

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

FACULTAD DE CIENCIAS

---

# Functores adjuntos y teoremas de adjunción

---

BRUNO STONEK ([bruno@stonek.com](mailto:bruno@stonek.com))

Orientador: WALTER FERRER SANTOS ([wrferrer@cmat.edu.uy](mailto:wrferrer@cmat.edu.uy))

Monografía de la licenciatura en Matemática  
Octubre de 2012

## Resumen

Esta monografía empieza con un estudio de los conceptos básicos de la teoría de categorías: categorías, funtores, transformaciones naturales y límites. Luego definimos *adjunción*: exploramos sus diferentes caracterizaciones, sus propiedades y su relación con las equivalencias de categorías. Damos ejemplos de adjunciones en el contexto del álgebra, de la topología, de la combinatoria y de la propia teoría de categorías. Finalmente demostramos los teoremas de adjunción de Freyd que nos garantizan que bajo ciertas hipótesis generales un functor admite un adjunto. Aplicamos estos teoremas para construir e.g. los objetos libres, el producto libre de grupos y la compactificación de Stone-Čech.

# Índice general

Introducción . . . . .	5
<b>1. Preliminares categóricos</b>	<b>8</b>
1.1. Categorías . . . . .	8
1.1.1. Definiciones básicas . . . . .	8
1.1.2. Ejemplos . . . . .	12
1.1.3. Monomorfismos y epimorfismos . . . . .	15
1.2. Functores . . . . .	20
1.2.1. Diagramas . . . . .	23
1.2.2. Bifuntores . . . . .	25
1.2.3. Categorías coma . . . . .	28
1.3. Transformaciones naturales . . . . .	33
1.3.1. Definiciones y ejemplos . . . . .	33
1.3.2. Equivalencias de categorías . . . . .	39
1.4. Límites y colímites . . . . .	43
1.4.1. Definiciones . . . . .	43
1.4.2. Ejemplos . . . . .	49
1.4.3. Preservación, reflexión y creación de límites . . . . .	60
1.4.4. En categorías completas . . . . .	63
1.4.5. Los funtores $\text{Hom}$ preservan límites . . . . .	65
<b>2. Funtores adjuntos</b>	<b>68</b>
2.1. Definición . . . . .	68
2.2. Caracterizaciones . . . . .	71
2.2.1. En resumen . . . . .	77
2.3. Propiedades de las adjunciones . . . . .	78
2.3.1. Unicidad . . . . .	78
2.3.2. Construcción puntual . . . . .	79
2.3.3. Composición . . . . .	81

2.3.4.	Características de la unidad y la counidad . . . . .	82
2.3.5.	Relación con equivalencias de categorías . . . . .	83
2.3.6.	Preservación de límites . . . . .	84
2.4.	Ejemplos . . . . .	88
2.4.1.	Ejemplos del álgebra . . . . .	88
2.4.2.	Ejemplos de la topología . . . . .	101
2.4.3.	Ejemplos de la combinatoria . . . . .	103
2.4.4.	Ejemplos de la teoría de categorías . . . . .	107
2.5.	Categorías cartesianas cerradas . . . . .	112
2.5.1.	Límites en categorías de funtores . . . . .	115
2.5.2.	Categorías monoidales cerradas . . . . .	117
<b>3.</b>	<b>Teoremas de adjunción</b>	<b>121</b>
3.1.	Teorema general del functor adjunto . . . . .	121
3.1.1.	El teorema . . . . .	121
3.1.2.	En categorías pequeñas . . . . .	128
3.1.3.	Ejemplos . . . . .	130
3.2.	Teorema especial del functor adjunto . . . . .	133
3.2.1.	Generadores . . . . .	133
3.2.2.	Subobjetos . . . . .	136
3.2.3.	El teorema . . . . .	139
3.2.4.	Ejemplos . . . . .	142
	<b>Bibliografía</b>	<b>148</b>
	<b>Índice alfabético</b>	<b>149</b>
	<b>Índice de notaciones</b>	<b>152</b>

# Introducción

En esta monografía desarrollamos algunos aspectos centrales de la *teoría de categorías*, especialmente el concepto de *adjunción*.

Los objetos fundamentales en esta teoría son las categorías, los funtores y las transformaciones naturales. Estos conceptos fueron introducidos por primera vez en el año 1945 en el artículo de Eilenberg y Mac Lane [8]. Los autores buscaban esclarecer el concepto de *naturalidad* entre construcciones:

*As Eilenberg-Mac Lane first observed, “category” has been defined in order to define “functor”, and “functor” has been defined in order to define “natural transformation”.*

[15, p. 18]

Es interesante señalar que la idea de *categoría* surge de los trabajos de Eilenberg y Mac Lane en topología algebraica:

*The initial discovery of categories came directly from a problem of calculation in topology.*

[16, p. 333]

Dedicamos el **primer capítulo** al estudio general de categorías, funtores, transformaciones naturales, límites y colímites. Damos los ejemplos más prominentes de límites: productos, pullbacks e igualadores, y de sus conceptos duales: coproductos, pushouts y coigualadores. Estudiamos en detalle la relación entre las nociones de preservación, reflexión y creación de límites.

Originalmente, las categorías constituyeron meramente un *lenguaje* adecuado para formular ciertos conceptos, incluso para sus propios creadores. Luego de algunos años se descubrió una noción central que permitió impulsar el estudio sistemático de las categorías como teoría con interés propio:

*[We thought] that it provided a handy language to be used by topologists and others, and that it also offered a conceptual view of parts of mathematics. [...] We did not then regard it as a field for further research efforts, but just as a language and an orientation - a limitation which we followed for a dozen years or so, till the advent of adjoint functors.*

[16, pp. 334-335]

De esta manera, es el concepto de *functor adjunto* el que impulsó el estudio de la *teoría de categorías*. Su descubrimiento es debido a Kan, quien lo publicó por primera vez en el artículo [13] de 1958.

*For category theory, the next decisive notion is that of an adjoint functor, introduced by Daniel Kan (1958) as a necessary part of his study of the topological realization of simplicial sets.*

[17, p. 132]

Dedicamos el **segundo capítulo** al estudio de los funtores adjuntos. Damos diferentes caracterizaciones: a través de biyecciones naturales entre hom-sets, a través de las identidades triangulares y a través de propiedades universales. Estudiamos las propiedades básicas de las adjunciones. Vemos también que toda equivalencia de categorías da lugar a una adjunción, y observamos cuándo un functor adjunto es una equivalencia de categorías.

Presentamos una variedad de ejemplos de adjunciones de diferente tipo; es nuestra intención ilustrar con esta selección amplia y diversa de ejemplos el eslogan de Mac Lane:

*The slogan is: "Adjoint functors arise everywhere".*

[15, p. v]

Introducimos luego las categorías cartesianas cerradas, que además de darnos otra familia de ejemplos de adjunciones, nos proveen del lenguaje necesario para probar que en las categorías de funtores los límites se calculan *puntualmente*. Cerramos el capítulo con una breve discusión sobre categorías monoidales cerradas.

Apenas dos años luego de la publicación del artículo [13] de Kan, Freyd demuestra los *teoremas del functor adjunto* en su tesis doctoral. Demostrando estos teoremas con contenido nuevo y no trivial, la teoría de categorías no es ya meramente un lenguaje.

*Another important step came when Peter Freyd, in his 1960 Princeton thesis, showed that there could be substantial theorems about categories by proving his Adjoint functor theorems, which gives [sic] conditions for the existence of adjoint functors.*

[16, pp. 345-346]

En el **tercer capítulo** demostramos los teoremas del functor adjunto de Freyd, llamados *general* y *especial*. Estos teoremas dan condiciones suficientes para que un functor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  sea un adjunto a derecha, a saber: que la categoría  $\mathcal{D}$  sea completa, que el functor  $G$  preserve límites, y una condición adicional. Para el teorema general, es la *condición del conjunto solución*; para el teorema especial, es la existencia de un *conjunto cogenerador* en la categoría  $\mathcal{D}$ .

Damos ejemplos de aplicaciones de los teoremas del functor adjunto. Usando el teorema general, demostramos la existencia de: objetos libres en categorías de álgebras (lo hacemos en la categoría de grupos, pero se puede probar en general); el producto libre de grupos; la *hausdorffificación* de un espacio topológico. Usando el teorema especial, demostramos la existencia de la *compactificación de Stone-Čech* de un espacio topológico, y los teoremas de Eilenberg-Watts que caracterizan los funtores hom y tensor en categorías de módulos.

# Capítulo 1

## Preliminares categóricos

### 1.1. Categorías

#### 1.1.1. Definiciones básicas

*It seems that no book on category theory is considered complete without some remarks on its set-theoretic foundations. The well-known set theorist Andreas Blass gave a talk [...] on the interaction between category theory and set theory in which, among other things, he offered three set-theoretic foundations for category theory. One was the universes of Grothendieck [...] and another was systematic use of the reflection principle, which probably does provide a complete solution to the problem; but his first suggestion, and one that he clearly thought at least reasonable, was: None. This is the point of view we shall adopt.*

[3, p. viii]

Trabajaremos sobre la teoría de conjuntos ZFC (Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección). Usaremos, sin embargo, la noción de *clase*, que en realidad sólo podemos tratar de manera formal. Una clase viene determinada por una fórmula  $\phi(x)$  cualquiera. Informalmente, pensamos que  $\phi(x)$  determina  $\{x : \phi(x)\}$ , que no es generalmente un conjunto (ver paradoja de Russell). Una *clase propia* es una clase que no es un conjunto. Así como se define una relación o una función entre conjuntos, se define una *clase relacional* o una *clase funcional* entre clases.

Para una descripción más precisa de una plataforma fundacional de la teoría de categorías, ver [11, Exposé I, §0 y apéndice] o [4, §6.4].



**Definición 1.1.1.** Una *categoría*  $\mathcal{C}$  consta de:

1. una clase  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  de *objetos*,
2. para cada par  $(A, B)$  de objetos, un conjunto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  de *flechas* o *morfismos*,<sup>1</sup>
3. para cada terna  $(A, B, C)$  de objetos, una función

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

llamada *composición*.

Escribiremos  $A \rightarrow B$  para un elemento arbitrario de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , y  $f : A \rightarrow B$  o aun  $A \xrightarrow{f} B$  si  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ . Designaremos por  $g \circ f$  o aun por  $gf$  a  $\circ(f, g)$ . Se deben cumplir las siguientes propiedades:

1. si  $A, A', B, B'$  son objetos tales que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B') \neq \emptyset$  entonces  $A = A'$  y  $B = B'$ ; esto es, cada flecha  $f : A \rightarrow B$  tiene un único *dominio*  $A$  y un único *codominio*  $B$ ,
2. para cada objeto  $A$  existe una flecha  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  llamada *identidad* de  $A$ . Estas flechas cumplen que si  $f : B \rightarrow C$ , entonces  $f \circ \text{id}_B = f = \text{id}_C \circ f$ ,
3. la composición es asociativa: si  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$  son flechas, entonces  $h(gf) = (hg)f$ . Esto nos permite designar esta flecha por  $hgf$ .<sup>2</sup>

La notación  $A \in \mathcal{C}$  significará  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

Los conjuntos  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  para  $A, B \in \mathcal{C}$  son los *hom-sets* de  $\mathcal{C}$ .

La *clase de flechas* de  $\mathcal{C}$  es  $\text{Arr}(\mathcal{C}) := \bigcup_{A, B \in \mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ .

**Definición 1.1.2.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Si  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  es un conjunto, la categoría  $\mathcal{C}$  se dice *pequeña*.

**Definición 1.1.3.** Una flecha  $f : A \rightarrow B$  en una categoría es un *isomorfismo* si existe  $g : B \rightarrow A$  tal que  $gf = \text{id}_A$  y  $fg = \text{id}_B$ . Si existe un isomorfismo  $A \rightarrow B$  decimos que  $A$  es *isomorfo* a  $B$  y escribimos  $A \simeq B$ .

*Observación 1.1.4.* 1. La composición de isomorfismos es un isomorfismo.

<sup>1</sup> Se puede definir "categoría" sin exigir que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  sea un *conjunto* para todo  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , y en ese caso una categoría que cumple que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  es un conjunto para todo  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  se dice *localmente pequeña*. En nuestro desarrollo consideraremos, pues, que toda categoría es localmente pequeña. <sup>2</sup> También podemos escribir sin ambigüedades una composición de más de tres flechas sin usar paréntesis. Ver [12, §1.4] para una demostración de que en un monoide vale la asociatividad generalizada. La misma prueba se adapta a este contexto, mutatis mutandis.

2. "Ser isomorfo a" establece una clase relacional de equivalencia en los objetos de una categoría.
3. Si  $f : A \rightarrow B$  es un isomorfismo y  $g, g' : B \rightarrow A$  cumplen que  $gf = \text{id}_A = g'f$  y  $fg = \text{id}_B = fg'$ , entonces  $g' = g$ . En efecto,

$$g' = g' \text{id}_B = g'fg = \text{id}_A g = g$$

Decimos entonces que  $g$  es la *inversa* de  $f$  y escribimos  $g = f^{-1}$ .

4. Si  $\mathcal{C}$  es una categoría pequeña, entonces su clase de flechas es un conjunto, pues es una unión de conjuntos indexada sobre un conjunto.

*Ejemplo 1.1.5.* 1. Una categoría es *discreta* si sus únicas flechas son identidades.

2. La categoría discreta **0**, que no consta de ningún objeto y de ninguna flecha.
3. La categoría discreta **1**, que consta de un único objeto  $\star$  con su identidad.
4. La categoría **2**, que consta de dos objetos  $\cdot, \star$ , y de una única flecha  $\cdot \rightarrow \star$  además de las dos identidades.
5. Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías. La *categoría producto*  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  tiene como objetos a los pares  $(C, D)$  donde  $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$ , y sus flechas  $(C, D) \rightarrow (C', D')$  son pares  $(f, g)$  donde  $f : C \rightarrow C'$  y  $g : D \rightarrow D'$  son flechas. La composición se define coordenada a coordenada. Considerando  $\text{id}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}} = (\text{id}_{\mathcal{C}}, \text{id}_{\mathcal{D}})$  es inmediato que  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  es una categoría.
6. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. La *categoría opuesta*  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  consta de los mismos objetos, pero cumple  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ , y la composición se define como  $f \circ_{\text{op}} g := g \circ f$  para todo  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  en  $\mathcal{C}$ . Considerando las mismas identidades en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  que en  $\mathcal{C}$ , es inmediato que  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  es una categoría.

Observar que  $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$ .

*Observación 1.1.6.* Dada una proposición  $\Sigma$  en el lenguaje de la teoría de categorías, uno puede formar la *proposición dual*  $\Sigma^*$  que se obtiene a partir de  $\Sigma$  intercambiando dominio y codominio de las flechas e invirtiendo el orden de las composiciones. No es difícil verificar (por inducción en la longitud de la fórmula) que si  $\Sigma$  se cumple en una categoría  $\mathcal{C}$ , entonces  $\Sigma^*$  se cumple en la categoría opuesta  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .

Si  $\Sigma$  se cumple en todas las categorías, entonces  $\Sigma^*$  también se cumple en todas las categorías, y su demostración es dual. En efecto, si  $\mathcal{C}$  es una categoría, entonces  $\Sigma$  se cumple en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ , de donde  $\Sigma^*$  se cumple en  $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$ .

Esto nos permite dar una única demostración para dos teoremas que son duales.

Remitimos al lector a [15, pp. 31-32] y a [2, pp. 47-49] para más detalles sobre la dualidad categórica.

**Definición 1.1.7.** Una categoría  $\mathcal{S}$  es una *subcategoría* de una categoría  $\mathcal{C}$  si:

1.  $\text{Ob}(\mathcal{S}) \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,
2.  $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  para todo  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ ,
3. Si  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B)$  y  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(B, C)$ , entonces  $g \circ_{\mathcal{C}} f \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, C)$  y cumple  $g \circ_{\mathcal{C}} f = g \circ_{\mathcal{S}} f$ .
4. Si  $A \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ , entonces  $\text{id}_A^{\mathcal{C}} \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, A)$  y cumple  $\text{id}_A^{\mathcal{C}} = \text{id}_A^{\mathcal{S}}$ .

Si  $\mathcal{S}$  es una subcategoría de  $\mathcal{C}$ , escribiremos  $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ .

Una subcategoría  $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$  es *plena* si para todo par de objetos  $A, B \in \mathcal{S}$  se tiene que  $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ . Observar que para definir una categoría como subcategoría plena de una categoría dada, basta con especificar su clase de objetos.

**Definición 1.1.8.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Un objeto  $A \in \mathcal{C}$  es *inicial* (resp. *final*) si para todo  $X \in \mathcal{C}$  existe una única flecha  $A \rightarrow X$  (resp.  $X \rightarrow A$ ). Un *objeto cero* es un objeto inicial y final.

*Observación 1.1.9.* Un objeto inicial en  $\mathcal{C}$  es un objeto final en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ , i.e. la noción dual de objeto inicial es la de objeto final. En particular un objeto cero en  $\mathcal{C}$  es también un objeto cero en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .

**Proposición 1.1.10.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Si existe un objeto inicial (o final) en  $\mathcal{C}$  entonces es único a menos de un único isomorfismo. En particular si existe un objeto cero entonces es único a menos de un único isomorfismo.

*Demostración.* Sean  $A, A' \in \mathcal{C}$  objetos iniciales en  $\mathcal{C}$ .

Como  $A$  es inicial, existe un único morfismo  $A \xrightarrow{f} A'$ . Basta ver que  $f$  es un isomorfismo.

Como  $A'$  es inicial, existe un único morfismo  $A' \xrightarrow{g} A$ .

Por lo tanto  $gf \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) \ni \text{id}_A$ : al ser  $A$  inicial debe ser entonces  $gf = \text{id}_A$ . Análogamente se prueba  $fg = \text{id}_{A'}$ , y por lo tanto  $f$  es un isomorfismo.

Esto prueba la unicidad a menos de un único isomorfismo del objeto inicial en cualquier categoría. La unicidad del objeto final se deduce de la unicidad del objeto inicial en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .  $\square$

## 1.1.2. Ejemplos

*Ejemplo 1.1.11.* Categorías de estructuras: los siguientes ejemplos son categorías cuyos objetos son conjuntos con estructura adicional, y cuyas flechas son funciones que respetan esta estructura.

1. **Set**, la categoría cuyos objetos son los conjuntos y cuyas flechas son las funciones. Hay un único objeto inicial que es el conjunto vacío  $\emptyset$ . Los objetos finales son exactamente los conjuntos unitarios  $\{x\}$ . En particular, no hay objeto cero en **Set**.
2. **Mon**, **Grp**, **Ab**: las categorías de monoides, grupos y grupos abelianos con morfismos de monoides<sup>3</sup>, grupos y grupos abelianos respectivamente. Observar que tenemos una cadena de subcategorías plenas  $\mathbf{Ab} \subset \mathbf{Grp} \subset \mathbf{Mon}$ . En **Mon**, los objetos iniciales y finales (y por lo tanto cero) son los monoides triviales  $\{e\}$ . Por lo tanto también en **Grp** y en **Ab**.
3. **Rng**, la categoría de anillos (no necesariamente con unidad) y morfismos de anillos. Los objetos iniciales y finales (y por lo tanto cero) son los anillos triviales  $\{0\}$ .
4. **Ring**, la categoría de anillos con unidad y morfismos de anillos que respetan la unidad. Observar que  $\mathbf{Ring} \subset \mathbf{Rng}$  es una subcategoría no plena. Los objetos finales son los anillos triviales  $\{0\}$ , donde  $1 = 0$ . No son objetos iniciales pues el cero debe ir al cero y el uno al uno. El anillo  $\mathbb{Z}$  es un objeto inicial.
5. **CRing**, la categoría de anillos conmutativos con unidad y morfismos de anillos que respetan la unidad. Es una subcategoría plena de **Ring**.
6. **Fld**, la categoría de cuerpos y morfismos de cuerpos. Es una subcategoría plena de **CRing**. No hay objetos iniciales ni finales. En efecto, no hay morfismos entre cuerpos de diferente característica.
7. **R-Mod** (resp. **Mod-R**), la categoría de módulos unitarios a izquierda (resp. derecha) sobre un anillo  $R$  con unidad y morfismos de  $R$ -módulos.<sup>4</sup> Si  $A, B \in \mathbf{R-Mod}$  (o en **Mod-R**), designaremos por  $\text{Hom}_R(A, B)$  a  $\text{Hom}_{\mathbf{R-Mod}}(A, B)$ .  
Los objetos iniciales, finales y cero son los módulos nulos.
8. Si  $\mathbb{K}$  es un cuerpo, la categoría  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$  es la categoría  $\mathbb{K}\text{-Mod}$  de  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales con las transformaciones lineales. Escribiremos  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}, \text{fin}}$  para la subcategoría plena de  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$  cuyos objetos son los  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales de dimensión finita.

<sup>3</sup> Un *monoide* es un conjunto con una operación binaria asociativa que admite un neutro; un *morfismo de monoides* es una función entre monoides que respeta la operación y el neutro. <sup>4</sup> A partir de ahora, un *anillo* será un anillo con unidad, y un *módulo* será un módulo unitario.

9. Sean  $R, S$  anillos. Recordemos que un  $(R, S)$ -bimódulo es un grupo abeliano  $M$  con una acción de  $R$  por izquierda y una acción de  $S$  por derecha, de tal forma que  $M$  es un  $R$ -módulo a izquierda y de  $S$ -módulo a derecha, y además se satisface la condición de compatibilidad  $r \cdot (m \cdot s) = (r \cdot m) \cdot s$ , para todo  $m \in M, r \in R, s \in S$ . Si  $M, N$  son  $(R, S)$ -bimódulos, entonces una función  $f : M \rightarrow N$  es un *morfismo de  $(R, S)$ -bimódulos* si es un morfismo de  $R$ -módulos a izquierda y un morfismo de  $S$ -módulos a derecha.

De esta manera, los  $(R, S)$ -bimódulos con los morfismos de bimódulos forman una categoría, que llamaremos **R-Mod-S**. Si  $A, B \in \mathbf{R-Mod-S}$ , designaremos por  $\text{Hom}_{(R,S)}(A, B)$  a  $\text{Hom}_{\mathbf{R-Mod-S}}(A, B)$

Si  $R$  es un anillo conmutativo, entonces todo  $R$ -módulo a izquierda o a derecha es automáticamente un  $(R, R)$ -bimódulo.

Si  $M \in \mathbf{R-Mod}$  (resp.  $M \in \mathbf{Mod-R}$ ), entonces  $M$  es un  $(R, \mathbb{Z})$ -bimódulo (resp.  $(\mathbb{Z}, R)$ -bimódulo).

Si  $R, S$  son anillos, entonces  $R \otimes_{\mathbb{Z}} S^{\text{op}}$  es también un anillo ( $S^{\text{op}}$  es el *anillo opuesto*, con misma suma que  $S$  y multiplicación dada por  $x \cdot_{\text{op}} y := y \cdot x$ ). No es difícil probar que todo  $(R, S)$ -bimódulo define un  $R \otimes_{\mathbb{Z}} S^{\text{op}}$ -módulo y recíprocamente. En particular, se recuperan los teoremas de **R-Mod** en **R-Mod-S**.

10. Si  $\mathbb{K}$  es un anillo conmutativo, la categoría  **$\mathbb{K}$ -Alg** tiene como objetos a las  $\mathbb{K}$ -álgebras (asociativas con unidad), y como flechas a los morfismos de  $\mathbb{K}$ -álgebras. Recordemos que una  $\mathbb{K}$ -álgebra (asociativa con unidad) es un grupo abeliano  $A$  con un producto que lo convierte en un anillo y una acción de  $\mathbb{K}$  que lo convierte en un  $\mathbb{K}$ -módulo, y además se cumple  $\lambda \cdot (xy) = (\lambda \cdot x)y = x(\lambda \cdot y)$  para todo  $x, y \in A, \lambda \in \mathbb{K}$ . Es *conmutativa* si lo es como anillo.

Un *morfismo de  $\mathbb{K}$ -álgebras*  $A_1 \rightarrow A_2$  es una función que es un morfismo de  $\mathbb{K}$ -módulos y un morfismo de anillos.

No es difícil probar que si  $A$  es un anillo, entonces dotarlo de una estructura de  $\mathbb{K}$ -álgebra es lo mismo que determinar un morfismo de anillos  $f : \mathbb{K} \rightarrow A$  tal que la imagen de  $f$  esté contenida en el centro de  $A$ . De esta manera, si  $A$  es un anillo conmutativo, dotarlo de una estructura de  $\mathbb{K}$ -álgebra (conmutativa) es lo mismo que determinar un morfismo de anillos  $\mathbb{K} \rightarrow A$ .

11. Un *preorden* es un conjunto con una relación binaria  $\leq$  que es reflexiva y transitiva. Si  $(A, \leq_A)$  y  $(B, \leq_B)$  son preórdenes, una función  $f : A \rightarrow B$  es *monótona* si

$$a \leq_A a' \Rightarrow f(a) \leq_B f(a')$$

para todo  $a, a' \in A$ . Definimos entonces **Preord**, la categoría cuyos objetos son los preórdenes y cuyas flechas son las funciones monótonas.

12. **Top**, la categoría de espacios topológicos y funciones continuas.
13. En los casos anteriores, resulta más o menos evidente qué morfismos nos interesa considerar si tenemos una clase que queremos que sea la clase de objetos de una categoría. Por ejemplo, si consideramos la clase de los grupos, para considerar una categoría cuyos objetos son los grupos, la opción más natural es considerar los morfismos de grupos como sus flechas.

Sin embargo, en algunos casos no hay una única opción natural. Consideremos los espacios métricos. Como morfismos, podemos considerar:

- las contracciones débiles: una *contracción débil*  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  entre dos espacios métricos es una función  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $d'(f(a), f(b)) \leq d(a, b)$  para todo  $a, b \in X$ , dando lugar a la categoría **Met**,
- las funciones uniformemente continuas, dando lugar a la categoría **Met<sub>u</sub>**,
- las funciones continuas, dando lugar a la categoría **Met<sub>c</sub>**,

obteniendo tres categorías diferentes  $\mathbf{Met} \subset \mathbf{Met}_u \subset \mathbf{Met}_c$  con la misma clase de objetos.

Este ejemplo de ciertas categorías con misma clase de objetos pero diferentes morfismos es un caso particular del ejemplo dado por una subcategoría  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  no plena. Sin embargo también hay ejemplos de categorías con misma clase de objetos pero de tal manera que ninguna es una subcategoría de la otra: por ejemplo, **Top** y la categoría cuyos objetos son espacios topológicos y cuyas flechas son las funciones abiertas. Como hay funciones continuas no abiertas y funciones abiertas no continuas, no es ninguna una subcategoría de la otra.

Podemos observar el mismo fenómeno pero partiendo de un cierto tipo de flechas. Si consideramos las funciones continuas, podemos determinar al menos dos categorías diferentes cuyas flechas son tales funciones: **Top** y **Met<sub>c</sub>**. Este ejemplo es un caso particular del ejemplo dado por una subcategoría plena  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ . De nuevo, también hay ejemplos de categorías cuyas flechas son del mismo tipo pero tal que ninguna es una subcategoría de la otra: por ejemplo, **Grp** y la categoría cuyos objetos son los monoides conmutativos y cuyas flechas son los morfismos de monoides.

*Ejemplo 1.1.12.* Categorías como estructuras: los siguientes ejemplos son de categorías que son estructuras.

1. Sea  $(X, \leq)$  un preorden. Le asociamos una categoría  $\mathcal{C}_X$  tal que  $\text{Ob}(\mathcal{C}_X) = X$ , y tal que para todo  $x, y \in X$ , se tiene que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_X}(x, y)$  es vacío si  $x \not\leq y$  y tiene cardinal uno si  $x \leq y$ . La reflexividad y transitividad de  $\leq$  aseguran que  $\mathcal{C}_X$  es una categoría.

Recíprocamente, una categoría cuyos hom-sets tienen cardinal cero o uno define un preorden. Identificaremos  $(X, \leq)$  con  $\mathcal{C}_X$ .

2. Sea  $M$  un monoide. Entonces  $M$  define una categoría  $\mathcal{C}_M$  con un solo objeto  $\star$ , tal que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_M}(\star, \star) = M$  y la composición de flechas es el producto de  $M$ . La identidad es el neutro de  $M$ .

Recíprocamente, una categoría  $\mathcal{C}$  con un solo objeto define un monoide  $M_{\mathcal{C}}$  cuyos elementos son las flechas de  $\mathcal{C}$  y cuya multiplicación es la composición de flechas. El neutro es la identidad del único objeto de  $\mathcal{C}$ . Identificaremos  $M$  con  $\mathcal{C}_M$ .

En conclusión, especificar un monoide es lo mismo que especificar una categoría con un solo objeto. En particular, especificar un grupo es lo mismo que especificar una categoría con un solo objeto donde todas las flechas son isomorfismos.

3. En una categoría arbitraria  $\mathcal{C}$ , para cada objeto  $C \in \mathcal{C}$  se tiene un monoide  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C)$ . De esta manera, una categoría en la que todo par  $A, B \in \mathcal{C}$  cumple que si  $A \neq B$  entonces  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \emptyset$  define una clase de monoides  $\{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C)\}_{C \in \mathcal{C}}$  indexada por los objetos de  $\mathcal{C}$ . Recíprocamente, cualquier clase de monoides  $\{M_i\}_{i \in I}$  define una categoría  $\mathcal{C}$  tal que  $\text{Ob}(\mathcal{C}) = I$ , y  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(i, j) = \begin{cases} M_i & \text{si } i = j \\ \emptyset & \text{si } i \neq j \end{cases}$  para todo  $i, j \in I$ .

Por lo tanto, podemos considerar que una categoría es una generalización de una clase de monoides (y en particular de un monoide), donde permitimos que haya flechas  $A \rightarrow B$  incluso cuando  $A \neq B$ .

Otra manera de ver una categoría  $\mathcal{C}$  como una generalización de un monoide resulta de observar que podemos dotar a  $\text{Arr}(\mathcal{C})$  de una clase funcional parcial<sup>5</sup>, la composición, que satisface los mismos axiomas que los del producto de un monoide.

El lector comparará estos tres ejemplos con las categorías **Mon**, **Grp** y **Preord**.

### 1.1.3. Monomorfismos y epimorfismos

**Definición 1.1.13.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Una flecha  $m : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$  es un *monomorfismo* si para todo  $X \in \mathcal{C}$  y  $f, g : X \rightarrow A$  flechas de  $\mathcal{C}$  se tiene que  $mf = mg \Rightarrow f = g$ .

<sup>5</sup> Una *función parcial*  $f : A \rightarrow B$  se define análogamente a una función, permitiendo sin embargo que apenas un *subconjunto* de elementos de  $A$  tenga imagen por  $f$ .

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} A \xrightarrow{m} B$$

Dualmente, una flecha  $e : A \rightarrow B$  es un *epimorfismo* si para todo  $Y \in \mathcal{C}$  y  $f, g : B \rightarrow Y$  flechas de  $\mathcal{C}$  se tiene que  $fe = ge \Rightarrow f = g$

$$A \xrightarrow{e} B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

*Observación 1.1.14.* Las siguientes propiedades se verifican fácilmente:

- La composición de monomorfismos (resp. epimorfismos) es un monomorfismo (resp. epimorfismo).
- Si  $fg$  es un monomorfismo, entonces  $g$  es un monomorfismo.
- Si  $fg$  es un epimorfismo, entonces  $f$  es un epimorfismo.

*Ejemplo 1.1.15.* 1. Los monomorfismos en **Set** son las funciones inyectivas.

En efecto: sea  $m : X \rightarrow Y$  un monomorfismo en **Set**. Sea  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \neq x_2$ . Sea  $\{a\}$  un conjunto unitario, y definamos  $f_i : \{a\} \rightarrow X$  como  $f_i(a) = x_i$  para  $i = 1, 2$ . Entonces  $f_1 \neq f_2$ , y por lo tanto  $mf_1 \neq mf_2$ , lo cual implica que  $m(x_1) \neq m(x_2)$ , luego  $m$  es inyectiva.

Recíprocamente, si  $m : X \rightarrow Y$  es inyectiva y  $f, g : A \rightarrow X$  son tales que  $f \neq g$ , entonces  $f(a) \neq g(a)$  para cierto  $a \in A$ . Por lo tanto  $mf(a) \neq mg(a)$ , de donde  $mf \neq mg$ .

Los epimorfismos en **Set** son las funciones sobreyectivas.

En efecto: sea  $e : X \rightarrow Y$  un epimorfismo en **Set**. Supongamos que existe  $y_0 \in Y \setminus e(X)$ . Definimos  $f, g : Y \rightarrow \{0, 1\}$  como  $f(y) = g(y) = 0$  para todo  $y \neq y_0$ , y  $f(y_0) = 0$ ,  $g(y_0) = 1$ . Entonces  $fe = ge$  pero  $f \neq g$ , llegando a una contradicción. Por lo tanto  $e$  es sobreyectiva.

Recíprocamente, sea  $e : X \rightarrow Y$  sobreyectiva y sean  $f, g : Y \rightarrow Z$  tales que  $fe = ge$ . Si  $y \in Y$ , entonces  $y = e(x)$  para cierto  $x \in X$ , y por lo tanto

$$f(y) = f(e(x)) = g(e(x)) = g(y)$$

de donde  $f = g$  y  $e$  es un epimorfismo. <sup>6</sup>

<sup>6</sup> Todos los ejemplos que siguen (a menos del último) son en categorías *concretas* (ver definición 1.2.5). Remitimos al lector a la proposición 1.2.6, donde se prueba que en categorías concretas todo "morfismo inyectivo" (resp. sobreyectivo) es un monomorfismo (resp. epimorfismo).



2. En **Top** los monomorfismos son las funciones continuas inyectivas y los epimorfismos son las funciones continuas sobreyectivas. Esto se prueba de manera análoga al caso de **Set**, donde en  $\{a\}$  la topología es discreta y en  $\{0, 1\}$  la topología es indiscreta.
3. En **R-Mod** los monomorfismos son los morfismos inyectivos y los epimorfismos son los morfismos sobreyectivos.

El argumento es similar al de **Set**. Para probar que un monomorfismo es un morfismo inyectivo, tomamos  $R$  con la acción regular en vez de  $\{a\}$ . Para probar que un epimorfismo  $e : M \rightarrow N$  es un morfismo sobreyectivo, en vez de  $\{0, 1\}$  tomamos el cociente  $N/e(M)$  junto con el mapa cociente y el mapa nulo.

4. En **Grp** los monomorfismos son los morfismos de grupos inyectivos. Esto se prueba con un argumento análogo al de **R-Mod**, reemplazando  $R$  por  $\mathbb{Z}$ .

También es cierto que los epimorfismos de grupos son los morfismos de grupos sobreyectivos, pero la demostración de este hecho no es trivial (ver [15, ejercicio 5, p. 21]).

5. En **Ring** los monomorfismos son los morfismos inyectivos de anillos. El argumento es análogo al de **Grp**.

Los epimorfismos pueden no ser sobreyectivos: la inclusión  $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  es un epimorfismo de anillos. En efecto, si  $f, g : \mathbb{Q} \rightarrow R$  son morfismos de anillos tales que  $f|_{\mathbb{Z}} = g|_{\mathbb{Z}}$ , entonces  $f(\frac{a}{b}) = f(a)f(b)^{-1} = g(a)g(b)^{-1} = g(\frac{a}{b})$  para todo  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ , de donde  $f = g$ .

6. Sea **Haus** la subcategoría plena de **Top** cuyos objetos son los espacios topológicos Hausdorff. Si  $X$  es un espacio topológico Hausdorff y  $D \subset X$  es un subespacio denso, entonces la inclusión  $D \rightarrow X$  es un epimorfismo en **Haus**, pues si  $Y$  es un espacio topológico Hausdorff y  $f, g : X \rightarrow Y$  son funciones continuas tales que  $f|_D = g|_D$  entonces  $f = g$ . En general no es sobreyectiva, como muestra por ejemplo la inclusión de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$  con la topología usual.

7. Sea **Div** la subcategoría plena de **Ab** cuyos objetos son los grupos abelianos divisibles<sup>7</sup>. El mapa cociente  $\pi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  no es una función inyectiva, y es un monomorfismo. En efecto,  $\pi$  es un monomorfismo si y sólo si  $\pi g = 0 \Rightarrow g = 0$  para todo  $g : G \rightarrow \mathbb{Q}$  donde  $G$  es un grupo abeliano divisible. Sea entonces  $g : G \rightarrow \mathbb{Q}$  tal que  $\pi g = 0$ . Esto significa que  $g(x) \in \mathbb{Z}$  para todo  $x \in G$ . Sea  $x \in G$ , y supongamos sin pérdida de generalidad que  $g(x) \geq 0$ . Como  $G$  es divisible, existe  $y \in G$  tal que  $x = (g(x) + 1)y$ ,

<sup>7</sup> Un grupo abeliano  $A$  es *divisible* si para cada  $a \in A$  y  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  existe  $b \in A$  tal que  $a = nb$ .

y por lo tanto  $g(x) = (g(x) + 1)g(y)$ . Por lo tanto  $0 \leq \frac{g(x)}{g(x)+1} = g(y) < 1$ . Pero  $g(y) \in \mathbb{Z}$ , luego  $g(y) = 0$  y por lo tanto  $g(x) = 0$ . Esto prueba que  $g = 0$ .

8. Si  $\mathcal{C}$  es un preorden, entonces toda flecha  $x \leq y$  es un monomorfismo y un epimorfismo. Observar que no tiene por qué ser un isomorfismo (i.e. no tiene por qué ser  $y \leq x$ ).

*Observación 1.1.16.* Si  $i : A \rightarrow B$  es un isomorfismo, entonces es un monomorfismo y un epimorfismo. En efecto, si  $j : B \rightarrow A$  es su inversa, entonces  $if = ig \Rightarrow jif = jig \Rightarrow f = g$ . Por lo tanto  $i$  es un monomorfismo, y análogamente es un epimorfismo.

El ejemplo 1.1.15.8 muestra que el recíproco es en general falso.

**Definición 1.1.17.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $f : A \rightarrow B$  una flecha de  $\mathcal{C}$ . Si existe  $g : B \rightarrow A$  tal que  $gf = \text{id}_A$ , decimos que  $f$  es un *monomorfismo split*. Si existe  $g : B \rightarrow A$  tal que  $fg = \text{id}_B$ , decimos que  $f$  es un *epimorfismo split*.

Observar que  $f$  es un monomorfismo split en  $\mathcal{C}$  si y sólo si  $f$  es un epimorfismo split en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .

*Observación 1.1.18.* Veamos que en la condición de monomorfismo y epimorfismo split podemos remplazar la identidad por una flecha arbitraria:

Si  $f : A \rightarrow B$  es una flecha de  $\mathcal{C}$ , entonces  $f$  es un monomorfismo split si y sólo si para todo  $Y \in \mathcal{C}$  y flecha  $q : A \rightarrow Y$  existe  $g : B \rightarrow Y$  tal que  $gf = q$ .

En efecto, sea  $f$  un monomorfismo split. Sea  $h : B \rightarrow A$  tal que  $hf = \text{id}_A$ . Entonces si  $g = qh$ , se tiene  $gf = qhf = q\text{id}_A = q$ .

Recíprocamente, tomando  $Y = A$  y  $q = \text{id}_A$  se deduce que  $f$  es un monomorfismo split.

Dualmente,  $f$  es un epimorfismo split si y sólo si para todo  $X \in \mathcal{C}$  y flecha  $q : X \rightarrow B$  existe  $g : X \rightarrow A$  tal que  $fg = q$ .

**Proposición 1.1.19.** Si  $f : A \rightarrow B$  es un monomorfismo split, entonces es un monomorfismo. Dualmente, si es un epimorfismo split, entonces es un epimorfismo.

*Demostración.* Sea  $f : A \rightarrow B$  un monomorfismo split. Existe entonces  $g : B \rightarrow A$  tal que  $gf = \text{id}_A$ . Si  $h_1, h_2 : X \rightarrow A$  son tales que  $fh_1 = fh_2$ , entonces  $h_1 = gfh_1 = gfh_2 = h_2$  y por lo tanto  $f$  es un monomorfismo.  $\square$

*Ejemplo 1.1.20.* ■ En **Set**, los monomorfismos split (resp. epimorfismos split) son las funciones con inversa por izquierda (resp. derecha). Por lo tanto, en **Set** los monomorfismos split (resp. epimorfismos split) coinciden con los monomorfismos (resp. epimorfismos).<sup>8</sup>

<sup>8</sup> El enunciado “todo epimorfismo en **Set** es un epimorfismo split” es equivalente al axioma de elección.

- En **R-Mod**, no todo monomorfismo es un monomorfismo split, como evidencia la inclusión  $2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Tampoco todo epimorfismo es un epimorfismo split, como evidencia el mapa cociente  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Proposición 1.1.21.** *Sea  $f : A \rightarrow B$ . Si  $f$  es un epimorfismo split y un monomorfismo, entonces es un isomorfismo. Dualmente, si  $f$  es un monomorfismo split y un epimorfismo entonces es un isomorfismo.*

*Demostración.* Sea  $f$  un monomorfismo, y sea  $g : B \rightarrow A$  tal que  $fg = \text{id}_B$ . Se tiene  $f g f = f$ , y como  $f$  es un monomorfismo se deduce que  $g f = \text{id}_A$ . Por lo tanto  $f$  es un isomorfismo cuya inversa es  $g$ . □

## 1.2. Funtores

**Definición 1.2.1.** Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorías. Un *functor* (o *functor covariante*) de  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{D}$  consta de una clase funcional  $F_o : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ , y para cada par de objetos  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  una función  $F_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_o(A), F_o(B))$ . Designaremos a  $F_o$  y a  $F_{A,B}$  por  $F$ . Debe cumplirse:

1. si  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  entonces  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ ,
2. si  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  son flechas en  $\mathcal{C}$ , entonces  $F(gf) = F(g)F(f)$ .

Omitiremos a menudo los paréntesis: escribiremos  $FA$  en vez de  $F(A)$ , y  $Ff$  en vez de  $F(f)$ .

Un *functor contravariante*  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$  (o equivalentemente, un functor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ ).

Explícitamente, un functor contravariante  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  consta de una clase funcional  $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ , y para cada par de objetos  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  una función  $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FB, FA)$ . Se debe cumplir  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{FA}$  para cada  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , y si  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  son flechas en  $\mathcal{C}$ , entonces  $F(gf) = F(f)F(g)$ .

Remitimos al lector al ejemplo 1.2.14 para una interpretación diagramática de la segunda condición de la definición de functor (tanto del caso covariante como del contravariante).

Sean  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  y  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  funtores. Se define su *composición*  $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ , de la siguiente manera. Si  $A \in \mathcal{A}$ , entonces  $(GF)(A) := G(F(A))$ . Si  $f : A \rightarrow A'$  es una flecha de  $\mathcal{A}$ , entonces  $(GF)(f) : GF(A) \rightarrow GF(A')$  se define como  $(GF)(f) := G(F(f))$ . Se verifica inmediatamente que  $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  es un functor.

**Definición 1.2.2.** Un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es *fiel* (resp. *pleno*) si para todo  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , la función  $F_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$  es inyectiva (resp. sobreyectiva).

**Proposición 1.2.3.** 1. *Todo functor preserva isomorfismos. Esto es, si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor y  $f : C \rightarrow C'$  es un isomorfismo en  $\mathcal{C}$ , entonces  $Ff$  es un isomorfismo en  $\mathcal{D}$ . Además,  $(Ff)^{-1} = F(f^{-1})$*

2. *Si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor fiel, entonces refleja monomorfismos y epimorfismos. Esto es, si  $f$  es una flecha de  $\mathcal{C}$  tal que  $Ff$  es un monomorfismo (resp. epimorfismo), entonces  $f$  es un monomorfismo (resp. epimorfismo).*

3. *Si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor fiel y pleno, entonces refleja isomorfismos. Esto es, si  $f$  es una flecha de  $\mathcal{C}$  tal que  $Ff$  es un isomorfismo, entonces  $f$  es un isomorfismo.*

*Demostración.* 1. Si existe  $g : C' \rightarrow C$  tal que  $gf = \text{id}_C$  y  $fg = \text{id}_{C'}$ , entonces  $Fg \circ Ff = F(gf) = F(\text{id}_C) = \text{id}_{FC}$ . Análogamente se verifica que  $Ff \circ Fg = \text{id}_{FC'}$ . Por lo tanto  $Fg = F(f^{-1})$  es la inversa de  $Ff$ .

2. Sea  $f$  una flecha de  $\mathcal{C}$ . Supongamos que  $fg = fh$ . Entonces  $Ff \circ Fg = Ff \circ Fh$ . Como  $Ff$  es un monomorfismo, entonces  $Fg = Fh$ . Como  $F$  es fiel, se deduce que  $g = h$ . Análogamente se prueba que si  $Ff$  es un epimorfismo entonces  $f$  también lo es.

3. Sea  $f : C \rightarrow C'$  flecha de  $\mathcal{C}$  tal que  $Ff : FC \rightarrow FC'$  es un isomorfismo. Como  $F$  es pleno, existe  $g : C' \rightarrow C$  tal que  $(Ff)^{-1} = Fg$ . Entonces

$$F(\text{id}_C) = \text{id}_{FC} = Fg \circ Ff = F(gf)$$

Como  $F$  es fiel, se deduce que  $\text{id}_C = gf$ . Análogamente  $fg = \text{id}_{C'}$ , de donde  $f$  es un isomorfismo.  $\square$

*Ejemplo 1.2.4.* 1. Toda categoría  $\mathcal{C}$  define un functor  $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , llamado *functor identidad*, que a cada objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  le asocia  $A$ , y a cada flecha  $f$  de  $\mathcal{C}$  le asocia  $f$ .

2. Sea  $D \in \mathcal{D}$ . Un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un *functor constante*  $D$  si  $FC = D$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ , y  $Ff = \text{id}_D$  para toda flecha  $f$  de  $\mathcal{C}$ .

3. Una subcategoría  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$  define un functor  $i : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , el *functor inclusión*. Este functor siempre es fiel. Es pleno si y sólo si  $\mathcal{C}$  es una subcategoría plena de  $\mathcal{D}$ .

Todo functor fiel  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  define una subcategoría  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{D}$  cuya clase de objetos es

$$\text{Ob}(\mathcal{S}) = \{FC \in \mathcal{D} : C \in \mathcal{C}\}$$

y cuyos hom-sets son

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}}(FC, FC') = \{Ff \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, FC') : f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')\}$$

La fidelidad de  $F$  muestra que la composición en  $\mathcal{S}$  puede definirse mediante  $Ff \circ Fg := F(fg)$ . Definimos la identidad del objeto  $FC$  en la categoría  $\mathcal{S}$  como la flecha  $\text{id}_{FC}$  de  $\mathcal{D}$ .

Por lo tanto  $\mathcal{S}$  es una subcategoría de  $\mathcal{D}$ .

De esta manera, se identifican las subcategorías de una categoría  $\mathcal{C}$  con los funtores fieles hacia  $\mathcal{C}$ .

4. Si  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$  es un functor y  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$  es una subcategoría, entonces la *restricción de  $F$  a  $\mathcal{C}$*  es el functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  definido igual que  $F$  en los objetos y flechas de  $\mathcal{C}$ .

El functor inclusión  $i : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es la restricción del functor identidad  $\text{id}_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  a la subcategoría  $\mathcal{C}$ .

5. Sean  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  y  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtores. El *functor producto* es

$$F \times G : \mathcal{A} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{D}$$

definido como  $(F \times G)(A, B) = (FA, GB)$  en los objetos, y en las flechas como  $(F \times G)(f, g) = (Ff, Gg)$ . Se verifica inmediatamente que  $F \times G$  es un functor.

6. Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  preórdenes. Un functor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  define una función monótona  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ : si  $x \leq y$  en  $\mathcal{C}$ , entonces hay una flecha  $x \rightarrow y$  y por lo tanto una flecha  $Fx \rightarrow Fy$  en  $\mathcal{D}$ , es decir,  $Fx \leq Fy$ . Recíprocamente, una función monótona  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor: las condiciones de la definición de functor se verifican por la reflexividad y la transitividad de los preórdenes.

7. Sean  $M, N$  monoides. Recordemos que podemos pensar un monoide como una categoría con un solo objeto (ejemplo 1.1.12.2). De esta manera, especificar un functor  $M \rightarrow N$  es equivalente con especificar un morfismo de monoides  $M \rightarrow N$ .

8. **Cat** es la categoría cuyos objetos son las categorías pequeñas y cuyas flechas son los funtores. La pequeñez de los objetos de **Cat** garantiza que **Cat** sea localmente pequeña. Sus identidades son los funtores identidad, y la composición es la composición de funtores.

Observar que **Cat** no es una categoría pequeña (por ejemplo, hay categorías discretas de cardinal arbitrario), luego **Cat**  $\notin$  **Cat**.<sup>9</sup>

9. Todo functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tiene asociado un functor  $F^{\text{op}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ , su *functor opuesto*.

De esta manera, considerando categorías pequeñas obtenemos un functor covariante  $\text{op} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Cat}$ .

10. Hay un functor  $\text{Ob} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}$ , que a toda categoría pequeña le asocia su conjunto de objetos, y a todo functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre categorías pequeñas le asocia la función

<sup>9</sup> No existe la "categoría de todas las categorías". Si existiera, llegaríamos a una contradicción similar a la paradoja de Russell. En efecto, si **CAT** fuera la categoría de todas las categorías, entonces podríamos considerar la subcategoría plena  $\mathcal{X} \subset \mathbf{CAT}$  cuyos objetos fueran las categorías  $\mathcal{C}$  tales que  $\text{Ob}(\mathcal{C}) \notin \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Por lo tanto  $\text{Ob}(\mathcal{X}) \in \text{Ob}(\mathcal{X})$  si y sólo si  $\text{Ob}(\mathcal{X}) \notin \text{Ob}(\mathcal{X})$ , llegando a una contradicción.

$F_o : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ . Este es el functor que “olvida” las flechas de una categoría pequeña.

**Definición 1.2.5.** Una *categoría concreta* es un par  $(\mathcal{C}, U)$  donde  $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  es un functor fiel, llamado *functor de olvido*.

Una categoría concreta puede pensarse como una categoría de “conjuntos con estructura adicional”. Todos los ítems del ejemplo 1.1.11 admiten funtores de olvido que a cada objeto (monoide, grupo, espacio topológico, etc.) le asocian su conjunto subyacente, y a cada morfismo (de monoides, de grupos, de espacios topológicos, etc.) le asocian su función subyacente.

La siguiente proposición dice que en una categoría concreta, los “morfismos inyectivos” (i.e. tal que su imagen por el functor de olvido es una función inyectiva) son monomorfismos, y análogamente para epimorfismos. El recíproco es falso, como se pudo apreciar en los ítems 5, 6 y 7 del ejemplo 1.1.15.

**Proposición 1.2.6.** Sea  $(\mathcal{C}, U)$  una categoría concreta. Si  $f$  es una flecha de  $\mathcal{C}$  tal que  $Uf$  es inyectiva (resp. sobreyectiva), entonces  $f$  es un monomorfismo (resp. epimorfismo).

*Demostración.* Basta aplicar la proposición 1.2.3.2, y recordar que los monomorfismos (resp. epimorfismos) en  $\mathbf{Set}$  son las funciones inyectivas (resp. sobreyectivas), como indica el ejemplo 1.1.15.1.  $\square$

**Definición 1.2.7.** Un *isomorfismo de categorías* es un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que existe un functor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  de manera que  $GF = \text{id}_{\mathcal{C}}$  y  $FG = \text{id}_{\mathcal{D}}$ . Diremos que  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son *isomorfas* si existe un isomorfismo de categorías  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

*Observación 1.2.8.* Si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son categorías pequeñas, un isomorfismo de categorías  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un isomorfismo entre los objetos  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  de la categoría  $\mathbf{Cat}$ .

*Ejemplo 1.2.9.* Las categorías  $\mathbf{R-Mod-S}$  y  $(R \otimes_{\mathbb{Z}} S^{\text{op}})\text{-Mod}$  son isomorfas (ver ejemplo 1.1.11.9).

## 1.2.1. Diagramas

**Definición 1.2.10.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $J$  una categoría pequeña. Un *diagrama de tipo  $J$*  en  $\mathcal{C}$  es un functor  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ . La categoría  $J$  es la *categoría de índices* del diagrama. Utilizaremos la notación  $D_i := D(i)$  para todo  $i \in J$ .

Decimos que un diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  es *conmutativo*, o que *conmuta*, si para todo par  $\alpha, \beta$  de flechas en  $J$  con mismo dominio y codominio se tiene que  $D\alpha = D\beta$ .

*Observación 1.2.11.* Sea  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  un diagrama de tipo  $J$  en una categoría  $\mathcal{C}$ , y sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un functor. Entonces  $FD : J \rightarrow \mathcal{D}$  es un diagrama de tipo  $J$  en  $\mathcal{D}$ .

Si  $D$  es conmutativo, entonces  $FD$  también lo es. En efecto, si  $\alpha, \beta$  son flechas de  $J$  con mismo dominio y codominio, entonces  $D(\alpha) = D(\beta)$  y por lo tanto se tiene que  $FD(\alpha) = F(D\alpha) = F(D(\beta)) = FD(\beta)$ .

*Ejemplo 1.2.12.* Consideremos el conjunto  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  con la relación  $\leq$  definida por  $1 \leq 2, 2 \leq 4, 1 \leq 4, 1 \leq 3$  y  $3 \leq 4$ , de tal manera que  $(X, \leq)$  es un preorden.

La categoría asociada (como en el ejemplo 1.1.12.1) se puede representar así:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3 & \longrightarrow & 4 \end{array} \quad (1.1)$$

donde obviamos la flecha  $1 \rightarrow 4$  por ser igual a las composiciones  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$  y  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ .

Llamémosle  $J$  a esta categoría. Ahora, si  $\mathcal{C}$  es una categoría arbitraria, un diagrama de tipo  $J$  en  $\mathcal{C}$  es un functor  $J \rightarrow \mathcal{C}$ . Un tal functor nos provee de cuatro objetos de  $\mathcal{C}$  con ciertas flechas, dispuestas como en (1.1), de tal manera que podemos representar gráficamente este diagrama de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{f_{12}} & C_2 \\ f_{13} \downarrow & & \downarrow f_{24} \\ C_3 & \xrightarrow{f_{34}} & C_4 \end{array} \quad (1.2)$$

La conmutatividad del diagrama significa en este caso que  $f_{34}f_{13} = f_{24}f_{12}$ . Informalmente, podemos decir que la conmutatividad de un diagrama significa la independencia del camino elegido entre dos objetos.

*Observación 1.2.13.* Diremos que (1.2) es un diagrama en  $\mathcal{C}$ , sin explicitar la categoría  $J$  ni el functor  $J \rightarrow \mathcal{C}$ . Haremos esta identificación entre el diagrama como functor y la representación del diagrama como en (1.2) en general, cuando  $J$  no sea necesariamente esta categoría pequeña particular.

*Ejemplo 1.2.14.* Si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor y  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  son flechas en  $\mathcal{C}$ , entonces  $F(gf) = F(g)F(f)$ . Esta condición se puede expresar mediante la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} FA & \xrightarrow{Ff} & FB & \xrightarrow{Fg} & FC \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & & & F(gf) \end{array}$$

Análogamente, si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor contravariante y  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  son flechas en  $\mathcal{C}$ , entonces la condición  $F(gf) = F(f)F(g)$  puede expresarse mediante la



conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} FC & \xrightarrow{Fg} & FB & \xrightarrow{Ff} & FA \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & F(gf) & & \end{array}$$

*Ejemplo 1.2.15.* Si  $\mathcal{C}$  es un preorden, entonces todo diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  es conmutativo. En efecto, si  $\alpha, \beta : i \rightarrow j$  son flechas de  $J$ , entonces  $D\alpha, D\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D_i, D_j)$  que tiene cardinal uno.

*Observación 1.2.16.* Tendremos ocasión de utilizar “diagramas” donde los objetos son categorías (no necesariamente pequeñas) y las flechas son funtores. Esto a priori no tiene sentido, pues no existe la “categoría de todas las categorías” (ver nota al pie del ejemplo 1.2.4.8). Sin embargo, el sentido es claro si decimos por ejemplo que el diagrama (1.2) conmuta, donde  $C_i$  son categorías y  $f_{ij}$  son funtores.

## 1.2.2. Bifuntores

**Definición 1.2.17.** Sean  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  categorías y sea  $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Un tal functor desde una categoría producto se denomina *bifunctor*.

*Observación 1.2.18.* Sea  $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  un bifunctor. Todo objeto  $A \in \mathcal{A}$  define un functor  $F(A, -) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ , mediante  $F(A, -)(B) := F(A, B)$  en los objetos, y definido en las flechas como  $F(A, -)(g) := F(\text{id}_A, g)$ . Análogamente, todo objeto  $B \in \mathcal{B}$  define un functor  $F(-, B) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ .

**Lema 1.2.19.** Sean  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  categorías. Sea  $F_o : \text{Ob}(\mathcal{A}) \times \text{Ob}(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C})$  una clase funcional, y sea  $F_{(A,B),(A',B')} : \text{Hom}_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((A, B), (A', B')) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F_o(A, B), F_o(A', B'))$  una función para cada  $(A, B), (A', B') \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .

Entonces  $F_o$  y  $F_{(A,B),(A',B')}$  determinan un bifunctor  $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  si y sólo si:

1.  $F$  es functorial en cada variable:  $F(A, -) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  y  $F(-, B) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  (definidos como en la observación previa) son funtores para cada  $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ ,
2. para cada flecha  $f : A \rightarrow A'$  en  $\mathcal{A}$  y  $g : B \rightarrow B'$  en  $\mathcal{B}$ , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F(A, B) & \xrightarrow{F(A,g)} & F(A, B') \\ F(f,B) \downarrow & \searrow F(f,g) & \downarrow F(f,B') \\ F(A', B) & \xrightarrow{F(A',g)} & F(A', B') \end{array} \quad (1.3)$$

*Demostración.* Si  $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  es un bifunctor, entonces claramente verifica ambos ítems.

Supongamos que  $F$  verifica los dos ítems y veamos que es un bifunctor.

Si  $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$  entonces  $F(\text{id}_{(A,B)}) = F(\text{id}_A, \text{id}_B) = F(\text{id}_A, B) = \text{id}_{F(A,B)}$  pues  $F(-, B)$  es un functor.

Sean  $(A, B) \xrightarrow{(f,g)} (A', B') \xrightarrow{(f',g')} (A'', B'')$  flechas en  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ . El segundo ítem nos da los siguientes dos diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 F(A, B) & & \\
 \begin{array}{c} \downarrow F(f,B) \\ F(A', B) \end{array} & \begin{array}{c} \searrow F(f,g) \\ \xrightarrow{F(A',g')} \\ \downarrow F(f',B') \end{array} & F(A', B') \\
 \begin{array}{c} \downarrow F(f',B) \\ F(A'', B) \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{F(A'',g')} \\ \downarrow F(f',B') \end{array} & \begin{array}{c} \searrow F(f',g') \\ F(A'', B'') \end{array}
 \end{array} \tag{1.4}$$

$$\begin{array}{ccc}
 F(A, B) & \xrightarrow{F(A,g'g)} & F(A, B'') \\
 \begin{array}{c} \downarrow F(f'f,B) \\ F(A'', B) \end{array} & \begin{array}{c} \searrow F(f'f,g'g) \\ \xrightarrow{F(A'',g'g)} \\ \downarrow F(f'f,B'') \end{array} & F(A'', B'')
 \end{array} \tag{1.5}$$

La conmutatividad del diagrama (1.4) nos da:

$$F(A'', g') \circ F(A'', g) \circ F(f', B) \circ F(f, B) = F(f', g') \circ F(f, g)$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior es igual a  $F(A'', g'g) \circ F(f'f, B)$  pues  $F(A'', -)$  y  $F(-, B)$  son funtores. Además,  $F(A'', g'g) \circ F(f'f, B) = F(f'f, g'g)$  por la conmutatividad de (1.5).

En conclusión,  $F(f'f, g'g) = F(f', g') \circ F(f', g)$  y  $F$  es un bifunctor.  $\square$

*Ejemplo 1.2.20.* Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. El bifunctor  $\text{Hom}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ , se define como

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} A \quad A' \\ \uparrow f \quad \downarrow g \\ B \quad B' \end{array} & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)} & \begin{array}{c} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A') \\ \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B') \end{array}
 \end{array}$$

donde  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g)(q) := gqf$  para todo  $q \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ . Utilizaremos la notación  $[f^*, g_*] := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g)$ .

Utilicemos el lema 1.2.19 para verificar que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)$  efectivamente es un bifunctor.

Debemos verificar primero que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)$  es functorial en cada variable. Sea  $C \in \mathcal{C}$ . Consideremos  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ , definido como

$$\begin{array}{ccc} A & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) \\ f \downarrow & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)} & \downarrow f_* \\ B & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B) \end{array}$$

para toda  $f : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}$ , donde  $f_* := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, f) = [\text{id}^*, f_*]$ . Explícitamente, se tiene que  $f_*(g) = fg$  para toda  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ . Se verifica fácilmente que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$  es un functor.

Consideremos ahora  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  definido como:

$$\begin{array}{ccc} A & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ f \downarrow & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)} & \uparrow f^* \\ B & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \end{array}$$

para toda  $f : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}$ , donde  $f^* := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, C) = [f^*, \text{id}_*]$ . Explícitamente, se tiene que  $f^*(g) = gf$  para toda  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ . Observar que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(C, -)$  y por lo tanto es un functor.

Ahora debemos verificar que para todo par de flechas  $f : A \rightarrow A'$  y  $g : B \rightarrow B'$  de  $\mathcal{C}$  conmuta el diagrama (1.3), que en este caso es así:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B) & \xrightarrow{g_*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B') \\ f^* \downarrow & \searrow [f^*, g_*] & \downarrow f_* \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) & \xrightarrow{g_*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B') \end{array}$$

Si  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B)$  entonces  $f^*g_*(h) = ghf = g_*f^*(h) = [f^*, g_*](h)$ , i.e. el diagrama conmuta.

Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un functor. Designaremos por  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -)$  a la composición

$$\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \xrightarrow{F^{\text{op}} \times \text{id}_{\mathcal{D}}} \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{D}}(-, -)} \mathbf{Set}$$

Análogamente, si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  es un functor, designaremos por  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-)$  a la composición

$$\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}^{\text{op}}} \times G} \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)} \mathbf{Set}$$

*Observación 1.2.21.* Una flecha  $f : A \rightarrow B$  de una categoría  $\mathcal{C}$  es un monomorfismo si y sólo si  $f_* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B)$  es una función inyectiva para todo  $X \in \mathcal{C}$ , y es

un epimorfismo si y sólo si  $f^* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y)$  es una función inyectiva para todo  $Y \in \mathcal{C}$ .

La observación 1.1.18 dice que  $f$  es un monomorfismo split si y sólo si para todo  $Y \in \mathcal{C}$  se tiene que  $f^* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y)$  es una función sobreyectiva, y que  $f$  es un epimorfismo split si y sólo si para todo  $X \in \mathcal{C}$  se tiene que  $f_* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B)$  es una función sobreyectiva.

*Ejemplo 1.2.22.* Sean  $R, S, T$  anillos. En este ejemplo, los hom-sets tienen estructura adicional: se tienen bifuntores

1.  $\text{Hom}_R(-, -) : (\mathbf{R-Mod-S})^{\text{op}} \times \mathbf{R-Mod-T} \rightarrow \mathbf{S-Mod-T}$ , donde las acciones en  $\text{Hom}_R(A, B)$  se definen como  $(s \cdot f)(a) = f(as)$  y  $(f \cdot t)(a) = f(a)t$ ,
2.  $\text{Hom}_S(-, -) : (\mathbf{R-Mod-S})^{\text{op}} \times \mathbf{T-Mod-S} \rightarrow \mathbf{T-Mod-R}$ , donde las acciones en  $\text{Hom}_S(A, B)$  se definen como  $(t \cdot f)(a) = tf(a)$  y  $(f \cdot r)(a) = f(ra)$ .

Si  $R$  es un anillo conmutativo, entonces se tiene un bifunctor

$$\text{Hom}_R(-, -) : (\mathbf{R-Mod})^{\text{op}} \times \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$$

*Ejemplo 1.2.23.* Sean  $R, S, T$  anillos. El producto tensorial

$$- \otimes_S - : \mathbf{R-Mod-S} \times \mathbf{S-Mod-T} \rightarrow \mathbf{R-Mod-T}$$

es un bifunctor.

Si  $R$  es un anillo conmutativo, entonces se tiene un bifunctor

$$- \otimes_R - : \mathbf{R-Mod} \times \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$$

### 1.2.3. Categorías coma

A continuación damos otra construcción corriente en teoría de categorías:

**Definición 1.2.24.** Sean  $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{B}$  funtores. Definimos una categoría  $(F \downarrow G)$ , llamada *categoría coma de  $F$  sobre  $G$* , tal que:

- sus objetos son ternas  $(A, B, f)$ , donde  $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$  y  $f : FA \rightarrow GB$ ,
- sus flechas son pares  $(\alpha, \beta) : (A, B, f) \rightarrow (A', B', f')$  donde  $\alpha : A \rightarrow A'$  y  $\beta : B \rightarrow B'$ , tales que  $F\alpha$  y  $G\beta$  hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{F\alpha} & FA' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ GB & \xrightarrow{G\beta} & GB' \end{array} \quad (1.6)$$

Se define la composición  $(A, B, f) \xrightarrow{(\alpha, \beta)} (A', B', f') \xrightarrow{(\alpha', \beta')} (A'', B'', f'')$  mediante

$$(\alpha', \beta') \circ (\alpha, \beta) := (\alpha' \alpha, \beta' \beta)$$

La conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} FA & \xrightarrow{F\alpha} & FA' & \xrightarrow{F\alpha'} & FA'' \\ f \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f'' \\ GB & \xrightarrow{G\beta} & GB' & \xrightarrow{G\beta'} & GB'' \end{array}$$

junto con la functorialidad de  $F$  y de  $G$  nos da la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{F(\alpha' \alpha)} & FA'' \\ f \downarrow & & \downarrow f'' \\ GB & \xrightarrow{G(\beta' \beta)} & GB'' \end{array}$$

y por lo tanto  $(\alpha', \beta') \circ (\alpha, \beta)$  es efectivamente una flecha de  $(F \downarrow G)$ .

Las identidades son  $\text{id}_{(A, B, f)} = (\text{id}_A, \text{id}_B)$ .

Veamos ahora algunos casos particulares.

*Ejemplo 1.2.25.* 1. Consideremos el siguiente caso particular:  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xleftarrow{G} \mathbf{1}$  donde  $\mathbf{1}$  es la categoría descrita en el ejemplo 1.1.5.3. El functor  $G$  determina un objeto  $D := G(\star) \in \mathcal{D}$ . La categoría coma  $(F \downarrow G)$  se llama *categoría de morfismos de  $F$  a  $D$* , y se designa por  $(F \downarrow D)$ .

Sus objetos son ternas  $(A, \star, f)$  donde  $f : FA \rightarrow D$ . Podemos pensar entonces que son pares  $(A, f)$  con  $f : FA \rightarrow D$ , pues la presencia de  $\star$  no aporta información adicional.

Una flecha de  $(A, f)$  en  $(A', f')$  consta de una flecha  $\alpha : A \rightarrow A'$  y de una flecha  $\star \rightarrow \star$ . La flecha  $\star \rightarrow \star$  es necesariamente  $\text{id}_\star$  y por lo tanto no aporta información adicional; podemos pensar entonces que una flecha de  $(A, f)$  en  $(A', f')$  consta de una flecha  $\alpha : A \rightarrow A'$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{F\alpha} & FA' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \end{array}$$

que podemos resumir en el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{F\alpha} & FA' \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & & D \end{array} \quad (1.7)$$

En resumen, los objetos de la categoría  $(F \downarrow D)$  son flechas  $FA \rightarrow D$  de  $\mathcal{D}$ , y un morfismo de una flecha  $f : FA \rightarrow D$  a una flecha  $f' : FA' \rightarrow D$  es una flecha  $\alpha : A \rightarrow A'$  tal que  $F\alpha$  hace conmutar el diagrama (1.7).

En el caso particular en que  $\mathcal{C} = \mathcal{D}$  y  $F = \text{id}_{\mathcal{D}}$ , la categoría coma  $(\text{id}_{\mathcal{D}} \downarrow D)$  se llama *categoría de objetos sobre  $D$*  y se designa por  $(\mathcal{D} \downarrow D)$ .

2. Consideremos el siguiente caso particular:  $\mathbf{1} \xrightarrow{F} \mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$ . El functor  $F$  determina un objeto  $C := F(\star) \in \mathcal{C}$ . La categoría coma  $(F \downarrow G)$  se llama *categoría de morfismos de  $C$  a  $G$* , y se designa por  $(C \downarrow G)$ .

Dualmente a la categoría de morfismos de  $F$  a  $D$ , la categoría  $(C \downarrow G)$  consta de flechas  $C \rightarrow GA$ , y un morfismo de una flecha  $f : C \rightarrow GA$  a una flecha  $f' : C \rightarrow GA'$  consta de una flecha  $\beta : A \rightarrow A'$  tal que  $G\beta$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ f \swarrow & & \searrow f' \\ GA & \xrightarrow{G\beta} & GA' \end{array}$$

En el caso particular en que  $\mathcal{D} = \mathcal{C}$  y  $G = \text{id}_{\mathcal{C}}$ , la categoría coma  $(C \downarrow \text{id}_{\mathcal{C}})$  se llama *categoría de objetos debajo de  $C$*  y se designa por  $(C \downarrow C)$ .

3. En el caso particular  $\mathcal{C} \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} \mathcal{C} \xleftarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}$ , la categoría coma  $(\text{id}_{\mathcal{C}}, \text{id}_{\mathcal{C}})$  tiene como objetos a las flechas de  $\mathcal{C}$ , y un morfismo de una flecha  $f : C_1 \rightarrow C_2$  a una flecha  $g : C'_1 \rightarrow C'_2$  consta de flechas  $\alpha : C_1 \rightarrow C'_1$  y  $\beta : C_2 \rightarrow C'_2$  que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{\alpha} & C'_1 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ C_2 & \xrightarrow{\beta} & C'_2 \end{array}$$

Esta categoría se llama *categoría de flechas de  $\mathcal{C}$* : la designaremos por  $\text{Arr}(\mathcal{C})$ .

Definimos funtores  $S, T : \text{Arr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ , llamados *source* y *target*, como sigue:

$$\begin{array}{ccc} C_1 \xrightarrow{\alpha} C'_1 & \xrightarrow{S} & C_1 \xrightarrow{\alpha} C'_1 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ C_2 \xrightarrow{\beta} C'_2 & \xrightarrow{T} & C_2 \xrightarrow{\beta} C'_2 \end{array}$$

*Observación 1.2.26.* Sean  $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{B}$  funtores. La categoría  $(F \downarrow G)$  es una subcategoría de  $\text{Arr}(\mathcal{C})$  que en general no es plena. En efecto, en el diagrama (1.6) las

flechas  $FA \rightarrow FA'$  y  $GB \rightarrow GB'$  no son flechas arbitrarias como podrían serlo en  $\text{Arr}(\mathcal{C})$  sino que son de la forma  $F\alpha$  y  $G\beta$  respectivamente, donde  $\alpha : A \rightarrow A'$  y  $\beta : B \rightarrow B'$ .

*Ejemplo 1.2.27.* 1. Sea  $M$  un espacio métrico. Recordemos que una *completación* de  $M$  es un espacio métrico completo  $\overline{M}$  tal que  $M \subset \overline{M}$  es un subespacio denso. La inclusión  $i : M \rightarrow \overline{M}$  cumple la siguiente propiedad universal, que caracteriza la completación a menos de isomorfismo: si  $N$  es un espacio métrico completo y  $g : M \rightarrow N$  es una función uniformemente continua, entonces existe una única  $h : \overline{M} \rightarrow N$  uniformemente continua que hace conmutar el siguiente diagrama<sup>10</sup>:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ i \swarrow & & \searrow g \\ \overline{M} & \xrightarrow{\quad h \quad} & N \end{array} \quad (1.8)$$

Interpretemos la completación de  $M$  como un objeto en cierta categoría  $\mathcal{C}$ . Llamémosle  $\mathbf{CompMet}_u$  a la categoría de espacios métricos completos cuyos morfismos son funciones uniformemente continuas. Es una subcategoría plena de  $\mathbf{Met}_u$ ; consideremos el functor inclusión  $i : \mathbf{CompMet}_u \rightarrow \mathbf{Met}_u$ .

Entonces una completación de  $M$  es un objeto inicial en la categoría  $(M \downarrow i)$ .

En efecto, un tal objeto es un par  $(M', f)$  donde  $M'$  es un espacio métrico completo y  $f : M \rightarrow iM'$  es una función uniformemente continua, y satisface que para todo par  $(N, g)$  con  $N$  un espacio métrico completo y  $g : M \rightarrow iN$  uniformemente continua, existe una única  $h : M' \rightarrow N$  uniformemente continua tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ iM' & \xrightarrow{\quad ih \quad} & iN \end{array} \quad (1.9)$$

2. Sea  $R$  un anillo. Dado un conjunto  $X$ , se puede formar el  $R$ -módulo libre de base  $X$  que llamaremos  $L_R(X)$ . Sea  $i : X \rightarrow L_R(X)$  la inclusión. Se satisface la siguiente propiedad universal, que caracteriza a  $L_R(X)$  a menos de isomorfismo. Si  $M \in \mathbf{R-Mod}$  y  $f : X \rightarrow M$  es una función, entonces existe un único morfismo de  $R$ -módulos  $\tilde{f} : L_R(X) \rightarrow M$  (la *extensión lineal* de  $f$ ) que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & M \\ i \downarrow & \searrow \tilde{f} & \uparrow \\ L_R(X) & & \end{array}$$

<sup>10</sup> Observar que hay un problema formal en el diagrama que sigue, pues  $M$  es un objeto de  $\mathbf{Met}_u$  y  $\overline{M}$ ,  $N$  son objetos de  $\mathbf{CompMet}_u$ . La manera correcta de escribir el diagrama está dada por (1.9), que es un diagrama en la categoría  $\mathbf{Met}_u$ . Una observación análoga vale para los dos ítems siguientes.

Entonces si  $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  es el funtor de olvido, se obtiene que el par  $(L_R(X), i)$  es un objeto inicial de la categoría  $(X \downarrow U)$ .

Análogas consideraciones valen para las categorías **Mon**, **Grp**, **Ab**,  $\mathbb{K}$ -**Alg** además de para **R-Mod**.

3. Sea  $R \in \mathbf{CRing}$ . Entonces un objeto de la categoría  $(R \downarrow \mathbf{CRing})$  de objetos debajo de  $R$  es una  $R$ -álgebra (asociativa, con unidad) conmutativa. En efecto, una tal  $R$ -álgebra es un anillo conmutativo  $A$  con una elección de un morfismo de anillos  $f : R \rightarrow A$ . Además, un morfismo de álgebras  $g : (A, f) \rightarrow (A', f')$  es exactamente un morfismo de anillos  $g : A \rightarrow A'$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & R & \\
 f \swarrow & & \searrow f' \\
 A & \xrightarrow{g} & A'
 \end{array}$$

No es difícil ver que esto establece un isomorfismo de categorías entre  $(R \downarrow \mathbf{CRing})$  y la categoría de  $R$ -álgebras conmutativas.



## 1.3. Transformaciones naturales

### 1.3.1. Definiciones y ejemplos

**Definición 1.3.1.** Sean  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtores. Una *transformación natural*  $\tau : F \Rightarrow G$  asigna a cada objeto  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  una flecha  $\tau_A : FA \rightarrow GA$ , tal que para cada flecha  $f : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}$  el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & FA \xrightarrow{\tau_A} & GA \\ f \downarrow & Ff \downarrow & \downarrow Gf \\ B & FB \xrightarrow{\tau_B} & GB \end{array} \quad (1.10)$$

Utilizaremos las notaciones  $\tau = (\tau_A : FA \rightarrow GA)_{A \in \mathcal{C}}$  y  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$ . Diremos que las flechas  $\tau_A$  son las *componentes* de la transformación natural  $\tau$ .

Una transformación natural entre funtores contravariantes  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  se define como una transformación natural entre los respectivos funtores  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ .

Sean  $F, G, H$  funtores y  $\tau, \eta$  transformaciones naturales dispuestos así:  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{G} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{H} \end{array} \mathcal{D}$ .

Definimos la composición de  $\tau$  y  $\eta$  como  $\eta\tau : F \Rightarrow H$ , de la siguiente manera: para cada  $A \in \mathcal{C}$ , se define  $(\eta\tau)_A := \eta_A\tau_A$ . Es inmediato verificar que es una transformación natural.

Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías, con  $\mathcal{C}$  pequeña. La *categoría de funtores*  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  tiene como objetos a los funtores  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  (que hemos llamado también *diagramas de tipo  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{D}$* ), y como morfismos a las transformaciones naturales entre estos funtores.<sup>11</sup> La composición es la recién descrita, y si  $F \in \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ , entonces la identidad  $\text{id}_F : F \Rightarrow F$  se define como  $(\text{id}_F)_A = \text{id}_{FA}$  para todo  $A \in \mathcal{C}$ .

Sean  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtores. Una transformación natural  $\tau : F \Rightarrow G$  es un *isomorfismo natural* si existe una transformación natural  $\eta : G \Rightarrow F$  tal que  $\eta\tau = \text{id}_F$  y  $\tau\eta = \text{id}_G$ .<sup>12</sup> Si existe un isomorfismo natural  $\tau : F \Rightarrow G$ , se dice que  $F$  y  $G$  son *naturalmente isomorfos*,

<sup>11</sup> La hipótesis de pequeñez de  $\mathcal{C}$  garantiza que  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  sea localmente pequeña. En efecto: sean  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtores. Una transformación natural  $\tau : F \Rightarrow G$  es cierta función  $\tau : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, GC)$ .

El dominio y el codominio son conjuntos pues  $\mathcal{C}$  es pequeña. Por lo tanto la clase de funciones  $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, GC)$  es un conjunto; en particular la subclase de transformaciones natura-

les  $F \Rightarrow G$  es un subconjunto, y  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  es localmente pequeña. <sup>12</sup> Observar que si la categoría  $\mathcal{C}$  es pequeña,  $\tau$  es un isomorfismo natural si y sólo si es un isomorfismo como flecha de la categoría  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ .

y escribimos  $F \cong G$  y  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \cong \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$ .

Definimos también la composición de una transformación natural con un functor<sup>13</sup>:

En la situación  $\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{B} \xrightarrow{H} \mathcal{C}$  se define  $H\tau$ ,  $\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{HF} \\ \Downarrow H\tau \\ \xrightarrow{HG} \end{array} \mathcal{C}$  mediante  $(H\tau)_A := H(\tau_A)$ . Se verifica inmediatamente que  $H\tau$  es una transformación natural.

En la situación  $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{H} \end{array} \mathcal{C}$  se define  $\tau F$ ,  $\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{GF} \\ \Downarrow \tau F \\ \xrightarrow{HF} \end{array} \mathcal{C}$  mediante  $(\tau F)_A := \tau_{FA}$ . Se verifica inmediatamente que  $\tau F$  es una transformación natural.

*Observación 1.3.2.* Tendremos ocasión de utilizar “diagramas” donde los objetos son funtores  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  (con  $\mathcal{C}$  no necesariamente pequeña) y las flechas son transformaciones naturales (comparar con la observación 1.2.16). Esto no tiene sentido a priori, pues  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  no resulta localmente pequeña si  $\mathcal{C}$  no es pequeña.

Exploraremos brevemente la siguiente noción más adelante.

**Definición 1.3.3.** Un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  es *representable* si es naturalmente isomorfo a  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$  para algún  $C \in \mathcal{C}$ .

Un functor contravariante  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  es *representable* si es naturalmente isomorfo a  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$  para algún  $C \in \mathcal{C}$ .

*Observación 1.3.4.* 1. La composición de isomorfismos naturales es un isomorfismo natural.

2. Sean  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtores y  $\tau : F \Rightarrow G$  una transformación natural. Entonces  $\tau$  es un isomorfismo natural si y sólo si  $\tau_A$  es un isomorfismo para todo  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . En este caso, se tiene  $\tau_A^{-1} = (\tau_A)^{-1}$ .

3. Sean  $F, G : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  bifuntores y  $\tau : F \Rightarrow G$  una transformación natural. Todo objeto  $A \in \mathcal{A}$  define una transformación natural  $\tau_{A,-} : F(A, -) \Rightarrow G(A, -)$ , definida mediante  $(\tau_{A,-})_B := \tau_{A,B}$ . Análogamente, todo objeto  $B \in \mathcal{B}$  define una transformación natural  $\tau_{-,B} : F(-, B) \Rightarrow G(-, B)$ .

*Ejemplo 1.3.5.* 1. La categoría de funtores  $\mathcal{C}^2$ , donde  $\mathbf{2}$  es la categoría del ejemplo 1.1.5.4, es isomorfa a la categoría de flechas de  $\mathcal{C}$  descrita en el ejemplo 1.2.25.3.

<sup>13</sup> Esta operación es un caso particular de la *composición horizontal* de transformaciones naturales, que no definiremos (ver [15, pp. 42-43]). De esta manera, la categoría  $\mathbf{Cat}$  no consta sólo de objetos (categorías pequeñas) y de flechas (funtores), sino también de flechas entre flechas (transformaciones naturales) que se pueden componer de dos maneras diferentes. Verificando ciertos axiomas adicionales, esto dice que  $\mathbf{Cat}$  es una *2-categoría*.

2. Consideremos el functor contravariante  $(-)^* := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(-, \mathbb{K}) : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$  (ver ejemplos 1.2.20 y 1.2.22). El  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$  se llama *espacio vectorial dual* de  $V$ .

Podemos considerar  $(-)^*$  como functor covariante  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{op}}$  o como functor covariante  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ , de tal manera que lo podemos componer consigo mismo para conseguir un functor covariante  $(-)^{**} := (-)^* \circ (-)^* : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ . Si  $V$  es un espacio vectorial, el espacio vectorial  $V^{**}$  es el *doblo dual* de  $V$ .

Veamos cómo luce  $T^{**}$ : si  $T : V \rightarrow W$ , entonces  $T^{**} : V^{**} \rightarrow W^{**}$  es tal que, si  $\varphi \in V^{**}$  y  $f \in W^*$ ,

$$T^{**}(\varphi)(f) = (T^*)^*(\varphi)(f) = (\varphi \circ T^*)(f) = \varphi(f \circ T)$$

Definamos una transformación natural  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_{\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}}} \\ \Downarrow j \\ \xrightarrow{(-)^{**}} \end{array} \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ .

Para cada  $V \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ , definimos  $j_V : V \rightarrow V^{**}$  como  $j_V(v) = \text{ev}_v$ , donde  $\text{ev}_v : V^* \rightarrow \mathbb{K}$  es la transformación lineal definida mediante  $\text{ev}_v(f) = f(v)$ . Es claro que  $j_V$  es una transformación lineal.

Verifiquemos la naturalidad de  $j$ , i.e. la conmutatividad del siguiente diagrama para toda  $T : V \rightarrow W$ :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j_V} & V^{**} \\ T \downarrow & & \downarrow T^{**} \\ W & \xrightarrow{j_W} & W^{**} \end{array}$$

Si  $v \in V$  y  $f \in W^*$ , entonces, recorriendo el diagrama en sentido horario y evaluando, se obtiene:

$$T^{**}(j_V(v))(f) = T^{**}(\text{ev}_v)(f) = \text{ev}_v(f \circ T) = f(T(v)) \quad (1.11)$$

Recorriendo el diagrama en el otro sentido y evaluando, se obtiene:

$$j_W(T(v))(f) = \text{ev}_{T(v)}(f) = f(T(v)) \quad (1.12)$$

La igualdad de (1.11) con (1.12) para todo  $v \in V$  nos dice que  $j$  es una transformación natural.

Es un ejercicio de álgebra lineal probar que el mapa  $j_V$  siempre es inyectivo. Por lo tanto, si  $V$  tiene dimensión finita, el mapa  $j_V$  es un isomorfismo.

Si restringimos entonces  $j$  a la subcategoría de espacios vectoriales de dimensión finita, conseguimos que es un isomorfismo natural:

$$\text{Vect}_{\mathbb{K}, \text{fin}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_{\text{Vect}_{\mathbb{K}, \text{fin}}}} \\ \simeq \Downarrow j \\ \xrightarrow{(-)^{**}} \end{array} \text{Vect}_{\mathbb{K}, \text{fin}}$$

Por otro lado, el álgebra lineal nos garantiza que todo espacio vectorial de dimensión finita es isomorfo a su espacio vectorial dual. Sin embargo, este isomorfismo no puede ser natural. Es decir, si  $\tau_V : V \rightarrow V^*$  es una familia de isomorfismos para cada  $V \in \text{Vect}_{\mathbb{K}, \text{fin}}$ , entonces  $\tau$  no puede conformar una transformación natural. Por un lado, está el problema formal: ni siquiera está definida una transformación natural entre un functor covariante (la identidad) y un functor contravariante (el dual). Pero incluso ignorando el problema formal, parecería razonable decir que la familia de isomorfismos  $\tau_V$  es “natural” si para toda  $T : V \rightarrow W$ , el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V & & V \xrightarrow{\tau_V} V^* \\ T \downarrow & & \downarrow T^* \\ W & & W \xrightarrow{\tau_W} W^* \end{array}$$

Esto tampoco puede ocurrir, porque significaría que  $\tau_V = T^* \tau_W T$  para toda  $T$ : si tomamos por ejemplo un espacio vectorial  $V \neq \{0\}$  y  $0 = T : V \rightarrow V$ , la igualdad sería  $\tau_V = 0$ , lo cual es absurdo pues  $\tau_V$  es un isomorfismo.

- Sea  $n$  un entero positivo. Sea  $GL_n : \mathbf{CRing} \rightarrow \mathbf{Grp}$  el functor que a un anillo conmutativo le asocia su grupo de matrices invertibles, y a un morfismo de anillos  $f : R \rightarrow S$  le asocia el morfismo de grupos  $GL_n(f) : GL_n(R) \rightarrow GL_n(S)$  definido como  $GL_n(f)((a_{ij})) = (f(a_{ij}))$ .

Sea  $(-)^{\times} : \mathbf{CRing} \rightarrow \mathbf{Grp}$  el functor que a un anillo conmutativo le asocia su grupo multiplicativo de elementos invertibles,  $R^{\times}$ , y a un morfismo de anillos  $f : R \rightarrow S$  le asocia  $f^{\times} : R^{\times} \rightarrow S^{\times}$  definido como  $f^{\times}(r) = f(r)$  para todo  $r \in R^{\times}$  (de hecho,  $(-)^{\times} = GL_1$ ).

Entonces el determinante es una transformación natural entre estos dos funtores:

$$\mathbf{CRing} \begin{array}{c} \xrightarrow{GL_n} \\ \Downarrow \det \\ \xrightarrow{(-)^{\times}} \end{array} \mathbf{Grp}$$

En efecto, el determinante de una matriz invertible es un elemento invertible del anillo, y además el siguiente diagrama es conmutativo para

todo morfismo de anillos  $f : R \rightarrow S$ :

$$\begin{array}{ccc} R & \text{GL}_n(R) & \xrightarrow{\det} R^\times \\ f \downarrow & \text{GL}_n(f) \downarrow & \downarrow f^\times \\ S & \text{GL}_n(S) & \xrightarrow{\det} S^\times \end{array}$$

por ser  $\det((a_{ij}))$  un polinomio en  $a_{ij}$ .

4. Sea  $R$  un anillo conmutativo. A partir del ejemplo 1.2.22 y la observación 1.2.18 conseguimos el functor  $\text{Hom}_R(R, -) : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{R}\text{-Mod}$ , donde  $R$  es un  $R$ -módulo con la acción regular. Veamos que este functor es naturalmente isomorfo al functor  $\text{id}_{\mathbf{R}\text{-Mod}} : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{R}\text{-Mod}$ :

$$\text{Hom}_R(R, -) \cong \text{id}_{\mathbf{R}\text{-Mod}}$$

Definimos  $\tau : \text{Hom}_R(R, -) \Rightarrow \text{id}_{\mathbf{R}\text{-Mod}}$ . Sea  $\tau_M : \text{Hom}_R(R, M) \rightarrow M$  definido como  $\tau_M(g) = g(1)$ . Es fácil ver que  $\tau_M$  es un morfismo de  $R$ -módulos. Su inversa es el mapa  $M \rightarrow \text{Hom}_R(R, M)$ ,  $m \mapsto (r \mapsto rm)$ ; se verifica fácilmente que está definido y es un morfismo de  $R$ -módulos.

Verifiquemos la naturalidad de  $\tau$ , i.e. la conmutatividad del siguiente diagrama para todo  $f : M \rightarrow N$  morfismo de  $R$ -módulos:

$$\begin{array}{ccc} M & \text{Hom}_R(R, M) & \xrightarrow{\tau_M} M \\ f \downarrow & f_* \downarrow & \downarrow f \\ N & \text{Hom}_R(R, N) & \xrightarrow{\tau_N} N \end{array}$$

Se tiene

$$f(\tau_M(g)) = f(g(1))$$

y

$$\tau_N(f_*(g)) = \tau_N(fg) = fg(1) = f(g(1))$$

para todo  $g \in \text{Hom}_R(R, M)$ , y por lo tanto  $\tau$  es natural.

5. Sea  $R$  un anillo conmutativo, y consideremos el functor  $R \otimes_R - : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{R}\text{-Mod}$  conseguido a partir del ejemplo 1.2.23 y la observación 1.2.18, donde  $R$  es un  $R$ -módulo con la acción regular. Veamos que este functor es naturalmente isomorfo a  $\text{id}_{\mathbf{R}\text{-Mod}} : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{R}\text{-Mod}$ :

$$R \otimes_R - \cong \text{id}_{\mathbf{R}\text{-Mod}}$$

Definimos  $\tau : R \otimes_R - \Rightarrow \text{id}_{R\text{-Mod}}$  como  $\tau_M : R \otimes_R M \rightarrow M$ ,  $\tau_M(r \otimes m) = rm$ . Es fácil ver que  $\tau_M$  está definido y es un morfismo de  $R$ -módulos. Su inversa es el morfismo  $M \rightarrow R \otimes_R M$ ,  $m \mapsto 1 \otimes m$ .

Verifiquemos la naturalidad de  $\tau$ , i.e. la conmutatividad del siguiente diagrama para todo  $f : M \rightarrow N$  morfismo de  $R$ -módulos:

$$\begin{array}{ccccc} M & & R \otimes_R M & \xrightarrow{\tau_M} & M \\ f \downarrow & & \text{id}_R \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\ N & & R \otimes_R N & \xrightarrow{\tau_N} & N \end{array}$$

Se tiene

$$f(\tau_M(r \otimes m)) = f(rm)$$

y

$$\tau_N((\text{id}_R \otimes f)(r \otimes m)) = \tau_N(r \otimes f(m)) = rf(m) = f(rm)$$

para todo  $r \otimes m \in R \otimes_R M$ , y por lo tanto  $\tau$  es natural.

6. Sean  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtores entre preórdenes; es decir, funciones monótonas. Entonces la existencia de una transformación natural  $F \Rightarrow G$  es equivalente con la existencia para cada  $x \in \mathcal{C}$  de una flecha  $Fx \rightarrow Gx$ : es decir,  $F \leq G$ . Observar que los cuadrados de naturalidad (1.10) no aportan información adicional en virtud de la observación 1.2.15.

De la misma forma, se observa que la existencia de un isomorfismo natural  $F \Rightarrow G$  es equivalente con  $F \leq G$  y  $G \leq F$ .

A continuación damos una caracterización de las transformaciones naturales entre bifuntores.

**Lema 1.3.6.** Sean  $F, G : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  dos bifuntores. Sea  $\tau$  una función que a cada par  $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$  le asocia una flecha de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(A, B), G(A, B))$ . Entonces  $\tau$  es una

transformación natural  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{C}$  si y sólo si  $\tau$  es natural en cada variable, es

decir, si y sólo si para cada  $A \in \mathcal{A}$  y  $B \in \mathcal{B}$  se tiene que  $\tau_{A,-} : F(A, -) \Rightarrow G(A, -)$  y  $\tau_{-,B} : F(-, B) \Rightarrow G(-, B)$  son transformaciones naturales.

En este caso,  $\tau$  es un isomorfismo natural si y sólo si  $\tau_{A,-}$  y  $\tau_{-,B}$  son isomorfismos naturales para cada  $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ .

*Demostración.* La observación 1.3.4.3 indica que si  $\tau$  es una transformación natural, entonces  $\tau_{A,-}$  y  $\tau_{-,B}$  también lo son, para todo  $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\tau_{A,-}$  y  $\tau_{-,B}$  son transformaciones naturales para todo  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{B}$ .

Sean  $f : A \rightarrow A'$  y  $g : B \rightarrow B'$  flechas de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  respectivamente. La naturalidad de  $\tau_{A,-}$  aplicada a  $g$  y la naturalidad de  $\tau_{-,B}$  aplicada a  $f$  nos dan el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 F(A, B) & \xrightarrow{\tau_{A,B}} & G(A, B) \\
 F(A,g) \downarrow & & \downarrow G(A,g) \\
 F(A, B') & \xrightarrow{\tau_{A,B'}} & G(A, B') \\
 F(f, B') \downarrow & & \downarrow G(f, B') \\
 F(A', B') & \xrightarrow{\tau_{A',B'}} & G(A', B')
 \end{array}$$

Deducimos inmediatamente la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 F(A, B) & \xrightarrow{\tau_{A,B}} & G(A, B) \\
 F(f,g) \downarrow & & \downarrow G(f,g) \\
 F(A', B') & \xrightarrow{\tau_{A',B'}} & G(A', B')
 \end{array}$$

En conclusión,  $\tau : F \Rightarrow G$  es una transformación natural.

Es claro que  $\tau$  es un isomorfismo natural si y sólo si  $\tau_{A,-}$  y  $\tau_{-,B}$  son isomorfismos naturales para cada  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{B}$ . □

### 1.3.2. Equivalencias de categorías

La noción de isomorfismo de categorías es a menudo demasiado restrictiva, pues exige que una composición de funtores sea *igual* a la identidad, mientras que en teoría de categorías en ocasiones importa caracterizar los objetos *a menos de isomorfismo*. Se obtiene entonces la siguiente noción:

**Definición 1.3.7.** Un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es una *equivalencia de categorías* si existe un functor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  de tal manera que  $\text{id}_{\mathcal{C}} \cong GF$  y  $FG \cong \text{id}_{\mathcal{D}}$ .

Todo isomorfismo de categorías es una equivalencia de categorías, pero no recíprocamente, como muestra el siguiente par de ejemplos:

*Ejemplo 1.3.8.* 1. Sea  $(X, \leq)$  un preorden. Definimos una relación de equivalencia  $\sim$  en  $X$  por  $x \sim x' \iff x \leq x' \text{ y } x' \leq x$ . Sea  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  el mapa cociente. En  $X/\sim$  definimos una relación de orden  $\leq$  por  $\pi(x) \leq \pi(x') \iff x \leq x'$ . Es fácil verificar que  $\leq$  define un orden parcial en  $X/\sim$  para el cual  $\pi$  resulta una función monótona.

Pensando  $X$  y  $X/\sim$  como categorías y  $\pi$  como un functor, veamos que  $\pi$  es una equivalencia de categorías.

Para cada  $y \in X/\sim$ , sea  $x_y \in X$  tal que  $\pi(x_y) = y$ . Sea  $\varphi : X/\sim \rightarrow X$  la función definida como  $\varphi(y) = x_y$ . Esta función es monótona.

Existe un isomorfismo natural  $\varphi\pi \Rightarrow \text{id}_X$  si y sólo si  $\varphi\pi \leq \text{id}$  y  $\pi\varphi \leq \text{id}$  (ver ejemplo 1.3.5.6), y esto último se verifica de manera inmediata.

Sin embargo, en general  $X$  y  $X/\sim$  no son categorías isomorfas. Supongamos que  $X$  es finito y no es un orden parcial, de tal manera que existen  $a, b \in X$  tales que  $a \leq b$ ,  $b \leq a$  y  $a \neq b$ . Un isomorfismo entre  $X$  y  $X/\sim$  sería una función monótona y biyectiva entre  $X$  y  $X/\sim$ . Pero el conjunto cociente  $X/\sim$  consta al menos de un elemento menos que  $X$ , y por lo tanto no está en biyección con  $X$  que es finito.

Observar que cada vez que  $a \leq b$  y  $b \leq a$  en  $X$ , se tiene que los objetos  $a$  y  $b$  son isomorfos. Por lo tanto, tenemos exactamente un objeto en  $X/\sim$  por cada clase de isomorfismo de objetos en  $X$ .

2. Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo. Definimos una categoría  $\mathcal{C}$  tal que  $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \mathbb{N}$ , y tal que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(n, m) = M_{m \times n}(\mathbb{K})$ , el conjunto de matrices  $m \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{K}$ . La composición está dada por el producto de matrices, y las identidades son las matrices identidad.

Entonces  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}, \text{fin}}$  es equivalente con  $\mathcal{C}$ .

En efecto, para cada  $V \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}, \text{fin}}$  fijemos una base  $\mathcal{B}_V$  de  $V$ . Si  $T : V \rightarrow W$  es una transformación lineal, definamos  $A_T$  como la matriz asociada a  $T$  en las bases  $\mathcal{B}_V$  y  $\mathcal{B}_W$ .

Sea  $F : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}, \text{fin}} \rightarrow \mathcal{C}$  el functor que a un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión finita le asocia su dimensión, y que a una transformación lineal  $T$  le asocia  $A_T$ . No es difícil verificar que  $F$  es una equivalencia de categorías.

De nuevo, no puede haber un isomorfismo de categorías entre  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}, \text{fin}}$  y  $\mathcal{C}$  por motivos de cardinalidad: la categoría  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}, \text{fin}}$  no es pequeña mientras que  $\mathcal{C}$  lo es.<sup>14</sup>

Terminamos la sección con una caracterización de las equivalencias de categorías:

**Teorema 1.3.9.** *Un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es una equivalencia de categorías si y sólo si es fiel, pleno, y esencialmente sobreyectivo, i.e. para cada objeto  $D \in \mathcal{D}$  existe  $C \in \mathcal{C}$  tal que  $D \simeq FC$ .*

<sup>14</sup> En estos dos ejemplos vimos equivalencias de categorías con sus respectivos esqueletos. Un esqueleto de una categoría  $\mathcal{C}$  es una subcategoría plena  $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$  tal que cada objeto de  $\mathcal{C}$  es isomorfo (en  $\mathcal{C}$ ) a un único objeto de  $\mathcal{S}$ . En general, toda categoría es equivalente con un esqueleto de ella (esto es equivalente al axioma de elección).



*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor y  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{GF} \\ \cong \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{id_{\mathcal{C}}} \end{array} \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D} \begin{array}{c} \xrightarrow{id_{\mathcal{D}}} \\ \cong \Downarrow \mu \\ \xrightarrow{FG} \end{array} \mathcal{D}$  isomorfismos naturales.

$F$  es fiel: sean  $f, g : C \rightarrow C'$  flechas de  $\mathcal{C}$  tales que  $Ff = Fg$ . La naturalidad de  $\tau$  nos da la conmutatividad de los siguientes cuadrados:

$$\begin{array}{ccc} C & GFC \xrightarrow{\tau_C} C & \\ f \downarrow & GFf \downarrow & \downarrow f \\ C' & GFC' \xrightarrow{\tau_{C'}} C' & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C & GFC \xrightarrow{\tau_C} C & \\ g \downarrow & GFg \downarrow & \downarrow g \\ C' & GFC' \xrightarrow{\tau_{C'}} C' & \end{array}$$

Como  $GFf = GFg$ , conseguimos que  $\tau_{C'}^{-1} \circ f \circ \tau_C = \tau_{C'}^{-1} \circ g \circ \tau_C$ , de donde  $f = g$  y  $F$  es fiel. Por simetría conseguimos que  $G$  es fiel también.

$F$  es pleno: sea  $h : FC \rightarrow FC'$  una flecha de  $\mathcal{D}$ . Definimos  $f : C \rightarrow C'$  como la composición

$$C \xrightarrow{\tau_C^{-1}} GFC \xrightarrow{Gh} GFC' \xrightarrow{\tau_{C'}} C'$$

La naturalidad de  $\tau$  nos da la conmutatividad del siguiente cuadrado:

$$\begin{array}{ccc} C & GFC \xrightarrow{\tau_C} C & \\ f \downarrow & GFf \downarrow & \downarrow f \\ C' & GFC' \xrightarrow{\tau_{C'}} C' & \end{array}$$

Por lo tanto  $GFf = \tau_{C'}^{-1} \circ f \circ \tau_C$ . La definición de  $f$  y la conmutatividad del cuadrado anterior implican que  $GFf = Gh$ ; como  $G$  es fiel, deducimos que  $Ff = h$ , de donde  $F$  es pleno.

$F$  es esencialmente sobreyectivo: si  $D \in \mathcal{D}$ , entonces  $FGD \simeq D$  a través del isomorfismo  $\mu_D$ .

( $\Leftarrow$ ) Como  $F$  es esencialmente sobreyectivo, para cada  $D \in \mathcal{D}$  existe  $C_D \in \mathcal{C}$  tal que  $D \simeq FC_D$ . Sea  $\mu_D : D \rightarrow FC_D$  un isomorfismo.

Definimos un functor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ . Si  $D \in \mathcal{D}$ , entonces  $GD := C_D$ . Si  $h : D \rightarrow D'$  es una flecha de  $\mathcal{D}$ , entonces como  $F$  es fiel y pleno, existe una única  $f_h : GD \rightarrow GD'$  tal que  $Ff_h = \mu_{D'} \circ h \circ \mu_D^{-1}$ , i.e. que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\mu_D} & FGD \\ h \downarrow & & \downarrow Ff_h \\ D' & \xrightarrow{\mu_{D'}} & FGD' \end{array} \quad (1.13)$$

Definimos entonces  $Gh := f_h$ . Se verifica fácilmente que  $G$  es un functor, y la conmutatividad de los diagramas (1.13) indica que  $\mu : \text{id}_{\mathcal{D}} \Rightarrow FG$  es una transformación natural.

Basta ahora encontrar un isomorfismo natural  $\tau : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ .

Consideremos  $\mu_{FC} : FC \rightarrow FGFC$ . Como  $F$  es pleno, existe  $\tau_C : C \rightarrow GFC$  tal que  $\mu_{FC} = F\tau_C$ . Como  $\mu_{FC}$  es un isomorfismo y  $F$  es fiel y pleno, entonces  $\tau_C$  también es un isomorfismo (proposición 1.2.3.3). Se deduce de la naturalidad de  $\mu$  que  $\tau : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$  es una transformación natural.  $\square$

## 1.4. Límites y colímites

### 1.4.1. Definiciones

**Definición 1.4.1.** Sea  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  un diagrama. Un *cono* para el diagrama  $D$  es un par  $(C, (\lambda_j)_{j \in J})$ , donde  $C \in \mathcal{C}$  y  $\lambda_j : C \rightarrow D_j$  para todo  $j \in J$ , tal que el siguiente diagrama conmuta para cada flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ :

$$\begin{array}{ccc} & D_i & \\ \lambda_i \nearrow & & \downarrow De_j^i \\ C & & \\ \lambda_j \searrow & & D_j \end{array}$$

Escribiremos un tal cono como  $(C, \lambda_j)$ . Llamaremos al objeto  $C$  el *vértice* del cono  $(C, \lambda_j)$ .

Sean  $(C, \lambda_j)$  y  $(C', \mu_j)$  dos conos para el diagrama  $D$ . Un *morfismo de conos*  $f : (C', \mu_j) \rightarrow (C, \lambda_j)$  es una flecha  $f : C' \rightarrow C$  tal que el siguiente diagrama conmuta para todo  $i \in J$ :

$$\begin{array}{ccc} & & D_i \\ & \mu_i \curvearrowright & \nearrow \\ C' & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

De esta manera, los conos para un diagrama  $D$  conforman una categoría.

Un *límite* para el diagrama  $D$  es un objeto final en la categoría de conos sobre el diagrama  $D$ . Explícitamente, un límite para el diagrama  $D$  es un cono  $(C, \lambda_j)$  (que llamaremos *cono límite*) tal que para todo otro cono  $(C', \mu_j)$  existe una única flecha  $f : C' \rightarrow C$  que hace conmutar el siguiente diagrama para toda flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ :

$$\begin{array}{ccc} & & D_i \\ & \mu_i \curvearrowright & \nearrow \\ C' & \xrightarrow{f} & C \\ & \mu_j \curvearrowleft & \searrow \\ & & D_j \end{array}$$

Gracias a la proposición 1.1.10, si existe el límite de un diagrama entonces es único a menos de un único isomorfismo. Podemos escribir entonces el límite de  $D$  como  $(\varprojlim D, \lambda_j)$ .

Sea  $J$  una categoría pequeña. Decimos que una categoría  $\mathcal{C}$  es  $J$ -completa si para todo diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  existe el límite de  $D$ . Decimos que es completa si es  $J$ -completa para toda categoría pequeña  $J$ .

*Observación 1.4.2.* Sean  $(C, \lambda_j)$  y  $(C', \mu_j)$  conos para un diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ . Es fácil ver que un isomorfismo  $(C', \mu_j) \rightarrow (C, \lambda_j)$  en la categoría de conos sobre el diagrama  $D$  consiste en un isomorfismo  $\theta : C' \rightarrow C$  que hace conmutar el siguiente diagrama para todo  $i \in J$ :

$$\begin{array}{ccc} & & D_i \\ & \mu_i \curvearrowright & \nearrow \lambda_i \\ C' & \xrightarrow{\theta} & C \end{array}$$

*Observación 1.4.3.* Describamos la categoría de conos de una manera a priori menos explícita, pero más concisa de un punto de vista teórico. Esto tiene la ventaja de expresar un concepto aparentemente nuevo en términos de construcciones ya conocidas.

Dadas categorías  $\mathcal{C}$  y  $J$  con  $J$  pequeña, definimos el *functor diagonal*  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$ .

Si  $C \in \mathcal{C}$ , se define  $\Delta(C) : J \rightarrow \mathcal{C}$  como el functor constante  $C$ . Dada  $f : C \rightarrow C'$

en  $\mathcal{C}$ ,  $\Delta(f)$  es una transformación natural  $J \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta(C)} \\ \Downarrow \Delta(f) \\ \xrightarrow{\Delta(C')} \end{array} \mathcal{C}$  definida mediante  $\Delta(f)_i = f$  para todo  $i \in J$ .

Dado  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  un diagrama en  $\mathcal{C}$ , sea  $\hat{D} : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}^J$  el functor tal que  $\hat{D}(\star) = D \in \mathcal{C}^J$ . Tenemos entonces funtores

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{C}^J \xleftarrow{\hat{D}} \mathbf{1}$$

y determinar un cono para  $D$  no es sino determinar un objeto de la categoría coma  $(\Delta \downarrow \hat{D})$ .

En efecto, un tal objeto es una terna  $(C, \star, \tau)$  donde  $C \in \mathcal{C}$  y  $J \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta(C)} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{D} \end{array} \mathcal{C}$ . La naturalidad de  $\tau$  significa que el siguiente diagrama es conmutativo para toda flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ :

$$\begin{array}{ccccc} & i & & C & \xrightarrow{\tau_i} & D_i \\ & \downarrow e_j^i & & \downarrow \text{id}_C & & \downarrow D e_j^i \\ & j & & C & \xrightarrow{\tau_j} & D_j \end{array}$$

y por lo tanto  $(C, \tau_i)$  es un cono para  $D$ . Recíprocamente, un cono para  $D$  determina un objeto de  $(\Delta \downarrow \hat{D})$ .

Obtenemos también que un cono para  $D$  no es sino un objeto  $C \in \mathcal{C}$  con una transformación natural  $\Delta(C) \Rightarrow D$ .

Sin embargo, la interpretación con categorías como es especialmente satisfactoria, pues nos permite interpretar también los *morfismos* de conos para el diagrama  $D$ , que no son sino morfismos de la categoría  $(\Delta \downarrow \hat{D})$ . De esta manera, podemos describir la categoría de conos sobre  $D$  como  $(\Delta \downarrow \hat{D})$ .

A continuación definimos los *colímites*. En general, el prefijo “co-” en teoría de categorías indica que consideramos la noción dual. Podríamos definir entonces un colímite en  $\mathcal{C}$  como un límite en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ : esto es muy sucinto pero también muy poco explicativo. Desarrollemos lo que esto significa:

**Definición 1.4.4.** Sea  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  un diagrama. Un *cocono* para el diagrama  $D$  es un par  $(C, (\lambda_j)_{j \in J})$  donde  $C \in \mathcal{C}$  y  $\lambda_j : D_j \rightarrow C$  para todo  $j \in J$ , tal que el siguiente diagrama conmuta para cada flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ :

$$\begin{array}{ccc} D_i & & \\ \downarrow D e_j^i & \searrow \lambda_i & \\ & & C \\ & \nearrow \lambda_j & \\ D_j & & \end{array}$$

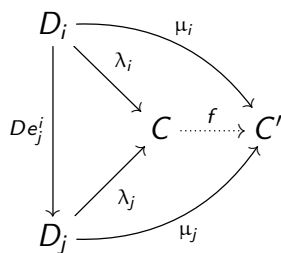
Escribiremos un tal cocono como  $(C, \lambda_j)$ . Llamaremos al objeto  $C$  el *vértice* del cocono  $(C, \lambda_j)$ .

Sean  $(C, \lambda_j)$  y  $(C', \mu_j)$  dos coconos para el diagrama  $D$ . Un *morfismo de coconos*  $f : (C, \lambda_j) \rightarrow (C', \mu_j)$  es una flecha  $f : C \rightarrow C'$  tal que el siguiente diagrama conmuta para todo  $i \in J$ :

$$\begin{array}{ccc} D_i & \xrightarrow{\mu_i} & C' \\ \searrow \lambda_i & & \downarrow f \\ & & C \end{array}$$

De esta manera, los coconos para un diagrama  $D$  conforman una categoría.

Un *colímite* para el diagrama  $D$  es un objeto inicial en la categoría de coconos sobre el diagrama  $D$ . Explícitamente, un colímite para el diagrama  $D$  es un cocono  $(C, \lambda_j)$  (que llamaremos *cono colímite*) tal que para todo otro cocono  $(C', \mu_j)$  existe una única flecha  $f : C \rightarrow C'$  que hace conmutar el siguiente diagrama para toda flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ :



Gracias a la proposición 1.1.10, si existe el colímite de un diagrama entonces es único a menos de un único isomorfismo. Podemos escribir entonces el colímite de  $D$  como  $(\varinjlim D, \lambda_j)$ .

Observar que si  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  es un diagrama, entonces un cocono para  $D$  es lo mismo que un cono para  $D^{op} : J^{op} \rightarrow \mathcal{C}^{op}$ . De la misma forma, el colímite de  $D$  es el límite del diagrama  $D^{op}$ , i.e. la noción dual de “límite” es “colímite”, como anunciáramos antes de la definición.

Sea  $J$  una categoría pequeña. Decimos que una categoría  $\mathcal{C}$  es  $J$ -cocompleta si para todo diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  existe el colímite de  $D$ . Decimos que es cocompleta si es  $J$ -cocompleta para toda categoría pequeña  $J$ .

*Observación 1.4.5.* La categoría de coconos para un diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  se puede describir como la categoría  $\text{coma}(\hat{D} \downarrow \Delta)$ , de la misma manera que lo hicimos para la categoría de conos en la observación 1.4.3. Se obtiene también que determinar un cocono para  $D$  es lo mismo que determinar un objeto  $C \in \mathcal{C}$  con una transformación natural  $D \Rightarrow \Delta(C)$ .

**Lema 1.4.6.** Sean  $D, E : J \rightarrow \mathcal{C}$  diagramas, y supongamos que existen los límites  $(\varprojlim D, \ell_i)$  y  $(\varprojlim E, \ell'_i)$  de  $D$  y  $E$  respectivamente. Sea  $J \begin{matrix} \xrightarrow{D} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{E} \end{matrix} \mathcal{C}$  una transformación natural. Entonces existe una única flecha  $\varprojlim \tau : \varprojlim D \rightarrow \varprojlim E$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & D_i & \xrightarrow{\tau_i} & E_i \\
 \ell_i \nearrow & & & \nearrow \ell'_i \\
 \varprojlim D & \xrightarrow{\varprojlim \tau} & & \varprojlim E
 \end{array} \tag{1.14}$$

*Demostración.* Definimos  $\varprojlim \tau$  gracias a la propiedad definitoria de  $(\varprojlim E, \ell_i)$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & D_i & \xrightarrow{\tau_i} & E_i \\
 & \nearrow \lambda_i & \downarrow De^j & \xrightarrow{\varprojlim \tau} & \downarrow Ee^j \\
 \varprojlim D & \cdots & & & \varprojlim E \\
 & \searrow \lambda_j & \downarrow & & \downarrow \\
 & & D_j & \xrightarrow{\tau_j} & E_j
 \end{array} \tag{1.15}$$

Sea  $e^j : i \rightarrow j$  flecha de  $J$ . Se tiene  $Ee^j \circ \tau_i = \tau_j \circ De^j$  por naturalidad de  $\tau$ . Además, los triángulos de (1.15) conmutan pues los límites son conos, y por lo tanto

$$Ee^j \circ \tau_i \circ \lambda_i = \tau_j \circ De^j \circ \lambda_i = \tau_j \circ \lambda_j$$

Existe entonces una única  $\varprojlim \tau : \varprojlim D \rightarrow \varprojlim E$  que hace conmutar el diagrama (1.14).  $\square$

**Corolario 1.4.7.** Si  $\mathcal{C}$  es una categoría  $J$ -completa, entonces hay un functor  $\varprojlim_J : \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{C}$ , que a cada diagrama  $D$  le asocia su límite  $\varprojlim D$ , y a una transformación natural  $\tau : D \Rightarrow E$  le asocia  $\varprojlim \tau : \varprojlim D \rightarrow \varprojlim E$ .

*Demostración.* Es fácil verificar que  $\varprojlim_J : \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{C}$  así definido es un functor.  $\square$

A menudo designaremos al functor  $\varprojlim_J$  por  $\varprojlim$  si no hay riesgo de ambigüedades.

*Observación 1.4.8.* El functor  $\varprojlim$  del corolario anterior está definido a menos de isomorfismo natural. En efecto, para definirlo hay que *elegir* un cono límite  $(C, \lambda_i)$  para cada diagrama  $D \in \mathcal{C}^J$ . Como los conos límite son únicos a menos de un único isomorfismo, no es difícil probar que elecciones diferentes de conos límite dan lugar a funtores  $\varprojlim$  naturalmente isomorfos.

**Definición 1.4.9.** Fijemos una categoría pequeña  $J$ . Dada una categoría  $\mathcal{C}$ , definimos la categoría  $DK_J(\mathcal{C})$  de  $J$ -diagramas y conos en  $\mathcal{C}$ . Sus objetos son pares  $(D, k)$  donde  $D \in \mathcal{C}^J$  es un diagrama y  $k$  es un cono para  $D$ .

Sean  $(D, k), (E, k')$  objetos de  $DK_J(\mathcal{C})$ . Si  $k = (A, \lambda_i)$  y  $k' = (B, \mu_i)$ , entonces una flecha  $(D, k) \rightarrow (E, k')$  es un par  $(\tau, f)$ , donde  $\tau : D \Rightarrow E$  y  $f : A \rightarrow B$  es tal que hace conmutar el siguiente diagrama para todo  $i \in J$ :

$$\begin{array}{ccc}
 & D_i & \xrightarrow{\tau_i} & E_i \\
 \lambda_i \nearrow & & & \nearrow \mu_i \\
 A & \xrightarrow{f} & B & 
 \end{array} \tag{1.16}$$

Es fácil verificar que  $DK_J(\mathcal{C})$  es una categoría.

Tenemos dos funtores “de olvido”:

- $U_C : DK_J(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}^J$ , que consiste en “olvidar el cono”:  $U_C(D, k) = D$  y  $U_C(\tau, f) = \tau$ ,
- $V_C : DK_J(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ , que a  $(D, k)$  le asocia el vértice del cono  $k$ , y a  $(\tau, f)$  le asocia  $f$ .

**Lema 1.4.10.** Sean  $D, E : J \rightarrow \mathcal{C}$  diagramas tales que existen sus límites. Sea  $(\tau, f) : (D, k) \rightarrow (E, k')$  una flecha de la categoría  $DK_J(\mathcal{C})$ , donde  $k = (A, \lambda_i)$  y  $k' = (B, \mu_i)$ . Sean  $\theta : A \rightarrow \varprojlim D$  y  $\phi : B \rightarrow \varprojlim E$  los morfismos inducidos por la propiedad definitoria de los límites. El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \theta \downarrow & & \downarrow \phi \\ \varprojlim D & \xrightarrow{\varprojlim \tau} & \varprojlim E \end{array}$$

*Demostración.* Sean  $(\varprojlim D, \ell_i)$  y  $(\varprojlim E, \ell'_i)$  los límites de  $D$  y  $E$  respectivamente. Como  $\tau : D \Rightarrow E$  es una transformación natural y  $k$  es un cono para  $D$ , el siguiente diagrama conmuta para toda flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ :

$$\begin{array}{ccc} & D_i & \xrightarrow{\tau_i} & E_i \\ \lambda_i \nearrow & \downarrow D e_j^i & & \downarrow E e_j^i \\ A & & & \\ \lambda_j \searrow & D_j & \xrightarrow{\tau_j} & E_j \end{array}$$

En particular,  $(A, \tau_i \lambda_i)$  es un cono para el diagrama  $E$ . Por lo tanto, para probar que  $\varprojlim \tau \circ \theta = \phi \circ f$ , por la propiedad definitoria del límite basta probar que ambas hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & E_i \\ & \tau_i \lambda_i \nearrow & \\ A & \xrightarrow{\phi \circ f} & \varprojlim E \\ & \varprojlim \tau \circ \theta \searrow & \\ & & \ell'_i \nearrow \end{array}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \ell'_i \circ \varprojlim \tau \circ \theta &= \tau_i \circ \ell_i \circ \theta && \text{por (1.14)} \\ &= \tau_i \circ \lambda_i && \text{por def. de } \theta \\ &= \mu_i \circ f && \text{por (1.16)} \\ &= \ell'_i \circ \phi \circ f && \text{por def. de } \phi \end{aligned}$$

terminando la demostración. □



**Corolario 1.4.11.** Con la notación del lema anterior, si  $\mathcal{C}$  es  $J$ -completa, de tal manera que hay funtores  $DK_J(\mathcal{C}) \xrightarrow{V_C} \mathcal{C} \xleftarrow{\text{lim}} \mathcal{C}^J$ , entonces existe un functor

$$X : DK_J(\mathcal{C}) \rightarrow (V_C \downarrow \text{lim})$$

definido como sigue:

$$\begin{array}{ccc} (D, k) & & ((D, k), D, \theta) \\ (\tau, f) \downarrow & \xrightarrow{X} & \downarrow ((\tau, f), \tau) \\ (E, k') & & ((E, k'), E, \phi) \end{array}$$

*Demostración.* Es fácil verificar que  $X : DK_J(\mathcal{C}) \rightarrow (V_C \downarrow \text{lim})$  así definido es un functor.  $\square$

Los dos lemas anteriores y sus corolarios se dualizan sin dificultades.

## 1.4.2. Ejemplos

*Ejemplo 1.4.12.* Un objeto final (resp. inicial) en  $\mathcal{C}$  es el límite (resp. colímite) del único diagrama  $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}$ .

*Ejemplo 1.4.13.* Sea  $\mathcal{C}$  un preorden y  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ . Entonces  $\text{lim} D \in \mathcal{C}$  es el único objeto  $L$  a menos de un único isomorfismo que cumple que  $L \leq D_i$  para todo  $i \in J$ , y que si  $X \in \mathcal{C}$  es tal que  $X \leq D_i$  para todo  $i \in J$  entonces  $X \leq L$  (recordar el ejemplo 1.2.15 que nos dice que todo diagrama en un preorden es conmutativo).

Por lo tanto, si  $\mathcal{C}$  es un orden parcial, se tiene que  $\text{lim} D = \inf_{i \in J} D_i$  si es que existe. Si  $\mathcal{C}$  no es un orden parcial, entonces el ínfimo no es necesariamente único, pero dos objetos que cumplen la propiedad del ínfimo son uno menor o igual que el otro, i.e. son únicos a menos de un único isomorfismo, y por ello decimos igualmente que los límites en los preórdenes son ínfimos.

Dualmente se observa que en un orden parcial  $\text{lim} D = \sup_{i \in J} D_i$  si es que existe, y también diremos que el colímite es un supremo en el caso de un preorden arbitrario.

*Ejemplo 1.4.14.* En ciertas áreas de la matemática hay algunos tipos de límites y colímites que se estudian especialmente. En particular, un límite (resp. colímite) sobre una categoría de índices que es un orden parcial se llama *límite proyectivo* o *límite inverso* (resp. *límite inductivo* o *límite directo*).

Cuando el conjunto parcialmente ordenado  $J$  es además un conjunto dirigido (i.e. para cada  $i, j \in J$  existe  $k \in J$  tal que  $i \leq k$  y  $j \leq k$ ), los límites y colímites cumplen a veces propiedades adicionales especialmente interesantes.

Ver [22, sección 5.2] para más detalles.

## Productos

*Ejemplo 1.4.15.* Un *producto* en  $\mathcal{C}$  es el límite de un diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ , donde  $J$  es discreta. Designaremos por  $\prod_{j \in J} D_j$  al objeto del límite, que llamaremos *producto* de la familia  $\{D_j\}_{j \in J}$ . A sus morfismos  $\pi_i : \prod_{j \in J} D_j \rightarrow D_i$  los llamaremos *proyecciones*.

Explícitamente, el producto  $\left(\prod_{j \in J} D_j, \pi_i\right)$  cumple: para todo otro objeto  $X$  con flechas  $\{f_i : X \rightarrow D_i\}_{i \in J}$  existe una única  $\theta : X \rightarrow \prod_{j \in J} D_j$  que hace conmutar el siguiente diagrama para todo  $i \in J$ :

$$\begin{array}{ccc}
 & & D_i \\
 & \nearrow f_i & \\
 X & \xrightarrow{\theta} & \prod_{j \in J} D_j \\
 & \searrow \pi_i & \\
 & & D_i
 \end{array}$$

Diremos que una categoría  $\mathcal{C}$  *tiene productos* si es  $J$ -completa para toda categoría discreta  $J$ . Diremos que  $\mathcal{C}$  *tiene productos finitos* (resp. *binarios*) si es  $J$ -completa para toda categoría discreta  $J$  tal que  $\text{Ob}(J)$  es finito (resp.  $\text{Ob}(J)$  tiene cardinal dos).

En virtud del ejemplo 1.4.12, si una categoría tiene productos finitos entonces tiene un objeto final.

- **Set** tiene productos: los productos cartesianos con las proyecciones.
- **Top** tiene productos: el producto es como en **Set**, donde en el objeto producto se considera la topología producto, de manera que las proyecciones son continuas.
- **R-Mod** tiene productos: se observa que el producto cartesiano de una familia de  $R$ -módulos tiene también estructura de  $R$ -módulo, y que las proyecciones resultan morfismos de  $R$ -módulos.
- Sea  $\mathcal{C}$  un preorden y  $\{x_i\}_{i \in I}$  un conjunto de elementos de  $\mathcal{C}$ . Entonces  $\prod_{i \in I} x_i = \inf_{i \in I} x_i$  si es que existe. Por lo tanto un preorden  $\mathcal{C}$  tiene productos si y sólo si tiene ínfimos.

Un caso particular de producto es una *potencia*. Una *potencia* es el límite de un diagrama constante  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ , donde  $J$  es discreta. Si  $A = D_j$  para todo  $j \in J$ , decimos que el objeto límite es la  $J$ -potencia de  $A$ , que designamos por  $\prod_{j \in J} A$ .

Diremos que una categoría  $\mathcal{C}$  *tiene potencias* si todo diagrama constante  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  tiene límite, donde  $J$  es discreta.

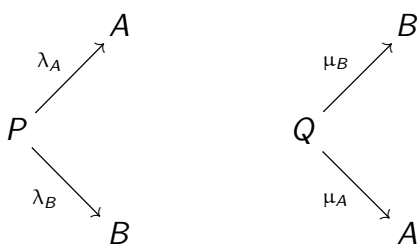
*Observación 1.4.16.* Si  $\{X_j\}_{j \in J} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  es un conjunto de objetos de  $\mathcal{C}$ , entonces hay muchos diagramas diferentes  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  tales que los objetos de  $J$  tienen por imagen los

objetos  $\{X_j\}_{j \in J}$ , pero todos estos diagramas dan lugar a límites isomorfos: es esto lo que nos permite escribir  $\prod_{j \in J} X_j$  independientemente del diagrama considerado.

Por ejemplo, si  $A, B \in \mathcal{C}$  y  $J$  es la categoría discreta con dos objetos  $\{\cdot, \star\}$ , entonces tenemos diagramas  $D, E : J \rightarrow \mathcal{C}$  definidos como sigue:

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{D} & \mathcal{C} & & J & \xrightarrow{E} & \mathcal{C} \\ \cdot & \longmapsto & A & & \cdot & \longmapsto & B \\ \star & \longmapsto & B & & \star & \longmapsto & A \end{array}$$

Sean  $(P, \lambda_A, \lambda_B)$  y  $(Q, \mu_B, \mu_A)$  los límites de los diagramas  $D$  y  $E$  respectivamente:



Se verifica trivialmente que  $(P, \lambda_B, \lambda_A)$  es límite de  $E$  y que  $(Q, \mu_A, \mu_B)$  es límite de  $D$ .

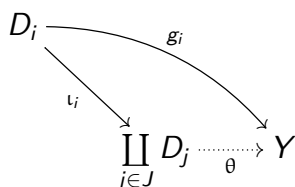
Si llamamos  $P = A \times B$  y  $Q = B \times A$ , esto prueba en particular que  $A \times B \simeq B \times A$ , y nos permite hablar sencillamente de “el producto de  $A$  y  $B$ ”.

*Observación 1.4.17.* Si  $J$  es la categoría discreta con dos objetos, entonces la categoría de funtores  $\mathcal{C}^J$  es isomorfa a la categoría producto  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ . Supongamos que  $\mathcal{C}$  tiene productos binarios. En este caso, el functor  $\lim_{\leftarrow J} : \mathcal{C}^J \simeq \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es tal que a un par de objetos  $A, B$  le asocia su producto  $A \times B$ , y a un par de flechas  $f : A \rightarrow A', g : B \rightarrow B'$  le asocia una flecha  $f \times g : A \times B \rightarrow A' \times B'$ .

### Coproductos

*Ejemplo 1.4.18.* Un *coproducto* en  $\mathcal{C}$  es el colímite de un diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ , donde  $J$  es discreta. Designaremos por  $\coprod_{j \in J} D_j$  al objeto del colímite, que llamaremos *coproducto de la familia*  $\{D_j\}_{j \in J}$ , y llamaremos  $\iota_i : D_i \rightarrow \coprod_{j \in J} D_j$  a sus morfismos, las *inyecciones*.

Explícitamente, el coproducto  $(\coprod_{j \in J} D_j, \iota_i)$  cumple: para todo otro objeto  $Y$  con flechas  $\{g_i : D_i \rightarrow Y\}_{i \in J}$ , existe una única  $\theta : \coprod_{j \in J} D_j \rightarrow Y$  que hace conmutar el siguiente diagrama para todo  $i \in J$ :



Observar que el coproducto de una familia de objetos de  $\mathcal{C}$  es el producto de la misma familia de objetos pero en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .

Diremos que una categoría  $\mathcal{C}$  *tiene coproductos* (resp. *coproductos finitos*, *coproductos binarios*) si  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  tiene productos (resp. productos finitos, productos binarios).

En virtud del ejemplo 1.4.12, si una categoría tiene coproductos finitos entonces tiene un objeto inicial.

- **Set** tiene coproductos: la unión disjunta con las inclusiones.

Recordemos que si  $\{A_i\}_{i \in J}$  es una familia de conjuntos, entonces su unión disjunta

$\bigsqcup_{i \in J} A_i$  se define como

$$\bigsqcup_{i \in J} A_i := \bigcup_{i \in J} A_i \times \{i\}$$

La inclusión de  $A_i$  en  $\bigsqcup_{i \in J} A_i$  es el mapa definido como la composición

$$A_i \xrightarrow{\cong} A_i \times \{i\} \hookrightarrow \bigsqcup_{i \in J} A_i$$

- **Top** tiene coproductos: el coproducto es como en **Set**, donde en la unión disjunta se considera la topología final respecto de las inclusiones.
- **R-Mod** tiene coproductos: la suma directa con las inyecciones canónicas.
- Sea  $\mathcal{C}$  un preorden y  $\{x_i\}_{i \in I}$  un conjunto de elementos de  $\mathcal{C}$ . Entonces  $\coprod_{i \in I} x_i = \sup_{i \in I} x_i$  si es que existe. Por lo tanto  $\mathcal{C}$  tiene coproductos si y sólo si tiene supremos.

Un caso particular de coproducto es una *copotencia*. Una *copotencia* es el colímite de un diagrama constante  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ , donde  $J$  es discreta. Si  $A = D_j$  para todo  $j \in J$ , decimos que el objeto colímite es la *J-copotencia de A*, que designamos por  $\coprod_{j \in J} A$ . Observar que la *J-copotencia de A* es la *J-potencia de A* en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .

Diremos que una categoría  $\mathcal{C}$  *tiene copotencias* si  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  tiene potencias.

*Observación 1.4.19.* Las observaciones 1.4.16 y 1.4.17 sobre productos se dualizan sin dificultades a observaciones sobre coproductos.

## Pullbacks

*Ejemplo 1.4.20.* Consideremos el conjunto  $\{1, 2, 3\}$  con el preorden  $\leq$  definido por  $1 \leq 3$ ,  $2 \leq 3$ . Designemos por  $J$  a la categoría asociada, y sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Un *pullback* en  $\mathcal{C}$  es el límite de un diagrama  $J \rightarrow \mathcal{C}$ .

Observar que un cono para el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc}
 A & & \\
 & \searrow f & \\
 & & C \\
 & \nearrow g & \\
 B & & 
 \end{array}
 \tag{1.17}$$

es un objeto  $D$  y flechas  $p_A : D \rightarrow A$ ,  $p_B : D \rightarrow B$ ,  $p_C : D \rightarrow C$  que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & \nearrow p_A & & \searrow f & \\
 D & & & & C \\
 & \searrow p_B & & \nearrow g & \\
 & & B & & 
 \end{array}$$

Se tiene entonces que  $f p_A = p_C = g p_B$ . Esto nos permite prescindir de la flecha  $p_C$ , y decir que un cono para el diagrama (1.17) es un objeto  $D$  y un par de flechas  $p_A : D \rightarrow A$  y  $p_B : D \rightarrow B$  que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{p_B} & B \\
 p_A \downarrow & & \downarrow g \\
 A & \xrightarrow{f} & C
 \end{array}$$

De esta forma, el pullback del siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$

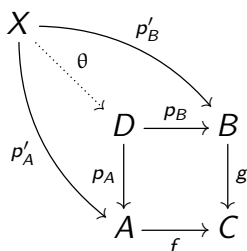
$$\begin{array}{ccc}
 & & B \\
 & & \downarrow g \\
 A & \xrightarrow{f} & C
 \end{array}$$

es un objeto  $D$  y un par de flechas  $p_A : D \rightarrow A$ ,  $p_B : D \rightarrow B$  que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{p_B} & B \\
 p_A \downarrow & & \downarrow g \\
 A & \xrightarrow{f} & C
 \end{array}
 \tag{1.18}$$

y cumplen que para todo otro objeto  $X$  con flechas  $p'_A : X \rightarrow A$  y  $p'_B : X \rightarrow B$  que cumplen

$f p'_A = g p'_B$ , existe una única  $\theta : X \rightarrow D$  que hace conmutar el siguiente diagrama:



En esta situación, decimos que el diagrama conmutativo (1.18) es un *cuadrado pullback*.

Diremos que una categoría *tiene pullbacks* si es  $J$ -completa, donde  $J$  es como antes.

- **Set** tiene pullbacks: si  $f : A \rightarrow C$  y  $g : B \rightarrow C$  son funciones, entonces el objeto pullback de  $f$  y  $g$  es el subconjunto del producto cartesiano  $A \times B$  dado por  $D = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = g(b)\}$ . Sus flechas son  $\pi_A|_D : D \rightarrow A$  donde  $\pi_A : A \times B \rightarrow A$  es la proyección canónica, y  $\pi_B|_D : D \rightarrow B$  definida análogamente. En particular, sea  $f : A \rightarrow C$  una función, y  $B \subset C$  un subconjunto. Entonces el objeto pullback de  $f$  y la inclusión de  $B$  en  $C$  es  $f^{-1}(B)$ . Si además  $A \subset C$  y  $f$  es la inclusión, entonces el objeto pullback de las inclusiones de  $A$  y  $B$  en  $C$  es la intersección  $A \cap B$ .

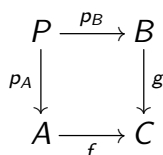
- **Top** tiene pullbacks: si  $f : A \rightarrow C$  y  $g : B \rightarrow C$  son funciones continuas, entonces el pullback es como en **Set**, donde la topología en  $D$  es la topología inicial respecto de los mapas  $\pi_A|_D$  y  $\pi_B|_D$ .

- **R-Mod** tiene pullbacks: se observa que el pullback de dos morfismos de módulos  $f : A \rightarrow C$  y  $g : B \rightarrow C$  es como en **Set**, resultando el objeto pullback un submódulo de  $A \times B$  y sus flechas, morfismos de módulos.

En particular, el objeto pullback de  $f : A \rightarrow B$  y de  $0 : 0 \rightarrow B$  es isomorfo al núcleo de  $f$ ,  $\ker f$ , y el pullback de inclusiones de submódulos es la intersección de los submódulos.

- Sea  $\mathcal{C}$  un preorden y  $a, b, c \in \mathcal{C}$ . Si  $a \leq c$  y  $b \leq c$ , entonces el pullback es  $\inf \{a, b\}$  si es que existe. Por lo tanto un preorden tiene pullbacks si y sólo si tiene ínfimos binarios.

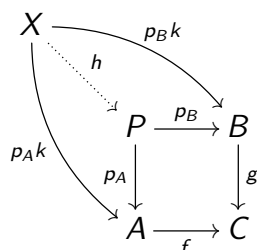
**Proposición 1.4.21.** *Consideremos el siguiente cuadrado pullback:*



Si  $f$  (resp.  $g$ ) es un monomorfismo, entonces  $p_B$  (resp.  $p_A$ ) es un monomorfismo.

*Demostración.* Basta probar que si  $f$  es un monomorfismo entonces  $p_B$  también lo es. Supongamos entonces que  $f$  es un monomorfismo.

Sean  $j, k : X \rightarrow P$  tales que  $p_B j = p_B k$ . Las flechas  $p_A k$  y  $p_B k$  hacen conmutar el siguiente diagrama:



pues  $f p_A = g p_B$  y entonces  $f p_A k = g p_B k$ . Por lo tanto existe una única  $h$  que hace conmutar el diagrama. Veamos que tanto  $j$  como  $k$  hacen conmutar el diagrama, concluyendo entonces que  $j = k$  y que  $p_B$  es un monomorfismo. Sólo falta ver que  $p_A j = p_A k$ .

Como  $f p_A = g p_B$ , entonces  $f p_A j = g p_B j = g p_B k = f p_A k$  ya que  $p_B j = p_B k$ . Como  $f$  es un monomorfismo, esto implica que  $p_A j = p_A k$ . □

**Lema 1.4.22.** Una flecha  $f : A \rightarrow B$  es un monomorfismo si y sólo si el siguiente diagrama es un cuadrado pullback:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\text{id}_A} & A \\
 \text{id}_A \downarrow & & \downarrow f \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array} \tag{1.19}$$

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Sea  $g, h : X \rightarrow A$  que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{h} & A \\
 q \swarrow & & \downarrow \text{id}_A \\
 & & A \\
 g \searrow & & \downarrow f \\
 & & B
 \end{array} \tag{1.20}$$

Si  $q$  hace conmutar el diagrama, entonces debe tenerse  $q = g$ , y  $g$  efectivamente hace conmutar el diagrama pues como  $f g = f h$  y  $f$  es un monomorfismo, entonces  $g = h$ . Por lo tanto el diagrama (1.19) es un cuadrado pullback.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $g, h : X \rightarrow A$  son tales que  $f g = f h$ . Entonces existe una única  $q : X \rightarrow A$  que hace conmutar el diagrama (1.20). Por lo tanto  $g = h$ , y  $f$  es un monomorfismo. □

**Corolario 1.4.23.** Si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor que preserva límites, entonces  $F$  preserva monomorfismos.

*Demostración.* Sea  $f : A \rightarrow B$  un monomorfismo de  $\mathcal{C}$ . Entonces el diagrama (1.19) es un cuadrado pullback. Como  $F$  preserva límites, entonces el siguiente diagrama también es un cuadrado pullback:

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\text{id}_{FA}} & FA \\ \text{id}_{FA} \downarrow & & \downarrow Ff \\ FA & \xrightarrow{Ff} & FB \end{array}$$

de donde  $Ff$  es un monomorfismo. □

### Pushouts

*Ejemplo 1.4.24.* Consideremos el conjunto  $\{1, 2, 3\}$  con el preorden  $\leq$  definido por  $1 \leq 2$ ,  $1 \leq 3$ . Designemos por  $J$  a la categoría asociada, y sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Un *pushout* en  $\mathcal{C}$  es el colímite de un diagrama  $J \rightarrow \mathcal{C}$ .

Por una discusión análoga a la realizada en la definición de pullback, el pushout del siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \\ C & & \end{array}$$

es un objeto  $D$  y un par de flechas  $i_B : B \rightarrow D$  e  $i_C : C \rightarrow D$  que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow i_B \\ C & \xrightarrow{i_C} & D \end{array} \quad (1.21)$$

y cumplen que para todo otro objeto  $Y$  con flechas  $i'_B : B \rightarrow Y$  e  $i'_C : C \rightarrow Y$  que cumplen  $i'_B f = i'_C g$ , existe una única  $\theta : D \rightarrow Y$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow i_B \\ C & \xrightarrow{i_C} & D \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow i'_B \\ \theta \\ \swarrow i'_C \\ Y \end{array}$$

En esta situación, decimos que el diagrama conmutativo (1.21) es un *cuadrado pushout*.



Observar que un pushout en  $\mathcal{C}$  es un pullback en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .

Diremos que una categoría *tiene pushouts* si es  $J$ -cocompleta, donde  $J$  es como antes.

- **Set** tiene pushouts: si  $f : A \rightarrow B$  y  $g : A \rightarrow C$  son funciones, entonces el objeto pushout de  $f$  y  $g$  -que llamaremos  $D$ - es el cociente de la unión disjunta  $B \sqcup C$  por la relación de equivalencia  $\sim$  generada por  $(f(x), 0) \sim (g(x), 1)$ . Los mapas correspondientes son las inyecciones canónicas  $B \rightarrow B \sqcup C$ ,  $C \rightarrow B \sqcup C$  compuestas con el mapa cociente  $\pi : B \sqcup C \rightarrow D$ .

En particular, si tomamos dos conjuntos  $B$  y  $C$  y tomamos  $A = B \cap C$ , entonces el pushout de las inclusiones de  $B \cap C$  en  $B$  y en  $C$  es la unión  $B \cup C$ .

- **Top** tiene pushouts: si  $f : A \rightarrow B$  y  $g : A \rightarrow C$  son funciones continuas, entonces el pushout es como en **Set**, donde la topología en  $D$  es la topología final respecto de las inyecciones.
- **R-Mod** tiene pushouts: el objeto pushout de  $f : A \rightarrow B$  y  $g : A \rightarrow C$  es el cociente del coproducto  $B \oplus C$  por el submódulo  $S = \{(f(a), -g(a)) \in B \oplus C : a \in A\}$ . Los mapas son las inyecciones canónicas  $B \rightarrow B \oplus C$ ,  $C \rightarrow B \oplus C$  compuestas con el mapa cociente  $B \oplus C \rightarrow \frac{B \oplus C}{S}$ .

En particular, el objeto pushout de  $f : A \rightarrow B$  y de  $0 : A \rightarrow 0$  es  $\text{coker } f = B / \text{Im } f$ .

En este caso, si  $A = B \cap C$  y  $B, C \subset M$  son submódulos, el pushout de las inclusiones de  $B \cap C$  en  $B$  y en  $C$  no es la unión  $B \cup C$  (pues no es en general un  $R$ -módulo), sino el *submódulo generado* por la unión  $B \cup C$ , es decir, el *submódulo suma*  $B + C \subset M$ .

- Sea  $\mathcal{C}$  un preorden y  $a, b, c \in \mathcal{C}$ . Si  $a \leq b$  y  $a \leq c$ , entonces el pushout es  $\sup \{b, c\}$  si es que existe. Por lo tanto un preorden tiene pushouts si y sólo si tiene supremos binarios.

Los resultados 1.4.21, 1.4.22 y 1.4.23 sobre pullbacks se dualizan sin dificultades a resultados sobre pushouts.

## Igualadores

*Ejemplo 1.4.25.* Consideremos la categoría  $J$  que consta de dos objetos  $\{\cdot, \star\}$  y dos flechas  $\cdot \rightarrow \star$ , además de las identidades. Pictóricamente, podemos representar a  $J$  como  $\cdot \rightrightarrows \star$ . Un *igualador* en una categoría  $\mathcal{C}$  es el límite de un diagrama  $J \rightarrow \mathcal{C}$ .

Observar que un cono para el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ & B & \end{array} \quad (1.22)$$

es un objeto  $E$  y flechas  $i : E \rightarrow A$ ,  $j : E \rightarrow B$  que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & i \nearrow & \parallel \\ E & & f \\ & j \searrow & \parallel \\ & & B \\ & & g \end{array}$$

Se tiene entonces que  $fi = j = gi$ . Esto nos permite prescindir de la flecha  $j$ , y decir que un cono para el diagrama (1.22) es un objeto  $E$  y una flecha  $i : E \rightarrow A$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & i \nearrow & \parallel \\ E & & f \\ & & \parallel \\ & & B \\ & & g \end{array}$$

De esta forma, el igualdor del siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

es un objeto  $E$  y un mapa  $i : E \rightarrow A$  tal que  $fi = gi$ , y cumple que para todo otro objeto  $X$  con flecha  $i' : X \rightarrow A$  tal que  $fi' = gi'$ , existe una única  $\theta : X \rightarrow E$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \\ \uparrow \theta & \nearrow i' & \\ X & & \end{array}$$

Diremos que una categoría *tiene igualadores* si es  $J$ -completa, donde  $J$  es como antes.

- **Set** tiene igualadores: el igualador de  $f, g : A \rightarrow B$  es  $E = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$  con la inclusión  $i : E \rightarrow A$ .
- **Top** tiene igualadores: el igualador de dos funciones continuas  $f, g : A \rightarrow B$  es como en **Set**, donde  $E$  hereda la topología de  $A$ , de manera que  $i$  es continua.
- **R-Mod** tiene igualadores: el igualador de dos mapas  $f, g : A \rightarrow B$  es el submódulo  $E = \{a \in A : f(a) = g(a)\} = \ker(f - g) \subset A$  con la inclusión  $i : E \rightarrow A$  que es un morfismo de módulos. En particular, el objeto igualador de  $f : A \rightarrow B$  con  $0 : A \rightarrow B$  es  $\ker f$ .
- Sea  $\mathcal{C}$  un preorden. En este caso, dos flechas paralelas son necesariamente la misma. El igualador de  $a \leq b$  es un elemento  $e$  tal que  $e \leq a$  y tal que si  $x \leq a$  entonces  $x \leq e$ ; es decir,  $e = \inf \{a\}$ . Observar que tomando  $x = a$  se consigue  $a \leq e$ , y por lo tanto  $e \simeq a$ . Si  $\mathcal{C}$  es un orden parcial se tiene  $e = a$ .

**Proposición 1.4.26.** Sean  $f, g : A \rightarrow B$  y sea  $(E, i : E \rightarrow A)$  su igualador. Entonces  $i$  es un monomorfismo.

*Demostración.* Sean  $h_1, h_2 : X \rightarrow E$  tales que  $ih_1 = ih_2$ . Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{i} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B \\ \begin{array}{c} \uparrow h_1 \\ \uparrow h_2 \end{array} & & \nearrow ih_1 & & \\ X & & & & \end{array}$$

La propiedad definitoria del igualador implica que  $h_1 = h_2$ , y por lo tanto  $i$  es un monomorfismo.  $\square$

## Coigualadores

*Ejemplo 1.4.27.* Consideremos la categoría  $J$  representada por  $\cdot \rightrightarrows \star$ . Un *coigualador* en una categoría  $\mathcal{C}$  es el colímite de un diagrama  $J \rightarrow \mathcal{C}$ .

Por una discusión análoga a la realizada en la definición de igualador, el coigualador del siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

es un objeto  $C$  y un mapa  $p : B \rightarrow C$  tal que  $pf = pg$ , y cumple que para todo otro objeto  $Y$  con flecha  $p' : B \rightarrow Y$  tal que  $p'f = p'g$ , existe una única  $\theta : C \rightarrow Y$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B & \xrightarrow{p} & C \\ & \searrow p' & \downarrow \theta \\ & & Y \end{array}$$

Observar que un coigualador en  $\mathcal{C}$  es un igualador en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .

Diremos que una categoría *tiene coigualadores* si es  $J$ -cocompleta, donde  $J$  es como antes.

1. **Set** tiene coigualadores: el coigualador de dos funciones  $f, g : A \rightarrow B$  es  $C = B / \sim$ , donde  $\sim$  es la relación de equivalencia generada por  $f(a) \sim g(a)$  para todo  $a \in A$ , con el mapa cociente  $B \rightarrow C$ .
2. **Top** tiene coigualadores: el coigualador de dos funciones  $f, g : A \rightarrow B$  es como en **Set**, donde  $C$  tiene la topología final respecto del mapa cociente  $B \rightarrow C$ .
3. **R-Mod** tiene coigualadores: el coigualador de dos mapas  $f, g : A \rightarrow B$  es  $C = \frac{B}{\text{Im}(f-g)}$  con el mapa cociente  $p : B \rightarrow C$ . En particular, el objeto coigualador de  $f : A \rightarrow B$  con  $0 : A \rightarrow B$  es coker  $f$ .

4. Sea  $\mathcal{C}$  un preorden. El coigualador de  $a \leq b$  es un elemento  $c$  tal que  $b \leq c$  y tal que si  $b \leq x$  entonces  $c \leq x$ ; es decir,  $c = \sup \{b\}$ . Observar que tomando  $x = b$  se consigue  $c \leq b$ , y por lo tanto  $c \simeq b$ . Si  $\mathcal{C}$  es un orden parcial se consigue  $c = b$ .

*Observación 1.4.28.* La proposición 1.4.26 sobre igualadores se dualiza sin dificultades a una proposición sobre coigualadores.

### 1.4.3. Preservación, reflexión y creación de límites

**Definición 1.4.29.** Sea  $J$  una categoría pequeña. Decimos que un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  *preserva límites de tipo  $J$*  si para cada diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  cuyo límite  $(\varprojlim D, \lambda_j)$  existe, se tiene que  $(F \varprojlim D, F\lambda_j)$  es el límite del diagrama  $FD : J \rightarrow \mathcal{D}$ . Decimos que  $F$  *preserva límites* si preserva límites de tipo  $J$  para toda categoría pequeña  $J$ .

Dualmente, decimos que un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  *preserva colímites de tipo  $J$*  si  $F^{\text{op}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$  preserva límites de tipo  $J$ ; es decir, si para cada diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  cuyo colímite  $(\varinjlim D, \lambda_j)$  existe, se tiene que  $(F \varinjlim D, F\lambda_j)$  es el colímite del diagrama  $FD : J \rightarrow \mathcal{D}$ . Decimos que  $F$  *preserva colímites* si preserva colímites de tipo  $J$  para toda categoría pequeña  $J$ .

Decimos que un functor contravariante  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  *lleva colímites de tipo  $J$  en límites de tipo  $J$*  si  $F$  considerado como functor covariante  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$  preserva límites de tipo  $J$ . Decimos que  $F$  *lleva colímites en límites* si  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$  preserva límites.

Dualmente, decimos que un functor contravariante  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  *lleva límites de tipo  $J$  en colímites de tipo  $J$*  si  $F$  considerado como functor covariante  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$  preserva colímites de tipo  $J$ . Decimos que  $F$  *lleva límites en colímites* si  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$  preserva colímites.

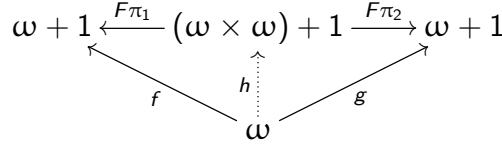
*Observación 1.4.30.* Para que un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  preserve límites no es suficiente que cumpla  $F \varprojlim D \simeq \varprojlim FD$  para todo diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  con límite en  $\mathcal{C}$ : la condición de que las flechas del límite sean respetadas es necesaria, como muestra el siguiente ejemplo.

Sea  $\mathcal{C}$  la subcategoría plena de **Set** cuyos objetos son los conjuntos infinitos numerables. Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  el functor *sucesor*, definido como  $F(X) = X \cup \{X\}$  para cada  $X \in \mathcal{C}$ , y si  $f : X \rightarrow Y$  entonces  $Ff : X \cup \{X\} \rightarrow Y \cup \{Y\}$  es  $Ff(x) = f(x)$  si  $x \in X$ , y  $Ff(X) = Y$ . Llamémosle  $X + 1$  a  $F(X)$ .

Como el producto cartesiano de dos conjuntos infinitos numerables es infinito numerable, entonces  $\mathcal{C}$  tiene productos binarios. Veamos que  $F$  no los preserva, pero se tiene que  $F(X \times Y) \simeq F(X) \times F(Y)$ . Esto último es cierto pues todos los conjuntos infinitos numerables tienen el mismo cardinal.

Sea  $\omega$  el conjunto de los naturales, y consideremos el producto  $(\omega \times \omega, \pi_1, \pi_2)$ . Veamos que  $(F(\omega \times \omega), F\pi_1, F\pi_2)$  no satisface la propiedad definitoria del producto.

Sea  $f : \omega \rightarrow \omega + 1$  definida mediante  $f(n) = 0$  para todo  $n \in \omega$ , y sea  $g : \omega \rightarrow \omega + 1$  definida mediante  $g(n) = \omega$  para todo  $n \in \omega$ .



No puede existir una flecha  $h : \omega \rightarrow (\omega \times \omega) + 1$  que haga conmutar el diagrama anterior. Si existiera una tal  $h$ , entonces  $F\pi_1(h(0)) = f(0) = 0$  y por lo tanto  $h(0) \in \omega \times \omega$ , pues si fuera  $h(0) = \omega \times \omega$  entonces se tendría  $F\pi_1(h(0)) = \omega$ .

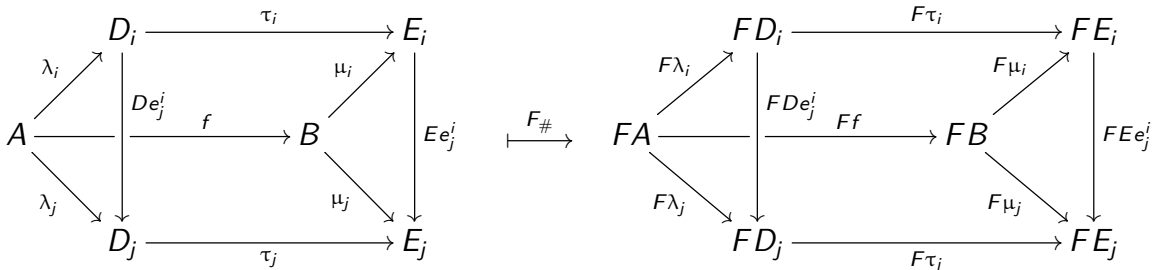
Por otro lado,  $F\pi_2(h(0)) = g(0) = \omega$ , de donde  $h(0) = \omega \times \omega$ , pues si fuera  $h(0) \in \omega \times \omega$ , entonces se tendría  $F\pi_2(h(0)) \in \omega$ .

En conclusión, si existiera una tal  $h$  se tendría  $h(0) \in \omega \times \omega$  y  $h(0) = \omega \times \omega$ , llegando a una contradicción.

Sin embargo, hay una condición adicional a la preservación del objeto límite que permite concluir que un functor preserva límites, en el caso en que las categorías involucradas sean completas. En el artículo [5] se demuestra que si un functor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  entre categorías completas cumple  $G(\varprojlim D) \simeq \varprojlim GD$  mediante un isomorfismo natural en  $D \in \mathcal{C}^J$ , para toda categoría pequeña  $J$ , entonces  $G$  preserva límites.

*Observación 1.4.31.* Para un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre categorías  $J$ -completas podemos interpretar la condición de preservar límites de tipo  $J$  como cierto diagrama conmutativo. Para ello precisamos definir un par de funtores auxiliares que utilizan los conceptos introducidos en la definición 1.4.9.

Si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor, definimos  $F_* : \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{D}^J$  como  $F_*(D) = FD$  y  $F_*(\tau) = F\tau$ . Definimos  $F_\# : DK_J(\mathcal{C}) \rightarrow DK_J(\mathcal{D})$  como sigue:



Estos funtores se relacionan mediante el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} DK_J(\mathcal{C}) & \xrightarrow{F_{\#}} & DK_J(\mathcal{D}) \\ U_{\mathcal{C}} \downarrow & & \downarrow U_{\mathcal{D}} \\ \mathcal{C}^J & \xrightarrow{F_*} & \mathcal{D}^J \end{array}$$

Si  $\mathcal{C}$  es  $J$ -completa, entonces existe un functor  $\varprojlim : \mathcal{C}^J \rightarrow DK_J(\mathcal{C})$ , que se define como sigue:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} i & & \\ \downarrow e_j^i & & \\ j & & \end{array} & \begin{array}{ccc} D_i & \xrightarrow{\tau_i} & E_i \\ D e_j^i \downarrow & & \downarrow E e_j^i \\ D_j & \xrightarrow{\tau_j} & E_j \end{array} & \xrightarrow{\varprojlim} & \begin{array}{ccccc} & D_i & \xrightarrow{\tau_i} & E_i & \\ \ell_i \nearrow & \downarrow D e_j^i & \xrightarrow{\varprojlim \tau} & \downarrow E e_j^i & \ell'_i \nearrow \\ \varprojlim D & \cdots & \varprojlim E & \cdots & \\ \ell_j \searrow & \downarrow D_j & \xrightarrow{\tau_j} & \downarrow E_j & \ell'_j \searrow \end{array} \end{array}$$

donde  $\varprojlim \tau$  es la única que hace conmutar el diagrama (como en el lema 1.4.6).

Observar que  $U_{\mathcal{C}} \circ \varprojlim = \text{id}_{\mathcal{C}^J}$ .

Si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son  $J$ -completas, entonces  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  preserva límites de tipo  $J$  si y sólo si conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^J & \xrightarrow{F_*} & \mathcal{D}^J \\ \varprojlim \downarrow & & \downarrow \varprojlim \\ DK_J(\mathcal{C}) & \xrightarrow{F_{\#}} & DK_J(\mathcal{D}) \end{array}$$

**Definición 1.4.32.** Sea  $J$  una categoría pequeña. Decimos que un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  *refleja límites de tipo  $J$*  si para cada diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  y cada cono  $(C, \lambda_i)$  para  $D$  tal que  $(FC, F\lambda_i)$  es el límite de  $FD$  se tiene que  $(C, \lambda_i)$  es el límite de  $D$ . Decimos que un functor *refleja límites* si refleja límites de tipo  $J$  para toda categoría pequeña  $J$ .

Dualmente, decimos que un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  *refleja colímites de tipo  $J$*  si  $F^{\text{op}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$  refleja límites de tipo  $J$ , y decimos que *refleja colímites* si refleja colímites de tipo  $J$  para toda categoría pequeña  $J$ .

*Observación 1.4.33.* Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un functor. Entonces:

- $F$  preserva límites si y sólo si para todo  $D \in \mathcal{C}^J$  y todo cono  $(C, \lambda_i)$  de  $D$  se tiene:

$$(C, \lambda_i) = \varprojlim D \Rightarrow (FC, F\lambda_i) = \varprojlim FD$$

- $F$  refleja límites si y sólo si para todo  $D \in \mathcal{C}^J$  y todo cono  $(C, \lambda_i)$  de  $D$  se tiene:

$$(FC, F\lambda_i) = \varprojlim FD \Rightarrow (C, \lambda_i) = \varprojlim D$$

**Definición 1.4.34.** Sea  $J$  una categoría pequeña. Decimos que un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  *crea límites de tipo  $J$*  si para cada diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $FD$  tiene límite existe un único cono  $(C, \lambda_i)$  para  $D$  (a menos de isomorfismo) tal que  $(FC, F\lambda_i)$  es el límite de  $FD$ , y además  $(C, \lambda_i)$  es el límite de  $D$ .<sup>15</sup> Decimos que  $F$  *crea límites* si crea límites de tipo  $J$  para toda categoría pequeña  $J$ .

Dualmente, decimos que un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  *crea colímites de tipo  $J$*  si el functor  $F^{\text{op}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$  crea límites de tipo  $J$ , y decimos que *crea colímites* si crea colímites de tipo  $J$  para toda categoría pequeña  $J$ .

*Observación 1.4.35.* Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un functor que crea límites de tipo  $J$ . Se verifica automáticamente que:

- $F$  refleja límites de tipo  $J$ ,
- si  $\mathcal{D}$  es  $J$ -completa, entonces  $F$  preserva límites de tipo  $J$  y  $\mathcal{C}$  es  $J$ -completa.

En particular, si  $\mathcal{D}$  es completa y  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  crea límites, entonces  $\mathcal{C}$  es completa y  $F$  preserva y refleja límites.

Recíprocamente, si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  preserva y refleja límites y para todo  $D \in \mathcal{C}^J$  tal que  $FD$  tiene límite se tiene que  $D$  tiene límite, entonces  $F$  crea límites.

En efecto, sea  $D \in \mathcal{C}^J$  tal que  $FD$  tiene límite, de manera que  $D$  tiene límite  $(C, \lambda_i)$ . Como  $F$  preserva límites, entonces  $(FC, F\lambda_i)$  es el límite de  $FD$ . Además, si  $(C', \lambda'_i)$  es otro cono para  $D$  tal que  $(FC', F\lambda'_i)$  es un cono límite de  $FD$ , entonces como  $F$  refleja límites debe ser  $(C', \lambda'_i)$  límite de  $D$ , de donde  $(C, \lambda_i)$  y  $(C', \lambda'_i)$  deben ser isomorfos. Por lo tanto  $F$  crea límites.

En conclusión, si  $\mathcal{D}$  es completa entonces  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  crea límites si y sólo si  $F$  preserva y refleja límites y para todo  $D \in \mathcal{C}^J$  tal que  $FD$  tiene límite se tiene que  $D$  tiene límite. En esta situación,  $\mathcal{C}$  también resulta completa.

Si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son completas, entonces  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  crea límites si y sólo si  $F$  preserva y refleja límites.

#### 1.4.4. En categorías completas

El siguiente teorema nos dice que a partir de la existencia de ciertos límites particulares podemos construirlos todos.

<sup>15</sup> La definición de [15] es más restringida pues exige que exista un *único* cono para  $D$  tal que su imagen por  $F$  sea el límite de  $FD$ . Según nuestra definición este cono puede ser *único a menos de isomorfismo*.

**Teorema 1.4.36.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Si  $\mathcal{C}$  tiene productos e igualadores, entonces  $\mathcal{C}$  es completa. Dualmente, si  $\mathcal{C}$  tiene coproductos y coigualadores, entonces  $\mathcal{C}$  es cocompleta.*

*Demostración.* Ver [15, teorema V.2.1]. □

De la demostración del teorema anterior se deduce el siguiente corolario [1, proposición 13.4]:

**Corolario 1.4.37.** *Si  $\mathcal{C}$  es completa y  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor que preserva productos e igualadores, entonces  $F$  preserva límites. Dualmente, si  $\mathcal{C}$  es cocompleta y  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor que preserva coproductos y coigualadores, entonces  $F$  preserva colímites.*

*Ejemplo 1.4.38.* Deducimos del teorema 1.4.36 que **Set**, **Top** y **R-Mod** son completas y cocompletas. De todas formas, podemos dar una expresión explícita para sus límites y colímites.

El límite de un diagrama  $D : J \rightarrow \mathbf{Set}$  es

$$\varprojlim D = \left\{ (x_i) \in \prod_{i \in J} D_i : D e_j^i(x_i) = x_j \text{ para toda flecha } e_j^i : i \rightarrow j \text{ de } J \right\} \quad (1.23)$$

con flechas  $\lambda_j : \varprojlim D \rightarrow D_j$  que son la inclusión  $\varprojlim D \rightarrow \prod_{i \in J} D_i$  compuesta con la proyección  $\prod_{i \in J} D_i \rightarrow D_j$ .

El límite de un diagrama en **Top** es como en **Set**, donde en el objeto límite se considera la topología inicial respecto de las funciones  $\lambda_j$ .

El límite de un diagrama en **R-Mod** se obtiene de la misma forma que en **Set**: se observa que (1.23) es un submódulo de  $\prod_{i \in J} D_i$  (donde  $\prod_{i \in J} D_i$  es el producto de **R-Mod**), y que las flechas  $\lambda_j$  resultan morfismos de  $R$ -módulos.

Por lo tanto, los funtores de olvido  $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  y  $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  preservan límites. Se puede verificar que de hecho el functor de olvido de **R-Mod** crea límites<sup>16</sup>, mientras que esto no es cierto para el functor de olvido de **Top**.<sup>17</sup>

El colímite de un diagrama  $D : J \rightarrow \mathbf{Set}$  es  $\varinjlim D = \left( \bigsqcup_{i \in J} D_i \right) / \sim$ , donde  $\sim$  es la relación de equivalencia en  $\bigsqcup_{i \in J} D_i$  generada por  $\iota_j D e_j^i(x_i) \sim \iota_i(x_i)$ , con  $(x_i, i) \in \bigsqcup_{i \in J} D_i$  y  $e_j^i : i \rightarrow j$  flecha de  $J$ . Los mapas son las inyecciones  $\iota_j : D_j \rightarrow \bigsqcup_{i \in J} D_i$  seguidas del mapa cociente  $\bigsqcup_{i \in J} D_i \rightarrow \varinjlim D$ .

<sup>16</sup> Ver [15, teorema 3] para una demostración en el caso del functor de olvido de **Grp**, que se adapta *mutatis mutandis*. <sup>17</sup> Si  $\{X_i\}_{i \in I}$  es una familia de espacios topológicos, entonces en el producto cartesiano  $\prod_{i \in I} X_i$  podemos poner la *topología caja* que tiene como base a los productos de abiertos. Esta topología es en general más fina que la topología producto si  $I$  es infinito. Por lo tanto  $U$  no refleja productos, y en particular no crea límites.



El colímite de un diagrama en **Top** es como en **Set**, donde en el objeto colímite se considera la topología final respecto de las funciones  $\lambda_j$ .

El colímite de un diagrama en **R-Mod** se *construye* de la misma forma, reemplazando la unión disjunta por la suma directa, y considerando el cociente de ésta por el submódulo  $S \subset \bigoplus_{i \in J} D_i$  generado por los elementos de la forma  $\iota_j D e_j^i(x_i) - \iota_i(x_i)$ , con  $(x_i) \in \bigoplus_{i \in J} D_i$  y  $e_j^i : i \rightarrow j$  flecha de  $J$ .

Por lo tanto, el functor de olvido  $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva colímites, pero no es el caso para el functor de olvido  $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ . Por ejemplo, si  $\{M_i\}_{i \in J}$  es una familia de  $R$ -módulos, entonces  $U(\bigoplus_{i \in J} M_i)$  es un cierto conjunto que no es la unión disjunta  $\bigsqcup_{i \in J} M_i$ .

### 1.4.5. Los funtores Hom preservan límites

**Teorema 1.4.39.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $C \in \mathcal{C}$ . El functor  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva límites. Dualmente, el functor contravariante  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  lleva colímites en límites.*

*Demostración.* Para alivianar la notación, escribamos  $H_C := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$ .

Sea  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  un diagrama cuyo límite  $(\varprojlim D, \lambda_i)$  existe, de manera que el siguiente diagrama conmuta para toda flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & & D_i \\
 & \nearrow \lambda_i & \downarrow D e_j^i \\
 \varprojlim D & & D_j \\
 & \searrow \lambda_j & \\
 & & 
 \end{array} \tag{1.24}$$

Como **Set** es completa, el diagrama  $H_C D : J \rightarrow \mathbf{Set}$  tiene límite  $(\varprojlim H_C D, \beta_i)$  (ver ejemplo 1.4.38 para una descripción de los límites en **Set**).

$$\begin{array}{ccc}
 & & H_C(D_i) \\
 & \nearrow \beta_i & \downarrow (D e_j^i)_* \\
 \varprojlim H_C D & & H_C(D_j) \\
 & \searrow \beta_j & \\
 & & 
 \end{array}$$

Debemos probar que  $(\varprojlim H_C D, \beta_i)$  es isomorfo a  $(H_C(\varprojlim D), \lambda_{i*})$  en la categoría de conos sobre el diagrama  $H_C D$ . En virtud de la observación 1.4.2, esto significa que debemos

probar existe un isomorfismo en **Set** (i.e. una biyección)

$$H_C(\varprojlim D) \xrightarrow[\simeq]{\theta} \varprojlim H_C D$$

que hace conmutar los siguientes diagramas para todo  $j \in I$ :

$$\begin{array}{ccc} & & H_C(D_i) \\ & \nearrow^{(\lambda_i)_*} & \\ H_C(\varprojlim D) & \xrightarrow{\theta} & \varprojlim H_C D \\ & \searrow_{\beta_i} & \end{array} \quad (1.25)$$

Definimos  $\theta : H_C(\varprojlim D) \rightarrow \varprojlim H_C D$  como  $\theta(f) = (\lambda_i f)$ . Está definida, pues  $(\lambda_i f) \in \prod_{i \in I} H_C(D_i)$  cumple

$$(De_j^i)_*(\lambda_i f) = De_j^i \lambda_i f = \lambda_j f \quad (\text{comparar con (1.23)})$$

para toda flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ , y por lo tanto  $(\lambda_i f) \in \varprojlim H_C D$ .

También se tiene que

$$\beta_j \theta(f) = \beta_j((\lambda_i f)) = \lambda_j f = (\lambda_j)_*(f)$$

para toda  $f \in H_C(\varprojlim D)$ , de donde  $\beta_j \theta = (\lambda_j)_*$  para todo  $j \in I$ , probando entonces la conmutatividad de los diagramas (1.25).

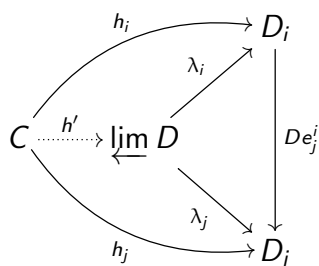
$\theta$  es inyectiva: supongamos que  $\theta(f) = \theta(g)$ . Entonces  $(\lambda_i f) = (\lambda_i g)$ , de donde  $\lambda_i f = \lambda_i g$  para todo  $i \in I$ .

$$\begin{array}{ccc} & & D_i \\ & \nearrow^{\lambda_i f} & \\ C & \xrightarrow[f]{g} & \varprojlim D \\ & \searrow_{\lambda_j f} & \\ & & D_j \end{array} \quad \begin{array}{c} \lambda_i \\ \lambda_j \\ De_j^i \end{array}$$

Se tiene  $De_j^i \lambda_i f = \lambda_j f$  por la conmutatividad de (1.24). Entonces debe existir una única flecha  $h : C \rightarrow \varprojlim D$  que cumpla  $\lambda_i f = \lambda_i h$ . Pero lo cumplen tanto  $f$  como  $g$ , luego  $f = g$ .

$\theta$  es sobreyectiva: sea  $h \in \varprojlim H_C D$ . Entonces  $h = (h_i : C \rightarrow D_i)_{i \in I}$  donde  $h_j = (De_j^i)_*(h_i)$  para toda flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ . Es decir,  $h_j = De_j^i h_i$ , i.e. el siguiente

diagrama conmuta para toda flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ :



de donde existe una única  $h' : C \rightarrow \varprojlim D$  tal que  $h_i = \lambda_i h'$  para todo  $i \in I$ . Entonces  $h' \in H_C(\varprojlim D)$  cumple que  $\theta(h') = (\lambda_i h') = (h_i) = h$ .

Para ver que el functor  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  lleva colímites en límites, basta observar que lo recién demostrado se aplica a  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(C, -) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ , y que los límites de  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  son los colímites de  $\mathcal{C}$ .  $\square$

# Capítulo 2

## Funtores adjuntos

*The multiple examples, here and elsewhere, of adjoint functors tend to show that adjoints occur almost everywhere in many branches of Mathematics. It is the thesis of this book that a systematic use of all these adjunctions illuminates and clarifies these subjects.*

[15, p. 107]

### 2.1. Definición

**Definición 2.1.1.** Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorías,  $F \begin{matrix} \mathcal{C} \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ \mathcal{D} \end{matrix} G$  funtores y  $\tau$  un isomorfismo natural como en el el diagrama de abajo:

$$\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-)} \\ \cong \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -)} \end{matrix} \mathbf{Set} \quad (2.1)$$

En esta situación, decimos que  $(F, G, \tau)$  es una *adjunción*.

Decimos que  $(F, G)$  es un *par adjunto* de funtores, o que  $F$  es el *adjunto a izquierda* de  $G$ , o que  $G$  es el *adjunto a derecha* de  $F$ , si existe un isomorfismo natural  $\tau$  como en (2.1), i.e. tal que  $(F, G, \tau)$  sea una adjunción.

Decimos que un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un *adjunto a izquierda*, o que *tiene un adjunto a derecha*, si existe  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $(F, G)$  es un par adjunto. Decimos que un functor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  es un *adjunto a derecha*, o que *tiene un adjunto a izquierda* si existe  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $(F, G)$  es un par adjunto.

Explícitamente, la condición de naturalidad de  $\tau : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -)$  significa que para toda  $g : B_1 \rightarrow B_2$  en  $\mathcal{D}$  y  $f : A_2 \rightarrow A_1$  en  $\mathcal{C}$ , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A_2 & B_1 & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, GB_1) \xrightarrow{\tau_{A_1, B_1}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA_1, B_1) \\ \downarrow f & \downarrow g & \downarrow [f^*, (Gg)_*] \\ A_1 & B_2 & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_2, GB_2) \xrightarrow{\tau_{A_2, B_2}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA_2, B_2) \\ & & \downarrow [(Ff)^*, g_*] \end{array}$$

De manera alternativa y en virtud del lema 1.3.6, la existencia de un isomorfismo natural como en (2.1) es equivalente con la existencia para todo  $A \in \mathcal{C}$  y  $B \in \mathcal{D}$  de una biyección

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GB) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, B)^1 \quad (2.2)$$

que es natural en ambas variables.

Esto significa que exista una función  $\tau_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GB) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, B)$  tal que  $\tau_{A,-} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G-) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, -)$  y  $\tau_{-,B} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, GB) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, B)$  sean isomorfismos naturales, para todo  $A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}$ .

En otras palabras, debe ser  $\tau_{A,B}$  una biyección para cada  $A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}$ , y para toda  $g : B_1 \rightarrow B_2$  en  $\mathcal{D}$  y  $f : A_2 \rightarrow A_1$  en  $\mathcal{C}$  los siguientes diagramas deben conmutar:

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GB_1) \xrightarrow{\tau_{A, B_1}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, B_1) \\ \downarrow g & \downarrow (Gg)_* \\ B_2 & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GB_2) \xrightarrow{\tau_{A, B_2}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, B_2) \\ & \downarrow g_* \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A_2 & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, GB) \xrightarrow{\tau_{A_1, B}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA_1, B) \\ \downarrow f & \downarrow f^* \\ A_1 & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_2, GB) \xrightarrow{\tau_{A_2, B}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA_2, B) \\ & \downarrow (Ff)^* \end{array}$$

*Observación 2.1.2.* Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un functor contravariante. Para funtores contravariantes hay dos maneras de darle sentido al concepto de functor adjunto:

- Si tomamos el functor covariante  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ , entonces  $F$  tiene adjunto a derecha si y sólo si existe  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$  tal que, para todo  $A \in \mathcal{C}$  y  $B \in \mathcal{D}$ , se tiene una biyección

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, B) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, GB) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GB, A)$$

natural en ambas variables.

<sup>1</sup> La terminología “adjunción” resulta de la analogía de este isomorfismo con la definición de operador adjunto de un operador  $T : V \rightarrow W$  entre espacios vectoriales. El operador adjunto  $T^*$  es el único que cumple  $\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle$  para todo  $v \in V, w \in W$ .

En este caso decimos que el par  $(F, G)$  de funtores contravariantes es un *par adjunto contravariante a izquierda*.

- Si consideramos el functor covariante  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ , entonces  $F$  tiene un adjunto a derecha si y sólo si existe  $G : \mathcal{D}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que, para todo  $A \in \mathcal{C}$  y  $B \in \mathcal{D}$ , se tiene una biyección

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, FA) = \text{Hom}_{\mathcal{D}^{\text{op}}}(FA, B) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GB)$$

natural en ambas variables.

En este caso decimos que el par  $(F, G)$  de funtores contravariantes es un *par adjunto contravariante a derecha*.

Observar que  $(F, G)$  es un par adjunto contravariante a izquierda (resp. derecha) si y sólo si  $(G, F)$  es un par adjunto contravariante a izquierda (resp. derecha).

*Observación 2.1.3.* Un par adjunto no determina una única adjunción:

Dada una categoría  $\mathcal{C}$ , el functor identidad  $\text{id}_{\mathcal{C}}$  nos da un ejemplo trivial de un par adjunto:  $(\text{id}_{\mathcal{C}}, \text{id}_{\mathcal{C}})$ , considerando  $\text{id} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \text{id}_{\mathcal{C}}-) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{id}_{\mathcal{C}}-, -)$  como isomorfismo natural.

Consideremos ahora  $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$  y sea  $I = \text{id}_{\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}}$ . Sea  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ . Podemos considerar un isomorfismo natural  $\tau^{\lambda} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, I-) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I-, -)$  que no es  $\text{id}$  si  $\lambda \neq 1$ : definimos  $\tau_{V,W}^{\lambda} : \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, IW) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(IV, W)$  como  $\tau_{V,W}^{\lambda}(T) := \lambda T$  para todo  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, IW)$ . Se verifica rápidamente que  $\tau^{\lambda}$  es una transformación natural. Además es un isomorfismo natural, pues cada componente tiene como inversa al mapa  $T \mapsto \frac{1}{\lambda} T$ .

De esta manera, el par adjunto  $(I, I)$  da lugar a una familia de adjunciones diferentes  $(I, I, \tau^{\lambda})$ , con  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

## 2.2. Caracterizaciones

Daremos ahora una caracterización de una adjunción que tiene la particularidad de ser interna a las categorías consideradas, sin necesidad de referirse a la categoría **Set**.

**Teorema 2.2.1.** Sean  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  funtores. Son equivalentes:

1.  $(F, G)$  es un par adjunto,
2. Existen transformaciones naturales  $\epsilon : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  y  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$  tales que los siguientes diagramas (llamados identidades triangulares) conmutan:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\eta} & FGF \\ & \searrow \text{id}_F & \downarrow \epsilon F \\ & & F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta G} & GFG \\ & \searrow \text{id}_G & \downarrow G\epsilon \\ & & G \end{array} \quad (2.3)$$

La conmutatividad de los diagramas anteriores puede expresarse así: para todo  $C \in \mathcal{C}$ ,  $D \in \mathcal{D}$  los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} FC & \xrightarrow{F(\eta_C)} & FGF C \\ & \searrow \text{id}_{FC} & \downarrow \epsilon_{FC} \\ & & FC \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} GD & \xrightarrow{\eta_{GD}} & GFGD \\ & \searrow \text{id}_{GD} & \downarrow G(\epsilon_D) \\ & & GD \end{array} \quad (2.4)$$

*Demostración.*  $(1 \Rightarrow 2)$  Sea  $\tau : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -)$  un isomorfismo natural. Definamos primero  $\epsilon : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ .

Sea  $D \in \mathcal{D}$ . Entonces  $\tau_{GD, D} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GD, GD) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGD, D)$ ; definimos  $\epsilon_D := \tau_{GD, D}(\text{id}_{GD})$ . Verifiquemos que define una transformación natural, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} D & & FGD \xrightarrow{\epsilon_D} D \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ D' & & FGD' \xrightarrow{\epsilon_{D'}} D' \end{array} \quad (2.5)$$

La naturalidad del isomorfismo inducido  $\tau_{GD, -} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GD, G-) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGD, -)$  nos da la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} D & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GD, GD) & \xrightarrow{\tau_{GD, D}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGD, D) \\ g \downarrow & (Gg)_* \downarrow & \downarrow g_* \\ D' & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GD, GD') & \xrightarrow{\tau_{GD, D'}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGD, D') \end{array}$$

Considerando la identidad  $\text{id}_{GD} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GD, GD)$ , la conmutatividad del diagrama nos da la igualdad

$$\tau_{GD, D'}(Gg) = g\tau_{GD, D}(\text{id}_{GD}) \quad (2.6)$$

La naturalidad del isomorfismo inducido  $\tau_{-, D'} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, GD') \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, D')$  nos da la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} GD & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GD', GD') & \xrightarrow{\tau_{GD', D'}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGD', D') \\ Gg \downarrow & (Gg)^* \downarrow & \downarrow (FGg)^* \\ GD' & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GD, GD') & \xrightarrow{\tau_{GD, D'}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGD, D') \end{array}$$

Considerando la identidad  $\text{id}_{GD'} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GD', GD')$ , la conmutatividad del diagrama nos da la igualdad

$$\tau_{GD, D'}(Gg) = \tau_{GD', D'}(\text{id}_{GD'})FGg \quad (2.7)$$

Combinando (2.6) con (2.7), obtenemos  $g\tau_{GD, D}(\text{id}_{GD}) = \tau_{GD', D'}(\text{id}_{GD'})FGg$ , es decir, la conmutatividad de (2.5).

Definamos  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ .

Sea  $C \in \mathcal{C}$  y consideremos  $\tau_{C, FC}^{-1} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, FC) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GFC)$ . Definimos  $\eta_C := \tau_{C, FC}^{-1}(\text{id}_{FC})$ . La verificación de que  $\eta$  es una transformación natural es análoga a la de la naturalidad de  $\epsilon$ .

Verifiquemos la conmutatividad del primer diagrama de (2.4) para todo  $C \in \mathcal{C}$ , pues la conmutatividad del segundo para todo  $D \in \mathcal{D}$  se verifica de manera análoga.

Sea  $C \in \mathcal{C}$ . Queremos verificar que  $\epsilon_{FC} \circ F(\eta_C) = \text{id}_{FC}$ , es decir, la igualdad

$$\tau_{GFC, FC}(\text{id}_{GFC}) \circ F(\tau_{C, FC}^{-1}(\text{id}_{FC})) = \text{id}_{FC} \quad (2.8)$$

La naturalidad del isomorfismo inducido  $\tau_{-, FC} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, GFC) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, FC)$  nos da la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GFC, GFC) & \xrightarrow{\tau_{GFC, FC}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGFC, FC) \\ \tau_{C, FC}^{-1}(\text{id}_{FC}) \downarrow & (\tau_{C, FC}^{-1}(\text{id}_{FC}))^* \downarrow & \downarrow (F\tau_{C, FC}^{-1}(\text{id}_{FC}))^* \\ GFC & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GFC) & \xrightarrow{\tau_{C, FC}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, FC) \end{array}$$

Considerando la identidad  $\text{id}_{GFC} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GFC, GFC)$ , la conmutatividad del diagrama nos da la igualdad

$$\text{id}_{FC} = \tau_{C, FC}(\tau_{C, FC}^{-1}(\text{id}_{FC})) = \tau_{GFC, FC}(\text{id}_{GFC}) \circ F(\tau_{C, FC}^{-1}(\text{id}_{FC}))$$



que es la igualdad (2.8) que queríamos demostrar.

(2  $\Rightarrow$  1) Definamos una transformación natural  $\tau : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -)$ . Dada  $q : A \rightarrow GB$ , definimos  $\tau_{A,B}(q) := \epsilon_B \circ Fq$ . Verifiquemos que es una transformación natural, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A_2 & B_1 & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, GB_1) \xrightarrow{\tau_{A_1, B_1}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA_1, B_1) \\ f \downarrow & g \downarrow & \downarrow [f^*, (Gg)_*] \\ A_1 & B_2 & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_2, GB_2) \xrightarrow{\tau_{A_2, B_2}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA_2, B_2) \end{array} \quad (2.9)$$

Sea  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, GB_1)$ . Entonces, recorriendo el diagrama en sentido antihorario, se tiene:

$$\begin{aligned} \tau_{A_2, B_2}([f^*, (Gg)_*](h)) &= \tau_{A_2, B_2}(Gg \circ h \circ f) \\ &= \epsilon_{B_2} \circ F(Gg \circ h \circ f) \\ &= \epsilon_{B_2} \circ FGg \circ Fh \circ Ff \end{aligned} \quad (2.10)$$

Recorriendo el diagrama en sentido horario, se tiene:

$$[(Ff)^*, g_*](\tau_{A_1, B_1}(h)) = [(Ff)^*, g_*](\epsilon_{B_1} \circ Fh) = g \circ \epsilon_{B_1} \circ Fh \circ Ff \quad (2.11)$$

La naturalidad de  $\epsilon$  implica la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B_1 & & FGB_1 \xrightarrow{\epsilon_{B_1}} B_1 \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ B_2 & & FGB_2 \xrightarrow{\epsilon_{B_2}} B_2 \end{array}$$

de donde se deduce la igualdad entre (2.10) y (2.11), esto es, la conmutatividad de (2.9).

Ahora definamos una transformación natural  $\nu : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-)$ . Dada  $p : FA \rightarrow B$ , definimos  $\nu_{A,B}(p) := Gp \circ \eta_A$ . Usando la naturalidad de  $\eta$  se verifica la naturalidad de  $\nu$ , análogamente a la naturalidad de  $\tau$  recién demostrada.

Verifiquemos ahora que  $\nu\tau = \text{id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-)}$ . Sea  $q \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GB)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \nu_{A,B}\tau_{A,B}(q) &= \nu_{A,B}(\epsilon_B \circ Fq) \\ &= G(\epsilon_B \circ Fq) \circ \eta_A \\ &= G\epsilon_B \circ GFq \circ \eta_A \\ &= G\epsilon_B \circ \eta_{GB} \circ q \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} &= \text{id}_{GB} \circ q \\ &= q \end{aligned} \quad (2.13)$$

La igualdad (2.12) es por la naturalidad de  $\eta$ , y la igualdad (2.13) es por la segunda identidad triangular de (2.4).

Análogamente se verifica que  $\tau\nu = \text{id}_{\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -)}$ . Por lo tanto  $\tau$  es el isomorfismo natural buscado.  $\square$

*Observación 2.2.2.* Vale la pena destacar cómo se construyen en la demostración las transformaciones naturales  $\epsilon$  y  $\eta$  a partir de una adjunción  $(F, G, \tau)$ : se definen

$$\epsilon_D := \tau_{GD, D}(\text{id}_{GD}) \quad \text{y} \quad \eta_C := \tau_{C, FC}^{-1}(\text{id}_{FC})$$

**Definición 2.2.3.** Sea  $(F, G, \tau)$  una adjunción. Las transformaciones naturales  $\epsilon$  y  $\eta$  como en la observación 2.2.2 se dicen *counidad* y *unidad* de la adjunción  $(F, G, \tau)$  respectivamente.

De esta manera, el teorema 2.2.1 nos dice que determinar una adjunción  $(F, G, \tau)$  es lo mismo que determinar una cuádrupla  $(F, G, \eta, \epsilon)$  donde  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$  y  $\epsilon : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  son transformaciones naturales que satisfacen las identidades triangulares (2.3). Diremos entonces que  $(F, G, \eta, \epsilon)$  es una adjunción.

*Observación 2.2.4.* La observación 2.1.3 nos dice que existen diferentes adjunciones asociadas a un par adjunto  $(F, G)$ . En particular, existen diferentes transformaciones naturales  $\epsilon$  y  $\eta$  que satisfacen el teorema anterior.

Los funtores adjuntos están íntimamente relacionados con las denominadas “propiedades universales”, como evidencian las siguientes caracterizaciones alternativas de un par adjunto a través sólo de una unidad o de una counidad:

**Teorema 2.2.5.** Sean  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  funtores. Son equivalentes:

1.  $(F, G)$  es un par adjunto,
2. Existe una transformación natural  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$  tal que  $\eta_C$  es un objeto inicial de la categoría coma  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ . Explícitamente,  $\eta$  cumple la siguiente propiedad “universal”:

para todo  $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$  y  $f : C \rightarrow GD$ , existe una única  $g : FC \rightarrow D$  tal que  $Gg$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & GD \\ \eta_C \downarrow & \nearrow Gg & \\ GFC & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & D \\ & \nearrow g & \\ FC & & \end{array} \quad (2.14)$$

3. Existe una transformación natural  $\epsilon : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  tal que  $\epsilon_D$  es un objeto final de la categoría coma  $(F \downarrow D)$  para todo  $D \in \mathcal{D}$ . Explícitamente,  $\epsilon$  cumple la siguiente propiedad "universal":

para todo  $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$  y  $g : FC \rightarrow D$ , existe una única  $f : C \rightarrow GD$  tal que  $Ff$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 C & & FC \xrightarrow{g} D \\
 \text{\scriptsize } \dashrightarrow f \text{\scriptsize } & & \text{\scriptsize } \dashrightarrow Ff \text{\scriptsize } \\
 & & \uparrow \epsilon_D \\
 & & FGD
 \end{array} \quad (2.15)$$

*Demostración.* Demostraremos  $1 \Leftrightarrow 2$ , pues el enunciado 3) es el dual del 2).

( $1 \Rightarrow 2$ ) Sea  $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$ , y  $f : C \rightarrow GD$ .

Sea  $\tau : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -)$  un isomorfismo natural. Sea  $\eta$  la unidad de la adjunción  $(F, G, \tau)$ . Recordemos de la observación 2.2.2 que  $\eta_C = \tau_{C, FC}^{-1}(\text{id}_{FC})$ .

Sea  $g : FC \rightarrow D$ .

De la naturalidad de  $\tau_{C, -}^{-1} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, -) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G-)$  obtenemos la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 FC & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, FC) \xrightarrow{\tau_{C, FC}^{-1}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GFC) \\
 g \downarrow & g_* \downarrow & \downarrow Gg_* \\
 D & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D) \xrightarrow{\tau_{C, D}^{-1}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GD)
 \end{array} \quad (2.16)$$

Consideremos  $\text{id}_{FC} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, FC)$ . Recorriendo el diagrama en sentido horario, obtenemos la flecha  $Gg \circ \tau_{C, FC}^{-1}(\text{id}_{FC}) = Gg \circ \eta_C$ . En el otro sentido, obtenemos la flecha  $\tau_{C, D}^{-1}(g)$ . De la conmutatividad de (2.16) se deduce entonces que

$$Gg \circ \eta_C = \tau_{C, D}^{-1}(g) \quad (2.17)$$

Existe una única  $g : FC \rightarrow D$  que hace conmutar el diagrama (2.14) si y sólo si existe una única  $g : FC \rightarrow D$  tal que  $Gg \circ \eta_C = f$ , si y sólo si existe una única  $g : FC \rightarrow D$  tal que  $\tau_{C, D}^{-1}(g) = f$ , en virtud de la igualdad (2.17). Pero esto es cierto, es  $g = \tau_{C, D}(f)$  la única que lo cumple.

( $2 \Rightarrow 1$ ) Definamos un isomorfismo natural  $\tau : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -)$ .

Si  $f : C \rightarrow GD$ , definimos  $\tau_{C, D}(f) := g$ , donde  $g : FC \rightarrow D$  es la única que hace conmutar el diagrama (2.14). Verifiquemos que esto define una transformación natural, es

decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{cc} C & D \\ \uparrow h & \downarrow k \\ C' & D' \end{array} & \begin{array}{ccc} \text{Hom}_C(C, GD) & \xrightarrow{\tau_{C,D}} & \text{Hom}_D(FC, D) \\ \downarrow [h^*, (Gk)_*] & & \downarrow [(Fh)^*, k_*] \\ \text{Hom}_C(C', GD') & \xrightarrow{\tau_{C',D'}} & \text{Hom}_D(FC', GD') \end{array} \\
 & (2.18)
 \end{array}$$

Sea  $f \in \text{Hom}_C(C, GD)$ . Si  $g' := \tau_{C',D'}(Gk \circ f \circ h)$ , para verificar la conmutatividad de (2.18) tenemos que verificar la siguiente igualdad:

$$k \circ g \circ Fh = g' \quad (2.19)$$

Por definición,  $g'$  es la única flecha  $FC' \rightarrow D'$  tal que  $Gg'$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 C' & \xrightarrow{Gk \circ f \circ h} & GD' \\
 \eta_{C'} \downarrow & \nearrow Gg' & \\
 GFC' & & 
 \end{array} \quad (2.20)$$

Por lo tanto, verificar la igualdad (2.19) equivale a verificar que  $G(k \circ g \circ Fh)$  hace conmutar el diagrama (2.20).

La naturalidad de  $\eta$  nos da el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 C' & \xrightarrow{\eta_{C'}} & GFC' \\
 h \downarrow & & \downarrow GFh \\
 C & \xrightarrow{\eta_C} & GFC
 \end{array} \quad (2.21)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 G(k \circ g \circ Fh) \circ \eta_{C'} &= Gk \circ Gg \circ GFh \circ \eta_{C'} \\
 &= Gk \circ Gg \circ \eta_C \circ h \\
 &= Gk \circ f \circ h
 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$= Gk \circ f \circ h \quad (2.23)$$

donde la igualdad (2.22) se deduce de la conmutatividad del diagrama (2.21), y la igualdad (2.23) se deduce de la conmutatividad del diagrama (2.14). Esto prueba la naturalidad de  $\tau$ .

Veamos que  $\tau_{C,D} : \text{Hom}_C(C, GD) \rightarrow \text{Hom}_D(FC, D)$  es una biyección, verificando así que  $\tau$  es un isomorfismo natural. Por definición de  $\tau_{C,D}$ , se tiene que  $\tau_{C,D}$  es biyectiva si y sólo si para toda  $g : FC \rightarrow D$  existe una única  $f : C \rightarrow GD$  tal que el diagrama (2.14) conmuta. Pero esto es cierto, pues dada  $g : FC \rightarrow D$  sólo  $f = Gg \circ \eta_C$  hace conmutar el diagrama (2.14).  $\square$

Diremos entonces que  $(F, G, \eta)$  o  $(F, G, \epsilon)$  son adjunciones, entendiendo que  $\eta : \text{id}_C \Rightarrow GF$  y  $\epsilon : FG \Rightarrow \text{id}_D$  cumplen las propiedades universales (2.14) y (2.15) respectivamente.

### 2.2.1. En resumen

Si  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  son funtores, podemos determinar que  $(F, G)$  es un par adjunto a través de:

1. un isomorfismo natural  $\tau : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -)$ , determinando una adjunción  $(F, G, \tau)$ ,
2. transformaciones naturales  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$  y  $\epsilon : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  que satisfacen las identidades triangulares (2.3), determinando una adjunción  $(F, G, \eta, \epsilon)$ ,
3. una transformación natural  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$  que cumple la propiedad universal (2.14), determinando una adjunción  $(F, G, \eta)$ ,
4. una transformación natural  $\epsilon : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  que cumple la propiedad universal (2.15), determinando una adjunción  $(F, G, \epsilon)$ .

*Resumen de la demostración.*

- a)  $1 \Rightarrow 2, 3, 4$ : se define  $\eta_{\mathcal{C}} = \tau_{\mathcal{C}, FC}^{-1}(\text{id}_{FC})$  y  $\epsilon_{\mathcal{D}} = \tau_{GD, D}(\text{id}_{GD})$ .
- b)  $2 \Rightarrow 1, 3, 4$ : se define  $\tau_{\mathcal{C}, D}(f) = \epsilon_{\mathcal{D}} \circ Ff$ ; su inversa es  $\tau_{\mathcal{C}, D}^{-1}(g) = Gg \circ \eta_{\mathcal{C}}$ . Para 3 y 4 se toman las mismas  $\eta$  y  $\epsilon$ .
- c)  $3 \Rightarrow 1, 2, 4$ : se define  $\tau$  directamente con la propiedad universal (2.14). A partir de  $\tau$  se consigue la counidad  $\epsilon$  como en  $1 \Rightarrow 2$ , de manera que se satisfacen 2 y 4.  
Observar que la unidad que define  $\tau$  coincide con  $\eta$ .
- d)  $4 \Rightarrow 1, 2, 3$ : análogamente a  $3 \Rightarrow 1, 2, 4$ . □

Como se ve en este resumen, hay una compatibilidad total entre la unidad  $\eta$  y la counidad  $\epsilon$  según son construidas en cada paso a), b), c) y d).

## 2.3. Propiedades de las adjunciones

### 2.3.1. Unicidad

**Proposición 2.3.1.** 1. Sean  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y  $G, G' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  funtores. Si  $(F, G)$  y  $(F, G')$  son pares adjuntos, entonces  $G \cong G'$ .

2. Sean  $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  funtores. Si  $(F, G)$  y  $(F', G)$  son pares adjuntos, entonces  $F \cong F'$ .

*Demostración.* Demostramos el segundo ítem, pues el primero es el enunciado dual.

El teorema 2.2.5 garantiza la existencia de transformaciones naturales  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$  y  $\nu : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF'$  tales que  $\eta_C$  y  $\nu_C$  son objetos iniciales en  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ .

La proposición 1.1.10 nos asegura que existe un único isomorfismo  $\eta_C \rightarrow \nu_C$  en la categoría  $(\mathcal{C} \downarrow G)$ . Se verifica fácilmente que la existencia de un único isomorfismo  $\eta_C \rightarrow \nu_C$  es equivalente con la existencia de únicos isomorfismos  $\varphi_C : FC \rightarrow F'C$  tales que  $G\varphi_C$  hace conmutar el siguiente diagrama para todo  $C \in \mathcal{C}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 \eta_C \swarrow & & \searrow \nu_C \\
 GFC & \xrightarrow{G\varphi_C} & GF'C
 \end{array} \tag{2.24}$$

Basta verificar que  $\varphi : F \Rightarrow F'$  es una transformación natural. Debemos verificar la conmutatividad de los siguientes cuadrados para toda  $f : C \rightarrow C'$  flecha de  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 C & FC \xrightarrow{\varphi_C} & F'C \\
 f \downarrow & Ff \downarrow & \downarrow F'f \\
 C' & FC' \xrightarrow{\varphi_{C'}} & F'C'
 \end{array} \tag{2.25}$$

Sea  $f : C \rightarrow C'$  flecha de  $\mathcal{C}$ . La naturalidad de  $\eta$  nos da la conmutatividad del siguiente cuadrado:

$$\begin{array}{ccc}
 C & C \xrightarrow{\eta_C} & GFC \\
 f \downarrow & f \downarrow & \downarrow GFf \\
 C' & C' \xrightarrow{\eta_{C'}} & GFC'
 \end{array} \tag{2.26}$$

La naturalidad de  $\nu$  nos da la conmutatividad del siguiente cuadrado:

$$\begin{array}{ccc}
 C & C \xrightarrow{\nu_C} & GF'C \\
 f \downarrow & f \downarrow & \downarrow GF'f \\
 C' & C' \xrightarrow{\nu_{C'}} & GF'C'
 \end{array} \tag{2.27}$$

Como  $\eta_C$  es inicial en  $(C \downarrow G)$ , existe una única flecha  $h : FC \rightarrow FC'$  tal que  $Gh$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 \eta_C \swarrow & & \searrow \eta_{C'} \circ f \\
 GF_C & \xrightarrow{\quad Gh \quad} & GF_{C'}
 \end{array} \tag{2.28}$$

La conmutatividad de (2.26) nos dice que  $GFf$  hace conmutar el diagrama (2.28). Para probar la conmutatividad de (2.25) y terminar la demostración, basta ver pues que  $G(\varphi_{C'}^{-1} \circ F'f \circ \varphi_C)$  también hace conmutar el diagrama (2.28):

$$\begin{aligned}
 G(\varphi_{C'}^{-1}) \circ GF'f \circ G\varphi_C \circ \eta_C &= (G\varphi_{C'})^{-1} \circ GF'f \circ \nu_C && \text{por (2.24)} \\
 &= (G\varphi_{C'})^{-1} \circ \nu_{C'} \circ f && \text{por (2.27)} \\
 &= \eta_{C'} \circ f && \text{por (2.24) con } C' \quad \square
 \end{aligned}$$

### 2.3.2. Construcción puntual

**Proposición 2.3.2.** 1. Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Determinar un adjunto a izquierda de  $G$  es equivalente a especificar para cada  $C \in \mathcal{C}$  un objeto inicial de la categoría coma  $(C \downarrow G)$ .

2. Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un functor. Determinar un adjunto a derecha de  $F$  es equivalente a especificar para cada  $D \in \mathcal{D}$  un objeto final de la categoría coma  $(F \downarrow D)$ .

*Demostración.* Demostramos sólo el primer ítem, pues el segundo es el enunciado dual del primero.

El teorema 2.2.5 nos dice que si  $F$  es un adjunto a izquierda de  $G$  entonces tenemos objetos iniciales  $\eta_C$  en  $(C \downarrow G)$ .

Recíprocamente, supongamos que tenemos objetos iniciales  $\eta_C : C \rightarrow GF_C$  de  $(C \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ : esto significa que para todo  $D \in \mathcal{D}$  y  $g : C \rightarrow GD$  existe una única  $h : F_C \rightarrow D$  tal que  $Gh$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 \eta_C \swarrow & & \searrow g \\
 F_C & \xrightarrow{\quad h \quad} & D \\
 & & \uparrow Gh \\
 GF_C & \xrightarrow{\quad Gh \quad} & GD
 \end{array}$$

Definimos un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  mediante  $FC := F_C$  en los objetos. Si  $f : C \rightarrow C'$  es una flecha de  $\mathcal{C}$  y  $h : F_C \rightarrow F_{C'}$  es la única flecha tal que  $Gh$  hace conmutar el siguiente

diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 \eta_C \swarrow & & \searrow \eta_{C'} f \\
 GF_C & \xrightarrow{Gh} & GF_{C'}
 \end{array} \tag{2.29}$$

entonces definimos  $Ff = h$ . Se verifica fácilmente que  $F$  es un functor.

Basta verificar que  $\eta : \text{id}_C \Rightarrow GF$  es una transformación natural, pues entonces  $\eta_C$  será un objeto inicial de  $(C \downarrow G)$  por hipótesis y por lo tanto el teorema 2.2.5 concluye que  $(F, G)$  es un par adjunto.

Para cada  $f : C \rightarrow C'$  flecha de  $\mathcal{C}$  el siguiente diagrama es conmutativo: es la conmutatividad de (2.29).

$$\begin{array}{ccc}
 C & & C \xrightarrow{\eta_C} GF_C \\
 f \downarrow & & \downarrow GFf \\
 C' & & C' \xrightarrow{\eta_{C'}} GF_{C'}
 \end{array} \tag{2.30}$$

Esto termina la demostración.  $\square$

Repasando la demostración de la proposición anterior se obtiene un criterio muy útil para construir adjuntos:

**Corolario 2.3.3.** 1. Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor, y supongamos que  $\eta_C : C \rightarrow GF_C$  es un objeto inicial de la categoría coma  $(C \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ . Entonces existe un único functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $FC = F_C$  y  $\eta : \text{id}_C \Rightarrow GF$  sea una transformación natural. En este caso,  $(F, G, \eta)$  es una adjunción.

2. Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un functor, y supongamos que  $\epsilon_D : FG_D \rightarrow D$  es un objeto final de la categoría coma  $(F \downarrow D)$  para todo  $D \in \mathcal{D}$ . Entonces existe un único functor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $GC = G_C$  y  $\epsilon : FG \Rightarrow \text{id}_D$  sea una transformación natural. En este caso,  $(F, G, \epsilon)$  es una adjunción.

*Observación 2.3.4.* La proposición anterior puede interpretarse de la siguiente manera: un functor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  plantea un problema universal, que un adjunto a izquierda  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  resuelve de manera functorial y *global*, mientras que un objeto inicial en la categoría coma  $(C \downarrow G)$  es una solución *puntual* para un  $C \in \mathcal{C}$  dado. La proposición nos dice que resolver el problema de manera puntual para todo  $C \in \mathcal{C}$  es equivalente a resolver el problema de manera functorial global.

Esto ya nos dice que los ejemplos 1.2.27.1 y 1.2.27.2 nos darán ejemplos de adjunciones, como veremos más adelante (ejemplos 2.4.9 y 2.4.4).



### 2.3.3. Composición

**Proposición 2.3.5.** Sean  $(F, G, \eta, \epsilon)$  y  $(F', G', \eta', \epsilon')$  adjunciones dispuestas como en el siguiente diagrama:  $\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{B} \begin{array}{c} \xrightarrow{F'} \\ \xleftarrow{G'} \end{array} \mathcal{C}$ . Entonces  $(F'F, GG', G\eta'F \circ \eta, \epsilon' \circ F'\epsilon G')$  es una adjunción.

*Demostración.* Sea  $\eta''$  la composición

$$\text{id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\eta} GF \xrightarrow{G\eta'F} GG'F'F$$

y sea  $\epsilon''$  la composición

$$F'FGG' \xrightarrow{F'\epsilon G'} F'G' \xrightarrow{\epsilon'} \text{id}_{\mathcal{C}}$$

Veamos que  $\eta''$  y  $\epsilon''$  satisfacen las identidades triangulares (2.4). Verifiquemos la primera, pues la segunda es análoga.

La primera identidad triangular para la adjunción  $(F, G, \eta, \epsilon)$  nos da el siguiente diagrama conmutativo, para todo  $A \in \mathcal{A}$ :

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{F(\eta_A)} & FGFA \\ & \searrow \text{id}_{FA} & \downarrow \epsilon_{FA} \\ & & FA \end{array} \quad (2.31)$$

y la primera identidad triangular para la adjunción  $(F', G', \eta', \epsilon')$  nos da la conmutatividad del siguiente diagrama, para todo  $B \in \mathcal{B}$ :

$$\begin{array}{ccc} F'B & \xrightarrow{F'(\eta'_B)} & F'G'F'B \\ & \searrow \text{id}_{F'B} & \downarrow \epsilon'_{F'B} \\ & & F'B \end{array} \quad (2.32)$$

Además, la naturalidad de  $\epsilon$  nos da el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} FA & & FGFA \xrightarrow{\epsilon_{FA}} FA \\ \eta'_{FA} \downarrow & & \downarrow \eta'_{FA} \\ G'F'FA & & FGG'F'FA \xrightarrow{\epsilon_{G'F'FA}} G'F'FA \end{array} \quad (2.33)$$

Verifiquemos ahora la primera identidad triangular para  $\eta''$  y  $\epsilon''$ . Sea  $A \in \mathcal{A}$ .

$$\begin{aligned}
(\epsilon'' F' F)_A \circ (F' F \eta'')_A &= \epsilon''_{F'FA} \circ F' F(\eta''_A) \\
&= (\epsilon' \circ F' \epsilon G')_{F'FA} \circ F' F((G \eta' F \circ \eta)_A) \\
&= \epsilon'_{F'FA} \circ (F' \epsilon G')_{F'FA} \circ F' F((G \eta' F)_A \circ \eta_A) \\
&= \epsilon'_{F'FA} \circ F'(\epsilon_{G'F'FA}) \circ F' F(G(\eta'_{FA}) \circ \eta_A) \\
&= \epsilon'_{F'FA} \circ F'(\epsilon_{G'F'FA} \circ F G(\eta'_{FA}) \circ F(\eta_A)) \\
&= \epsilon'_{F'FA} \circ F'(\eta'_{FA} \circ \epsilon_{FA} \circ F(\eta_A)) && \text{por (2.33)} \\
&= \epsilon'_{F'FA} \circ F'(\eta'_{FA}) \circ F'(\epsilon_{FA} \circ F(\eta_A)) \\
&= F'(\epsilon_{FA} \circ F(\eta_A)) && \text{por (2.32), } B = FA \\
&= F'(\text{id}_{FA}) && \text{por (2.31)} \\
&= \text{id}_{F'FA}
\end{aligned}$$

La segunda identidad triangular se verifica de manera análoga. □

*Observación 2.3.6.* La proposición 2.3.5 permite definir una categoría cuyos objetos son las categorías pequeñas, y las flechas  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  son las adjunciones  $(F, G, \eta, \epsilon)$ .

### 2.3.4. Características de la unidad y la counidad

**Proposición 2.3.7.** Sean  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  funtores tales que  $(F, G, \eta, \epsilon)$  es una adjunción.

Entonces:

1.  $G$  es fiel si y sólo si  $\epsilon_D$  es un epimorfismo para todo  $D \in \mathcal{D}$ ,
2.  $G$  es pleno si y sólo si  $\epsilon_D$  es un monomorfismo split para todo  $D \in \mathcal{D}$ ,
3.  $G$  es fiel y pleno si y sólo si  $\epsilon$  es un isomorfismo natural.

Dualmente,

4.  $F$  es fiel si y sólo si  $\eta_C$  es un monomorfismo para todo  $C \in \mathcal{C}$ ,
5.  $F$  es pleno si y sólo si  $\eta_C$  es un epimorfismo split para todo  $C \in \mathcal{C}$ ,
6.  $F$  es fiel y pleno si y sólo si  $\eta$  es un isomorfismo natural.

*Demostración.* Demostremos el ítem 1. Sea  $D \in \mathcal{D}$ . La flecha  $\epsilon_D : FGD \rightarrow D$  es un epimorfismo si y sólo si  $\epsilon_D^* : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGD, Y)$  es inyectiva para todo  $Y \in \mathcal{D}$  (observación 1.2.21).

Sea  $\tau : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -)$  el isomorfismo natural determinado por la adjunción. Definamos  $R_{D,Y}$  como la composición

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, Y) \xrightarrow{\epsilon_D^*} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGD, Y) \xrightarrow[\simeq]{\tau_{GD,Y}^{-1}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GD, GY)$$

de manera que  $\epsilon_D^*$  es inyectiva para todo  $Y \in \mathcal{D}$  si y sólo si  $R_{D,Y}$  es inyectiva para todo  $Y \in \mathcal{D}$ .

Si  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, Y)$ , entonces:

$$\begin{aligned} R_{D,Y}(f) &= \tau_{GD,Y}^{-1}(\epsilon_D^*(f)) \\ &= G(f\epsilon_D) \circ \eta_{GD} && \text{sección 2.2.1, ítem b)} \\ &= Gf \circ G\epsilon_D \circ \eta_{GD} \\ &= Gf && \text{identidad triangular (2.4)} \end{aligned}$$

Por lo tanto  $R_{D,Y}$  es inyectiva para todo  $Y \in \mathcal{D}$  si y sólo si  $G$  es fiel, terminando la demostración del ítem 1.

El ítem 2 se demuestra análogamente, usando de nuevo la observación 1.2.21.

El ítem 3 se deduce automáticamente de los anteriores y de la proposición 1.1.21.  $\square$

### 2.3.5. Relación con equivalencias de categorías

Un isomorfismo de categorías provee un ejemplo trivial de adjunción:

*Ejemplo 2.3.8.* Si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un isomorfismo de categorías con inversa  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , entonces  $(F, G)$  es un par adjunto. En efecto, al ser  $GF = \text{id}_{\mathcal{C}}$  y  $FG = \text{id}_{\mathcal{D}}$ , podemos tomar  $\eta = \text{id}_{\text{id}_{\mathcal{C}}} : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$  y  $\epsilon = \text{id}_{\text{id}_{\mathcal{D}}} : \text{id}_{\mathcal{D}} \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ , y satisfacen trivialmente las identidades triangulares (2.3).

Observar que en este caso también  $(G, F)$  es un par adjunto. Esto no es cierto en general: el par adjunto presentado en el ejemplo 2.4.2 provee un contraejemplo.

Menos trivialmente, una equivalencia de categorías también es parte de una adjunción:

**Proposición 2.3.9.** *Si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es una equivalencia de categorías entonces es un adjunto a izquierda. Dualmente, es un adjunto a derecha.*

*Demostración.* Recordemos que una equivalencia de categorías es un functor fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo (teorema 1.3.9). Definamos un functor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $(F, G)$  sea un par adjunto.

Sea  $D \in \mathcal{D}$ . Como  $F$  es esencialmente sobreyectivo, existe  $G_D \in \mathcal{C}$  y un isomorfismo  $\epsilon_D : FG_D \rightarrow D$ . Esto define  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  en los objetos:  $GD := G_D$ .

Definimos  $G$  en las flechas de la única manera que haga que  $\epsilon : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  sea una transformación natural.

$$\begin{array}{ccc} D & FG_D \xrightarrow{\epsilon_D} D & \\ f \downarrow & \vdots & \downarrow f \\ D' & FG_{D'} \xrightarrow{\epsilon_{D'}} D' & \end{array} \quad (2.34)$$

Sea  $f : D \rightarrow D'$ . Consideremos  $\epsilon_{D'}^{-1} \circ f \circ \epsilon_D : FG_D \rightarrow FG_{D'}$ : como  $F$  es fiel y pleno, existe una única  $G_f : G_D \rightarrow G_{D'}$  tal que  $FG_f = \epsilon_{D'}^{-1} \circ f \circ \epsilon_D$ , i.e.  $G_f$  es la única tal que  $FG_f$  hace conmutar el diagrama (2.34).

Definimos entonces  $Gf := G_f$ . No es difícil verificar que  $G$  es efectivamente un functor. De esta manera,  $\epsilon : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  es un isomorfismo natural.

Verifiquemos que se cumple la propiedad universal de  $\epsilon$  (teorema 2.2.5). Sean  $C \in \mathcal{C}$ ,  $D \in \mathcal{D}$  y  $g : FC \rightarrow D$ . Queremos ver que existe una única  $f : C \rightarrow GD$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C & FC \xrightarrow{g} D & \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ f \swarrow & \text{---} & \uparrow \epsilon_D \\ & FGD & \end{array} \quad (2.35)$$

Tenemos  $\epsilon_D^{-1} \circ g : FC \rightarrow FGD$ ; como  $F$  es fiel y pleno, existe una única  $f : C \rightarrow GD$  tal que  $\epsilon_D^{-1} \circ g = Ff$ , esto es, tal que  $g = \epsilon_D \circ Ff$ . Esto termina la demostración.  $\square$

De esta manera, un functor adjunto generaliza una equivalencia de categorías, que a su vez generaliza un isomorfismo de categorías.

Ya hemos visto que si un functor  $F$  es una equivalencia de categorías entonces es un adjunto a izquierda. Observemos ahora que, recíprocamente, si  $(F, G)$  es un par adjunto y además  $F$  y  $G$  son fieles y plenos, entonces  $F$  es una equivalencia de categorías. Esto es un corolario inmediato de la proposición 2.3.7:

**Corolario 2.3.10.** Sean  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  funtores tales que  $(F, G)$  es un par adjunto. Si  $F$  y  $G$  son funtores fieles y plenos entonces  $F$  y  $G$  son equivalencias de categorías.

### 2.3.6. Preservación de límites

**Teorema 2.3.11.** Sean  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  funtores tales que  $(F, G)$  es un par adjunto. Entonces  $G$  preserva límites. Dualmente,  $F$  preserva colímites.

*Demostración.* Como  $(F, G)$  es un par adjunto, existe un isomorfismo natural  $\tau : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -)$ .

Sea  $M : J \rightarrow \mathcal{D}$  un diagrama en  $\mathcal{D}$  que tiene límite. Designemos por  $(L, \ell_j)$  a su cono límite.

Es claro que  $(GL, G\ell_j)$  es un cono para el diagrama  $GM : J \rightarrow \mathcal{C}$ ; lo que queremos verificar es que es un cono *límite*. Para ver esto, tomemos un cono  $(C, \nu_j : C \rightarrow GM_j)$  para  $GM$ , y veamos que se factoriza de manera única a través de  $(GL, G\ell_j)$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & & GM_i \\
 & \nearrow \nu_i & \uparrow G\ell_i \\
 C & \dashrightarrow & GL \\
 & \searrow \nu_j & \downarrow G\ell_j \\
 & & GM_j
 \end{array}
 \quad \text{with } GM_i \downarrow GM_e^j \downarrow GM_j$$
(2.36)

Los mapas  $\nu_j : C \rightarrow GM_j$  se corresponden con mapas  $\tau_{C, M_j}(\nu_j) : FC \rightarrow M_j$ : sea  $\tilde{\nu}_j := \tau_{C, M_j}(\nu_j)$ . Afirмо que  $(FC, \tilde{\nu}_j)$  es un cono para el diagrama  $M$ . Es decir, afirмо que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & & M_i \\
 & \nearrow \tilde{\nu}_i & \downarrow M_e^i \\
 FC & & M_j \\
 & \searrow \tilde{\nu}_j &
 \end{array}$$

conmuta para toda flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ .

La naturalidad del isomorfismo  $\tau_{C, -} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G-) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, -)$  nos da los siguientes diagramas conmutativos para toda flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ :

$$\begin{array}{ccc}
 M_i & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GM_i) & \xrightarrow{\tau_{C, M_i}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, M_i) \\
 M_e^i \downarrow & (GM_e^i)_* \downarrow & & \downarrow (M_e^i)_* \\
 M_j & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GM_j) & \xrightarrow{\tau_{C, M_j}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, M_j)
 \end{array}
 \quad (2.37)$$

Consideremos  $\nu_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GM_i)$ . Recorriendo el diagrama en sentido horario, se tiene  $\nu_i \mapsto \tilde{\nu}_i \mapsto M_e^i \tilde{\nu}_i$ . En el otro sentido, se tiene  $\nu_i \mapsto GM_e^i \nu_i = \nu_j \mapsto \tilde{\nu}_j$ , donde la igualdad se debe a la conmutatividad de (2.36). En conclusión, por la conmutatividad de (2.37) se tiene  $M_e^i \tilde{\nu}_i = \tilde{\nu}_j$  que es lo que queríamos probar.

Por lo tanto  $(FC, \tilde{\nu}_j)$  es un cono para  $M$ . Como  $(L, \ell_i)$  es el límite de  $M$ , entonces existe una única  $h : FC \rightarrow L$  que hace conmutar el siguiente diagrama para toda flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ :

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{\nu}_i & \rightarrow M_i \\
 & \nearrow & \ell_i \nearrow \\
 FC & \xrightarrow{h} & L \\
 & \searrow & \ell_j \searrow \\
 & \tilde{\nu}_j & \rightarrow M_j \\
 & & \downarrow Me_j^i
 \end{array} \quad (2.38)$$

El mapa  $h : FC \rightarrow L$  se corresponde con  $\hat{h} := \tau_{C,L}^{-1}(h) : C \rightarrow GL$ . La prueba terminará cuando veamos que  $\hat{h}$  hace conmutar el diagrama (2.36), i.e. que  $G\ell_i\hat{h} = \nu_i$  para todo  $i \in J$ , y que es la única que cumple esto.

La naturalidad del isomorfismo  $\tau_{C,-}^{-1} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, -) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G-)$  nos da los siguientes diagramas conmutativos para todo  $i \in J$ :

$$\begin{array}{ccc}
 L & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, L) & \xrightarrow{\tau_{C,L}^{-1}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(C, GL) \\
 \ell_i \downarrow & (\ell_i)_* \downarrow & & \downarrow (G\ell_i)_* \\
 M_i & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, M_i) & \xrightarrow{\tau_{C,M_i}^{-1}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GM_i)
 \end{array} \quad (2.39)$$

Consideremos  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, L)$ . Recorriendo el diagrama en sentido horario, se tiene  $h \mapsto \hat{h} \mapsto G\ell_i\hat{h}$ . En el otro sentido, se tiene  $h \mapsto \ell_i h = \tilde{\nu}_i \mapsto \nu_i$ . La igualdad es por la conmutatividad de (2.38), y la segunda asignación es porque  $\tau_{C,M_i}^{-1}(\tau_{C,M_i}(\nu_i)) = \nu_i$ .

En conclusión, por la conmutatividad de (2.39), se tiene que  $G\ell_i\hat{h} = \nu_i$  para todo  $i \in J$ , que es lo que queríamos probar.

Resta ver que  $\hat{h}$  es la única que hace conmutar el diagrama. Sea  $q : C \rightarrow GL$  una flecha que también hace conmutar el diagrama (2.36): se corresponde con un morfismo  $\tilde{q} := \tau_{C,L}(q) : FC \rightarrow L$ . Con la misma técnica de naturalidad se prueba que  $\tilde{q}$  hace conmutar el diagrama (2.38). Como  $L$  es un cono límite, debe ser  $\tilde{q} = h$ , luego  $q = \hat{h}$ .  $\square$

*Ejemplo 2.3.12.* El recíproco de este teorema es falso en general. Veamos un par de contraejemplos:

- Si  $\mathcal{C}$  es una categoría distinta de  $\mathbf{0}$ , entonces el único functor  $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites y colímites trivialmente, pero no tiene adjunto a izquierda ni a derecha, pues tales funtores serían de  $\mathcal{C}$  en  $\mathbf{0}$ , y no existen al ser  $\mathcal{C} \neq \mathbf{0}$ .

- Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{1}$  el único functor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{1}$ . Es claro que  $G$  preserva límites y colímites. Por otro lado  $G$  tiene adjunto a izquierda (resp. derecha)  $F : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}$  si y sólo si  $\mathcal{C}$  tiene objeto inicial (resp. final).

Ver observación 2.5.7 para una generalización de este ejemplo.

## 2.4. Ejemplos

Un ejemplo prominente de functor adjunto viene dado por las *subcategorías reflexivas*:

**Definición 2.4.1.** Sea  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  una subcategoría, y sea  $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  el functor inclusión. Decimos que  $\mathcal{A}$  es una *subcategoría reflexiva* de  $\mathcal{B}$  si el functor  $i$  admite un adjunto a izquierda  $r : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ , llamado *reflector*.

En las subsecciones siguientes presentaremos diversos ejemplos de subcategorías reflexivas, notablemente en los ejemplos 2.4.6, 2.4.9 y 2.4.13.

### 2.4.1. Ejemplos del álgebra

#### Adjunción tensor-hom

*Ejemplo 2.4.2.* Sean  $R, S, T$  anillos.

1. Sea  $B$  un  $(S, T)$ -bimódulo. Entonces  $(- \otimes_S B, \text{Hom}_T(B, -))$  es un par adjunto:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{- \otimes_S B} & \\ \mathbf{R-Mod-S} & & \mathbf{R-Mod-T} \\ & \xleftarrow{\text{Hom}_T(B, -)} & \end{array}$$

Es decir, hay un isomorfismo natural

$$\text{Hom}_{(R,T)}(- \otimes_S B, -) \cong \text{Hom}_{(R,S)}(-, \text{Hom}_T(B, -))$$

2. Sea  $A$  un  $(R, S)$ -bimódulo. Entonces  $(A \otimes_S -, \text{Hom}_R(A, -))$  es un par adjunto:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{A \otimes_S -} & \\ \mathbf{S-Mod-T} & & \mathbf{R-Mod-T} \\ & \xleftarrow{\text{Hom}_R(A, -)} & \end{array}$$

Es decir, hay un isomorfismo natural

$$\text{Hom}_{(R,T)}(A \otimes_S -, -) \cong \text{Hom}_{(S,T)}(-, \text{Hom}_R(A, -))$$

Concentrémonos en el primer caso, pues el segundo es análogo.

Para ver que  $(- \otimes_S B, \text{Hom}_T(B, -))$  es un par adjunto, podemos usar la definición:

Definimos  $\tau_{A,C} : \text{Hom}_{(R,S)}(A, \text{Hom}_T(B, C)) \rightarrow \text{Hom}_{(R,T)}(A \otimes_S B, C)$  mediante

$$\tau_{A,C}(f) = \left( a \otimes b \mapsto f(a)(b) \right)$$



definida en los generadores  $a \otimes b \in A \otimes_S B$ . Su inversa  $\tau_{A,C}^{-1}$  está definida mediante

$$\tau_{A,C}^{-1}(f) = \left( a \mapsto \left( b \mapsto f(a \otimes b) \right) \right)$$

La naturalidad de  $\tau$  no es difícil de probar.

Determinemos la unidad y la counidad de la adjunción  $(- \otimes_S B, \text{Hom}_T(B, -), \tau)$ . Se tiene

$$\tau_{\text{Hom}_T(B,C),C} : \text{Hom}_{(R,S)}(\text{Hom}_T(B, C), \text{Hom}_T(B, C)) \rightarrow \text{Hom}_{(R,T)}(\text{Hom}_T(B, C) \otimes_S B, C)$$

y por lo tanto (observación 2.2.2), la counidad es  $\epsilon_C = \tau_{\text{Hom}_T(B,C),C}(\text{id}_{\text{Hom}_T(B,C)})$ :

$$\epsilon_C : \text{Hom}_T(B, C) \otimes_S B \rightarrow C, \quad g \otimes b \mapsto g(b)$$

Por otro lado,

$$\tau_{A,A \otimes_S B}^{-1} : \text{Hom}_{(R,T)}(A \otimes_S B, A \otimes_S B) \rightarrow \text{Hom}_{(R,S)}(A, \text{Hom}_T(B, A \otimes_S B))$$

y por lo tanto la unidad es  $\eta_A = \tau_{A,A \otimes_S B}^{-1}(\text{id}_{A \otimes_S B})$ :

$$\eta_A : A \rightarrow \text{Hom}_T(B, A \otimes_S B), \quad a \mapsto (b \mapsto a \otimes b)$$

Aplicando el teorema 2.3.11 podemos obtener ciertas conclusiones útiles sobre los funtores  $- \otimes_S B$  y  $\text{Hom}_T(B, -)$ .

- El functor  $\text{Hom}_T(B, -) : \mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{S}$  preserva límites. En particular, preserva productos: esto significa que si  $\left( \prod_{i \in I} M_i, \pi_i \right)$  es el producto de  $\{M_i\}_{i \in I}$  en  $\mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{T}$ , entonces  $\left( \text{Hom}_T \left( B, \prod_{i \in I} M_i \right), \pi_{i*} \right)$  es el producto en  $\mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{S}$  de  $\{\text{Hom}_T(B, M_i)\}_{i \in I}$ . Tenemos entonces un isomorfismo de  $(R, S)$ -bimódulos:

$$\prod_{i \in I} \text{Hom}_T(B, M_i) \simeq \text{Hom}_T \left( B, \prod_{i \in I} M_i \right) \quad (2.40)$$

Otro tipo particular de límites en  $\mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{T}$  además de los productos, son los núcleos (ejemplo 1.4.25). Entonces  $\text{Hom}_T(B, -)$  preserva núcleos, y por lo tanto se dice que es un functor *exacto a izquierda*.

El teorema 2.3.11 también nos permite demostrar que en general  $\text{Hom}_T(B, -)$  no admite un adjunto a derecha, como muestra el siguiente ejemplo.

Tomemos  $R = S = T = \mathbb{Z}$  y  $B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . El conúcleo del mapa cociente  $p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  es nulo. El functor  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, -)$  no preserva este conúcleo, i.e. el

conúcleo de  $p_* : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  no es nulo, o equivalentemente,  $p_*$  no es sobreyectiva.

En efecto, si  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$  entonces

$$0 = f(0 + 2\mathbb{Z}) = f(1 + 2\mathbb{Z}) + f(1 + 2\mathbb{Z}) = 2f(1 + 2\mathbb{Z})$$

y por lo tanto  $f(1 + 2\mathbb{Z}) = 0$ , de donde  $f = 0$ .

Por otro lado,  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq \{0\}$ , pues además del mapa nulo está el mapa que manda  $1 + 2\mathbb{Z}$  en  $1/2 + \mathbb{Z}$ . Por lo tanto  $p_*$  no es sobreyectiva.

Existe entonces un colímite que  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, -)$  no preserva, y por lo tanto no admite un adjunto a derecha.

- El functor  $- \otimes_S B$  preserva colímites. En particular, preserva coproductos: esto significa que si  $\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, \iota_i\right)$  es la suma directa de  $\{M_i\}_{i \in I}$  en **R-Mod-S**, entonces  $\left(\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \otimes_S B, \iota_i \otimes \text{id}_B\right)$  es la suma directa en **R-Mod-T** de  $\{M_i \otimes_S B\}_{i \in I}$ . Tenemos entonces un isomorfismo de  $(R, T)$ -bimódulos:

$$\bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_S B) \simeq \left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \otimes_S B \quad (2.41)$$

Otro tipo particular de colímites en **R-Mod-S** además de los coproductos, son los conúcleos (ejemplo 1.4.27). Entonces  $- \otimes_S B$  preserva conúcleos, y por lo tanto se dice que es un functor *exacto a derecha*.

El teorema 2.3.11 implica que el functor  $- \otimes_S B$  no admite adjunto a izquierda en general, como muestra el siguiente ejemplo.

Tomemos  $R = S = T = \mathbb{Z}$ , y tomemos  $B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . El núcleo de la inclusión  $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  es nulo. El functor  $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  no preserva este núcleo, i.e. el núcleo de  $i \otimes \text{id} : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  no es nulo. En efecto,  $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , pero  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0\}$ , de donde  $i \otimes \text{id}$  no puede ser inyectiva.

Existe entonces un límite que  $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  no preserva, y por lo tanto no admite un adjunto a izquierda.

Veamos ahora cómo podemos aplicar las adjunciones tensor-hom para deducir que el hom *contravariante* es un adjunto.

Sea  $A$  un  $(R, T)$ -bimódulo. Veamos que el functor contravariante

$$\text{Hom}_R(-, A) : \mathbf{R-Mod-S} \rightarrow \mathbf{S-Mod-T}$$

es un adjunto. Tenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{(R,S)}(C, \mathrm{Hom}_T(B, A)) \simeq \mathrm{Hom}_{(S,T)}(B, \mathrm{Hom}_R(C, A)) \quad (2.42)$$

natural en  $B$  y en  $C$ .

En efecto, las adjunciones tensor-hom nos dan que ambos lados de (2.42) están naturalmente en biyección con  $\mathrm{Hom}_{(R,T)}(C \otimes_S B, A)$ , y por lo tanto se consigue la biyección (2.42) natural en  $B$  y en  $C$ .

En conclusión  $\mathrm{Hom}_R(-, A)$  y  $\mathrm{Hom}_T(-, A)$  conforman un par adjunto contravariante a derecha.

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Hom}_R(-, A) & \\ & \curvearrowright & \\ \mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{S} & & \mathbf{S}\text{-Mod-}\mathbf{T} \\ & \curvearrowleft & \\ & \mathrm{Hom}_T(-, A) & \end{array}$$

Obtenemos de esta manera que el functor  $\mathrm{Hom}_R(-, A) : \mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{S} \rightarrow (\mathbf{S}\text{-Mod-}\mathbf{T})^{\mathrm{op}}$  es un adjunto a izquierda, o equivalentemente,  $\mathrm{Hom}_R(-, A) : (\mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{S})^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{S}\text{-Mod-}\mathbf{T}$  es un adjunto a derecha.

El teorema 2.3.11 nos dice entonces que  $\mathrm{Hom}_R(-, A) : \mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{S} \rightarrow (\mathbf{S}\text{-Mod-}\mathbf{T})^{\mathrm{op}}$  preserva colímites, o equivalentemente, que  $\mathrm{Hom}_R(-, A) : (\mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{S})^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{S}\text{-Mod-}\mathbf{T}$  preserva límites. Es decir, el functor contravariante  $\mathrm{Hom}_R(-, A)$  lleva colímites en límites. En particular, obtenemos que para toda familia  $\{M_i\}_{i \in I}$  en  $\mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{S}$  y  $A \in \mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{S}$  se tiene un isomorfismo de  $(S, T)$ -bimódulos:

$$\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, A) \simeq \mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, A\right)$$

Obtenemos también que lleva conúcleos en núcleos, y por lo tanto se dice que  $\mathrm{Hom}_R(-, A)$  es un functor *exacto a izquierda*.

El mismo teorema 2.3.11 nos permite concluir que  $\mathrm{Hom}_R(-, A)$  no forma parte de un par adjunto contravariante *a izquierda*. De ser el caso, debería llevar límites en colímites. En particular, debería llevar núcleos en conúcleos, lo cual no ocurre en general, como muestra el siguiente ejemplo.

Tomemos  $R = S = T = \mathbb{Z}$  y  $A = \mathbb{Z}$ . El núcleo de la inclusión  $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  es nulo. El functor  $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$  no lleva este núcleo en un conúcleo, i.e. el conúcleo de  $i^* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$  no es nulo, o equivalentemente,  $i^*$  no es sobreyectiva.

En efecto, si  $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$  y  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  entonces para todo  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , se tiene  $f(\frac{a}{b}) = f(\frac{na}{nb}) = nf(\frac{a}{nb})$  y por lo tanto todo  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  divide a  $f(\frac{a}{b})$ , i.e.  $f(\frac{a}{b}) = 0$ , de donde  $f = 0$ . Por otro lado,  $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \neq \{0\}$ , y entonces  $i^*$  no puede ser sobreyectiva.

## Restricción y extensión de escalares

*Ejemplo 2.4.3.* Sean  $f : R \rightarrow S$  y  $g : T \rightarrow L$  morfismos de anillos.

Definimos el functor de *restricción de escalares*  $U_{f,g} : \mathbf{S-Mod-L} \rightarrow \mathbf{R-Mod-T}$ , que a un  $(S, L)$ -bimódulo  $M$  le asocia el mismo grupo abeliano  $M$  con acción de  $R$  a izquierda y de  $T$  a derecha dadas por:

$$r \cdot m := f(r)m \quad m \cdot t := mg(t)$$

para todo  $r \in R, t \in T, m \in M$ ; y que a un morfismo de  $(S, T)$ -bimódulos  $\varphi : M \rightarrow N$  le asocia el mismo morfismo de grupos abelianos  $\varphi : M \rightarrow N$ , que automáticamente respeta la acción a izquierda de  $R$  y la acción a derecha de  $T$ : en efecto, si  $r \in R, m \in M$  entonces  $\varphi(r \cdot m) = \varphi(f(r)m) = f(r)\varphi(m) = r \cdot \varphi(m)$ , y análogamente para la acción de  $T$ .

El caso en el que  $f$  y  $g$  son inclusiones de subanillos en anillos explica el nombre del functor.

Definimos el functor de *extensión de escalares*  $E_{f,g} : \mathbf{R-Mod-T} \rightarrow \mathbf{S-Mod-L}$  como  $E_{f,g} := U_{id_S, f}(S) \otimes_R - \otimes_T U_{g, id_L}(L)$ .

Observar que  $U_{id_S, f}(S)$  no es sino  $S$  visto como  $(S, R)$ -bimódulo, donde la acción de  $S$  a izquierda es la acción regular, y la acción de  $R$  a derecha es la acción dada por la restricción de escalares en la derecha.

Análogamente  $U_{g, id_L}(L)$  no es sino  $L$  visto como  $(T, L)$ -bimódulo, donde la acción de  $L$  a derecha es la acción regular, y la acción de  $T$  a izquierda es la acción dada por la restricción de escalares en la izquierda.

Normalmente se sobreentienden estas estructuras de  $(S, R)$ -bimódulo de  $S$  y de  $(T, L)$ -bimódulo de  $L$ , y el functor de extensión de escalares se escribe sencillamente como  $S \otimes_R - \otimes_T L$ .

De nuevo, si pensamos que  $f$  y  $g$  son inclusiones de subanillos en anillos, se explica el nombre de este functor: si  $R \subset S$  y  $T \subset L$  son subanillos, se le asocia a un  $(R, T)$ -bimódulo un  $(S, L)$ -bimódulo.

Observar que tomando el mapa  $g$  como la identidad  $id_T : T \rightarrow T$  se obtiene una extensión de escalares “sólo del lado izquierdo”, y en este caso se obtiene que  $S \otimes_R - \otimes_T T \cong S \otimes_R -$ , donde este último isomorfismo natural se consigue como el del ejemplo 1.3.5.5. Análogamente del lado derecho, tomando  $f$  como la identidad  $id_R : R \rightarrow R$ .

Para verificar que esta es realmente una manera *universal* de asociarle a un  $(R, T)$ -bimódulo un  $(S, L)$ -bimódulo, tenemos que verificar que la extensión de escalares es adjunta a la restricción de escalares. Explícitamente, veamos que  $(E_{f,g}, U_{f,g})$  es un par adjunto, i.e. la extensión de escalares es el adjunto a izquierda de la restricción de escalares.

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{E_{f,g}} & \\
 \mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{T} & & \mathbf{S}\text{-Mod-}\mathbf{L} \\
 & \xleftarrow{U_{f,g}} & 
 \end{array}$$

Sea  $\eta : \text{id}_{\mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{T}} \Rightarrow U_{f,g} E_{f,g}$  definida por  $\eta_M = 1 \otimes_R \text{id}_M \otimes_T 1$ . Es decir, haciendo un ligero abuso de notación,

$$\eta_M : M \rightarrow S \otimes_R M \otimes_T L$$

es el morfismo de  $(R, T)$ -bimódulos tal que  $m \mapsto 1 \otimes m \otimes 1$  para todo  $m \in M$ . Se verifica rápidamente que  $\eta$  es una transformación natural.

La transformación natural  $\eta$  cumple la propiedad universal de la unidad (2.14): para todo  $M \in \mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{T}$ ,  $N \in \mathbf{S}\text{-Mod-}\mathbf{L}$ ,  $h : M \rightarrow U_{f,g}(N)$  morfismo de  $(R, T)$ -bimódulos, existe una única  $k : E_{f,g}(M) \rightarrow N$  morfismo de  $(S, L)$ -bimódulos que hace conmutar el siguiente diagrama (donde continúa el abuso de notación):

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{h} & N \\
 \eta_M \downarrow & & \nearrow k \\
 S \otimes_R M \otimes_T L & & 
 \end{array}$$

En efecto, una tal  $k$  debe cumplir que

$$k(s \otimes m \otimes \ell) = sk(1 \otimes m \otimes 1)\ell = sk(\eta_M(m))\ell = sh(m)\ell$$

para todo  $m \in M, s \in S, \ell \in L$ . Esto prueba la unicidad de  $k$ , y además  $k$  así definida es efectivamente un morfismo de  $(S, L)$ -bimódulos.

En general, el mapa  $\eta_M : M \rightarrow S \otimes_R M \otimes_T L$  no es inyectivo: por ejemplo si  $R = T = L = \mathbb{Z}$ ,  $S = \mathbb{Q}$ ,  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  es la inclusión,  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  es la identidad, y tomamos el grupo abeliano  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , resulta que el producto tensorial  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$  es nulo, y por lo tanto no admite ningún morfismo de grupos inyectivo desde  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Definimos el functor de *coextensión de escalares*  $C_{f,g} : \mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S}\text{-Mod-}\mathbf{L}$  como  $C_{f,g} = \text{Hom}_{\mathbf{T}} \left( U_{\text{id}_L, g}(L), \text{Hom}_{\mathbf{R}}(U_{f, \text{id}_S}(S), -) \right)$ .

De nuevo, normalmente se sobreentienden estas estructuras de  $(R, S)$ -bimódulo de  $S$  y de  $(L, T)$ -bimódulo de  $L$ , y se considera que el functor de coextensión de escalares es sencillamente  $\text{Hom}_{\mathbf{T}} \left( L, \text{Hom}_{\mathbf{R}}(S, -) \right)$ .

Como antes, el nombre de este functor se explica considerando el caso en que  $f$  y  $g$  son inclusiones de subanillos en anillos.

Observar que tomando el mapa  $g$  como la identidad  $\text{id}_T : T \rightarrow T$  se obtiene una coextensión de escalares “sólo del lado izquierdo”, y que en este caso se obtiene que

$\text{Hom}_T(T, \text{Hom}_R(S, -)) \cong \text{Hom}_R(S, -)$ , donde este último isomorfismo natural se consigue como el del ejemplo 1.3.5.4. Análogamente del lado derecho, tomando  $f$  como la identidad  $\text{id}_R : R \rightarrow R$ .

Esta es otra manera de asociarle a un  $(R, T)$ -bimódulo un  $(S, L)$ -bimódulo, que es también universal, en el sentido que es adjunta a la restricción de escalares, pero lo es del otro lado: veamos que  $(U_{f,g}, C_{f,g})$  es un par adjunto, i.e. la coextensión de escalares es el adjunto a derecha de la restricción de escalares.

$$\begin{array}{ccc} & U_{f,g} & \\ & \curvearrowright & \\ \mathbf{S}\text{-Mod-}\mathbf{L} & & \mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{T} \\ & \curvearrowleft & \\ & C_{f,g} & \end{array}$$

En este caso, conseguiremos que la coextensión de escalares de un  $(R, T)$ -bimódulo  $M$  sea un  $(S, L)$ -bimódulo  $\text{Hom}_T(L, \text{Hom}_R(S, M))$ , y tendremos un mapa

$$\epsilon_M : \text{Hom}_T(L, \text{Hom}_R(S, M)) \rightarrow M$$

con codominio  $M$  en vez de dominio  $M$  como tenía la unidad de la extensión de escalares.

Este mapa  $\epsilon_M$  tampoco será en general sobreyectivo, como muestra el mismo ejemplo que prueba que  $\eta_M$  no es en general inyectivo.

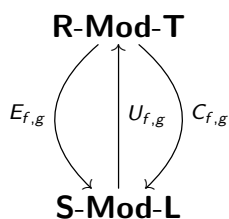
Definimos una transformación natural  $\epsilon : U_{f,g} C_{f,g} \Rightarrow \text{id}_{\mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{T}}$ , definida por la evaluación en 1 dos veces. Es decir,  $\epsilon_M$  se define por  $\epsilon_M(f) = f(1)(1)$  para todo  $f \in \text{Hom}_T(L, \text{Hom}_R(S, M))$ . La naturalidad de  $\epsilon$  se verifica rápidamente.

La transformación natural  $\epsilon$  cumple la propiedad universal de la counidad (2.15): para todo  $N \in \mathbf{S}\text{-Mod-}\mathbf{L}$ ,  $M \in \mathbf{R}\text{-Mod-}\mathbf{T}$ ,  $h : U_{f,g}(N) \rightarrow M$  morfismo de  $(R, T)$ -bimódulos, existe una única  $k : N \rightarrow C_{f,g}(M)$  morfismo de  $(S, L)$ -bimódulos que hace conmutar el siguiente diagrama (donde continúa el abuso de notación):

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{h} & M \\ & \searrow k & \uparrow \epsilon_M \\ & & \text{Hom}_T(L, \text{Hom}_R(S, M)) \end{array}$$

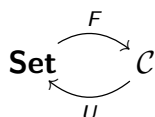
En efecto, una tal  $k$  debe cumplir que  $\epsilon_M(k(n)) = k(n)(1_L)(1_S) = h(n)$ . Esto define  $k(n)$  unívocamente para todo  $n \in N$  (pues  $\{1_S\}$  y  $\{1_L\}$  son bases de  $S$  y  $L$  respectivamente), y una tal  $k$  resulta efectivamente un morfismo de  $(S, L)$ -bimódulos.

Estas dos adjunciones se visualizan en el siguiente diagrama:



**Functor libre**

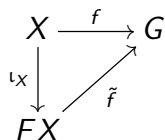
*Ejemplo 2.4.4.* Sea  $(\mathcal{C}, U)$  una categoría concreta. En caso de que exista un adjunto a izquierda de  $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  se le llama *functor libre*; designémoslo por  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{C}$ . Si  $X$  es un conjunto,  $FX$  se llama *objeto libre de base X*.



En este caso, es la caracterización de un par adjunto mediante una unidad que cumple la propiedad universal (2.14) la que nos sea quizás más familiar. En efecto, esta caracterización nos dice que  $F$  cumple que existe  $\eta : \text{id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow UF$  tal que para todo  $X \in \mathbf{Set}$ ,  $C \in \mathcal{C}$ ,  $f : X \rightarrow UC$  función, existe un único morfismo  $\tilde{f} : FX \rightarrow C$  tal que  $U\tilde{f}$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & UC \\
 \eta_X \downarrow & \nearrow U\tilde{f} & \\
 UFX & & C \\
 & & \nearrow \tilde{f} \\
 & & FX
 \end{array} \tag{2.43}$$

Esta es la usual “propiedad universal del objeto libre” que conocemos de las categorías **Mon**, **Grp**, **Ab**, **R-Mod**, **ℝ-Alg**, por ejemplo (donde los funtores de olvido son los usuales). El *objeto libre* (monoide libre, grupo libre, grupo abeliano libre,  $R$ -módulo libre,  $\mathbb{K}$ -álgebra libre...) de base  $X$ ,  $FX$ , cumple que para todo objeto  $G$  (monoide, grupo, grupo abeliano,  $R$ -módulo,  $\mathbb{K}$ -álgebra...) y función  $f : X \rightarrow G$  existe un único morfismo  $\tilde{f} : FX \rightarrow G$  que hace conmutar el siguiente diagrama:



El diagrama (2.43) es de hecho igual a este, donde nos hemos olvidado que en realidad la función  $f$  tiene como codominio  $UG$ , y que la función  $\iota$  tiene como codominio  $UFX$

(categóricamente, no tiene sentido una función entre un conjunto y un grupo, por ejemplo, y por lo tanto hay problemas con el “diagrama” anterior que formalmente debe entenderse como el diagrama (2.43)).

De esta manera, la usual “inclusión canónica”  $\iota_X : X \rightarrow FX$  no es sino la componente en  $X$  de la unidad del par adjunto  $(F, U)$ .

Esto es coherente con el ejemplo 1.2.27.2, en el que vimos que los mapas  $\iota_X$  son objetos iniciales de  $(X \downarrow U)$  en el caso  $\mathcal{C} = \mathbf{R-Mod}$ , y con el corolario 2.3.3 con el que se obtiene que el  $R$ -módulo libre de base  $X$ ,  $FX$ , define un functor de manera que los  $\iota_X$  sean las componentes de una unidad del par adjunto  $(F, U)$ .

La definición de par adjunto en este caso nos dice que hay una biyección natural  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, C) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, UC)$  en ambas variables. La existencia de esta biyección formaliza la usual afirmación “para definir un morfismo desde  $FX$ , basta definir una función desde  $X$ ; recíprocamente, toda función desde  $X$  se extiende a un único morfismo desde  $FX$ ”.

Observar que el functor de olvido no suele tener adjunto a derecha en categorías “de tipo algebraico” (como  $\mathbf{R-Mod}$ ,  $\mathbf{Grp}$ ...) pues no suele preservar colímites (ver observación 1.4.38).<sup>2</sup>

No toda categoría concreta admite un functor libre. El functor de olvido  $U : \mathbf{Fld} \rightarrow \mathbf{Set}$  no tiene adjunto a izquierda. Supongamos que existe un tal adjunto  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Fld}$ . Entonces si  $\mathbb{K}$  es un cuerpo, habría una biyección  $\text{Hom}_{\mathbf{Fld}}(F\emptyset, \mathbb{K}) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\emptyset, U\mathbb{K})$ .

Como hay una función  $\emptyset \rightarrow U\mathbb{K}$  para cualquier cuerpo  $\mathbb{K}$ , habría un morfismo de cuerpos  $F\emptyset \rightarrow \mathbb{K}$ . En particular, habría un morfismo de cuerpos  $F\emptyset \rightarrow \mathbb{F}_2$  (el cuerpo con dos elementos), y por lo tanto  $F\emptyset$  tendría característica 2 (no hay morfismos entre cuerpos de diferente característica); pero también por la misma razón habría un morfismo de cuerpos  $F\emptyset \rightarrow \mathbb{Q}$ , y entonces  $F\emptyset$  debería tener característica 0, llegando a una contradicción.

Hay ciertos casos en los que ciertos funtores fieles cuyo codominio no es necesariamente  $\mathbf{Set}$  se llaman funtores de olvido. Por ejemplo, el functor  $U : \mathbb{K}\text{-Alg} \rightarrow \mathbb{K}\text{-Mod}$ , que olvida la estructura de anillo. Este functor tiene un adjunto a izquierda  $T : \mathbb{K}\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{K}\text{-Alg}$ , que también se llama functor libre. Si  $V \in \mathbb{K}\text{-Mod}$ , entonces la propiedad universal de la unidad de  $T$  es exactamente la propiedad universal de la inclusión  $\iota : V \rightarrow T(V)$ , donde  $T(V)$  es el álgebra tensorial de  $V$ . De esta manera, el álgebra tensorial de un  $\mathbb{K}$ -módulo  $V$  es el “álgebra libre de base el  $\mathbb{K}$ -módulo  $V$ ”.

<sup>2</sup> Sin embargo, ver ejemplo 2.4.10 para un caso donde el functor de olvido *sí* tiene adjunto a derecha. Quizás sea esta la razón de que en este caso al adjunto a izquierda al functor de olvido (que también existe) no se le suele llamar functor libre.



La proposición 2.3.5 se aplica en este caso: tenemos adjunciones

$$\begin{array}{ccccc} & & L_{\mathbb{K}} & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ \mathbf{Set} & & & & \mathbf{\mathbb{K}\text{-Mod}} & & T & & \mathbf{\mathbb{K}\text{-Alg}} \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowright & & & & & \\ & & U & & & & U' & & \end{array}$$

donde  $L_{\mathbb{K}} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{\mathbb{K}\text{-Mod}}$  es el functor libre de  $\mathbb{K}$ -módulos; y por lo tanto  $(TL_{\mathbb{K}}, UU')$  es un par adjunto.

Esto nos dice entonces que existe un functor libre  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{\mathbb{K}\text{-Alg}}$ ; además  $F(X) = T(L_{\mathbb{K}}(X))$  para todo conjunto  $X$ . Explícitamente,  $F(X)$  es la  $\mathbb{K}$ -álgebra de polinomios con coeficientes en  $\mathbb{K}$  en indeterminadas  $x \in X$  que no conmutan.

Análogas consideraciones valen para la categoría  $\mathbf{\mathbb{K}\text{-CAlg}}$  de  $\mathbb{K}$ -álgebras *conmutativas*. En este caso, el adjunto a izquierda del functor de olvido  $U : \mathbf{\mathbb{K}\text{-CAlg}} \rightarrow \mathbf{\mathbb{K}\text{-Mod}}$  es  $S : \mathbf{\mathbb{K}\text{-Mod}} \rightarrow \mathbf{\mathbb{K}\text{-CAlg}}$  que a un  $\mathbb{K}$ -módulo  $V$  le asocia su *álgebra simétrica*  $S(V)$ . Del mismo modo, el functor de olvido  $\mathbf{\mathbb{K}\text{-CAlg}} \rightarrow \mathbf{Set}$  tiene un adjunto a izquierda  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{\mathbb{K}\text{-CAlg}}$ , que cumple  $F(X) = S(L_{\mathbb{K}}(X))$  para todo conjunto  $X$ . Explícitamente,  $F(X)$  es la  $\mathbb{K}$ -álgebra de polinomios con coeficientes en  $\mathbb{K}$  en indeterminadas  $x \in X$  que conmutan.

## Otros ejemplos

*Ejemplo 2.4.5.* Sean  $\mathbf{Grp} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{U} \end{array} \mathbf{\mathbb{K}\text{-Alg}}$ . Aquí  $U$  es el functor que a una  $\mathbb{K}$ -álgebra le asocia

su grupo de elementos invertibles, análogamente al functor  $(-)^{\times}$  del ejemplo 1.3.5.3. El functor  $F$  es el functor que a un grupo  $G$  le asocia su álgebra de grupo  $\mathbb{K}G$ , y que a un morfismo de grupos  $G \rightarrow H$  le asocia su extensión  $\mathbb{K}$ -lineal  $\mathbb{K}G \rightarrow \mathbb{K}H$  que es un morfismo de  $\mathbb{K}$ -álgebras.

Entonces  $(F, U)$  es un par adjunto, cuya unidad está dada por la “inclusión” de  $G$  en  $\mathbb{K}G$ , i.e.  $\eta : \text{id}_{\mathbf{Grp}} \Rightarrow UF$  es tal que  $\eta_G : G \rightarrow UFG$  es la inclusión. La propiedad universal de  $\eta$  se verifica análogamente al ejemplo 2.4.4.

*Ejemplo 2.4.6.* Veamos ciertos ejemplos de subcategorías reflexivas.

1. La subcategoría  $\mathbf{Ab} \subset \mathbf{Grp}$  es reflexiva:

Recordemos que el *subgrupo conmutador*  $[G, G]$  de un grupo  $G$  se define como el subgrupo de  $G$  generado por los elementos de la forma  $xyx^{-1}y^{-1}$  donde  $x, y \in G$ . Es un subgrupo normal; se define la *abelianización* de  $G$  como  $G_{\text{ab}} := G/[G, G]$ , que resulta un grupo abeliano.

La abelianización de  $G$  cumple la siguiente propiedad universal: dado un grupo abeliano  $A$  y un morfismo de grupos  $f : G \rightarrow A$ , existe un único morfismo de grupos  $\tilde{f} : G_{\text{ab}} \rightarrow A$  que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & A \\ \eta_G \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ G_{\text{ab}} & & \end{array}$$

donde  $\eta_G : G \rightarrow G_{\text{ab}}$  es el mapa cociente.

En el diagrama anterior aparece el mismo problema formal que ocurriera en el ejemplo 2.4.4: por ejemplo,  $f$  no puede ir de  $G$  en  $A$ , pues  $G \in \mathbf{Grp}$  y  $A \in \mathbf{Ab}$ . Debe entenderse el diagrama anterior como el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & iA \\ \eta_G \downarrow & \nearrow i\tilde{f} & \\ iG_{\text{ab}} & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & A \\ & \nearrow \tilde{f} & \\ G_{\text{ab}} & & \end{array}$$

Repetiremos el abuso de notación recién descrito cuando no haya riesgo de ambigüedad.

El corolario 2.3.3 concluye que  $G_{\text{ab}}$  define un functor  $\text{ab} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$  de manera que  $(\text{ab}, i)$  sea un par adjunto con unidad dada por  $\eta : \text{id}_{\mathbf{Grp}} \Rightarrow i \text{ab}$ .

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{ab}} & \\ \mathbf{Grp} & & \mathbf{Ab} \\ & \xleftarrow{i} & \end{array}$$

En conclusión,  $\mathbf{Ab} \subset \mathbf{Grp}$  es una subcategoría reflexiva cuyo reflector es la abelianización.

2. En este ejemplo, *anillo* significa un objeto de  $\mathbf{Rng}$ , y *morfismo de anillos* significa una flecha de  $\mathbf{Rng}$ .

Veamos que la subcategoría  $\mathbf{Ring} \subset \mathbf{Rng}$  es reflexiva. Sea  $i : \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Rng}$  el functor inclusión.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{r} & \\ \mathbf{Rng} & & \mathbf{Ring} \\ & \xleftarrow{i} & \end{array}$$

Para construir un reflector  $r$ , en virtud de la proposición 2.3.2 basta determinar para cada  $R \in \mathbf{Rng}$  un objeto inicial de la categoría coma  $(R \downarrow i)$ . Es decir, para cada  $R \in \mathbf{Rng}$  debemos determinar un  $rR \in \mathbf{Ring}$  y un morfismo de anillos  $\eta_R : R \rightarrow irR$

que cumpla la siguiente propiedad universal: para todo  $A \in \mathbf{Ring}$  y morfismo de anillos  $\varphi : R \rightarrow iA$  existe un único morfismo de anillos con unidad  $\tilde{\varphi} : rR \rightarrow A$  tal que  $i\tilde{\varphi}$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\varphi} & iA \\
 \eta_R \downarrow & \nearrow i\tilde{\varphi} & \\
 irR & & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & A \\
 & \nearrow \tilde{\varphi} & \\
 rR & & 
 \end{array}
 \qquad (2.44)$$

El anillo con unidad  $rR$  se construye de la siguiente manera:  $rR := \mathbb{Z} \times R$  con las operaciones definidas mediante

$$(n_1, r_1) + (n_2, r_2) := (n_1 + n_2, r_1 + r_2), \quad (n_1, r_1) \cdot (n_2, r_2) := (n_1 n_2, n_1 r_2 + n_2 r_1 + r_1 r_2)$$

para todo  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $r_1, r_2 \in R$ .

La unidad de  $rR$  es  $(1, 0)$ . Se define  $\eta_R(r) := (0, r)$  para todo  $r \in R$ . Si  $\varphi : R \rightarrow iA$ , existe un único  $\tilde{\varphi}$  que hace conmutar el diagrama (2.44), y se define mediante  $\tilde{\varphi}(n, r) := n \cdot 1_A + \varphi(r)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $r \in R$ .

El corolario 2.3.3 concluye que  $rR$  define un functor  $r : \mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Ring}$  de manera que  $(r, i)$  sea un par adjunto cuya unidad está dada por  $\eta : \text{id}_{\mathbf{Rng}} \Rightarrow ir$ .

En este caso, la existencia del reflector  $r : \mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Ring}$  muestra que se puede adjuntar una unidad a un anillo, de manera functorial y universal.

- Al final del ejemplo 2.4.4 vimos que el functor  $S : \mathbb{K}\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{K}\text{-CAlg}$  que a cada  $\mathbb{K}$ -módulo le asocia su álgebra simétrica es el adjunto a izquierda del functor de olvido  $\mathbb{K}\text{-CAlg} \rightarrow \mathbb{K}\text{-Mod}$ . Sin embargo, no consideramos que el álgebra simétrica se construye a través del álgebra tensorial:  $S(V)$  se construye como la  $\mathbb{K}$ -álgebra cociente de  $T(V)$  por el ideal generado por los elementos de la forma  $x \otimes y - y \otimes x$  donde  $x, y \in V$ .

Tomamos ese cociente porque queremos convertir  $T(V)$  en un álgebra conmutativa: esto lo podemos hacer en general. En otras palabras, la subcategoría  $\mathbb{K}\text{-CAlg}$  de  $\mathbb{K}\text{-Alg}$  es reflexiva, con reflector dado por el functor  $r : \mathbb{K}\text{-Alg} \rightarrow \mathbb{K}\text{-CAlg}$  que a una  $\mathbb{K}$ -álgebra  $A$  le asocia el cociente por el *ideal conmutador*, es decir, el ideal generado por los elementos  $xy - yx$  donde  $x, y \in A$ .

Por lo tanto, el functor  $S$  es la composición  $\mathbb{K}\text{-Mod} \xrightarrow{T} \mathbb{K}\text{-Alg} \xrightarrow{r} \mathbb{K}\text{-CAlg}$ .

- Sea  $\mathbf{Dom}$  la categoría cuyos objetos son los dominios de integridad y cuyos morfismos son los morfismos inyectivos de anillos. Recordemos que el *cuerpo de fracciones* de un dominio  $D$  consiste en un cuerpo  $\text{Frac}(D)$  con un morfismo de anillos inyectivo

$\eta_D : D \rightarrow \text{Frac}(D)$ , que cumple la siguiente propiedad universal: para todo cuerpo  $F$  y todo morfismo de anillos inyectivo  $\varphi : D \rightarrow F$  existe un único morfismo de cuerpos  $\tilde{\varphi} : \text{Frac}(D) \rightarrow F$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\varphi} & F \\
 \eta_D \downarrow & \nearrow \tilde{\varphi} & \\
 \text{Frac}(D) & & 
 \end{array}
 \tag{2.45}$$

Recordemos que un morfismo de cuerpos siempre es inyectivo; por lo tanto  $\mathbf{Fld} \subset \mathbf{Dom}$  es una subcategoría. Sea  $i : \mathbf{Fld} \rightarrow \mathbf{Dom}$  el functor inclusión.

La conmutatividad del diagrama (2.45) expresa que  $\eta_D : D \rightarrow i \text{Frac}(D)$  es un objeto inicial de la categoría coma  $(D \downarrow i)$  para todo  $D \in \mathbf{Dom}$ . Por lo tanto, el corolario 2.3.3 indica que  $\text{Frac} : \mathbf{Dom} \rightarrow \mathbf{Fld}$  es un functor tal que  $(\text{Frac}, i)$  es un par adjunto con unidad dada por  $\eta : \text{id}_{\mathbf{Dom}} \Rightarrow i \text{Frac}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\text{Frac}} & \\
 \mathbf{Dom} & & \mathbf{Fld} \\
 & \xleftarrow{i} & 
 \end{array}$$

En conclusión,  $\mathbf{Fld}$  es una subcategoría reflexiva de  $\mathbf{Dom}$ , cuyo reflector es el cuerpo de fracciones.

*Observación 2.4.7.* Sea  $(\mathcal{C}, U)$  una categoría concreta tal que  $U$  tiene un adjunto a izquierda  $F$ . Al ser  $U$  un functor fiel, podemos identificar  $\mathcal{C}$  con una subcategoría de  $\mathbf{Set}$ , y  $U$  con una inclusión. De esta manera, el functor libre  $F$  es un reflector. Sin embargo, el espíritu de una reflexión es diferente al de un functor libre. Mientras que el functor libre le asocia a un conjunto  $X$  el objeto “más general” de  $\mathcal{C}$  con el que se vincula (el objeto más “libre de relaciones”), una reflexión consigue ya sea restringir una categoría para obtener una propiedad adicional (ver ejemplos 2.4.6.1, .2 y .3), ya sea “completar” la categoría (ver ejemplos 2.4.6.4 y 2.4.9).

También podemos pensar un reflector como una *mejor aproximación* a una categoría a través de otra. Por ejemplo, la abelianización (el reflector del ejemplo 2.4.6.4) permite obtener el grupo abeliano que “mejor aproxima” a un grupo dado. El reflector del ejemplo 2.4.6.2 permite obtener el anillo con unidad que “mejor aproxima” a un anillo dado.

El autor considera que estas interpretaciones informales se aplican con diversos grados de adecuación a diferentes adjunciones. El lector sabrá adoptar la óptica que le sea de mayor provecho a la hora de considerar una adjunción dada.

*Ejemplo 2.4.8.* Consideremos la categoría  $\mathbf{R}\text{-Mod}$ . Es sabido que en esta categoría los productos binarios y los coproductos binarios “coinciden”. Formalmente, esto significa que

los funtores producto y coproducto  $\mathbf{R-Mod} \times \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$  (como en la observación 1.4.17 y su observación dual) son naturalmente isomorfos, lo cual no es difícil de probar.

Por lo tanto, para la categoría discreta  $J$  que consta de dos objetos, los funtores  $\varprojlim_J, \varinjlim_J : \mathbf{R-Mod} \times \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$  son naturalmente isomorfos; designémoslos por  $\oplus$ . El ejemplo 2.4.16 nos dice entonces que  $\oplus$  es adjunto a izquierda y a derecha del functor diagonal  $\Delta$ , consiguiendo de esta forma una cadena de funtores adjuntos:

$$(\dots, \Delta, \oplus, \Delta, \oplus, \Delta, \oplus, \dots)$$

## 2.4.2. Ejemplos de la topología

*Ejemplo 2.4.9.* La completación de un espacio métrico se puede considerar como una reflexión:

En el ejemplo 1.2.27.1 vimos que para cada  $M \in \mathbf{Met}_u$  hay un objeto inicial en la categoría coma  $(M \downarrow i)$ , donde  $i : \mathbf{CompMet}_u \rightarrow \mathbf{Met}_u$  es el functor inclusión. Este objeto inicial es la inclusión  $\iota_M : M \rightarrow \overline{M}$  de  $M$  en su completación.

El corolario 2.3.3 indica entonces que existe un único functor  $r : \mathbf{Met}_u \rightarrow \mathbf{CompMet}_u$  que a un espacio métrico le asocia su completación, de manera que  $(r, i)$  sea un par adjunto con unidad dada por  $\iota : \text{id}_{\mathbf{Met}_u} \Rightarrow ir$ .

*Ejemplo 2.4.10.* Sea  $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  el functor de olvido. Veamos que tiene un adjunto a izquierda  $L : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ .

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \mathbf{Set} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Top} \\ & U & \end{array}$$

Un espacio topológico  $(X, \tau)$  es *discreto* si  $\tau = \mathcal{P}(X)$ . Observar que si  $X, Y$  son espacios topológicos y  $X$  es discreto, entonces toda función  $f : X \rightarrow Y$  es continua.

Definimos  $LA := (A, \mathcal{P}(A))$  para todo  $A \in \mathbf{Set}$ ; si  $f : A \rightarrow B$  es una función, definimos  $Lf : (A, \mathcal{P}(A)) \rightarrow (B, \mathcal{P}(B))$  como  $Lf(a) := f(a)$  para todo  $a \in A$ , que es continua por tener  $A$  la topología discreta.

Observar que  $UL = \text{id}_{\mathbf{Set}}$ . Definimos  $\eta : \text{id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow UL = \text{id}_{\mathbf{Set}}$  como  $\eta = \text{id}_{\text{id}_{\mathbf{Set}}}$ . Se cumple la propiedad universal de la unidad (2.14): para todo  $A \in \mathbf{Set}$ ,  $X \in \mathbf{Top}$ , y  $f : A \rightarrow UX$  función, existe una única función continua  $\tilde{f} : LA \rightarrow X$  tal que  $U\tilde{f}$  hace conmutar el siguiente diagrama:

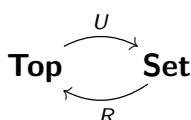
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & UX \\ \eta_A \downarrow & \nearrow U\tilde{f} & \\ ULA & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \tilde{f} & \\ LA & & \end{array}$$

Es decir, existe una única  $\tilde{f} : LA \rightarrow X$  tal que  $U\tilde{f} = f$ . En efecto, al tener  $LA$  la topología discreta, si definimos  $\tilde{f} : LA \rightarrow X$  como  $\tilde{f}(a) = f(a)$  para todo  $a \in A$ , resulta automáticamente  $\tilde{f}$  continua, y es la única que cumple  $U\tilde{f} = f$ .

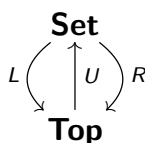
Esto prueba que el adjunto a izquierda del functor de olvido de **Top** es el functor que dota a un conjunto de la topología discreta.

Un espacio topológico  $(X, \tau)$  es *indiscreto* si  $\tau = \{\emptyset, X\}$ . Observar que si  $X, Y$  son espacios topológicos e  $Y$  es indiscreto, entonces toda función  $f : X \rightarrow Y$  es continua.

Podemos definir entonces de manera análoga un functor  $R : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ , que a un conjunto  $A$  le asocia el espacio topológico  $(A, \{\emptyset, A\})$ ; ídem en las flechas. También se tiene que  $UR = \text{id}_{\mathbf{Set}}$ <sup>3</sup>, pero en este caso se prueba que  $R$  es un adjunto a derecha de  $U$ .



En conclusión, estas dos adjunciones se visualizan en el siguiente diagrama:



En particular, el functor de olvido de **Top** preserva límites y colímites.

*Ejemplo 2.4.11.* Sea **Top**<sub>2</sub> la categoría cuyos objetos son pares  $(X, A)$  donde  $X$  es un espacio topológico y  $\emptyset \neq A \subset X$  es un subespacio, y cuyas flechas  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  son funciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  tales que  $f(A) \subset B$ .

Sea **Top**<sub>\*</sub> la categoría de *espacios topológicos punteados*, es decir, la subcategoría plena de **Top**<sub>2</sub> cuyos objetos son pares  $(X, \{x_0\})$  con  $x_0 \in X$ . Escribiremos  $(X, \{x_0\}) = (X, x_0)$ .

Veamos que la subcategoría **Top**<sub>\*</sub>  $\subset$  **Top**<sub>2</sub> es reflexiva. Sea  $i : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_2$  el functor de inclusión.

Para determinar un adjunto a izquierda de  $i$  utilizaremos el corolario 2.3.3. Dado  $(X, A) \in \mathbf{Top}_2$  buscamos un objeto inicial de  $((X, A) \downarrow i)$ . Este objeto inicial es el mapa cociente  $\eta_A : (X, A) \rightarrow i(X/A, [a])$ , donde  $X/A$  es el espacio  $X$  con los puntos de  $A$  identificados (dotado de la topología cociente), y  $[a]$  denota la clase de equivalencia de un  $a \in A$ .

En efecto, si  $f : (X, A) \rightarrow i(Y, y_0)$ , entonces  $f(A) = \{y_0\}$ , y por lo tanto existe una

<sup>3</sup> Obtenemos, de paso, un ejemplo de la no unicidad de la inversa a derecha de un functor: ciertamente  $L \neq R$ .

única  $\tilde{f} : (X/A, [a]) \rightarrow (Y, y_0)$  tal que  $i\tilde{f}$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & (X, A) & \\
 \eta_A \swarrow & & \searrow f \\
 (X/A, [a]) \xrightarrow{\tilde{f}} (Y, y_0) & i(X/A, [a]) \xrightarrow{i\tilde{f}} i(Y, y_0) & 
 \end{array}$$

Existe entonces un único functor  $r : \mathbf{Top}_2 \rightarrow \mathbf{Top}_*$  tal que  $(r, i)$  sea un par adjunto con unidad dada por la transformación natural  $\eta : \mathbf{Top}_2 \Rightarrow ir$  cuya componente en  $(X, A)$  es el mapa cociente  $\eta_A : (X, A) \rightarrow i(X/A, [a])$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & r & \\
 \mathbf{Top}_2 & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Top}_* \\
 & i & \\
 & \xleftarrow{\quad} & 
 \end{array}$$

Observar que si  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  es un mapa de  $\mathbf{Top}_2$ , entonces  $rf$  es el único mapa  $(X/A, [a]) \rightarrow (Y/B, [b])$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 (X, A) & \xrightarrow{f} & (Y, B) \\
 \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\
 (X/A, [a]) & \xrightarrow{rf} & (Y/B, [b])
 \end{array}$$

### 2.4.3. Ejemplos de la combinatoria

*Ejemplo 2.4.12.* Sean  $(A, \leq)$  y  $(B, \leq)$  órdenes parciales que consideraremos también como categorías (ejemplo 1.1.12.1) Un par adjunto  $(F, G)$  de funtores  $A \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} B$  se llama *conexión de Galois monótona*. Explícitamente, esto significa que  $F$  y  $G$  son funciones monótonas (ejemplo 1.2.4.6) tales que para todo  $a \in A, b \in B$  hay una biyección

$$\text{Hom}_B(Fa, b) \simeq \text{Hom}_A(a, Gb)$$

natural en ambas variables. Los cuadrados de naturalidad no aportan información adicional en este caso en virtud de la observación 1.2.15. La existencia de estas biyecciones significa que

$$Fa \leq b \iff a \leq Gb$$

para todo  $a \in A, b \in B$ .

Veamos un primer ejemplo sencillo de una conexión de Galois monótona.

Consideremos  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{R}$  como preórdenes. El functor inclusión  $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un adjunto a izquierda  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ . La existencia de una transformación natural  $\eta : \text{id}_{\mathbb{R}} \Rightarrow iF$  significa en este caso (ejemplo 1.3.5.6) que para todo  $x \in \mathbb{R}$  se debe tener  $x \leq Fx$ . Además,  $\eta$  debe cumplir la propiedad universal de la unidad, que en este caso significa que para todo  $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$  con  $x \leq n$ , se tiene que  $Fx \leq n$ .

Por lo tanto  $F$  no es sino la función techo  $\lceil \rceil$ , que a un real  $x$  le asocia el menor entero mayor o igual que él,  $\lceil x \rceil$ .

Análogamente  $i$  tiene un adjunto a derecha, dado por la función piso  $\lfloor \rfloor$ , que a un real  $x$  le asocia el mayor entero menor o igual que él. Estas adjunciones se visualizan en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} & \\ & \uparrow i & \\ \lceil \rceil & & \lfloor \rfloor \\ & \downarrow & \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

En este ejemplo resulta patente la heurística que nos dice que podemos pensar un adjunto a un functor como una “mejor aproximación”.

Demos otro ejemplo. Si  $M \in \mathbf{R-Mod}$ , llamémosle  $\text{Sub}(M)$  al conjunto de los submódulos de  $M$  ordenado por la inclusión.

Sea  $M \in \mathbf{R-Mod}$  y  $N \subset M$  un submódulo. Recordemos que los submódulos del cociente  $M/N$  son de la forma  $H/N$  para un único submódulo  $H \subset M$ . Entonces hay una conexión de Galois

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \text{Sub}(M) & \xrightarrow{\quad} & \text{Sub}(M/N) \\ & G & \end{array}$$

donde las funciones monótonas  $F, G$  están definidas así:  $F(H) = H/N$ , y  $G(K/N) = K$ . La condición de ser conexión de Galois es que para todo  $H \in \text{Sub}(M), K/N \in \text{Sub}(M/N)$  se cumpla que  $FH \subset K/N \iff H \subset G(K/N)$ , i.e.

$$H/N \subset K/N \iff H \subset K$$

lo cual es cierto.

Se tiene una conexión de Galois análoga considerando por ejemplo los subgrupos de  $G$  y los subgrupos de  $G/N$ , donde  $G$  es un grupo y  $N \subset G$  es un subgrupo normal, etc.

Recordemos que una función  $F : A \rightarrow B$  entre órdenes parciales es *antítona* si  $a \leq a' \Rightarrow F(a) \geq F(a')$  para todo  $a, a' \in A$ .

Una *conexión de Galois antítona* entre dos órdenes parciales  $(A, \leq)$  y  $(B, \leq)$  es un par



adjunto  $(F, G)$  de funtores  $A \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} B^{\text{op}}$ . Explícitamente,  $F : A \rightarrow B$  y  $G : B \rightarrow A$  son funciones antítonas tales que para todo  $a \in A, b \in B$  hay una biyección

$$\text{Hom}_{B^{\text{op}}}(Fa, b) = \text{Hom}_B(b, Fa) \simeq \text{Hom}_A(a, Gb)$$

natural en ambas variables. De nuevo, los cuadrados de naturalidad no aportan información adicional, y la existencia de estas biyecciones significa que

$$b \leq Fa \iff a \leq Gb$$

para todo  $a \in A, b \in B$ .

Un ejemplo de conexión de Galois antítónica es la que surge de la teoría de Galois de extensiones de cuerpos. Sea  $F \subset K$  una extensión de cuerpos. Sea  $A$  el conjunto de cuerpos intermedios de la extensión, i.e. los subcuerpos  $E \subset K$  tales que  $F \subset E$ . Sea  $B$  el conjunto de subgrupos de  $\text{Gal}(K/F)$ , el grupo de Galois de la extensión. Consideremos  $A$  y  $B$  ordenados por la inclusión. Tenemos entonces

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Gal}(K/-)} \\ \xleftarrow{\text{Fix}} \end{array} B^{\text{op}}$$

donde  $\text{Gal}(K/-)(E) := \text{Gal}(K/E)$  y  $\text{Fix}(H) = \{\alpha \in K : \sigma(\alpha) = \alpha \text{ para todo } \sigma \in H\}$  es el cuerpo fijo de  $H$ .

La teoría de Galois afirma que para todo  $E \in A, H \in B$  se cumple que

$$H \subset \text{Gal}(K/E) \iff E \subset \text{Fix}(H)$$

Es decir,  $(\text{Gal}(K/-), \text{Fix})$  es una conexión de Galois antítónica.

*Ejemplo 2.4.13.* Analicemos el ejemplo 1.3.8.1 desde otro punto de vista.

Sea **Ord**  $\subset$  **Preord** la subcategoría plena cuyos objetos son los órdenes parciales. Veamos que es una subcategoría reflexiva. Sea  $i : \mathbf{Ord} \rightarrow \mathbf{Preord}$  el functor inclusión. Definamos un reflector  $r : \mathbf{Preord} \rightarrow \mathbf{Ord}$ .

$$\mathbf{Preord} \begin{array}{c} \xrightarrow{r} \\ \xleftarrow{i} \end{array} \mathbf{Ord}$$

Si  $X \in \mathbf{Preord}$ , definimos  $rX := X/\sim$  como en el ejemplo 1.3.8.1, y definimos  $\eta_X : X \rightarrow irX$  como el mapa cociente  $X \rightarrow X/\sim$ .

Apliquemos el corolario 2.3.3: veamos que  $\eta_X$  es un objeto inicial de la categoría  $\text{Coma}(X \downarrow i)$  para todo  $X \in \mathbf{Preord}$ . Si  $A \in \mathbf{Ord}$  y  $f : X \rightarrow iA$  es una función monótona, entonces existe una única  $g : rX \rightarrow A$  tal que  $ig$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & iA \\
 \eta_X \downarrow & \nearrow ig & \\
 irX & & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & A \\
 & \nearrow g & \\
 rX & & 
 \end{array}$$

En efecto, la existencia y unicidad de una tal  $g$  nos la da la propiedad universal del cociente. La función  $f$  “pasa al cociente” por ser  $A$  un orden parcial: si  $x \sim x'$  en  $X$ , i.e.  $x \leq x'$  y  $x' \leq x$ , entonces la monotonía de  $f$  nos da que  $f(x) \leq f(x')$  y  $f(x') \leq f(x)$ , y por lo tanto  $f(x) = f(x')$ .

Por lo tanto,  $rX$  define un único functor  $r : \mathbf{Preord} \rightarrow \mathbf{Ord}$  tal que  $(r, i)$  sea un par adjunto con unidad dada por  $\eta : \text{id}_{\mathbf{Preord}} \Rightarrow ir$ .

Veamos un ejemplo de una subcategoría que *no* es reflexiva:

*Ejemplo 2.4.14.* Sea  $\mathbf{FinSet} \subset \mathbf{Set}$  la subcategoría plena cuyos objetos son los conjuntos finitos. No es una subcategoría reflexiva. En efecto, sea  $i : \mathbf{FinSet} \rightarrow \mathbf{Set}$  el functor inclusión, y supongamos que existe un reflector  $r : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{FinSet}$ . Sea  $A \in \mathbf{Set}$  un conjunto infinito y  $X \in \mathbf{FinSet}$  tal que el cardinal de  $X$  es mayor o igual a 2. Entonces debería haber una biyección  $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, iX) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{FinSet}}(rA, X)$ . Esto es absurdo, pues el hom-set de la izquierda es infinito y el de la derecha es finito.

*Ejemplo 2.4.15.* Dado  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $\mathbf{n}$  el orden parcial  $\{0 < 1 < \dots < n - 1\}$  considerado como una categoría. Definimos funtores

$$\begin{array}{ll}
 d^i : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n} + \mathbf{1} & 0 \leq i \leq n \\
 s^i : \mathbf{n} + \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{n} & 0 \leq i \leq n - 1
 \end{array}$$

mediante  $d^i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j + 1 & \text{si } j \geq i \end{cases}$  y  $s^i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \geq i \\ j - 1 & \text{si } j > i \end{cases}$ .<sup>4</sup> La función  $d^i$  es la inyección monótona que no alcanza a  $i$  en la imagen, y la función  $s^i$  es la función sobreyectiva y monótona que envía dos elementos a  $i$ .

Estos  $2n + 1$  funtores forman una cadena de funtores adjuntos de la siguiente manera:

$$(d^n, s^{n-1}, d^{n-1}, \dots, d^1, s^0, d^0)$$

Es decir, para cada  $i = 0, \dots, n - 1$  se tiene que  $(d^{i+1}, s^i)$  y  $(s^i, d^i)$  son pares adjuntos, lo cual se verifica rápidamente (en el ejemplo 2.4.12 se describen las adjunciones en órdenes parciales).

<sup>4</sup> Estos funtores se conocen como *coface maps* y *codegeneracy maps* en la teoría de conjuntos simpliciales.

Con este ejemplo conseguimos cadenas no triviales de funtores adjuntos de largo arbitrario.

### 2.4.4. Ejemplos de la teoría de categorías

*Ejemplo 2.4.16.* Sea  $J$  una categoría pequeña y  $\mathcal{C}$  una categoría  $J$ -completa. Recordemos (corolario 1.4.7) que el límite es un functor:  $\varprojlim : \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{C}$ . Sea  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$  el functor diagonal como en la observación 1.4.3.

$$\text{Veamos que } (\Delta, \varprojlim) \text{ es un par adjunto: } \mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta} \\ \xleftarrow{\varprojlim} \end{array} \mathcal{C}^J .$$

Utilicemos la caracterización de un par adjunto dada por el teorema 2.2.5 a través de la counidad y su propiedad universal.

$$\text{Definamos una transformación natural } \mathcal{C}^J \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta \varprojlim} \\ \Downarrow \epsilon \\ \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}^J}} \end{array} \mathcal{C}^J .$$

Si  $D \in \mathcal{C}^J$ , entonces  $\epsilon_D$  debe ser una transformación natural  $J \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta(\varprojlim D)} \\ \Downarrow \epsilon_D \\ \xrightarrow{D} \end{array} \mathcal{C}$ . Definimos

$\epsilon_{D_i} : \Delta(\varprojlim D)_i = \varprojlim D \rightarrow D_i$  como  $\epsilon_{D_i} = \lambda_i$  para todo  $i \in J$ , donde  $\lambda_i$  son los morfismos canónicos del límite  $\varprojlim D$ . De esta manera,  $\epsilon$  es una transformación natural, es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} i & \varprojlim D & \xrightarrow{\lambda_i} D_i \\ e_j^i \downarrow & \text{id}_{\varprojlim D} \downarrow & \downarrow De_j^i \\ j & \varprojlim D & \xrightarrow{\lambda_j} D_j \end{array}$$

conmuta para toda flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ , pues  $(\varprojlim D, \lambda_i)$  es un cono para el diagrama  $D$ .

Veamos que  $\epsilon$  cumple la propiedad universal (2.15). Sea  $C \in \mathcal{C}$ ,  $D \in \mathcal{C}^J$  y  $\tau : \Delta C \Rightarrow D$ , debemos ver que existe una única  $f : C \rightarrow \varprojlim D$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C & & \Delta C \xrightarrow{\tau} D \\ \text{---} f \text{---} \searrow & & \text{---} \Delta f \text{---} \searrow \uparrow \epsilon_D \\ & \varprojlim D & \Delta \varprojlim D \end{array} \tag{2.46}$$

Es decir, debemos ver que existe una única  $f : C \rightarrow \varprojlim D$  que hace conmutar el siguiente diagrama de las componentes de las transformaciones naturales involucradas para todo

$i \in J$ :

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\tau_i} & D_i \\
 \searrow f & & \uparrow \lambda_i \\
 & & \varprojlim D
 \end{array} \tag{2.47}$$

Recordemos de la observación 1.4.3 que al ser  $\tau : \Delta C \Rightarrow D$  se tiene que los morfismos  $\tau_i : C \rightarrow D_i$  conforman un cono para  $D$ . Por lo tanto, la propiedad universal del límite nos dice que existe una tal  $f$  y es única.

Dualmente se demuestra que  $(\varinjlim, \Delta)$  es un par adjunto si  $\mathcal{C}$  es  $J$ -cocompleta, definiendo la unidad  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}^J} \Rightarrow \varinjlim \Delta$  como  $\eta_D = (\mu_i)_{i \in J}$  donde  $\mu_i$  son los morfismos canónicos del colímite  $\varinjlim D$ .

Por lo tanto, el functor diagonal  $\Delta$  tiene tanto adjunto a izquierda como adjunto a derecha si  $\mathcal{C}$  es  $J$ -completa y  $J$ -cocompleta. Podemos representar las dos adjunciones en un diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{C}^J & \\
 \varinjlim \swarrow & \uparrow \Delta & \searrow \varprojlim \\
 & \mathcal{C} & 
 \end{array}$$

Se demuestra de manera análoga que, recíprocamente, si el functor  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$  tiene adjunto a derecha (resp. izquierda) entonces  $\mathcal{C}$  es  $J$ -completa (resp.  $J$ -cocompleta). En conclusión:

**Proposición 2.4.17.** *Una categoría  $\mathcal{C}$  es  $J$ -completa (resp.  $J$ -cocompleta) si y sólo si el functor diagonal  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$  tiene adjunto a derecha (resp. izquierda). En este caso, su adjunto a derecha (resp. izquierda) es naturalmente isomorfo al functor  $\varprojlim : \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{C}$  (resp.  $\varinjlim : \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{C}$ ).*

Aplicando la proposición anterior y el teorema 2.3.11, deducimos que los límites “conmutan” si existen todos los límites involucrados. Sea  $D : I \rightarrow \mathcal{C}^J$  un diagrama en  $\mathcal{C}^J$ . Entonces  $\varprojlim_J \varprojlim_I D$  es el objeto límite del diagrama  $\varprojlim_J \circ D : I \rightarrow \mathcal{C}$ , es decir:

$$\varprojlim_I (\varprojlim_J \circ D) \simeq \varprojlim_J (\varprojlim_I (D)) \tag{5}$$

Dualmente se deduce que los colímites conmutan.

*Ejemplo 2.4.18.* Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Si un functor  $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  es un adjunto a derecha entonces es representable:

<sup>5</sup> Usando el corolario 2.5.5, deducimos que sólo se precisa pedir que  $\mathcal{C}$  sea  $I$ -completa y  $J$ -completa.

Supongamos que  $\mathbf{Set} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{U} \end{array} \mathcal{C}$  son funtores tales que  $(F, U)$  es un par adjunto. Entonces  $U \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F1, -)$ , donde  $1$  designa un objeto final de  $\mathbf{Set}$  (i.e. cualquier conjunto unitario, e.g.  $1 = \{\star\}$ ).

En efecto: sea  $\psi : U \Rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, U-)$  definida mediante  $\psi_C : UC \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, UC)$ ,  $\psi_C(x) = \delta_x$  donde  $\delta_x(\star) = x$ . Es claro que  $\psi_C$  es un isomorfismo para cada  $C \in \mathcal{C}$ ; verifiquemos que  $\psi$  es natural, i.e. que los siguientes cuadrados conmutan para toda  $f : C \rightarrow C'$  flecha de  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{array}{ccc} C & UC & \xrightarrow{\psi_C} \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, UC) \\ f \downarrow & Uf \downarrow & \downarrow (Uf)_* \\ C' & UC' & \xrightarrow{\psi_{C'}} \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, UC') \end{array}$$

Si  $x \in UC$ , entonces recorriendo el diagrama en sentido horario, se tiene:

$$((Uf)_* \psi_C)(x)(\star) = ((Uf)_*(\delta_x))(\star) = Uf(\delta_x(\star)) = Uf(x)$$

Recorriendo el diagrama en el sentido antihorario, se tiene:

$$(\psi_{C'} Uf)(x)(\star) = (\psi_{C'}(Uf(x)))(\star) = \delta_{Uf(x)}(\star) = Uf(x)$$

Por lo tanto  $U \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, U-) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F1, -)$  pues  $(F, U)$  es un par adjunto, y entonces  $U$  es representable.

Este ejemplo se aplica a funtores de olvido, demostrando que son representables. Tomemos por ejemplo  $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$ . Si  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Ab}$  es el functor libre (ejemplo 2.4.4), entonces se verifica fácilmente que  $F1 \simeq \mathbb{Z}$  (i.e. el grupo abeliano libre de base  $\{\star\}$  es  $\mathbb{Z}$ ). Concluimos que  $U \cong \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathbb{Z}, -)$ .

*Ejemplo 2.4.19.* Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Todo functor representable  $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  tiene un adjunto a izquierda si y sólo si  $\mathcal{C}$  tiene copotencias.

Equivalentemente, probemos que para todo  $A \in \mathcal{C}$  el functor  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  tiene un adjunto a izquierda si y sólo si  $\mathcal{C}$  tiene copotencias.

Un functor  $F$  como en el diagrama  $\mathbf{Set} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)} \end{array} \mathcal{C}$  es adjunto a izquierda de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$  si y sólo si existe una transformación natural  $\eta : \text{id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, F-)$  tal que para todo  $X \in \mathbf{Set}$ ,  $C \in \mathcal{C}$ , y función  $f : X \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$  existe una única flecha  $g : FX \rightarrow C$  tal

que  $g_*$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\
 \eta_X \downarrow & \nearrow g_* & \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, FX) & & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & C \\
 & \nearrow g & \\
 FX & & 
 \end{array}$$

Designemos por  $f_x$  a  $f(x)$  para todo  $x \in X$ . La conmutatividad del diagrama anterior significa que  $g_* \eta_X = f$ , o equivalentemente,  $g \circ \eta_X(x) = f_x$  para todo  $x \in X$ , i.e. que el siguiente diagrama conmuta para todo  $x \in X$ :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_X(x)} & FX \\
 & \searrow f_x & \downarrow g \\
 & & C
 \end{array}
 \tag{2.48}$$

Esto describe a  $F$  como el functor copotencia de  $A$ . En efecto, el diagrama (2.48) describe la propiedad definitoria de la copotencia  $\coprod_{i \in X} A$ .

Dualmente, el functor  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  es parte de un par adjunto contravariante a derecha si y sólo si  $\mathcal{C}$  tiene potencias de  $A$ , y en ese caso su adjunto es el functor potencia de  $A$ .

*Observación 2.4.20.* Sea  $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  un functor, y consideremos las siguientes afirmaciones:

1.  $U$  es un adjunto a derecha
2.  $U$  es representable
3.  $U$  preserva límites

En el ejemplo 2.4.18 probamos que  $1 \Rightarrow 2$ . El teorema 1.4.39 garantiza que  $2 \Rightarrow 3$ . En el ejemplo 2.4.19 probamos que si  $\mathcal{C}$  tiene copotencias entonces  $2 \Rightarrow 1$ . Con el teorema 3.2.16 conseguiremos condiciones suficientes que  $\mathcal{C}$  puede cumplir para que  $3 \Rightarrow 1$  y las tres condiciones sean equivalentes.

*Ejemplo 2.4.21.* Sea  $J$  una categoría pequeña y  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  funtores tales que  $(F, G)$  sea

un par adjunto. Sean  $\mathcal{C}^J \begin{array}{c} \xrightarrow{F_*} \\ \xleftarrow{G_*} \end{array} \mathcal{D}^J$  definidos como en la observación 1.4.31. Demostremos que  $(F_*, G_*)$  es un par adjunto.

Primero definamos para una transformación natural  $\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{H} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{H'} \end{array} \mathcal{B}$  una transformación

natural como sigue:  $\mathcal{A}^J \begin{array}{c} \xrightarrow{H_*} \\ \Downarrow \tau_* \\ \xrightarrow{H'_*} \end{array} \mathcal{B}^J$ .

Si  $D \in \mathcal{A}^J$ , entonces debe tenerse  $J \begin{array}{c} \xrightarrow{HD} \\ \Downarrow (\tau_*)_D \\ \xrightarrow{H'D} \end{array} \mathcal{B}$ , y definimos

$$((\tau_*)_D)_j := \tau_{D_j} : HD_j \rightarrow H'D_j$$

para todo  $j \in J$ . Es fácil verificar que  $(\tau_*)_D$  es una transformación natural para todo  $D \in \mathcal{A}^J$ , y que  $\tau_*$  es una transformación natural.

Tampoco es difícil verificar que se respeta la composición de transformaciones naturales:  $(\nu\tau)_* = \nu_*\tau_*$ , y la composición de una transformación natural con un functor:  $(F\tau)_* = F_*\tau_*$  y  $(\tau F)_* = \tau_*F_*$ . Además  $(\text{id}_F)_* = \text{id}_{F_*}$ .<sup>6</sup>

Volviendo a la situación original, sean  $\epsilon : FG \Rightarrow \text{id}_D$  y  $\eta : \text{id}_C \Rightarrow GF$  transformaciones naturales que satisfacen las identidades triangulares (2.3). Gracias a las propiedades anteriores, se verifica trivialmente que  $\epsilon_* : F_*G_* \Rightarrow \text{id}_{D^J}$  y  $\eta_* : \text{id}_{C^J} \Rightarrow G_*F_*$  satisfacen las identidades triangulares para el par  $(F_*, G_*)$ , que es entonces un par adjunto.

*Ejemplo 2.4.22.* Una categoría  $\mathcal{C}$  es *indiscreta* si para todo  $C, C' \in \mathcal{C}$  existe una única flecha  $C \rightarrow C'$ .

El functor de olvido  $\text{Ob} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}$  (ver ejemplo 1.2.4.10) tiene adjunto tanto a izquierda como a derecha. El adjunto a izquierda  $L : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Cat}$  es el functor que a un conjunto  $X$  le asocia la categoría discreta  $LX$  tal que  $\text{Ob}(LX) = X$ . El adjunto a derecha es el functor  $R : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Cat}$  que a un conjunto  $X$  le asocia la categoría indiscreta  $RX$  tal que  $\text{Ob}(RX) = X$ .

Este ejemplo es formalmente parecido al ejemplo 2.4.10, y su demostración es análoga. Las dos adjunciones se resumen en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{Set} & \\ L \swarrow & \uparrow \text{Ob} & \searrow R \\ & \mathbf{Cat} & \end{array}$$

<sup>6</sup> En el caso de tratar con categorías pequeñas, estamos considerando el functor  $\text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(J, -) : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Cat}$  (ver ejemplo 2.5.2.2), y lo que hemos enunciado recién es que este functor también lleva transformaciones naturales en transformaciones naturales, y además preserva composiciones e identidades. Esto está muy cerca de probar que el functor  $\text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(J, -)$  es un *2-functor*, utilizando la estructura de 2-categoría de  $\mathbf{Cat}$  (ver nota al pie 13 de la definición 1.3.1). De hecho, este ejemplo es válido reemplazando el functor  $\text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(J, -)$  por cualquier 2-functor entre dos 2-categorías.

## 2.5. Categorías cartesianas cerradas

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con productos binarios. La observación 1.4.17 nos garantiza la existencia de un bifunctor  $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  que a un par de objetos les asocia su producto. Por la observación 1.2.18, para cada  $C \in \mathcal{C}$  obtenemos un functor  $- \times C : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ .

**Definición 2.5.1.** Una categoría  $\mathcal{C}$  es *cartesiana cerrada* si tiene productos finitos y para todo  $C \in \mathcal{C}$  el functor  $- \times C : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tiene un adjunto a derecha.

Designaremos por  $(-)^C : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  al adjunto a derecha de  $- \times C$ . Si  $B \in \mathcal{C}$ , entonces  $B^C := (-)^C(B)$  es un *objeto exponencial*.

Fijada una adjunción  $(- \times C, (-)^C, \epsilon)$  donde  $\epsilon$  satisface la propiedad universal (2.15), dado  $B \in \mathcal{C}$  decimos que  $\epsilon_B : B^C \times C \rightarrow B$  es la *evaluación*, que designamos por  $\text{eval}$ .

Explícitamente, la evaluación cumple que para todo  $A, B \in \mathcal{C}$  y  $g : A \times C \rightarrow B$  existe una única  $f : A \rightarrow B^C$  tal que  $f \times \text{id}_C$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 A & & A \times C \xrightarrow{g} B \\
 \text{\scriptsize } f \text{ \scriptsize } \searrow & & \text{\scriptsize } f \times \text{id}_C \text{ \scriptsize } \searrow \quad \uparrow \text{ \scriptsize } \text{eval} \\
 & & B^C \times C
 \end{array} \tag{2.49}$$

*Ejemplo 2.5.2.* 1. **Set** es cartesiana cerrada. Dado  $C \in \mathbf{Set}$ , se tiene que

$$(-)^C = \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(C, -)$$

En efecto, dado  $B \in \mathbf{Set}$  definimos  $\text{eval} : \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(C, B) \times C \rightarrow B$  como la función

$$\text{eval}(h, c) = h(c)$$

para todo  $h \in B^C, c \in C$ . Se verifica la propiedad universal de la evaluación: en el diagrama 2.49, la única  $f$  tal que  $f \times \text{id}_C$  hace conmutar el diagrama es tal que  $f(a)(c) = g(a, c)$  para todo  $a \in A, c \in C$ . Este ejemplo explica la razón del nombre *evaluación*.

Esta adjunción nos dice que para todo  $A, B, C \in \mathbf{Set}$  existe una biyección

$$\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(A \times C, B) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B^C)$$

natural en  $A$  y en  $B$ . Es decir, las funciones en dos variables  $A \times C \rightarrow B$  están en biyección con las funciones  $A \rightarrow B^C$ . El procedimiento de convertir una función de dos variables  $A \times C \rightarrow B$  en una función  $A \rightarrow B^C$  considerando la variable en  $C$  como un parámetro se conoce como *curryficación* (en honor a Haskell Curry).



El ejemplo 2.4.19 aplicado a  $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$  nos dice que el adjunto a izquierda de  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathcal{C}, -) = (-)^{\mathcal{C}}$  es el functor copotencia de  $\mathcal{C}$ . Por lo tanto el functor copotencia de  $\mathcal{C}$  debe ser naturalmente isomorfo a  $- \times \mathcal{C}$ . Y lo es, pues el coproducto en  $\mathbf{Set}$  es la unión disjunta, que cumple que  $\bigsqcup_{i \in A} C = A \times C$ .

2.  $\mathbf{Cat}$  es cartesiana cerrada. Como en el caso de  $\mathbf{Set}$ , para cada  $\mathcal{C} \in \mathbf{Cat}$  se tiene que  $(-)^{\mathcal{C}} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C}, -) : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Cat}$ , donde este functor le asocia a una categoría pequeña  $\mathcal{A}$  la categoría de funtores  $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ , y a un functor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  le asocia el functor  $F_* : \mathcal{A}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathcal{C}}$  definido en la observación 1.4.31.

Dada  $\mathcal{B} \in \mathbf{Cat}$  definimos  $\mathrm{eval} : \mathcal{B}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} (F, C) & & FC \\ (\tau, f) \downarrow & \xrightarrow{\mathrm{eval}} & \downarrow Gf \circ \tau_C \\ (G, C') & & GC' \end{array}$$

La propiedad universal de la evaluación se verifica fácilmente, obteniendo que  $(- \times \mathcal{C}, (-)^{\mathcal{C}}, \mathrm{eval})$  es una adjunción y por lo tanto que  $\mathbf{Cat}$  es cartesiana cerrada.

3. La categoría  $\mathbf{Top}$  no es cartesiana cerrada: no todo espacio topológico  $X$  es tal que  $- \times X$  tiene adjunto a derecha (ver [9]). Si  $X$  es localmente compacto y Hausdorff, entonces  $- \times X$  sí tiene un adjunto a derecha,  $(-)^X = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, -) : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ , donde para todo  $Y \in \mathbf{Top}$  la topología en el espacio de funciones continuas  $Y^X$  es la topología compacto-abierta.<sup>7</sup>

Para remediar esta situación de una manera más general (sin considerar sólo espacios localmente compactos y Hausdorff), se considera la subcategoría plena de  $\mathbf{Top}$  cuyos objetos son los espacios de Hausdorff *compactamente generados*. Un espacio topológico  $X$  es compactamente generado si para todo subespacio  $A \subset X$  se cumple que  $A$  es cerrado en  $X$  si y sólo si  $A \cap K$  es cerrado en  $K$  para todo subespacio compacto  $K \subset X$ .

Sea  $\mathbf{CGHaus}$  la subcategoría plena de  $\mathbf{Top}$  cuyos objetos son los espacios de Hausdorff compactamente generados. Para todo espacio de Hausdorff  $X$  se construye un espacio  $KX$  compactamente generado y Hausdorff (la *kelleyfización* de  $X$ ) con el mismo conjunto subyacente pero cuya topología se modifica requiriendo que  $A \subset KX$

<sup>7</sup> Dado  $K \subset X$  compacto y  $U \subset X$  abierto, sea  $V(K, U)$  el conjunto de funciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  tales que  $f(K) \subset U$ . La topología compacto-abierta en  $Y^X$  tiene como subbase a los conjuntos  $V(K, U)$ . En el caso en que  $Y$  es un espacio métrico, la topología compacto-abierta en  $Y^X$  es la topología de convergencia uniforme en compactos.

sea cerrado en  $KX$  si y sólo si  $A \cap K$  es cerrado en  $X$  para todo subespacio compacto  $K \subset X$ .

Se puede probar que **CGHaus** es completa. Su producto es la kellyficación del producto ordinario de espacios topológicos. De esta manera, para todo  $X \in \mathbf{CGHaus}$  el functor  $- \times X$  tiene un adjunto a derecha,  $(-)^X$ , donde para todo  $Y \in \mathbf{CGHaus}$  se define  $Y^X$  como la kellyficación del espacio topológico  $\text{Hom}_{\mathbf{CGHaus}}(X, Y)$  dotado de la topología compacto-abierta.

La categoría **CGHaus** resulta cartesiana cerrada. Esta propiedad de importancia categórica ha llevado a algunos matemáticos a mirar con especial atención a **CGHaus**. Al respecto, S. Mac Lane sostiene:

*More extensive work [...] indicates that [CGHaus] is the convenient category for topological studies. [...] All told, this suggests that in Top we have been studying the wrong mathematical objects.*

*The right ones are the spaces in CGHaus.*

[15, p. 184]

Los detalles sobre estas construcciones pueden consultarse en [15, sección VII.8] o en [7, §6.1].

*Observación 2.5.3.* Sea  $\mathcal{A}$  una categoría cartesiana cerrada. Si  $B, C \in \mathcal{A}$ , entonces se tiene una adjunción  $(- \times B^C, (-)^{B^C}, \text{eval})$ . Esto determina una biyección

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(C \times B^C, B) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, B^{B^C})$$

Llamémosle  $\text{ev} : C \rightarrow B^{B^C}$  a la flecha que se corresponde por la biyección con  $\text{eval} : C \times B^C \rightarrow B$  (en realidad,  $\text{eval} : B^C \times C \rightarrow B$ , pero recordemos la observación 1.4.16).

- Si  $\mathcal{A} = \mathbf{Set}$ , se verifica que  $\text{ev}$  es una función tal que  $\text{ev}(x)(f) = f(x)$  para todo  $x \in C, f \in B^C$ .
- Si  $\mathcal{A} = \mathbf{Cat}$  y  $J, \mathcal{C} \in \mathbf{Cat}$ , entonces  $\text{ev} : J \rightarrow \mathcal{C}^{(\mathcal{C}^J)}$  es un functor definido como sigue. Si  $j \in J$ , entonces  $\text{ev}_j := \text{ev}(j) : \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{C}$ , llamado *functor de evaluación en  $j$* , es un functor definido como se indica a continuación:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\text{ev}_j} & D_j \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau_j \\ E & & E_j \end{array}$$

Si  $f : j \rightarrow j'$  es una flecha de  $J$ , entonces  $\text{ev } f$  es una transformación natural

$$\mathcal{C}^J \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{ev}_j} \\ \Downarrow \text{ev } f \\ \xrightarrow{\text{ev}_{j'}} \end{array} \mathcal{C}, \text{ definida tal que si } E \in \mathcal{C}^J, \text{ entonces } (\text{ev } f)_E := Ef : E_j \rightarrow E_{j'}. \text{ Es}$$

sencillo verificar que  $\text{ev } f$  cumple la condición de naturalidad.

Si  $\mathcal{C}$  no es pequeña, entonces  $\mathcal{C}^{(\mathcal{C}^J)}$  no está definida. Por otro lado, para todo  $j \in J$  el functor  $\text{ev}_j : \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{C}$  está definido, así como la transformación natural  $\text{ev } f : \text{ev}_j \Rightarrow \text{ev}_{j'}$ .

### 2.5.1. Límites en categorías de funtores

A continuación describimos la *construcción puntual* de los límites en categorías de funtores.

**Teorema 2.5.4.** *Sea  $D : I \rightarrow \mathcal{C}^J$  un diagrama. Supongamos que para todo  $j \in J$  el functor  $\text{ev}_j \circ D : I \rightarrow \mathcal{C}$  tiene límite  $(L_j, \lambda_j^i)$ . Entonces existe un único cono  $(L, \lambda^i)$  para  $D$  tal que:*

- $L \in \mathcal{C}^J$  es tal que  $L(j) = L_j$  para todo  $j \in J$ ,
- $\lambda^i : L \Rightarrow D^i := D(i)$  es tal que  $(\lambda^i)_j = \lambda_j^i$  para todo  $j \in J$ .

Además,  $(L, \lambda^i)$  es un cono límite para  $D$ . En consecuencia,  $(L, \lambda^i)$  es un cono límite para  $D$  tal que su imagen por  $\text{ev}_j$  es un cono límite para  $\text{ev}_j \circ D$ .

*Demostración.* Dado  $j \in J$ , sea  $(L_j, \lambda_j^i)$  el límite de  $\text{ev}_j \circ D$ .

Sea  $f : j \rightarrow j'$  una flecha de  $J$ . Tenemos  $I \xrightarrow{D} \mathcal{C}^J \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{ev}_j} \\ \Downarrow \text{ev } f \\ \xrightarrow{\text{ev}_{j'}} \end{array} \mathcal{C}$ , y componiendo

obtenemos

$$I \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{ev}_j \circ D} \\ \Downarrow (\text{ev } f)D \\ \xrightarrow{\text{ev}_{j'} \circ D} \end{array} \mathcal{C} \tag{2.50}$$

Observar que  $((\text{ev } f)D)_i = (\text{ev } f)_{D^i} = D^i f$ . El lema 1.4.6 nos garantiza que existe una única flecha  $Lf := \varprojlim ((\text{ev } f)D) : L_j \rightarrow L_{j'}$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

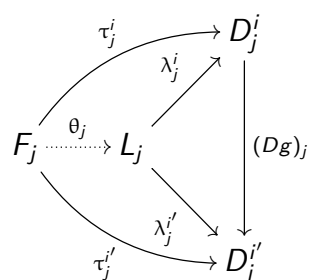
$$\begin{array}{ccc} & D_j^i & \xrightarrow{D^i f} & D_{j'}^i \\ \lambda_j^i \nearrow & & & \nearrow \lambda_{j'}^i \\ L_j & \xrightarrow{Lf} & L_{j'} & \end{array} \tag{2.51}$$

Es fácil verificar que esto define un functor  $L \in \mathcal{C}^J$ .

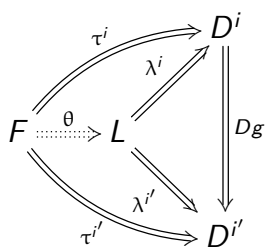
Para cada  $i \in I$  definimos  $J \begin{matrix} \xrightarrow{L} \\ \Downarrow \lambda^i \\ \xrightarrow{D^i} \end{matrix} \mathcal{C}$  como  $(\lambda^i)_j := \lambda_j^i$  para todo  $j \in J$ . En efecto, la condición de naturalidad de  $\lambda^i$  es la conmutatividad del diagrama (2.51) para toda flecha  $f : j \rightarrow j'$ .

Como  $(L_j, \lambda_j^i)$  es un cono para el diagrama  $ev_j \circ D$  para todo  $j \in J$ , se deduce por definición de  $L$  y de  $\lambda^i$  que  $(L, \lambda^i)$  es un cono para  $D$ . Como  $Lf$  es la única que hace conmutar el diagrama (2.51), deducimos que  $(L, \lambda^i)$  es el único cono para  $D$  como en el enunciado (pues la definición de  $L$  en las flechas se hizo de la única forma que hace que  $\lambda^i$  definida como en el enunciado sea una transformación natural).

Verifiquemos que  $(L, \lambda^i)$  es un cono límite para  $D$ . Sea  $(F, \tau^i)$  un cono para  $D$ . En particular  $(F_j, \tau_j^i)$  es un cono para el diagrama  $ev_j \circ D$ ; como  $(L^j, \lambda_j^i)$  es su límite, existe entonces una única  $\theta_j : F_j \rightarrow L_j$  que hace conmutar el siguiente diagrama para toda flecha  $g : i \rightarrow i'$  de  $I$ :



Basta verificar que  $\theta_j$  determina una transformación natural  $J \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{L} \end{matrix} \mathcal{C}$ , pues  $\theta$  será la única transformación natural  $F \Rightarrow L$  que hace conmutar el siguiente diagrama para toda flecha  $g : i \rightarrow i'$  de  $I$ :



Para ver que  $\theta$  es natural, debemos verificar que el siguiente diagrama conmuta para toda flecha  $f : j \rightarrow j'$  de  $J$ :

$$\begin{array}{ccc}
 j & F_j \xrightarrow{\theta_j} & L_j \\
 f \downarrow & Ff \downarrow & \downarrow Lf \\
 j' & F_{j'} \xrightarrow{\theta_{j'}} & L_{j'}
 \end{array} \tag{2.52}$$

Sea  $f : j \rightarrow j'$ . Podemos aplicar el lema 1.4.10 a la transformación natural (2.50) y a los conos  $k = (F_j, \tau_j^i)$  para  $\text{ev}_j \circ D$  y  $k' = (F_{j'}, \tau_{j'}^i)$  para  $\text{ev}_{j'} \circ D$ . En efecto,

$$(\text{ev } f, Ff) : (\text{ev}_j \circ D, k) \rightarrow (\text{ev}_{j'} \circ D, k')$$

es una flecha de la categoría  $DK_I(\mathcal{C})$ , pues la naturalidad de  $\tau^i$  para todo  $i \in I$  aplicada a la flecha  $f$  implica que el siguiente cuadrado conmuta para todo  $i \in I$ :

$$\begin{array}{ccc} F_j & \xrightarrow{\tau_j^i} & D_j^i \\ Ff \downarrow & & \downarrow D^i f \\ F_{j'} & \xrightarrow{\tau_{j'}^i} & D_{j'}^i \end{array}$$

El lema 1.4.10 concluye entonces que el diagrama (2.52) conmuta, terminando la demostración.  $\square$

**Corolario 2.5.5.** *Si  $J$  es una categoría pequeña y  $\mathcal{C}$  es una categoría completa, entonces  $\mathcal{C}^J$  es una categoría completa y para cada  $j \in J$  el functor  $\text{ev}_j : \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites.*

**Corolario 2.5.6.** *El functor diagonal  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$  preserva límites.*

*Demostración.* Sea  $D : I \rightarrow \mathcal{C}$  un diagrama con límite  $(L, \lambda_i)$ . Consideremos el diagrama  $\Delta D : I \rightarrow \mathcal{C}^J$ . Se tiene que  $\text{ev}_j \Delta D = D$  para todo  $j \in J$ . En particular,  $\text{ev}_j \Delta D$  tiene límite para todo  $j \in J$ .

Se verifican las condiciones del teorema 2.5.4: existe entonces un único cono  $(F, \tau^i)$  para  $\Delta D$  tal que  $F_j = L$  y  $\tau_j^i = \lambda_i$  para todo  $j \in J, i \in I$ . Por lo tanto  $\Delta L = F$  y  $\Delta \lambda_i = \tau^i$ . Como además  $(F, \tau^i)$  es límite de  $\Delta D$ , concluimos que  $\Delta$  preserva límites.  $\square$

*Observación 2.5.7.* El functor diagonal  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$  preserva límites, y tiene un adjunto a derecha (resp. izquierda) si y sólo si  $\mathcal{C}$  es  $J$ -completa (resp.  $J$ -cocompleta), en virtud de la proposición 2.4.17.

Esto generaliza el segundo ítem del ejemplo 2.3.12. En efecto, éste resulta de tomar  $J = \mathbf{0}$ .

## 2.5.2. Categorías monoidales cerradas

En esta sección daremos apenas algunos ejemplos y observaciones respecto de categorías monoidales cerradas. Referimos al lector a [15, sección VII.1] y a [14, capítulo 1] para más detalles.

**Definición 2.5.8.** Una *categoría monoidal* es una categoría  $\mathcal{C}$  dotada de:

- un bifunctor  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  llamado *producto tensorial*,
- un objeto  $I \in \mathcal{C}$  llamado *unidad*,
- un isomorfismo  $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C)$  natural en  $A, B, C \in \mathcal{C}$ ,
- un isomorfismo  $\lambda_A : I \otimes A \rightarrow A$  natural en  $A \in \mathcal{C}$ ,
- un isomorfismo  $\rho_A : A \otimes I \rightarrow A$  natural en  $A \in \mathcal{C}$ ,

de manera que se satisfacen las siguientes “condiciones de coherencia”:

- para todo  $A, B, C, D \in \mathcal{C}$  el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C} \otimes \text{id}_D} & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & \xrightarrow{\alpha_{A,B \otimes C,D}} & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \\
 \alpha_{A \otimes B,C,D} \downarrow & & & & \downarrow \text{id}_A \otimes \alpha_{B,C,D} \\
 (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C \otimes D}} & & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
 \end{array}$$

- para todo  $A, B \in \mathcal{C}$  el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 (A \otimes I) \otimes B & \xrightarrow{\alpha_{A,I,B}} & A \otimes (I \otimes B) \\
 \rho_A \otimes \text{id}_B \searrow & & \swarrow \text{id}_A \otimes \lambda_B \\
 & A \otimes B &
 \end{array}$$

Si  $\mathcal{C}$  es una categoría monoidal y  $B \in \mathcal{C}$ , entonces hay funtores  $- \otimes B : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  y  $B \otimes - : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  definidos como en la observación 1.2.18.

La siguiente definición es formalmente similar a la de *categoría cartesiana cerrada*, donde reemplazamos el producto por el producto tensorial.

**Definición 2.5.9.** Una *categoría monoidal cerrada a izquierda* (resp. *derecha*) es una categoría monoidal  $\mathcal{C}$  tal que el functor  $- \otimes B : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  (resp.  $B \otimes - : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ) tiene un adjunto a derecha  $[B, -] : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  (resp.  $[-, B] : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ) para todo  $B \in \mathcal{C}$ .

Explícitamente, en el caso de una categoría monoidal cerrada a izquierda esto significa que para cada  $A, B, C \in \mathcal{C}$  hay una biyección

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, [B, C])$$

natural en  $A$  y en  $C$ .

El objeto  $[B, C]$  se llama *hom interno* de  $B$  y  $C$ .

Llamaremos *categoría monoidal cerrada a izquierda* a una categoría monoidal cerrada a izquierda.

*Ejemplo 2.5.10.* 1. Toda categoría cartesiana cerrada  $\mathcal{C}$  es monoidal cerrada, con el producto tensorial dado por el producto, la unidad dada por el objeto final, y con  $[A, -] = (-)^A$ . De esta manera, **Set** y **Cat** son monoidales cerradas.

2. Si  $R$  es un anillo conmutativo, entonces **R-Mod** es monoidal cerrada, donde  $\otimes = \otimes_R$  es el producto tensorial usual, la unidad es el  $R$ -módulo  $R$  con la acción regular (ejemplo 1.3.5.5), y  $[A, -] = \text{Hom}_R(A, -) : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$ , como muestra la adjunción tensor-hom (ejemplo 2.4.2).

3. La categoría **Top<sub>\*</sub>** de espacios topológicos punteados (ver ejemplo 2.4.11) es monoidal, con el producto tensorial dado por el *producto smash*. Si  $(X, x_0), (Y, y_0) \in \mathbf{Top}_*$ , se define su *producto smash* como

$$X \wedge Y := \frac{X \times Y}{X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y} \quad (2.53)$$

con el punto base  $[(x_0, y_0)]$ .

4. La subcategoría plena **CGHaus<sub>\*</sub>** de **Top<sub>\*</sub>** cuyos objetos son los espacios topológicos punteados compactamente generados y Hausdorff (ver ejemplo 2.5.2.3) es monoidal cerrada, con la misma estructura monoidal de **Top<sub>\*</sub>**. Si  $X, Y \in \mathbf{CGHaus}_*$  entonces  $[X, Y]$  es la kellyficación del espacio topológico  $\text{Hom}_{\mathbf{CGHaus}_*}(X, Y)$  dotado de la topología compacto-abierta.

De esta manera, se tiene un par adjunto  $(- \wedge Y, [Y, -])$  para todo  $Y \in \mathbf{CGHaus}_*$ . Tomando  $Y$  como la circunferencia  $S^1$ , el functor  $- \wedge S^1$  resulta el functor  $\Sigma$  de *suspensión reducida*, y el functor  $(-)^{S^1}$  resulta el functor  $\Omega$  de *espacio de lazos*. En particular conseguimos un par adjunto  $(\Sigma, \Omega)$ : la suspensión reducida es el adjunto a izquierda del espacio de lazos. Referimos al lector a [15, sección VII.9] o a [7, §6.10] para más detalles.

*Observación 2.5.11.* Toda categoría monoidal cerrada  $\mathcal{C}$  es una categoría *enriquecida sobre sí misma*. Informalmente, esto significa que para todo par de objetos  $A, B \in \mathcal{C}$ , el conjunto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  es un objeto de  $\mathcal{C}$ , y además la composición  $\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$  es una flecha de  $\mathcal{C}$ . Se recupera la noción de categoría a secas como una categoría enriquecida sobre **Set**.

De esta manera, las categorías **R-Mod** (con  $R$  un anillo conmutativo), **Top<sub>\*</sub>** y **CGHaus<sub>\*</sub>** son enriquecidas sobre sí mismas.

Si  $A, B, C \in \mathbf{R-Mod}$ , la adjunción tensor-hom dice que tenemos biyecciones naturales en  $A, C$ :

$$\text{Hom}_R(A \otimes_R B, C) \simeq \text{Hom}_R(A, \text{Hom}_R(B, C))$$

y como estos hom-sets son también objetos de **R-Mod**, tiene sentido preguntarse si esa biyección es en realidad un isomorfismo de **R-Mod**. Esto se verifica fácilmente.

También puede verificarse que para todo  $X, Y, Z \in \mathbf{CGHaus}_*$ , la biyección natural en  $X, Z$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CGHaus}_*}(X \wedge Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{CGHaus}_*}(X, Z^Y)$$

es además un homeomorfismo [7, teorema 6.33].

Esto nos dice que las adjunciones tensor-hom y  $(- \wedge Y, [Y, -])$  son *adjunciones enriquecidas* en **R-Mod** y en **CGHaus<sub>\*</sub>** respectivamente.

Referimos al lector a [14] para un desarrollo de la teoría de categorías enriquecidas.



# Capítulo 3

## Teoremas de adjunción

En este capítulo buscamos condiciones suficientes para garantizar que un functor tenga un adjunto a izquierda o a derecha. Ya sabemos que la preservación de límites o de colímites es necesaria (teorema 2.3.11), y sabemos que no es suficiente (ejemplo 2.3.12 y observación 2.5.7).

Buscamos entonces condiciones adicionales a la preservación de límites o de colímites que nos permitan concluir que un functor tiene un adjunto.

### 3.1. Teorema general del functor adjunto

#### 3.1.1. El teorema

**Definición 3.1.1.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría e  $\mathcal{I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  una subclase. Decimos que  $\mathcal{I}$  es *débilmente inicial* si para todo  $C \in \mathcal{C}$  existe  $I \in \mathcal{I}$  y una flecha  $I \rightarrow C$ .

*Ejemplo 3.1.2.* Si  $\mathcal{C}$  tiene un objeto inicial  $X$ , entonces  $\{X\}$  es débilmente inicial.

*Observación 3.1.3.* Toda categoría  $\mathcal{C}$  admite una subclase de objetos débilmente inicial trivial, que es la propia clase de objetos de la categoría. Por este motivo, lo usual es considerar que la clase débilmente inicial es un *conjunto*, que parece ser la situación más interesante. A continuación trabajaremos pues con *conjuntos débilmente iniciales*.

**Lema 3.1.4.** *Sea  $\mathcal{A}$  una categoría completa. Entonces  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial si y sólo si  $\mathcal{A}$  tiene un conjunto débilmente inicial.*

*Demostración.* Si  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial entonces tiene un conjunto débilmente inicial, como indica el ejemplo 3.1.2. Demostremos el recíproco en el caso en que  $\mathcal{A}$  es completa.

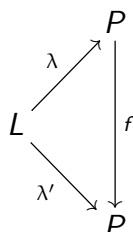
Sea  $\mathcal{I} \subset \text{Ob}(\mathcal{A})$  un conjunto débilmente inicial. Como es un *conjunto*, tiene sentido considerar el producto  $P = \prod_{I \in \mathcal{I}} I$ , que existe pues  $\mathcal{A}$  es completa.

Observar que  $\{P\}$  es débilmente inicial. En efecto, si  $A \in \mathcal{A}$ , existe  $l_0 \in \mathcal{I}$  y una flecha  $q : l_0 \rightarrow A$ . Si  $p : P \rightarrow l_0$  es la proyección sobre el factor  $l_0$ , entonces  $qp : P \rightarrow A$  es la flecha buscada.

Consideremos ahora el diagrama de todas las flechas paralelas  $P \rightarrow P$ .

Más formalmente, sea  $J$  la categoría tal que  $\text{Ob}(J) = \{\cdot, \star\}$ , y tal que  $\text{Hom}_J(\cdot, \cdot) = \text{id}_\cdot$ ,  $\text{Hom}_J(\star, \star) = \text{id}_\star$  y  $\text{Hom}_J(\cdot, \star) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, P)$ . Definimos el diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{A}$  tal que  $D(\cdot) = P = D(\star)$ , y  $D(f) = f$  para toda  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, P)$ .

Como  $\mathcal{A}$  es completa, el diagrama  $D$  tiene límite  $(L, \lambda, \lambda')$  donde  $\lambda, \lambda' : L \rightarrow P$  hacen conmutar el siguiente diagrama, para toda  $f : P \rightarrow P$ :

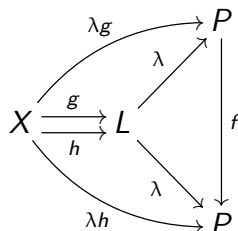


En particular conmuta para  $f = \text{id}_P$ , y por lo tanto  $\lambda' = \lambda$ . Tenemos entonces

$$f\lambda = \lambda \tag{3.1}$$

para toda  $f : P \rightarrow P$ .

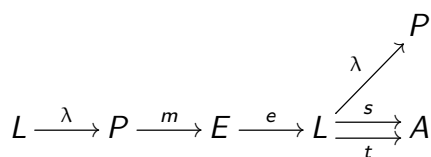
$\lambda$  es un monomorfismo: en efecto, si tenemos flechas  $X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{smallmatrix} L \xrightarrow{\lambda} P$  tales que  $\lambda g = \lambda h$ , entonces  $(X, \lambda g, \lambda h)$  es un cono para el diagrama  $D$ :



En efecto,  $f\lambda g = f\lambda h$  para toda  $f : P \rightarrow P$ . Existe entonces una única flecha  $k : X \rightarrow L$  tal que  $\lambda k = \lambda g$  y  $\lambda k = \lambda h$ . Pero tanto  $g$  como  $h$  lo cumplen, por lo tanto  $g = h$ .

Observar que  $\{L\}$  es débilmente inicial, pues tenemos una flecha  $\lambda : L \rightarrow P$  y  $\{P\}$  es débilmente inicial. Veamos que  $L$  es un objeto inicial: basta ver entonces que dadas dos flechas  $L \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{smallmatrix} A$  se tiene que  $s = t$ .

Sea  $(E, e : E \rightarrow L)$  el igualador de  $s$  y  $t$  que existe pues  $\mathcal{A}$  es completa. Tenemos entonces que  $se = te$ . Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:



donde  $m : P \rightarrow E$  surge de que  $\{P\}$  sea débilmente inicial.

Como  $\lambda em : P \rightarrow P$ , entonces por (3.1) se tiene  $(\lambda em)\lambda = \lambda$  y por lo tanto  $\lambda(em\lambda) = \lambda$ . Como  $\lambda$  es un monomorfismo, esto implica que  $em\lambda = id_L$ .

Por lo tanto  $e$  es un epimorfismo split: en particular, es un epimorfismo. Como  $se = te$ , deducimos que  $s = t$ . □

*Observación 3.1.5.* Sean  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor,  $C \in \mathcal{C}$  y  $D : J \rightarrow (C \downarrow G)$  un diagrama. Se tiene  $D_i : C \rightarrow GX_i$  para todo  $i \in J$ , y si  $e_j^i : i \rightarrow j$  es una flecha de  $J$ , entonces  $De_j^i : X_i \rightarrow X_j$  es tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 D_i \swarrow & & \searrow D_j \\
 GX_i & \xrightarrow{GDe_j^i} & GX_j
 \end{array} \tag{3.2}$$

Un cono para  $D$  es de la forma  $(v, \mu_i)$  donde  $v : C \rightarrow GM$  y  $\mu_i : M \rightarrow X_i$  son tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & GX_i \\
 & & D_i & \rightarrow & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 C & \xrightarrow{v} & GM & \xrightarrow{G\mu_i} & \\
 & & \curvearrowleft & & \\
 & & D_j & \rightarrow & GX_j \\
 & & & & \downarrow GDe_j^i
 \end{array} \tag{3.3}$$

En efecto, los dos “triángulos” superior e inferior conmutan por conformar los  $\mu_i$  una flecha  $v \rightarrow D_i$  en la categoría  $(C \downarrow G)$ ; el triángulo derecho conmuta por la condición de que estas flechas de  $(C \downarrow G)$  conformen un cono para  $D$ ; y la conmutatividad de las flechas exteriores es la conmutatividad del diagrama (3.2).

Definimos el functor  $P : (C \downarrow G) \rightarrow \mathcal{D}$  como sigue:

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 f \swarrow & & \searrow g \\
 GD & \xrightarrow{Gh} & GD'
 \end{array} \xrightarrow{P} D \xrightarrow{h} D'$$

Por lo tanto  $X_i = PD_i$  y  $De_j^i = PDe_j^i$ . De esta manera, la conmutatividad del diagrama (3.3) nos dice que  $(C, D_i)$  y  $(GM, G\mu_i)$  son conos para el diagrama  $GPD : J \rightarrow \mathcal{C}$ , y que  $v : (C, D_i) \rightarrow (GM, G\mu_i)$  es un morfismo de conos.

Observar que si  $T : (C \downarrow G) \rightarrow \mathcal{C}$  es la restricción del functor target  $T : \text{Arr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$  a la subcategoría  $(C \downarrow G)$  (ver ejemplo 1.2.25.3 y observación 1.2.26) entonces el functor  $P$  es el único que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (C \downarrow G) & \xrightarrow{P} & \mathcal{D} \\ & \searrow T & \swarrow G \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

**Lema 3.1.6.** *Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor que preserva límites. Entonces para cada  $C \in \mathcal{C}$  el functor  $P : (C \downarrow G) \rightarrow \mathcal{D}$  crea límites.*

*Demostración.* Sea  $D : J \rightarrow (C \downarrow G)$  un diagrama. Con la notación de la observación 3.1.5, tenemos el siguiente diagrama conmutativo, para toda  $e_j^i : i \rightarrow j$  flecha de  $J$ :

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ D_i \swarrow & & \searrow D_j \\ GX_i & \xrightarrow{GD e_j^i} & GX_j \end{array} \tag{3.4}$$

Supongamos que  $PD : J \rightarrow \mathcal{D}$  tiene límite  $(L, \lambda_i)$ , de tal manera que el siguiente diagrama es conmutativo para toda  $e_j^i : i \rightarrow j$  flecha de  $J$ :

$$\begin{array}{ccc} & X_i & \\ \lambda_i \nearrow & & \downarrow D e_j^i \\ L & & X_j \\ \lambda_j \searrow & & \end{array} \tag{3.5}$$

Basta ver que existe un único cono para  $D$  tal que su imagen por  $P$  sea  $(L, \lambda_i)$ , y que además es un cono límite.

Como  $G$  preserva límites, entonces  $(GL, G\lambda_i)$  es el límite del diagrama  $GPD : J \rightarrow \mathcal{C}$ . Combinando este hecho con la conmutatividad de (3.4), obtenemos que existe una única  $u : C \rightarrow GL$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & GX_i & \\ D_i \nearrow & & \downarrow G D e_j^i \\ C \xrightarrow{u} GL & \xrightarrow{G\lambda_i} & GX_i \\ & \searrow G\lambda_j & \downarrow \\ & & GX_j \\ D_j \searrow & & \end{array} \tag{3.6}$$

La observación 3.1.5 nos indica que  $(u, \lambda_i)$  es un cono para  $D$ . Este cono es tal que  $(Pu, P\lambda_i) = (L, \lambda_i)$ , y es el único que cumple esto gracias a la unicidad de  $u$ .

Verifiquemos que  $(u, \lambda_i)$  es el límite del diagrama  $D$ , terminando la demostración.

Sea  $(v, \mu_i)$  un cono para  $D$ . Por la observación 3.1.5, esto significa que  $v : C \rightarrow GM$  y  $\mu_i : M \rightarrow X_i$  son tales que el siguiente diagrama conmuta para toda flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ :

$$\begin{array}{ccc}
 & & GX_i \\
 & \nearrow^{D_i} & \uparrow^{G\mu_i} \\
 C & \xrightarrow{v} & GM \\
 & \searrow_{D_j} & \downarrow_{GDe_j^i} \\
 & & GX_j
 \end{array} \tag{3.7}$$

Si escribimos la conmutatividad anterior como la conmutatividad de un diagrama en la categoría  $(C \downarrow G)$ , entonces resulta el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & & D_i \\
 & \nearrow^v & \downarrow \\
 & & D_j
 \end{array}$$

y si le aplicamos a este diagrama el functor  $P$  obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & & X_i \\
 & \nearrow^{\mu_i} & \downarrow_{De_j^i} \\
 M & & X_j \\
 & \searrow_{\mu_j} &
 \end{array} \tag{3.8}$$

La conmutatividad de (3.8) nos dice que  $(M, \mu_i)$  es un cono para  $PD$ ; como  $L$  es el límite de  $PD$ , entonces existe una única  $h : M \rightarrow L$  que hace conmutar el siguiente diagrama para toda flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ :

$$\begin{array}{ccc}
 & & X_i \\
 & \nearrow^{\mu_i} & \uparrow^{\lambda_i} \\
 M & \xrightarrow{h} & L \\
 & \searrow_{\mu_j} & \downarrow_{De_j^i} \\
 & & X_j
 \end{array} \tag{3.9}$$

Verifiquemos que  $h$  es un morfismo entre  $v$  y  $u$  en la categoría  $(C \downarrow G)$ . Se tiene que  $Gh \circ v : C \rightarrow GL$  hace conmutar el diagrama (3.6) para todo  $i \in J$ : en efecto,

$$\begin{aligned} G\lambda_i \circ Gh \circ v &= G(\lambda_i \circ h) \circ v \\ &= G\mu_i \circ v && \text{por (3.9)} \\ &= D_i && \text{por (3.7)} \end{aligned}$$

Por lo tanto  $Gh \circ v = u$ , de donde  $h : M \rightarrow L$  es un morfismo entre  $v$  y  $u$  en la categoría  $(C \downarrow G)$ , como muestra el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ v \swarrow & & \searrow u \\ GM & \xrightarrow{Gh} & GL \end{array}$$

Esto prueba que existe un morfismo  $h : v \rightarrow u$  en  $(C \downarrow G)$  que es un morfismo de conos  $(v, \mu_i) \rightarrow (u, \lambda_i)$ . Supongamos que existe otro morfismo de conos  $k : (v, \mu_i) \rightarrow (u, \lambda_i)$ , i.e.  $k : v \rightarrow u$  es un morfismo de  $(C \downarrow G)$  que hace conmutar el siguiente diagrama para todo  $i \in J$ :

$$\begin{array}{ccc} & & D_i \\ & \searrow & \nearrow \\ v & \xrightarrow[h]{k} & u \end{array}$$

Si le aplicamos el functor  $P$  al diagrama anterior, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo para todo  $i \in J$ :

$$\begin{array}{ccc} & & X_i \\ & \searrow & \nearrow \\ M & \xrightarrow[h]{k} & L \end{array}$$

Como  $h$  es la única flecha que hace conmutar el diagrama (3.9) para todo  $i \in J$  entonces  $h = k$ , probando que  $(u, \lambda_i)$  es el límite del diagrama  $D$  y terminando entonces la demostración.  $\square$

**Corolario 3.1.7.** *Sea  $\mathcal{D}$  una categoría completa y  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor que preserva límites. Entonces para cada  $C \in \mathcal{C}$  la categoría coma  $(C \downarrow G)$  es completa.*

*Demostración.* Sea  $C \in \mathcal{C}$ . Como  $G$  preserva límites, el lema 3.1.6 asegura que el functor  $P : (C \downarrow G) \rightarrow \mathcal{D}$  crea límites; como  $\mathcal{D}$  es completa, la observación 1.4.35 concluye que  $(C \downarrow G)$  es completa.  $\square$

**Teorema 3.1.8** (general del functor adjunto [GAFT], de Freyd). *Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor, donde  $\mathcal{D}$  es una categoría completa. Entonces  $G$  es un adjunto a derecha si y sólo si  $G$  preserva límites y para todo  $C \in \mathcal{C}$  la categoría  $(C \downarrow G)$  admite un conjunto débilmente inicial.*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Si  $G$  es un adjunto a derecha, entonces por el teorema 2.3.11 preserva límites, y por el corolario 2.3.2 la categoría  $(C \downarrow G)$  tiene un objeto inicial para todo  $C \in \mathcal{C}$ , y en particular tiene un conjunto débilmente inicial.

( $\Leftarrow$ ) Como  $\mathcal{D}$  es completa y  $G$  preserva límites, entonces el corolario 3.1.7 asegura que para cada  $C \in \mathcal{C}$  la categoría  $(C \downarrow G)$  es completa. Como además  $(C \downarrow G)$  admite un conjunto débilmente inicial para todo  $C \in \mathcal{C}$  por hipótesis, entonces podemos aplicar el lema 3.1.4 para concluir que  $(C \downarrow G)$  admite un objeto inicial para todo  $C \in \mathcal{C}$ . La proposición 2.3.2 concluye que  $G$  es un adjunto a derecha.  $\square$

La existencia de un conjunto débilmente inicial en la categoría  $(C \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$  se conoce comunmente bajo el nombre de *condición del conjunto solución*. Explícitamente, significa que para todo  $C \in \mathcal{C}$  existe un conjunto (llamado *conjunto solución*) de flechas  $C \rightarrow GD_i$  indexado en un conjunto  $I$  tal que para toda flecha  $g : C \rightarrow GD$  de  $\mathcal{C}$  existe una flecha  $f_i : C \rightarrow GD_i$  del conjunto solución y una flecha  $t : D_i \rightarrow D$  tal que  $Gt$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 f_i \swarrow & & \searrow g \\
 GD_i & \xrightarrow{Gt} & GD
 \end{array} \tag{3.10}$$

Esta condición se puede resumir como “toda flecha  $C \rightarrow GD$  se factoriza a través de alguna flecha  $C \rightarrow GD_i$  del conjunto solución”.

Las definiciones, los lemas y el teorema anteriores se dualizan sin dificultades, obteniendo el teorema general del functor adjunto que nos garantiza que un functor sea un adjunto a izquierda:

**Teorema 3.1.9.** *Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un functor, donde  $\mathcal{C}$  es una categoría cocompleta. Entonces  $F$  es un adjunto a izquierda si y sólo si  $F$  preserva colímites y para todo  $D \in \mathcal{D}$  la categoría  $(F \downarrow D)$  admite un conjunto débilmente final.*

*Ejemplo 3.1.10.* En el ejemplo 2.3.12 vimos que el functor  $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C} \neq \mathbf{0}$  preservaba límites pero no era un adjunto a derecha. En este caso el teorema general del functor adjunto no se aplica porque la categoría  $\mathbf{0}$  no es completa: ya observamos que los objetos finales son

límites (ejemplo 1.4.12), por lo tanto si  $\mathbf{0}$  fuera completa, tendría un objeto final, y esto no ocurre porque  $\mathbf{0}$  no tiene objetos.

Dado un functor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , tampoco es suficiente con que  $G$  preserve límites y  $\mathcal{D}$  sea completa para concluir que  $G$  es un adjunto a derecha. Describimos el ejemplo presentado en [15, p. 119].

Sea **CompBool** la categoría de álgebras de Boole completas. Es una categoría completa, y el functor de olvido  $U : \mathbf{CompBool} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva límites. Sin embargo,  $U$  no admite un adjunto a izquierda. En efecto, en el artículo [23] se prueba que dado un conjunto numerable  $X$  existen álgebras de Boole completas de cardinal arbitrario generadas por  $X$ . En particular, no existe un “álgebra de Boole completa libre de base  $X$ ”, y  $U$  no tiene adjunto a izquierda.

Este ejemplo muestra que es necesario añadir alguna condición adicional a la completitud de  $\mathcal{D}$  y a la preservación de límites de  $G$ .

Las siguientes palabras de P. Freyd al respecto de la relevancia de la condición de tener un *conjunto* solución nos parecen interesantes:

*The stipulation in condition two, that [the solution set] be a set, is not baroque. Because mathematics has progressed for a long time without having had to take the set-class distinction seriously does not mean that the distinction is spurious. The requirement that there be a set such as [the solution set] is of the same nature as a requirement that a group be generated by a finite set. Both requirements can be very difficult to fulfill, and both can have powerful consequences.*

[10, pp. 85-86]

### 3.1.2. En categorías pequeñas

Si  $\mathcal{D}$  es pequeña, la condición del conjunto solución es innecesaria en vista de la observación 3.1.3:

**Corolario 3.1.11.** *Sea  $\mathcal{D}$  una categoría pequeña y completa y  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Entonces  $G$  es un adjunto a derecha si y sólo si  $G$  preserva límites.*

**Corolario 3.1.12.** *Una categoría pequeña es completa si y sólo si es cocompleta.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{D}$  una categoría pequeña y completa. Para ver que es cocompleta, basta ver que para toda categoría pequeña  $J$  el functor diagonal  $\Delta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^J$  es un adjunto



a derecha (proposición 2.4.17). Pero  $\Delta$  preserva límites (corolario 2.5.6), terminando la demostración en vista del corolario 3.1.11.

La afirmación recíproca es el enunciado dual del recién demostrado.  $\square$

Obtenemos en particular una caracterización de los funtores representables en categorías pequeñas y completas:

**Corolario 3.1.13.** *Sea  $\mathcal{D}$  una categoría pequeña y completa y  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$  un functor. Son equivalentes:*

1.  $G$  preserva límites,
2.  $G$  es un adjunto a derecha,
3.  $G$  es representable.

*Demostración.* (1  $\Rightarrow$  2): corolario 3.1.11.

(2  $\Rightarrow$  3): ejemplo 2.4.18.

(3  $\Rightarrow$  1): teorema 1.4.39.  $\square$

Los anteriores corolarios parecen ser más generales de lo que en realidad son, en virtud de la siguiente proposición que caracteriza las categorías pequeñas y completas:

**Proposición 3.1.14.** *Una categoría pequeña  $\mathcal{D}$  es completa si y sólo si es un preorden que tiene ínfimos.*

*Demostración.* Recordemos que los límites en los preórdenes son los ínfimos (ejemplo 1.4.13).

Veamos entonces que si  $\mathcal{D}$  es pequeña y completa entonces es un preorden. Supongamos por absurdo que no lo es, y existen por lo tanto  $C, C' \in \mathcal{C}$  y flechas  $f, g : C \rightarrow C'$  con  $f \neq g$ .

Dado un conjunto  $J$ , consideremos la potencia  $\prod_{i \in J} C'$ . Como el functor  $\text{Hom}$  preserva límites (teorema 1.4.39), en particular hay una biyección

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}} \left( C, \prod_{i \in J} C' \right) \simeq \prod_{i \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \quad (3.11)$$

El conjunto de la derecha de (3.11) tiene cardinal al menos  $2^{|J|}$ , y por lo tanto  $\left| \text{Hom}_{\mathcal{C}} \left( C, \prod_{i \in J} C' \right) \right| \geq 2^{|J|}$ .

Como  $\mathcal{D}$  es pequeña, entonces  $\text{Arr}(\mathcal{C})$  es un conjunto (observación 1.1.4.4). Si tomamos  $J = \text{Arr}(\mathcal{C})$  entonces no puede haber una biyección como en (3.11), pues

$$\left| \text{Hom}_{\mathcal{C}} \left( C, \prod_{i \in J} C' \right) \right| \geq 2^{|J|} = |\mathcal{P}(J)| > |J|$$

lo cual es absurdo ya que  $\text{Hom}_C \left( C, \prod_{i \in J} C' \right) \subset J$ . □

### 3.1.3. Ejemplos

*Ejemplo 3.1.15.* Demostremos la existencia de un functor libre en **Grp** utilizando el teorema general del functor adjunto.

La categoría **Grp** es completa y el functor de olvido  $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva límites. Esto puede verificarse fácilmente como se hizo para **R-Mod** (ver ejemplo 1.4.38).

Verifiquemos que  $U$  satisface la condición del conjunto solución. Sea  $X \in \mathbf{Set}$ . Si  $X$  es finito, consideramos los grupos de cardinal numerable, y elegimos un representante de cada clase de isomorfismo de estos grupos. Si  $X$  es infinito, consideramos los grupos de cardinal menor o igual al cardinal de  $X$ , y elegimos un representante de cada clase de isomorfismo de estos grupos. En cualquiera de los dos casos, obtenemos un conjunto  $\{G_i\}_{i \in I}$  de grupos. Nuestro conjunto solución va a ser el conjunto de todas las funciones  $\{f : X \rightarrow UG_i\}_{i \in I}$ .

En efecto, sea  $G$  un grupo y  $f : X \rightarrow UG$  una función. Sea  $H$  el subgrupo de  $G$  generado por la imagen de  $f$ . Explícitamente,  $H = \{f(x_1)^{\pm 1} \cdots f(x_n)^{\pm 1} : x_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$ . Entonces  $H$  tiene el cardinal de  $X$  (o puede tener cardinal numerable si  $X$  es finito). En todo caso,  $H \simeq G_i$  para algún  $i \in I$ . Como  $H$  es el subgrupo generado por la imagen de  $f$ , entonces podemos restringir el codominio de  $f$  a  $H$ , obteniendo  $f : X \rightarrow UG_i \simeq Uh$ . Por lo tanto si  $\iota : G_i \rightarrow G$  es la inclusión, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ f \swarrow & & \searrow f \\ UG_i & \xrightarrow{U\iota} & UG \end{array}$$

Así podemos concluir que  $U$  tiene un adjunto a izquierda  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Grp}$ . Por lo tanto existen los grupos libres. Pudimos concluirlo a través de un teorema general sin pasar por su construcción explícita que suele ser algo ardua.

Este ejemplo se generaliza a cualquier categoría de álgebras de cierto tipo (en el sentido del álgebra universal), como lo son las categorías **Mon**, **Ab**, **R-Mod**, **Ring**,  **$\mathbb{K}$ -Alg**, etc. Ver [15, p. 120] y [4, p. 271].

*Ejemplo 3.1.16.* La completitud de **Grp** se demuestra fácilmente, pero no así su cocompletitud. Por ejemplo, la construcción del coproducto en **Grp** (que es el *producto libre* de grupos) es una tarea algo sutil.

Demostremos que **Grp** es cocompleta usando el teorema general del functor adjunto.

Sea  $J$  una categoría pequeña. Queremos probar que el functor diagonal  $\Delta : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}^J$  tiene un adjunto a izquierda (proposición 2.4.17). El functor  $\Delta$  preserva límites (corolario

2.5.6) y **Grp** es completa: basta entonces verificar la condición del conjunto solución.

Sea  $D \in \mathbf{Grp}^J$  un diagrama. Consideremos la clase  $\mathcal{X}$  de grupos de cardinal infinito numerable o de cardinal menor o igual al cardinal de  $\bigsqcup_{j \in J} D_j$ . Sea  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de los grupos de  $\mathcal{X}$ .

Veamos que el conjunto  $\{D \Rightarrow \Delta G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  satisface la condición del conjunto solución.

Sea  $\varphi : D \Rightarrow \Delta G$ . Debemos verificar que existe  $\alpha \in \Lambda$ ,  $\tau^\alpha : D \Rightarrow \Delta G_\alpha$  y  $t : G_\alpha \rightarrow G$  un morfismo de grupos tal que  $\Delta t$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ \tau^\alpha \swarrow & & \searrow \varphi \\ \Delta G_\alpha & \xrightarrow{\Delta t} & \Delta G \end{array}$$

Recordando la observación 1.4.5, esto significa que debemos encontrar un morfismo de coconos entre algún cocono  $\tau^\alpha : D \Rightarrow \Delta G_\alpha$  y el cocono  $\varphi : D \Rightarrow \Delta G$ , i.e. un morfismo de grupos  $t : G_\alpha \rightarrow G$  de manera que el siguiente diagrama conmute para toda flecha  $e_j^i : i \rightarrow j$  de  $J$ :

$$\begin{array}{ccccc} D_i & & & & \\ \downarrow D e_j^i & \searrow \tau_i^\alpha & & \searrow \varphi_i & \\ & & G_\alpha & \xrightarrow{t} & G \\ & \nearrow \tau_j^\alpha & & \nearrow \varphi_j & \\ D_j & & & & \end{array}$$

Sea  $H$  el subgrupo de  $G$  generado por  $\bigsqcup_{i \in J} \text{Im } \varphi_i$ . Entonces  $H = G_\alpha$  para algún  $\alpha \in \Lambda$ . Definimos  $\tau_i^\alpha : D_i \rightarrow G_\alpha$  como  $\tau_i^\alpha(x) = (\varphi_i(x), i)$  para todo  $i \in J$ . De esta manera,  $\tau^\alpha : D \Rightarrow \Delta G_\alpha$  es un cocono para  $D$ . En efecto, si  $e_j^i : i \rightarrow j$  es una flecha de  $J$ , entonces

$$\tau_j^\alpha(D e_j^i(x)) = (\varphi_j(D e_j^i(x)), i) = (\varphi_i(x), i) = \tau_i^\alpha(x)$$

para todo  $x \in D_i$ , donde usamos que  $\varphi : D \Rightarrow \Delta G$  es un cocono para  $D$ .

Definimos  $t : G_\alpha \rightarrow G$  como  $t(\varphi_i(x), i) = \varphi_i(x)$ ; claramente  $t \circ \tau_i^\alpha = \varphi_i$  para todo  $i \in J$ , terminando la demostración.

*Ejemplo 3.1.17.* Sea **Haus** la subcategoría plena de **Top** cuyos objetos son los espacios topológicos Hausdorff, e  $i : \mathbf{Haus} \rightarrow \mathbf{Top}$  el functor inclusión. Veamos que  $\mathbf{Haus} \subset \mathbf{Top}$  es una subcategoría reflexiva. Su reflector  $r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Haus}$  se llama *hausdorffización*.

$$\begin{array}{ccc} & r & \\ \mathbf{Top} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Haus} \\ & i & \end{array}$$

Los productos de espacios de Hausdorff son espacios de Hausdorff [19, teorema 19.4], y los igualadores también, pues un subespacio de un espacio de Hausdorff es un espacio de Hausdorff [19, teorema 17.11]. Por lo tanto **Haus** es completa e  $i$  preserva límites (teorema 1.4.36 y corolario 1.4.37).

Verifiquemos la condición del conjunto solución. Sea  $X \in \mathbf{Top}$ . Consideremos el conjunto de todas las funciones continuas y sobreyectivas  $X \rightarrow iH_j$ , donde tomamos un  $H_j \in \mathbf{Haus}$  por cada clase de homeomorfismo de espacios topológicos de Hausdorff con cardinal menor o igual a  $|X|$ . Satisface la condición del conjunto solución: si  $g : X \rightarrow iH$  es una función continua, entonces se factoriza a través de su imagen, que es de Hausdorff por ser un subespacio de  $H$ .

Por lo tanto existe la hausdorffificación  $r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Haus}$ .

Una unidad  $\eta : \text{id}_{\mathbf{Top}} \Rightarrow ir$  cumple la siguiente propiedad universal: si  $X \in \mathbf{Top}$ ,  $H \in \mathbf{Haus}$  y  $f : X \rightarrow iH$  es una función continua, entonces existe una única función continua  $g : rX \rightarrow H$  tal que  $ig$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & iH \\
 \eta_X \downarrow & \nearrow ig & \\
 irX & & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & H \\
 & \nearrow g & \\
 rX & & 
 \end{array}$$

Esto explica el nombre de este reflector: toda función continua de un espacio topológico  $X$  en un espacio de Hausdorff se factoriza a través de la *hausdorffificación*  $rX$ .

## 3.2. Teorema especial del functor adjunto

Dado un functor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  que preserva límites, nos preguntamos bajo qué condiciones es un adjunto a derecha. El teorema general del functor adjunto nos permite encontrarlas bajo la forma de hipótesis adicionales tanto para la categoría  $\mathcal{D}$  (completitud) como para el functor (condición del conjunto solución). A continuación estudiaremos el *teorema especial del functor adjunto*, que agrega hipótesis sólo a la categoría  $\mathcal{D}$ .

*The chief failing of the adjoint functor theorem is that it involves not only the (unavoidable) [limit preserving] condition on the functor but also a (generally necessary) smallness condition relating the domain category, the functor, and the range category. The special adjoint functor theorem below says in effect that the smallness condition will always be satisfied by [limit] preserving functors if the domain category is "small enough" to have a cogenerator.*

[10, p. 89]

### 3.2.1. Generadores

**Definición 3.2.1.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Decimos que una subclase  $\{C_i\}_{i \in \Lambda} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  es *generadora* de  $\mathcal{C}$  si dadas dos flechas  $f, g : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$  con  $f \neq g$  existe  $i \in \Lambda$  y una flecha  $h : C_i \rightarrow A$  tal que  $fh \neq gh$ .

$$C_i \xrightarrow{h} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

Si  $\{C\} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  es una subclase generadora, decimos que  $C$  es un *generador* de  $\mathcal{C}$ .

Dualmente, decimos que una subclase  $\{C_i\}_{i \in \Lambda} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  es *cogeneradora* de  $\mathcal{C}$  si es generadora de  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ . Explícitamente,  $\{C_i\}_{i \in \Lambda}$  es cogeneradora si dadas flechas  $f, g : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$  con  $f \neq g$  existe  $i \in \Lambda$  y una flecha  $h : B \rightarrow C_i$  tal que  $hf \neq hg$ .

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{h} C_i$$

Si  $\{C\} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  es una subclase cogeneradora, decimos que  $C$  es un *cogenerador* de  $\mathcal{C}$ .

*Observación 3.2.2.* 1. Toda categoría  $\mathcal{C}$  admite una clase generadora (resp. cogeneradora) trivial, que es la propia clase de objetos de la categoría. En efecto, en este caso basta tomar  $h = \text{id}_A$  (resp.  $h = \text{id}_B$ ). Por este motivo, lo usual es considerar que la clase generadora o cogeneradora es un *conjunto*, que parece ser la situación más interesante. A continuación trabajaremos pues con *conjuntos generadores* y *conjuntos cogeneradores*.

2. Un objeto  $C \in \mathcal{C}$  es generador si y sólo si el functor  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  es fiel, y es cogenerador si y sólo si el functor contravariante  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  es fiel.

*Ejemplo 3.2.3.* En  $\mathbf{Set}$ , cualquier conjunto unitario  $\{x\}$  es un generador: dadas dos funciones  $f, g : A \rightarrow B$  con  $f \neq g$  se tiene que  $f(a) \neq g(a)$  para algún  $a \in A$ . Luego la función  $h : \{x\} \rightarrow A, x \mapsto a$  cumple  $fh \neq gh$ .

En  $\mathbf{Set}$ , cualquier conjunto  $\{x, y\}$  con  $x \neq y$  es un cogenerador. Dadas  $f, g : A \rightarrow B$  con  $f \neq g$ , existe  $a \in A$  tal que  $f(a) \neq g(a)$ . Sea  $h : B \rightarrow \{x, y\}$  una función tal que  $f(a) \mapsto x$  y  $g(a) \mapsto y$ . Entonces  $hf(a) \neq hg(a)$ , luego  $hf \neq hg$ .

**Proposición 3.2.4.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría.*

1. Si  $\mathcal{C}$  tiene coproductos, entonces  $\{C_i\}_{i \in I}$  es un conjunto generador si y sólo si para todo  $C \in \mathcal{C}$  existe un epimorfismo  $\coprod C_\lambda \rightarrow C$ , donde  $\coprod C_\lambda$  es un coproducto de objetos de  $\{C_i\}_{i \in I}$  (posiblemente con repeticiones).
2. Si  $\mathcal{C}$  tiene productos, entonces  $\{C_i\}_{i \in I}$  es un conjunto cogenerador si y sólo si para todo  $C \in \mathcal{C}$  existe un monomorfismo  $C \rightarrow \prod C_\lambda$ , donde  $\prod C_\lambda$  es un producto de objetos de  $\{C_i\}_{i \in I}$  (posiblemente con repeticiones).

*Demostración.* Demostraremos 2), pues 1) es su enunciado dual.

( $\Rightarrow$ ) Sea  $T = \{(i, f) : i \in I, f : C \rightarrow C_i\}$ . Consideremos el producto  $Q = \prod_{(i,f) \in T} C_i$ .

Observar que si  $i \in I$  entonces  $C_i$  aparece una vez por cada morfismo  $C \rightarrow C_i$ .

Por la propiedad definitoria del producto, existe una única  $h : C \rightarrow Q$  que hace conmutar el siguiente diagrama para todo  $(i, f) \in T$ :

$$\begin{array}{ccc}
 & & C_i \\
 & \nearrow f & \\
 C & \xrightarrow{h} & Q \\
 & \searrow \pi_{(i,f)} & \\
 & & C_i
 \end{array}$$

La flecha  $h$  es un monomorfismo. Si  $X \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} C \xrightarrow{h} Q$  son tales que  $hg_1 = hg_2$ , entonces  $\pi_{(i,f)}hg_1 = \pi_{(i,f)}hg_2$  para todo  $(i, f) \in T$ . La conmutatividad del diagrama anterior implica que  $fg_1 = fg_2$  para toda  $f : C \rightarrow C_i$ . Como  $\{C_i\}_{i \in I}$  es un conjunto cogenerador, debe ser  $g_1 = g_2$ . Por lo tanto  $h$  es un monomorfismo.

( $\Leftarrow$ ) Sean  $f, g : A \rightarrow B$  tales que para todo  $i \in I$  y toda  $h : B \rightarrow C_i$  se tiene  $hf = hg$ . Veamos que  $f = g$ .

Sea  $m : B \rightarrow \prod C_\lambda$  un monomorfismo como en la hipótesis. Para ver que  $f = g$ , basta ver entonces que  $mf = mg$ . Pero tanto  $mf$  como  $mg$  hacen conmutar el siguiente

diagrama para toda proyección  $p : \prod C_\lambda \rightarrow C_i$ :

$$\begin{array}{ccc} & & C_i \\ & \nearrow^{pmf} & \\ A & \xrightarrow[mg]{mf} & \prod C_\lambda \\ & \searrow_p & \end{array}$$

En efecto,  $pm : B \rightarrow C_i$  cumple  $pmf = pmg$  por cómo tomamos  $f$  y  $g$ . La propiedad definitoria del producto indica entonces que  $mf = mg$ .  $\square$

La siguiente observación será de utilidad más adelante.

*Observación 3.2.5.* El producto  $Q$  construido en la demostración de  $(\Rightarrow)$  del ítem 2 de la proposición anterior cumple que existe una flecha  $k : \prod_{i \in I} C_i \rightarrow Q$ , definida como la única que hace conmutar el siguiente diagrama para todo  $(i, f) \in T$

$$\begin{array}{ccc} & & C_i \\ & \nearrow^{\pi_i} & \\ \prod_{i \in I} C_i & \xrightarrow{k} & Q \\ & \searrow_{\pi_{(i,f)}} & \end{array}$$

El siguiente corolario se deduce automáticamente de la demostración de la proposición anterior:

**Corolario 3.2.6.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría.*

1. *Si  $\mathcal{C}$  tiene copotencias, entonces  $C \in \mathcal{C}$  es un generador si y sólo si para todo  $A \in \mathcal{C}$  existe un conjunto  $I$  y un epimorfismo  $\prod_{i \in I} C \rightarrow A$ .*
2. *Si  $\mathcal{C}$  tiene potencias, entonces  $C \in \mathcal{C}$  es un cogenerador si y sólo si para todo  $A \in \mathcal{C}$  existe un conjunto  $I$  y un monomorfismo  $A \rightarrow \prod_{i \in I} C$ .*

*Ejemplo 3.2.7.* En **R-Mod**, todo módulo es cociente de  $\bigoplus_{i \in I} R$  para algún conjunto  $I$ , donde  $R$  es un  $R$ -módulo a izquierda con la acción regular. En virtud de la proposición anterior, el  $R$ -módulo a izquierda  $R$  es un generador de la categoría **R-Mod**.

**R-Mod** también admite un cogenerador (ver [22, p. 264] o [18, pp. 73-74]). Se demuestra primero que  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  es un cogenerador de **Ab**).

*Ejemplo 3.2.8.* En **Grp**, todo grupo es cociente de un grupo libre. Por otro lado, todo grupo libre es isomorfo al producto libre de copias de  $\mathbb{Z}$ , el grupo libre es un generador. Como el producto libre es el coproducto de **Grp**, deducimos que  $\mathbb{Z}$  es un generador de **Grp**.

Sin embargo, **Grp** no admite un conjunto cogenerador. En efecto:

Observamos primero que existen grupos simples de cardinal infinito arbitrario. Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo infinito. El grupo especial lineal proyectivo  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$  es simple, y tiene el cardinal de  $\mathbb{K}$ . Como existen cuerpos de cardinal infinito arbitrario (consecuencia directa del teorema de Löwenheim-Skolem de teoría de modelos), entonces existen grupos simples de cardinal infinito arbitrario.

Ahora, si  $\{G_i\}_{i \in I}$  es un conjunto de grupos, entonces no puede ser un conjunto cogenerador.

En efecto, sea  $H$  un grupo simple de cardinal mayor a  $\max\{|G_i| : i \in I\}$ . Sea  $f : H \rightarrow G_i$  un morfismo de grupos. El núcleo de  $f$  es un subgrupo normal de  $H$ , que no puede ser nulo pues de lo contrario  $f$  sería una función inyectiva y se tendría que  $|H| \leq |G_i|$ . Por lo tanto  $\ker f = H$ , i.e.  $f = 0$ .

El morfismo identidad  $\mathrm{id} : H \rightarrow H$  y el morfismo nulo  $0 : H \rightarrow H$  son diferentes, pero no existe ningún morfismo  $f : H \rightarrow G_i$  tal que  $f \circ \mathrm{id} \neq f \circ 0$ , pues  $f \circ \mathrm{id} = 0 = f \circ 0$ . Concluimos entonces que  $\{G_i\}_{i \in I}$  no puede ser un conjunto cogenerador de **Grp**.

Referimos al lector al artículo [21] donde se demuestra la existencia o inexistencia de generadores y cogeneradores en otras categorías.

### 3.2.2. Subobjetos

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $C \in \mathcal{C}$ . Sea  $\mathcal{C}_C$  la subcategoría plena de  $(\mathcal{C} \downarrow C)$  cuyos objetos son monomorfismos con codominio  $C$ . Esta categoría es un preorden. En efecto, si  $m : M \rightarrow C$  y  $m' : M' \rightarrow C$  son monomorfismos y  $f, f' : M \rightarrow M'$  hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{f'} \end{array} & M' \\ & \begin{array}{c} \searrow m \\ \swarrow m' \end{array} & \\ & C & \end{array} \quad (3.12)$$

entonces  $m'f = m'f'$ , de donde  $f = f'$  pues  $m'$  es un monomorfismo. Esto nos permite definir la clase relacional de preorden  $m \leq m'$  si existe  $f$  como en el diagrama conmutativo anterior.

*Observación 3.2.9.* La flecha  $f$  es un monomorfismo: en efecto, si  $fg = fh$  entonces  $m'fg = m'fh$ , i.e.  $mg = mh$ , de donde  $g = h$  pues  $m$  es un monomorfismo.

Definimos la clase relacional de equivalencia  $\sim$  en los objetos de  $\mathcal{C}_C$  como hicimos en el ejemplo 1.3.8.1:  $m \sim m'$  si y sólo si  $m \leq m'$  y  $m' \leq m$ , de tal manera que la clase  $\mathcal{C}_C/\sim$  de clases de equivalencia de objetos de  $\mathcal{C}_C$  bajo la clase relacional  $\sim$  es una clase parcialmente ordenada por  $\leq$ .



**Definición 3.2.10.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $C \in \mathcal{C}$ . Un *subobjeto* de  $C$  es una clase de equivalencia de objetos de  $\mathcal{C}_C$  bajo la clase relacional  $\sim$ . Explícitamente, dos monomorfismos  $m : M \rightarrow C$  y  $m' : M' \rightarrow C$  son equivalentes si existen  $f : M \rightarrow M'$  y  $g : M' \rightarrow M$  que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightleftharpoons[f]{g} & M' \\
 & \searrow m & \swarrow m' \\
 & C & 
 \end{array} \tag{3.13}$$

Un subobjeto de  $C$  es una clase de equivalencia de monomorfismos hacia  $C$  bajo esta clase relacional de equivalencia.

Definimos  $\text{Sub}(C) := \mathcal{C}_C / \sim$ , es la *clase de subobjetos* de  $C$ .

Decimos que  $\mathcal{C}$  es *bien potenciada* si  $\text{Sub}(C)$  es un conjunto para cada  $C \in \mathcal{C}$ .

Dualmente se definen las nociones de *objeto cociente* y de categoría *bien copotenciada*.

Observar que en la situación del diagrama (3.13) se tiene  $m = m'f = mgf$ , de donde  $gf = \text{id}_M$  pues  $m$  es un monomorfismo. Análogamente se prueba que  $fg = \text{id}_{M'}$ . Por lo tanto  $M \simeq M'$ .

En resumen, un subobjeto de  $C \in \mathcal{C}$  se representa por un monomorfismo  $m : M \rightarrow C$ , y otro monomorfismo  $m' : M' \rightarrow C$  representa el mismo subobjeto que  $m$  si existe un isomorfismo  $f : M \rightarrow M'$  que hace conmutar el diagrama (3.13).

*Ejemplo 3.2.11.* A continuación examinamos los subobjetos y los objetos cociente en **Set**, **R-Mod** y **Grp**. Remitimos al lector al ejemplo 1.1.15 para una descripción de los monomorfismos y los epimorfismos en estas categorías.

1. Sea  $C \in \mathbf{Set}$ . Un monomorfismo  $M \rightarrow C$  determina un subconjunto de  $C$ . La relación  $\leq$  entre monomorfismos con codominio  $C$  se corresponde con la inclusión entre subconjuntos de  $C$ . De esta manera, monomorfismos equivalentes a través de  $\sim$  se corresponden con un mismo subconjunto de  $C$ .

Por lo tanto la clase de subobjetos de un conjunto  $C$  está en biyección con el conjunto  $\mathcal{P}(C)$  de subconjuntos de  $C$ . En particular, **Set** es bien potenciada.

Los objetos cociente de un conjunto  $C$  representan funciones sobreyectivas con dominio  $C$ . Por lo tanto **Set** también es bien copotenciada.

2. En **R-Mod**, un monomorfismo determina un submódulo, la relación  $\leq$  se corresponde con la inclusión de submódulos, y dos monomorfismos equivalentes determinan el

mismo submódulo. La clase de subobjetos de un módulo  $C$  está en biyección con el conjunto de submódulos de  $C$ . Por lo tanto **R-Mod** es bien potenciada.

Los objetos cociente de  $C \in \mathbf{R-Mod}$  representan morfismos sobreyectivos con dominio  $C$ , o equivalentemente, cocientes de  $C$ . Por lo tanto **R-Mod** es bien copotenciada.

3. Los subobjetos de  $C \in \mathbf{Grp}$  representan morfismos inyectivos con codominio  $C$ , o equivalentemente subgrupos de  $C$  (no necesariamente normales).

Los objetos cociente de  $C$  representan los morfismos sobreyectivos con dominio  $C$ , y por lo tanto cocientes de  $C$ .

Por lo tanto **Grp** es bien potenciada y bien copotenciada.

**Proposición 3.2.12.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría completa y  $C \in \mathcal{C}$ . Todo conjunto de subobjetos de  $C$  admite un ínfimo en  $\text{Sub}(C)$  respecto de  $\leq$ , llamado intersección del conjunto de subobjetos.*

*Demostración.* Sea  $\{m_i : M_i \rightarrow C\}_{i \in I}$  un conjunto completo de representantes del conjunto dado de subobjetos de  $C$ . Consideremos el límite del diagrama formado por estas flechas.

Más formalmente, sea  $\infty \notin I$  y sea  $J$  la categoría tal que  $\text{Ob}(J) = I \cup \{\infty\}$ , y tal que además de las identidades sólo hay una flecha  $i \rightarrow \infty$  para cada  $i \in I$ . Sea  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  el diagrama tal que  $D_i = M_i$  para todo  $i \in I$ ;  $D_\infty = C$ ; y  $D(i \rightarrow \infty) = m_i$ .

Observar que si  $I$  es un conjunto con dos elementos, entonces el límite de  $D$  es el pullback de  $\{m_i\}_{i \in I}$ .

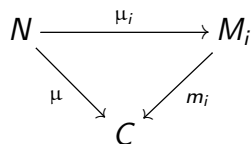
Sea  $(L, \lambda_i, \lambda)$  el límite de  $D$  (que existe pues  $\mathcal{C}$  es completa), donde  $\lambda_i : L \rightarrow M_i$  y  $\lambda : L \rightarrow C$  satisfacen  $\lambda = m_i \lambda_i$  para todo  $i \in I$ .

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda_2} & M_2 \\ \lambda_1 \downarrow & \searrow \lambda & \downarrow m_2 \\ M_1 & \xrightarrow{m_1} & C \end{array}$$

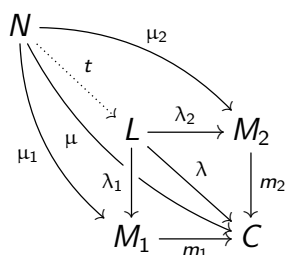
Análogamente a la demostración de la proposición 1.4.21 se prueba que las flechas  $\lambda_i$  son monomorfismos, y por lo tanto  $\lambda$  también lo es por ser composición de monomorfismos. Esto prueba que  $\lambda : L \rightarrow C$  representa un subobjeto de  $C$ , y como además  $\lambda = m_i \lambda_i$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\lambda \leq m_i$  para todo  $i \in I$ . Veamos que  $\lambda$  representa el subobjeto buscado.

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda_i} & M_i \\ & \searrow \lambda & \swarrow m_i \\ & & C \end{array}$$

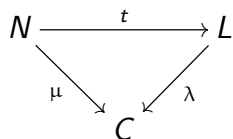
Si  $\mu : N \rightarrow C$  es un monomorfismo tal que  $\mu \leq m_i$  para todo  $i \in I$ , entonces existen flechas  $\mu_i : N \rightarrow M_i$  tales que  $\mu = m_i \mu_i$  para todo  $i \in I$ , que son monomorfismos por la observación 3.2.9.



Por ser  $(L, \lambda_i, \lambda)$  el límite de  $D$ , existe una única flecha  $t : N \rightarrow L$  tal que  $\lambda_i t = \mu_i$  para todo  $i \in I$  y  $\lambda t = \mu$ .



Como  $\mu$  es un monomorfismo y  $\lambda t = \mu$ , entonces  $t$  también lo es (observación 1.1.14). Por lo tanto  $\mu \leq \lambda$ .



Esto prueba que  $\lambda$  representa el ínfimo del conjunto de subobjetos dado. □

**Corolario 3.2.13.** Si  $\mathcal{C}$  es una categoría completa y bien potenciada, entonces para todo  $C \in \mathcal{C}$  existe un menor subobjeto de  $C$ .

*Ejemplo 3.2.14.* La intersección de subobjetos en **Set** se corresponde con la intersección de subconjuntos; la intersección de subobjetos en **R-Mod** se corresponde con la intersección de submódulos; la intersección de subobjetos de **Grp** se corresponde con la intersección de subgrupos. Análogamente en otras categorías.

### 3.2.3. El teorema

**Lema 3.2.15.** Sea  $\mathcal{A}$  una categoría completa, bien potenciada y que admite un conjunto cogenerador. Entonces  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial.

*Demostración.* Sea  $\{C_i\}_{i \in I}$  un conjunto cogenerador de  $\mathcal{A}$ . Como  $\mathcal{A}$  es completa, existe el producto  $P = \prod_{i \in I} C_i$ . Como  $\mathcal{A}$  es bien potenciada, por el corolario 3.2.13 existe un menor subobjeto de  $P$ : sea  $a : A \rightarrow P$  un monomorfismo que representa a este subobjeto. Probaremos que  $A$  es un objeto inicial de  $\mathcal{A}$ .

Sea  $C \in \mathcal{A}$ . Construyamos una flecha  $A \rightarrow C$ .

Como  $\mathcal{A}$  es completa y  $\{C_i\}_{i \in I}$  es un conjunto cogenerador, podemos aplicar la proposición 3.2.4 para conseguir un monomorfismo  $m : C \rightarrow Q$  donde  $Q$  es cierto producto de objetos de  $\{C_i\}_{i \in I}$  (posiblemente con repeticiones). La observación 3.2.5 nos provee de una flecha  $k : P \rightarrow Q$ .

La completitud de  $\mathcal{A}$  nos permite formar el pullback de  $m$  y de  $k$  como en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{q} & C \\ m' \downarrow & & \downarrow m \\ P & \xrightarrow{k} & Q \end{array}$$

Como  $m$  es un monomorfismo, entonces  $m' : R \rightarrow P$  también lo es (proposición 1.4.21). Pero  $a : A \rightarrow P$  representa el menor subobjeto de  $P$ , por lo tanto existe  $h : A \rightarrow R$  tal que  $m'h = a$ . Entonces  $qh : A \rightarrow C$  es la flecha deseada.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & R \\ a \searrow & & \swarrow m' \\ & P & \end{array}$$

Sean  $f, g : A \rightarrow C$ . Veamos que  $f = g$ .<sup>1</sup> Como  $\mathcal{A}$  es completa, existe el igualador  $(E, i : E \rightarrow A)$  de  $f$  y  $g$ . La flecha  $i$  es un monomorfismo por la proposición 1.4.26. Por lo tanto  $ai : E \rightarrow P$  también es un monomorfismo, y representa entonces un subobjeto de  $P$ . Como  $a$  representa el menor subobjeto de  $P$ , existe  $q : A \rightarrow E$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{q} & E \\ a \searrow & & \swarrow ai \\ & P & \end{array}$$

Esto significa que  $aiq = a$ . Como  $a$  es un monomorfismo, entonces  $iq = \text{id}_A$ . Por lo tanto  $i$  es un epimorfismo split, y en particular es un epimorfismo. Como  $fi = gi$ , concluimos que  $f = g$ .  $\square$

**Teorema 3.2.16** (especial del functor adjunto [SAFT], de Freyd). *Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor, donde  $\mathcal{D}$  es una categoría completa, bien potenciada y que admite un conjunto cogenerador. Entonces  $G$  es un adjunto a derecha si y sólo si preserva límites.*

*Demostración.* Si  $G$  es un adjunto a derecha, entonces preserva límites por el teorema 2.3.11.

<sup>1</sup> Probando esto se termina la prueba de que  $A$  es un objeto inicial de  $\mathcal{A}$ . Alternativamente, podríamos concluir la demostración de la siguiente manera: hemos probado que  $\{A\}$  es un conjunto débilmente inicial de  $\mathcal{A}$ ; el lema 3.1.4 concluye que  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial.

Supongamos que  $G$  preserva límites. Para probar que  $G$  es un adjunto a derecha, por la proposición 2.3.2 basta probar que para todo  $C \in \mathcal{C}$  la categoría  $(C \downarrow G)$  tiene un objeto inicial. En virtud del lema 3.2.15, basta probar que para todo  $C \in \mathcal{C}$  la categoría  $(C \downarrow G)$  es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador.

Sea  $C \in \mathcal{C}$ .

$(C \downarrow G)$  **es completa**: Como  $\mathcal{D}$  es completa, el corolario 3.1.7 concluye que  $(C \downarrow G)$  es completa.

$(C \downarrow G)$  **es bien potenciada**: Sea  $(B, f) \in (C \downarrow G)$  y  $u : (B_0, f_0) \rightarrow (B, f)$  un monomorfismo. Por lo tanto  $u$  viene dado por una flecha  $m : B_0 \rightarrow B$  tal que  $Gm$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ f_0 \swarrow & & \searrow f \\ GB_0 & \xrightarrow{Gm} & GB \end{array} \quad (3.14)$$

El functor  $P : (C \downarrow G) \rightarrow \mathcal{D}$  del lema 3.1.6 crea límites, y por lo tanto los preserva pues  $\mathcal{D}$  es completa (observación 1.4.35). En particular preserva monomorfismos (corolario 1.4.23).

Por lo tanto  $m = Pu$  es un monomorfismo. Esto significa que los subobjetos de  $(B, f)$  vienen dados por subobjetos de  $B$  representados por un monomorfismo  $m : B_0 \rightarrow B$  tal que  $Gm$  hace conmutar el diagrama (3.14). Al ser  $\mathcal{D}$  bien potenciada, los subobjetos de  $B$  forman un conjunto, y entonces los subobjetos de  $(B, f)$  también. En conclusión,  $(C \downarrow G)$  es bien potenciada.

$(C \downarrow G)$  **admite un conjunto cogenerador**: Sea  $\{D_i\}_{i \in I}$  un conjunto cogenerador de  $\mathcal{D}$ . Por lo tanto  $\mathcal{F} = \{(D_i, q) : i \in I, q : C \rightarrow GD_i\}$  es un conjunto; veamos que es un conjunto cogenerador de  $(C \downarrow G)$ .

Sean  $u, v : (B, f) \rightarrow (B', f')$ . Si  $u$  y  $v$  vienen dadas por flechas  $g : B \rightarrow B'$  y  $h : B \rightarrow B'$  respectivamente, entonces  $Gg$  y  $Gh$  hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ f \swarrow & & \downarrow f' \\ GB & \xrightarrow[Gh]{Gg} & GB' \end{array}$$

Si  $u \neq v$ , entonces  $g \neq h$ . Como  $\{D_i\}_{i \in I}$  es un conjunto cogenerador, existe  $i \in I$  y  $k : B' \rightarrow D_i$  tal que  $kg \neq kh$ . Sea  $q = Gk \circ f' : C \rightarrow GD_i$ , de tal manera que  $(D_i, q) \in \mathcal{F}$ ,

y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C & & \\
 & f \swarrow & \downarrow f' & \searrow q & \\
 GB & \xrightarrow{Gg} & GB' & \xrightarrow{Gk} & GD_i \\
 & \xleftarrow{Gh} & & & 
 \end{array}$$

Podemos definir entonces una flecha  $w : (B', f') \rightarrow (D_i, q)$  dada por  $k : B' \rightarrow D_i$ , y esta flecha cumple que  $wu \neq wv$  pues  $kg \neq kh$ . Esto muestra que  $\mathcal{F}$  es un conjunto cogenerador de  $(C \downarrow G)$ .  $\square$

El teorema anterior se dualiza sin dificultades, obteniendo el teorema especial del functor adjunto que nos garantiza que un functor sea un adjunto a izquierda:

**Teorema 3.2.17.** *Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un functor, donde  $\mathcal{C}$  es una categoría cocompleta, bien copotenciada y que admite un conjunto generador. Entonces  $F$  es un adjunto a izquierda si y sólo si  $F$  preserva colímites.*

El siguiente corolario también se dualiza sin dificultades:

**Corolario 3.2.18.** *Sea  $J$  una categoría pequeña. Si  $\mathcal{C}$  es una categoría  $J$ -completa, bien potenciada y que admite un conjunto cogenerador, entonces  $\mathcal{C}$  es  $J$ -cocompleta.*

*Demostración.* En virtud de la proposición 2.4.17, para probar que  $\mathcal{C}$  es  $J$ -cocompleta basta ver que el functor diagonal  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$  tiene un adjunto a izquierda. El teorema 3.2.16 nos indica que alcanza con probar que  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$  preserva límites, pero esto es lo que afirma el corolario 2.5.6.  $\square$

### 3.2.4. Ejemplos

*Ejemplo 3.2.19* (Compactificación de Stone-Čech). Sea **CompHaus** la subcategoría plena de **Top** cuyos objetos son los espacios topológicos compactos y Hausdorff. Aplicando el teorema especial del functor adjunto demostraremos que es una subcategoría reflexiva. Si  $r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CompHaus}$  es el reflector y  $X \in \mathbf{Top}$ , entonces  $rX$  se llama *compactificación de Stone-Čech* de  $X$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & r & \\
 \mathbf{Top} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{CompHaus} \\
 & i & \\
 & \xleftarrow{\quad} & 
 \end{array}$$

Observar que la proposición 2.3.2 nos dice que afirmar la existencia de  $r$  es equivalente a determinar para cada espacio topológico  $X$  un espacio topológico compacto y Hausdorff  $rX$  y una función continua  $\eta_X : X \rightarrow irX$  que cumplan que si  $C$  es un espacio topológico

compacto y Hausdorff y  $f : X \rightarrow iC$  es una función continua, entonces existe una única función continua  $g : rX \rightarrow C$  tal que  $ig$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & iC \\ \eta_x \downarrow & \nearrow ig & \\ irX & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & C \\ & \nearrow g & \\ rX & & \end{array}$$

Esta es la propiedad universal de la compactificación de Stone-Čech.

Demostremos que se verifican las hipótesis del teorema especial del functor adjunto.

- El intervalo  $[0, 1]$  es un cogenerador de **CompHaus**. En efecto:
  - El lema de Urysohn [19, teorema 33.1] nos dice que si  $N$  es un espacio topológico normal y  $E_0, E_1 \subset N$  son cerrados disjuntos, entonces existe una función continua  $N \rightarrow [0, 1]$  que vale 0 en  $E_0$  y vale 1 en  $E_1$ .
  - Todo espacio compacto y Hausdorff es normal [19, teorema 32.3].
  - Si  $H$  es un espacio de Hausdorff entonces  $\{x\} \subset H$  es cerrado para todo  $x \in H$  [19, teorema 17.8].

En conclusión, si  $f, g : B \rightarrow C$  son flechas de **CompHaus** tales que  $f(b) \neq g(b)$  para cierto  $b \in B$ , entonces existe una función  $h : C \rightarrow [0, 1]$  tal que  $h(f(b)) = 0$  y  $h(g(b)) = 1$ , y por lo tanto  $hf \neq hg$ .

- La categoría **CompHaus** es completa, y el functor  $i$  preserva límites.

En efecto, el producto de espacios topológicos compactos Hausdorff es compacto y Hausdorff (teorema de Tijonov: [19, teorema 37.3]; y [19, teorema 19.4]), luego el producto de una familia  $\{C_j\}_{j \in J}$  en **CompHaus** es el producto de la familia  $\{iC_j\}_{j \in J}$  en **Top**.

Por otro lado, si  $f, g : B \rightarrow C$  son flechas de **CompHaus**, entonces el subespacio  $\{b \in B : f(b) = g(b)\} \subset B$  es Hausdorff [19, teorema 17.11] y además es cerrado<sup>2</sup>, por lo tanto es compacto pues  $B$  lo es [19, teorema 26.2]. De esta manera, el igualador de  $f$  y  $g$  en **CompHaus** es el igualador de  $if$  e  $ig$  en **Top**.

La afirmación se deduce ahora del teorema 1.4.36 y del corolario 1.4.37.

- La categoría **CompHaus** es bien potenciada. En efecto, los monomorfismos en **CompHaus** son las funciones continuas e inyectivas, luego un subobjeto de un  $X \in \mathbf{CompHaus}$  está representado por un subconjunto de  $X$  con cierta topología.

<sup>2</sup> Recordar que un espacio  $X$  es Hausdorff si y sólo si la diagonal  $\Delta := \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$  es cerrada [19, ejercicio 13, §17]. Sea  $q : B \rightarrow C \times C$  la función continua definida como  $q(b) = (f(b), g(b))$ . Entonces  $q^{-1}(\Delta) = \{b \in B : f(b) = g(b)\}$  es cerrado en  $B$ .

En conclusión, la subcategoría **CompHaus**  $\subset$  **Top** es reflexiva. Hemos demostrado la existencia de la compactificación de Stone-Čech usando un teorema general de la teoría de categorías.

*Ejemplo 3.2.20.* Un functor  $F : \mathbf{R-Mod-T} \rightarrow \mathbf{R-Mod-S}$  es *aditivo* si es un morfismo de grupos abelianos a nivel de las flechas. Es decir, si  $F(f + g) = Ff + Fg$  para todo par de flechas  $f, g : M \rightarrow N$  de **R-Mod-T**.

Se puede probar que  $F$  es aditivo si y sólo si preserva productos finitos [15, p.193].

Los funtores tensor y hom del ejemplo 2.4.2 son funtores aditivos.

Los siguientes teoremas de Eilenberg y Watts caracterizan los funtores aditivos **R-Mod**  $\rightarrow$  **Ab** que preservan límites o colímites. Una parte de su demostración se deduce directamente del teorema especial del functor adjunto y de su dual. Observar que la hipótesis de aditividad sólo involucra al tercer ítem.

**Teorema 3.2.21** (Eilenberg-Watts). *Sea  $G : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$  un functor aditivo. Son equivalentes:*

1.  $G$  preserva límites,
2.  $G$  es un adjunto a derecha,
3.  $G \cong \text{Hom}_R(A, -)$  para algún  $A \in \mathbf{R-Mod}$ .

*Demostración.* (1  $\Rightarrow$  2) La categoría **R-Mod** tiene un cogenerador (ejemplo 3.2.7), es bien potenciada (ejemplo 3.2.11.2), y es completa (ejemplo 1.4.38). Por lo tanto se aplica el teorema especial del functor adjunto 3.2.16.

(2  $\Rightarrow$  3) Sea  $F$  el adjunto a izquierda de  $G$ . Existe un isomorfismo natural

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, G-) & \\ & \searrow & \nearrow \\ \mathbf{Ab}^{\text{op}} \times \mathbf{R-Mod} & \Downarrow \cong & \mathbf{Set} \\ & \swarrow & \searrow \\ & \text{Hom}_R(F-, -) & \end{array}$$

Como  $G$  es aditivo, podemos aplicar el teorema 3 de [15, p. 83] que afirma que el functor  $F : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$  también lo es, y además existe un isomorfismo natural

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, G-) & \\ & \searrow & \nearrow \\ \mathbf{Ab}^{\text{op}} \times \mathbf{R-Mod} & \Downarrow \cong & \mathbf{Ab} \\ & \swarrow & \searrow \\ & \text{Hom}_R(F-, -) & \end{array} \quad (3.15)$$

El ejemplo 1.3.5.4 garantiza que  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, -) \cong \text{id}_{\mathbf{Ab}}$ , y por lo tanto  $G \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, G-)$ . El isomorfismo natural (3.15) garantiza que  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, G-) \cong \text{Hom}_R(F\mathbb{Z}, -)$ , y por lo tanto



concluimos que  $G \cong \text{Hom}_R(F\mathbb{Z}, -)$ .

(3  $\Rightarrow$  1): ver ejemplo 2.4.2. □

Los dos teoremas siguientes se demuestran de manera análoga al anterior.

**Teorema 3.2.22** (Eilenberg-Watts). *Sea  $G : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$  un functor aditivo y contravariante. Son equivalentes:*

1.  $G$  lleva colímites en límites,
2.  $G$  es parte de un par adjunto contravariante a derecha,
3.  $G \cong \text{Hom}_R(-, B)$  para algún  $B \in \mathbf{R}\text{-Mod}$ .

**Teorema 3.2.23** (Eilenberg-Watts). *Sea  $F : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$  un functor aditivo. Son equivalentes:*

1.  $F$  preserva colímites,
2.  $F$  es un adjunto a izquierda,
3.  $F \cong A \otimes_R -$  para algún  $A \in \mathbf{Mod}\text{-}\mathbf{R}$ .

*Observación 3.2.24.* La categoría  $\mathbf{R}\text{-Mod}$  de módulos sobre un anillo  $R$  satisface las hipótesis del teorema especial del functor adjunto y de su dual, y por lo tanto un functor con dominio  $\mathbf{R}\text{-Mod}$  preserva límites si y sólo si es un adjunto a derecha, y preserva colímites si y sólo si es un adjunto a izquierda.

Se puede demostrar que esto vale más generalmente para una *categoría de Grothendieck*, viendo que una tal categoría satisface las hipótesis del teorema especial del functor adjunto y de su dual.

Una categoría de Grothendieck es una categoría abeliana que satisface el axioma AB5 (i.e. es cocompleta y el functor  $\varinjlim_J$  es exacto para toda categoría pequeña filtrada  $J$ ) y tiene un generador (ver [18, sección I.20 y capítulo III]. El autor le llama  $C_3$  al axioma AB5).

Si  $\mathcal{C}$  es una categoría de Grothendieck, entonces [18, proposiciones I 14.3 y II 15.1] prueban que es bien potenciada; [18, corolario III 3.4] prueba que tiene un cogenerador, y la completitud de  $\mathcal{C}$  se deduce del dual del corolario 3.2.18, ya que  $\mathcal{C}$  es bien copotenciada por [18, proposición I 14.2].

# Bibliografía

- [1] Jiří Adámek, Horst Herrlich, y George E. Strecker, *Abstract and concrete categories: the joy of cats*, Repr. Theory Appl. Categ. (2006), no. 17, 1–507, Reimpresión del original de 1990 [Wiley, New York; MR1051419]. MR 2240597
- [2] Steve Awodey, *Category theory*, Oxford Logic Guides, vol. 49, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2006. MR 2229319 (2007i:18001)
- [3] Michael Barr y Charles Wells, *Toposes, triples and theories*, Repr. Theory Appl. Categ. (2005), no. 12, x+288, Reimpresión corregida del original de 1985 [MR0771116]. MR 2178101
- [4] George M. Bergman, *An invitation to general algebra and universal constructions*, Henry Helson, Berkeley, CA, 1998. MR 1650275 (99h:18001)
- [5] Mario Caccamo y Glynn Winskel, *Limit preservation from naturality*, Proceedings of the 10th Conference on Category Theory in Computer Science (CTCS 2004) (Amsterdam), Electron. Notes Theor. Comput. Sci., vol. 122, Elsevier, 2005, pp. 3–22. MR 2207108
- [6] E. Cheng y R. Garner, *Notas de un curso de teoría de categorías dictado por E. Cheng en la Universidad de Cambridge, redactadas por R. Garner*, <http://cheng.staff.shef.ac.uk/catnotes/categorynotes-cheng.pdf>, 2002.
- [7] James F. Davis y Paul Kirk, *Lecture notes in algebraic topology*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 35, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. MR 1841974 (2002f:55001)
- [8] Samuel Eilenberg y Saunders MacLane, *General theory of natural equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), 231–294. MR 0013131 (7,109d)
- [9] Martín Escardó y Reinhold Heckmann, *Topologies on spaces of continuous functions*, Proceedings of the 16th Summer Conference on General Topology and its Applications (New York), vol. 26, 2001/02, pp. 545–564. MR 2032837 (2005a:54025)

- [10] Peter J. Freyd, *Abelian categories*, Repr. Theory Appl. Categ. (2003), no. 3, 1–190, Reimpresión del original de 1964 [Harper & Row Publishers, New York; MR 0166240 (29 #3517)]. MR 2050440
- [11] A. Grothendieck, J.L. Verdier, y M. Artin, *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie - 1963-64 - Théorie des topos et cohomologie étale des schémas - (SGA 4) - Tome I - Théorie des topos*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, Springer-Verlag, 1972.
- [12] Nathan Jacobson, *Basic algebra I*, segunda ed., W. H. Freeman and Company, New York, 1985. MR 780184 (86d:00001)
- [13] Daniel M. Kan, *Adjoint functors*, Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958), 294–329. MR 0131451 (24 #A1301)
- [14] G. M. Kelly, *Basic concepts of enriched category theory*, Repr. Theory Appl. Categ. (2005), no. 10, vi+137, Reimpresión del original de 1982 [Cambridge Univ. Press, Cambridge; MR0651714]. MR 2177301
- [15] Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. MR 0354798 (50 #7275)
- [16] ———, *Concepts and categories in perspective*, A Century of Mathematics in America. Part **1** (1988), 323–365.
- [17] ———, *The development and prospects for category theory*, Applied Categorical Structures **4** (1996), no. 2, 129–136.
- [18] Barry Mitchell, *Theory of categories*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XVII, Academic Press, New York, 1965. MR 0202787 (34 #2647)
- [19] James R. Munkres, *Topology*, segunda ed., Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, N.J., 2000.
- [20] Bodo Pareigis, *Categories and functors*, traducido del alemán. Pure and Applied Mathematics, Vol. 39, Academic Press, New York, 1970. MR 0265428 (42 #337b)
- [21] Bodo Pareigis y Moss E. Sweedler, *On generators and cogenerators*, Manuscripta Math. **2** (1970), 49–66. MR 0260826 (41 #5447)
- [22] Joseph J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, segunda ed., Universitext, Springer, New York, 2009. MR 2455920 (2009i:18011)

- [23] R.M. Solovay, *New proof of a theorem of Gaifman and Hales*, Bull. Amer. Math. Soc **72** (1966), no. 2, 282–284.

# Índice alfabético

- 2-categoría, 34
- Abelianización, 97
- Adjunción, 68
  - tensor-hom, 88
- Álgebra, 13
  - conmutativa, 32
  - de grupo, 97
  - simétrica, 97
  - tensorial, 96
- Bifunctor, 25
  - hom, 26
- Bimódulo, 13, 23
- Categoría, 9
  - abeliana, 145
  - bien potenciada, 137
  - cartesiana cerrada, 112
  - cocompleta, 46, 108, 142
  - coma, 28
  - completa, 43, 108, 142
  - concreta, 23
  - de  $J$ -diagramas y conos, 47
  - de índices, 23
  - de flechas, 30
  - de funtores, 33
  - de Grothendieck, 145
  - de morfismos de  $C$  a  $G$ , 30
  - de morfismos de  $F$  a  $D$ , 29
  - de objetos debajo de  $C$ , 30
  - de objetos sobre  $D$ , 30
  - discreta, 10, 111
  - enriquecida, 119
  - indiscreta, 111
  - localmente pequeña, 9
  - monoidal, 117
    - cerrada, 118
  - opuesta, 10
  - pequeña, 9, 128
  - producto, 10
- Clase
  - de flechas, 9
  - funcional, 8
  - relacional, 8
- Cocono, 45
- Cogenerador, 133
- Coigualador, 59
- Colímite, 45
- Compactificación de Stone-Čech, 142
- Completación, 31, 101
- Composición, 9
  - de funtores, 20
  - de un functor con una transformación natural, 34
- Condición del conjunto solución, 127
- Conexión de Galois, 103
- Conjunto

- cogenerador, 133
- débilmente inicial, 121
- generador, 133
- Cono, 43
  - colímite, 45
  - límite, 43
- Copotencia, 52
- Coproducto, 51
- Counidad, 71, 74
- Cuerpo de fracciones, 99
- Curryficación, 112
- Diagrama, 23
  - conmutativo, 23
- Dualidad, 10
- Epimorfismo, 16, 27
  - split, 18
- Equivalencia de categorías, 39
- Espacio de lazos, 119
- Espacio topológico
  - compactamente generado, 113
  - punteado, 102
- Espacio vectorial dual, 35
- Esqueleto, 40
- Evaluación, 112
- Exponencial, 112
- Extensión de escalares, 92
- Flecha, 9
- Functor, 20
  - aditivo, 144
  - adjunto, 68
  - constante, 21
  - contravariante, 20
  - crea límites, 63
  - de olvido, 23, 108
  - diagonal, 44, 107
  - esencialmente sobreyectivo, 40
  - fiel, 20
  - hom, 26
  - identidad, 21
  - inclusión, 21
  - libre, 95
  - lleva colímites en límites, 60
  - opuesto, 22
  - pleno, 20
  - preserva isomorfismos, 20
  - preserva límites, 60
  - producto, 22
  - refleja límites, 62
  - refleja monomorfismos, 20
  - representable, 34, 129
  - restricción, 22
  - source, 30
  - target, 30
- GAFT, véase Teorema
  - general del functor adjunto 127
- Generador, 133
- Hausdorffificación, 131
- Hom interno, 118
- Hom-set, 9
- Identities triangulares, 71
- Igualador, 57
- Ínfimo, 49
- Intersección, 138
- Isomorfismo, 9
  - de categorías, 23, 83
  - natural, 33
- Kelleyficación, 113
- Límite, 43
  - directo, 49

- inductivo, 49
- inverso, 49
- proyectivo, 49
- Monoide, 12
- Monomorfismo, 15, 27
  - split, 18
- Morfismo, 9
- Objeto, 9
  - cero, 11
  - cociente, 137
  - exponencial, 112
  - final, 11
  - inicial, 11
  - libre, 31, 95, 130
- Par adjunto, 68
  - contravariante, 69
- Potencia, 50
- Preorden, 13, 15, 129
- Producto, 50
  - libre, 130
  - smash, 119
  - tensorial, 28, 88, 118
- Pullback, 52
- Pushout, 56
- Reflector, véase Subcategoría
- reflexiva 88
- Restricción de escalares, 92
- SAFT, véase Teorema
  - especial del functor adjunto 140
- Subcategoría, 11
  - plena, 11
  - reflexiva, 88, 97
- Subobjeto, 136
- Supremo, 49
- Suspensión reducida, 119
- Teorema
  - de Eilenberg-Watts, 144, 145
  - especial del functor adjunto, 140
  - general del functor adjunto, 127
- Topología
  - compacto-abierta, 113
  - discreta e indiscreta, 101
  - final, 64
  - inicial, 64
- Transformación natural, 33
  - en cada variable, 38
- Unión disjunta, 52
- Unidad, 71, 74, 118
- Vértice, 43

# Índice de notaciones

- $\cong$ , 33
- $\simeq$ , 9
- 0**, 10
- 1**, 10
- 2**, 10
- Ab**, 12
- $\text{Arr}(\mathcal{C})$ , 9, 30
- $C \in \mathcal{C}$ , 9
- $\mathcal{C}^{\text{op}}$ , 10
- Cat**, 22
- $(C \downarrow C)$ , 30
- $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ , 33
- $(C \downarrow G)$ , 30
- CGHaus**, 113
- CGHaus<sub>\*</sub>**, 119
- $(C, \lambda_j)$ , 43
- $\text{coker } f$ , 57, 59
- CompMet<sub>u</sub>**, 31
- $\coprod_{j \in J} D_j$ , 51
- CRing**, 12, 32
- $(\mathcal{D} \downarrow D)$ , 30
- $DK_J(\mathcal{C})$ , 47
- Dom**, 99
- $\text{ev}$ , 114
- $\text{eval}$ , 112
- $f^*$ , 27
- $f_*$ , 27
- $F_{\#}$ , 61
- $F_*$ , 61, 113
- $F(A, -)$ , 25
- $F(-, B)$ , 25
- $(F \downarrow D)$ , 29
- $(F \downarrow G)$ , 28
- $F \Rightarrow G$ , 33
- $(F, G)$ , 68
- $[f^*, g_*]$ , 26
- $(F, G, \epsilon)$ , 76
- $(F, G, \eta)$ , 76
- $(F, G, \eta, \epsilon)$ , 74
- $(F, G, \tau)$ , 68
- Fld**, 12
- Grp**, 12
- Haus**, 131
- $[A, B]$ , 118
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , 9
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(F-, -)$ , 27
- $\text{Hom}_R$ , 12
- $\text{id}_A$ , 9
- $\mathbb{K}$ -Alg**, 13
- $\mathbb{K}$ -CAlg**, 97
- $\ker f$ , 54, 58



$\varinjlim D$ , 46 $\varprojlim D$ , 43 $\varprojlim_J$ , 47**Met**, 14**Met<sub>c</sub>**, 14**Met<sub>u</sub>**, 14, 31**Mon**, 12

Ob, 22

Ob( $\mathcal{C}$ ), 9**Ord**, 105 $\prod_{j \in J} D_j$ , 50**Preord**, 13**Ring**, 12**R-Mod**, 12**R-Mod-S**, 13, 23**Rng**, 12**Set**, 12Sub( $\mathcal{C}$ ), 137 $\tau_{A,-}$ , 34 $\tau_{-,B}$ , 34 $- \otimes_S -$ , 28 $\otimes$ , 118**Top**, 14**Top<sub>\*</sub>**, 102**Top<sub>2</sub>**, 102**Vect <sub>$\mathbb{K}$</sub>** , 12**Vect <sub>$\mathbb{K}, \text{fin}$</sub>** , 12