,t} \circ \Delta_{T^\vee(V)}^{s,t}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = (v_{s+1} \otimes \dots \otimes v_{s+t}) \otimes (v_1 \otimes \dots \otimes v_s), \text{ y}$$

$$\Delta_{T^\vee(V)}^{t,s}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = (v_1 \otimes \dots \otimes v_t) \otimes (v_{t+1} \otimes \dots \otimes v_{t+s}).$$

Las expresiones anteriores claramente no coinciden en general, concluyendo que $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{E}_V)$ no es coconmutativa.

Sin embargo, al trabajar en espacios invariantes (tomando al functor $\overline{\mathcal{K}}^\vee$), veremos que si se preserva la coconmutatividad.

Proposición 4.7.6. *El functor $\overline{\mathcal{K}}^\vee$ preserva coconmutatividad.*

Demostración. Dado $(\mathbf{p}, \Delta_{\mathbf{p}}, \varepsilon_{\mathbf{p}})$ un comonoide coconmutativo, debemos probar que: $\beta_{s,t} \circ \Delta_{\overline{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p})}^{s,t} = \Delta_{\overline{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p})}^{t,s}$, con $\Delta_{\overline{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p})}^{s,t} = (\mathbf{p}[Id_{[s]}] \otimes \mathbf{p}[shift_s^{-1}]) \circ \Delta_{\mathbf{p}}^{S,T}$, recordando que $\overline{\varphi}^\vee$ es cero en aquellos conjuntos tales que $S \neq [s]$ y $T \neq [s+1, s+t]$.

Observar que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[n] & \xrightarrow{\Delta_{S,T}} & \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T], \\ \Delta_{S,T} \downarrow & & \downarrow \beta_{S,T} \\ \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[t] & & \mathbf{p}[T] \otimes \mathbf{p}[S] \\ \mathbf{p}[Id_S] \otimes \mathbf{p}[shift_s^{-1}] \downarrow & & \downarrow \mathbf{p}[shift_s^{-1}] \otimes \mathbf{p}[Id_S] \\ \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[t] & \xrightarrow{\beta_{s,t}} & \mathbf{p}[s] \otimes \mathbf{p}[t] \end{array}$$

entonces, $\beta_{s,t} \circ \Delta_{\overline{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p})}^{s,t} = (\mathbf{p}[shift_s^{-1}] \otimes \mathbf{p}[Id_S]) \circ \beta_{S,T} \circ \Delta_{S,T}$ y usando coconmutatividad de \mathbf{p} obtenemos que,

$$\beta_{s,t} \circ \Delta_{\overline{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p})}^{s,t} = (\mathbf{p}[shift_s^{-1}] \otimes \mathbf{p}[Id_S]) \circ \Delta_{T,S}.$$

Observar que,

- $\Delta_{\mathbf{p}}$ es un morfismo de especies, y dada $\sigma \in S_n$ entonces se cumple la siguiente igualdad, $(\mathbf{p} \bullet \mathbf{p})[\sigma] \circ \Delta_{\mathbf{p}} = \Delta_{\mathbf{p}} \circ \mathbf{p}[\sigma]$, y en espacios invariantes vale que

$$(\mathbf{p} \bullet \mathbf{p})[\sigma] \circ \Delta_{\mathbf{p}} = \Delta_{\mathbf{p}}$$

- como $(\mathbf{p} \bullet \mathbf{p})[\sigma] = \sum_{T \sqcup S = [n]} \mathbf{p}[\sigma|_T] \otimes \mathbf{p}[\sigma|_S]$, ya hemos visto que,

$$(\mathbf{p}[\sigma|_T] \otimes \mathbf{p}[\sigma|_S]) \circ \Delta_{\mathbf{p}}^{T,S} = \Delta_{\mathbf{p}}^{\sigma(T),\sigma(S)},$$

- en particular si $T = [s+1, s+t]$, $S = [s]$ defino a $\sigma \in S_n$ como $\sigma|_T = \mathit{shift}_s^{-1}$ y $\sigma|_S = \mathit{shift}_t$, resulta que la expresión anterior es,

$$(\mathbf{p}[\mathit{shift}_s^{-1}] \otimes \mathbf{p}[\mathit{shift}_t]) \circ \Delta_{\mathbf{p}}^{T,S} = \Delta_{\mathbf{p}}^{[t],[t+1,s+t]}.$$

Usando las observaciones realizadas anteriormente, obtenemos;

$$\begin{aligned} \beta_{s,t} \circ \Delta_{\overline{\mathcal{K}}^{\vee}(\mathbf{p})}^{s,t} &= (\mathbf{p}[\mathit{shift}_s^{-1}] \otimes \mathbf{p}[Id_S]) \circ (\mathbf{p}[\mathit{shift}_s] \otimes \mathbf{p}[\mathit{shift}_t^{-1}]) \circ \Delta_{\mathbf{p}}^{[t],[t+1,s+t]} = \\ &= (\mathbf{p}[Id_{[t]}] \otimes \mathbf{p}[\mathit{shift}_t^{-1}]) \circ \Delta_{\mathbf{p}}^{[t],[t+1,s+t]} = \Delta_{\overline{\mathcal{K}}^{\vee}(\mathbf{p})}^{t,s}. \end{aligned}$$

Esto prueba la coconmutatividad de $\Delta_{\overline{\mathcal{K}}^{\vee}(\mathbf{p})}$. \square

Observación 4.7.7. A continuación expresaremos algunas conclusiones con los resultados vistos.

Comenzaremos mostrando un cuadro que resume si los funtores de Fock preservan conmutatividad y coconmutatividad y en caso de no hacerlo, brindamos un contraejemplo.

Functor	Preserva Conmutatividad	Preserva Coconmutatividad
\mathcal{K}	No. Contraejemplo: \mathbf{L}^* y $\mathcal{K}(\mathbf{L}^*)$	Sí
$\overline{\mathcal{K}}$	Sí	Sí
\mathcal{K}^{\vee}	Sí	No. Contraejemplos: \mathbf{L} y $\mathcal{K}^{\vee}(\mathbf{L})$, $\mathbf{E}_{\mathbf{V}}$ y $\mathcal{K}^{\vee}(\mathbf{E}_{\mathbf{V}})$
$\overline{\mathcal{K}}^{\vee}$	Sí	Sí

Cuadro 4.1: Los funtores de Fock y un resumen de si preservan conmutatividad y coconmutatividad.

Este resultado en realidad es consecuencia de la propiedad de los de funtores monoidales trenzados (estructura laxa y colaxa compatibles con las trenzas de las categorías monoidales trenzadas). Se puede probar que los funtores monoidales trenzados laxos (resp. colaxos), preservan monoides conmutativos (y resp. comonoides coconmutativos). Para profundizar sobre este tema, ver Sección 3.1.3 de [AM10]. A lo largo de las pruebas en esta sección se repite la idea de conmutatividad de diagramas, que en realidad son prueba de lo dicho anteriormente para cada caso particular.

Resumiendo:

- \mathcal{K} es trenzado colaxo, preserva coconmutatividad.
- \mathcal{K}^{\vee} es trenzado laxo, preserva conmutatividad.
- $\overline{\mathcal{K}}$ y $\overline{\mathcal{K}}^{\vee}$ son trenzados bilaxos, preservan coconmutatividad y conmutatividad.

Otras observaciones:

- Los funtores \mathcal{K} y \mathcal{K}^\vee son distintos. Si bien aplicados a una especie, se obtiene el mismo espacio vectorial graduado, difieren en la estructura bilaxa, y se obtienen así biálgebras no necesariamente isomorfas. Además por ejemplo, que \mathcal{K} no preserva conmutatividad y \mathcal{K}^\vee sí.
- Los funtores \mathcal{K} y \mathcal{K}^\vee no preservan autodualidad de bimonoides; es decir que si \mathbf{p} es un bimonoides en especies autodual, puede suceder que $\mathcal{K}(\mathbf{p})$ y $\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p})$ no sean biálgebras autoduales; es decir

$$\mathcal{K}(\mathbf{p}) \not\cong (\mathcal{K}(\mathbf{p}))^{*gr} \text{ y/o } \mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}) \not\cong (\mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}))^{*gr}.$$

Recordemos que $\mathbf{E}_V \cong \mathbf{E}_V^*$ (Ejemplo 4.6.4). Observar que $T(V)$ no es conmutativo y que $T^\vee(V)$ es conmutativo, por lo que $T(V) \not\cong T^\vee(V)$, entonces

$$\mathcal{K}(\mathbf{E}_V) = T(V) \not\cong T^\vee(V) = \mathcal{K}^\vee(\mathbf{E}_V) \cong \mathcal{K}^\vee(\mathbf{E}_V^*) \cong (\mathcal{K}(\mathbf{E}_V))^{*gr}.$$

Además, utilizando que $\mathcal{K}(\mathbf{E}_V) \not\cong (\mathcal{K}(\mathbf{E}_V))^{*gr}$ y dualizando obtenemos que:

$$\mathcal{K}^\vee(\mathbf{E}_V) \cong (\mathcal{K}(\mathbf{E}_V))^{*gr} \not\cong ((\mathcal{K}(\mathbf{E}_V))^{*gr})^{*gr} \cong (\mathcal{K}^\vee(\mathbf{E}_V))^{*gr}.$$

A lo largo del trabajo se han evidenciado varias propiedades compartidas entre los funtores $\overline{\mathcal{K}}^\vee$ y $\overline{\mathcal{K}}$. Esto sucede en realidad porque existe un isomorfismo natural entre estos funtores, que además conmuta con las estructuras bilaxas de los mismos. Esto lleva a que aplicados a un monoide de Hopf en especies obtengamos álgebras de Hopf isomorfas.

A continuación se dará claros argumentos de este resultado, enunciando definiciones y propiedades que no hemos probado pero que resultan muy intuitivas.

Proposición 4.7.8. *Si $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$, dado un monoide de Hopf en especies \mathbf{p} , las álgebras de Hopf $\overline{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p})$ y $\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{p})$ con las estructuras vistas en las secciones anteriores son isomorfas.*

Demostración. La idea de la demostración es la siguiente:

- se construirá una transformación natural $\alpha : \overline{\mathcal{K}}^\vee \rightarrow \overline{\mathcal{K}}$,
- veremos que α preserva las estructuras monoidales de los funtores (concepto que se presentará en la propia demostración).
- Si $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$, la transformación α es invertible.
- Finalizaremos probando que $\alpha_{\mathbf{p}} : \overline{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) \rightarrow \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{p})$ es un isomorfismo de biálgebras graduadas (y por lo tanto de álgebras de Hopf).

Comencemos por definir la transformación natural $\alpha : \overline{\mathcal{K}}^\vee \rightarrow \overline{\mathcal{K}}$ como la composición de los siguientes mapas

$$\begin{array}{ccccc} & & \alpha & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ \overline{\mathcal{K}}^\vee & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{K}^\vee & \xrightarrow{Id} & \mathcal{K} & \xrightarrow{\pi} & \overline{\mathcal{K}} \end{array}$$

donde ι y π son las transformaciones naturales vistas en las Observaciones 4.3.5 y 4.5.3, e Id la transformación natural Identidad. Como la composición de transformaciones naturales es otra transformación natural resulta que α es una transformación natural.

Existe la noción de transformación natural entre funtores laxos, colaxos y bilaxos, que es básicamente que la transformación natural conmuta con la estructura laxa y colaxa resp. de los funtores. A modo de ejemplo si $(\mathcal{F}, \varphi, \varphi_0, \psi, \psi_0)$ y $(\mathcal{G}, \eta, \eta_0, \delta, \delta_0)$ son dos funtores bilaxos

una transformación natural bilaxa $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es una transformación que hace conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) \bullet \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{\varphi_{A,B}} & \mathcal{F}(A \bullet B) \\ \alpha_A \bullet \alpha_B \downarrow & & \downarrow \alpha_{A \bullet B} \\ \mathcal{G}(A) \bullet \mathcal{G}(B) & \xrightarrow{\eta_{A,B}} & \mathcal{G}(A \bullet B) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathcal{F}(I) \\ & \searrow \eta_0 & \downarrow \alpha_I \\ & & \mathcal{G}(I) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A \bullet B) & \xrightarrow{\psi_{A,B}} & \mathcal{F}(A) \bullet \mathcal{F}(B) \\ \alpha_{A \bullet B} \downarrow & & \downarrow \alpha_A \bullet \alpha_B \\ \mathcal{G}(A \bullet B) & \xrightarrow{\delta_{A,B}} & \mathcal{G}(A) \bullet \mathcal{G}(B) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(I) & \xrightarrow{\psi_0} & I \\ \alpha_I \downarrow & & \nearrow \delta_0 \\ \mathcal{G}(I) & & \end{array}$$

A continuación probaremos que la transformación natural $\alpha : \bar{\mathcal{K}}^\vee \rightarrow \bar{\mathcal{K}}$ definida anteriormente es colaxa.

Para probar la conmutatividad del primer diagrama de abajo (para la estructura colaxa), es equivalente probar que el segundo diagrama conmuta, dado que ya hemos visto que $\bar{\varphi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee = (\bar{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}})^{-1}$,

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) & \xrightarrow{\bar{\varphi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee} & \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) \bullet \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{q}) \\ \alpha_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}} \downarrow & & \downarrow \alpha_{\mathbf{p}} \bullet \alpha_{\mathbf{q}} \\ \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) & \xrightarrow{\bar{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}} & \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p}) \bullet \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{q}) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) & \xleftarrow{\bar{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee} & \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) \bullet \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{q}) \\ \alpha_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}} \downarrow & & \downarrow \alpha_{\mathbf{p}} \bullet \alpha_{\mathbf{q}} \\ \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) & \xrightarrow{\bar{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}} & \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p}) \bullet \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{q}) \end{array}$$

A continuación extendemos el segundo diagrama con los mapas involucrados

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) & \xleftarrow{\bar{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee} & \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) \bullet \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{q}) \\ \downarrow \iota_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}} & \text{1er. Cuadrante} & \downarrow \iota_{\mathbf{p}} \bullet \iota_{\mathbf{q}} \\ \mathcal{K}^\vee(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) & \xleftarrow{\bar{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee} & \mathcal{K}^\vee(\mathbf{p}) \bullet \mathcal{K}^\vee(\mathbf{q}) \\ \downarrow Id_{\mathbf{p},\mathbf{q}} & \text{2do. Cuadrante} & \downarrow Id_{\mathbf{p}} \bullet Id_{\mathbf{q}} \\ \mathcal{K}(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) & \xrightarrow{\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}} & \mathcal{K}(\mathbf{p}) \bullet \mathcal{K}(\mathbf{q}) \\ \downarrow \pi_{\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}} & \text{3er. Cuadrante} & \downarrow \pi_{\mathbf{p}} \bullet \pi_{\mathbf{q}} \\ \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q}) & \xrightarrow{\bar{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}} & \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p}) \bullet \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{q}) \end{array}$$

Para probar la conmutatividad de las flechas exteriores al diagrama, probaremos que los tres cuadrantes conmutan individualmente.

El primer cuadrante conmuta por la propia definición del mapa $\bar{\psi}^\vee$ (Definición 4.5.4), el segundo cuadrante conmuta, porque son mapas uno inverso del otro y el tercer cuadrante conmuta, por definición del mapa $\bar{\psi}$ (Definición 4.3.6).

Para finalizar la prueba de que α es una transformación natural entre funtores colaxos, falta la conmutatividad entre los mapas $\bar{\varphi}_0^\vee$ y $\bar{\psi}_0$, que es fácil de ver, dado que son identidades.

Considerando que $\bar{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee = (\bar{\varphi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^\vee)^{-1}$ y que $\bar{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}} = (\bar{\varphi}_{\mathbf{p},\mathbf{q}})^{-1}$, se deduce que α es una transformación natural entre funtores laxos.

Escribimos $|S_n|$ como al orden del grupo S_n , por lo que $|S_n| = n!$. La transformación α es un isomorfismo natural con inverso $(\alpha_{\mathbf{p}}^{-1})_{[n]} : \mathbf{p}[n]_{S_n} \rightarrow \mathbf{p}[n]^{S_n}$ definido en $\bar{x} \in \mathbf{p}[n]_{S_n}$ como

$$(\alpha_{\mathbf{p}}^{-1})_{[n]}(\bar{x}) = \frac{1}{|S_n|} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma \diamond x,$$

(es inmediato ver que α^{-1} está bien definido y que efectivamente es inversa de α). Resulta entonces que α es un isomorfismo natural bilaxo. Aquí surge la necesidad que el orden del grupo S_n sea invertible en el cuerpo para todo n , es decir que que la característica del cuerpo no divida $n!$ para todo n , es por ello que se hace necesaria la hipótesis de que $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$.

Resta probar que $\alpha_{\mathbf{p}}$ es un morfismo de biálgebras graduadas. Comencemos mostrando que $\alpha_{\mathbf{p}}$ es un morfismo de coálgebras graduadas, es decir que debemos probar que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) & \xrightarrow{\alpha_{\mathbf{p}}} & \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p}) \\ \Delta_{\bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p})} \downarrow & & \downarrow \Delta_{\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p})} \\ \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) \bullet \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) & \xrightarrow{\alpha_{\mathbf{p}} \bullet \alpha_{\mathbf{p}}} & \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p}) \bullet \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p}) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) & \xrightarrow{\varepsilon_{\bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p})}} & \mathbb{k} \\ \alpha_{\mathbf{p}} \downarrow & \nearrow \varepsilon_{\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p})} & \\ \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p}) & & \end{array}$$

Sustituímos en los diagramas las definiciones de los coproductos y counidades (apareciendo así las estructuras colaxas de ambos funtores),

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) & \xrightarrow{\alpha_{\mathbf{p}}} & \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p}), \\ \bar{\mathcal{K}}^\vee(\Delta_{\mathbf{p}}) \downarrow & \text{Cuadrante A} & \downarrow \bar{\mathcal{K}}(\Delta_{\mathbf{p}}) \\ \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p} \bullet \mathbf{p}) & \xrightarrow{\alpha_{\mathbf{p}} \bullet \alpha_{\mathbf{p}}} & \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p} \bullet \mathbf{p}) \\ \bar{\varphi}_{\mathbf{p},\mathbf{p}}^\vee \downarrow & \text{Cuadrante B} & \downarrow \bar{\psi}_{\mathbf{p},\mathbf{p}} \\ \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) \bullet \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) & \xrightarrow{\alpha_{\mathbf{p}} \bullet \alpha_{\mathbf{p}}} & \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p}) \bullet \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p}) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\varepsilon_{\bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p})}} & \mathbb{k} \\ \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{p}) & \xrightarrow{\bar{\mathcal{K}}^\vee(\varepsilon_{\mathbf{p}})} & \bar{\mathcal{K}}^\vee(\mathbf{1}) \xrightarrow{\bar{\varphi}_0^\vee} \\ \alpha_{\mathbf{p}} \downarrow & \text{Cuadrante A} & \downarrow \alpha_1 \\ \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p}) & \xrightarrow{\bar{\mathcal{K}}(\varepsilon_{\mathbf{p}})} & \bar{\mathcal{K}}(\mathbf{1}) \xrightarrow{\bar{\psi}_0} \\ & \xrightarrow{\varepsilon_{\bar{\mathcal{K}}(\mathbf{p})}} & \mathbb{k} \end{array}$$

Como es usual para probar la conmutatividad de las flechas exteriores a los diagramas basta con probar la conmutatividad de los cuadrantes internos en cada diagrama. Los Cuadrantes A conmutan dado que α es una transformación natural y los Cuadrantes B, por la propiedad vista en esta prueba de que α es una transformación natural de funtores colaxos.

Se procede con argumentos análogos para probar que α es un morfismo de álgebras. \square

Bibliografía

- [AM10] AGUIAR, MARCELO y MAHAJAN, SWAPNEEL, *Monoidal Functor, Species and Hopf Algebras*, CRM Monograph Montréal, American Mathematical Society, Volume 29 (2010).
- [AM75] ARBIB, MICHAEL A. y MANES, ERNEST G. *Arrows, Structures, and Functors: The Categorical Imperative* Academic Press, New York (1975).
- [JOY81] JOYAL, ANDRÉ, *Une théorie combinatoire des séries formelles*. Advances in mathematics, 42(1):1-82 (1981).
- [JYR93] JOYAL, ANDRÉ y STREET, ROSS, *Braided tensor categories*, Adv. Math. 102 (1993), no. 1, 20-78.
- [MP01] PEREIRA, MARIANA. *Biálgebras y Categorías Monoidales* Trabajo monográfico, Centro de Matemáticas, Montevideo (2001).
- [MS92] MONTGOMERY, SUSAN. *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*. Regional conference series in mathematics; no. 82, Chicago (1992).
- [MT71] TAKEUCHI, M. *Free Hopf Algebras generated by coalgebras*, J. Math. Soc. Japan Vol.23; no. 4 (1971).