

Densidades Conformes

Emiliano Sequeira Manzino

Orientador: Álvaro Rovella

Monografía de grado

Facultad de Ciencias-Universidad de la República

Marzo de 2014

Resumen

Sea M una variedad Riemanniana completa, simplemente conexa y de curvatura negativa. Si Γ es un grupo de isometrías de M que actúa con acción libre y discontinua, entonces el cociente de la acción de Γ en M es una variedad Riemanniana de curvatura negativa (más aún, cualquier variedad de curvatura negativa se obtiene como un tal cociente).

Nuestra variedad M posee un borde, ∂M , intuitivamente, formado por los puntos finales de los rayos geodésicos en M . La acción de Γ puede extenderse a ∂M . En la dinámica de este grupo encontramos el conjunto límite, que es el mínimo cerrado invariante, este conjunto también puede definirse a partir de las órbitas de puntos de M .

En este trabajo se verá como construir una densidad conforme asociada a la acción de Γ en el borde de M . Una densidad conforme es el objeto más natural para comprender las propiedades métricas del borde de M : para cada punto de M se define una medida μ_x en el borde de M soportadas en el conjunto límite. Estas medidas, que son mutuamente absolutamente continuas, tienen la siguiente propiedad de invariancia respecto de Γ : para cada $\gamma \in \Gamma$ y $x \in X$, vale que $\gamma^* \mu_x = \mu_{\gamma x}$. La construcción de estas medidas se debe a Patterson y Sullivan; sus aplicaciones y relaciones con las diferentes estructuras geométricas asociadas a la acción de Γ serán desarrolladas en este trabajo.

Índice

1. Introducción	4
2. Variedades de Curvatura negativa	7
2.1. Preliminares	7
2.2. Borde al infinito	8
2.3. Funciones de Busemann y métricas de Gromov	11
2.4. Sombras	16
3. Isometrías	18
3.1. Clasificación	19
3.2. Grupos discontinuos de isometrías	21
3.3. Serie de Poincaré	24
4. Densidades conformes	27
4.1. Medidas de Hausdorff	27
4.2. Existencia	28
4.3. Unicidad	39
4.4. Grupos convexos cocompactos	41
4.5. Límite Radial	46
5. Aplicación: Medidas de Bowen-Margulis	50
A. Apendice: Espacios Hiperbólicos	57
A.1. Transformaciones de Möbius n-dimensionales	57
A.2. k-esferas	60
A.3. Geometría de \mathbb{H}^n	64

1. Introducción

Sea M una variedad Riemanniana simplemente conexa. Si Γ es un grupo de isometrías de M decimos que actúa discontinuamente si dado un punto $x \in M$ su estabilizador $Stab_{\Gamma}(x)$ y existe un entorno U de x tal que:

1. $\gamma U = U \quad \forall \gamma \in Stab_{\Gamma}(x)$
2. $\gamma U \cap U = \emptyset \quad \forall \gamma \in \Gamma - Stab_{\Gamma}(x)$

A lo largo de este trabajo diremos que el grupo es discontinuo para simplificar la redacción. Si además la acción es libre podemos considerar el cociente $X = M/\Gamma$ y darle una estructura de variedad Riemanniana que hace de la proyección una isometría local. Lo interesante es que esta construcción puede hacerse a la inversa, si tenemos una variedad Riemanniana X podemos considerar su cubrimiento universal $\Pi : M \rightarrow X$, podemos definir una métrica Riemanniana en M de forma tal que Π es una isometría local y las transformaciones de cubrimiento son isometrías de M . Luego tenemos que el grupo de cubrimiento Γ_{Π} actúa libre y discontinuamente y M/Γ_{Π} es isométrico a X . Es decir que todas las variedades Riemannianas se obtienen mediante el cociente de una variedad simplemente conexa por la acción un grupo de isometrías. Esta cuestión da una gran importancia al estudio de estos grupos y ha sido fundamental para comprender la geometría, la topología y el análisis en las variedades en muy diversas formas.

Las variedades Riemannianas simplemente conexas y completas son simples del punto de vista de la topología diferencial, el teorema de Hadamard nos dice que si nuestra variedad Riemanniana M es completa y de curvatura negativa entonces es difeomorfa a \mathbb{R}^n , y por lo tanto a la bola unitaria en \mathbb{R}^n . Esto nos permite definir de forma natural un borde en M al que llamamos ∂M . Notaremos \bar{M} a la unión $M \cup \partial M$. Si miramos M como la bola abierta con cierta métrica Riemanniana tenemos que las geodésicas orientadas tienen un límite positivo y otro negativo en el borde de la bola. El borde de M puede verse también como el cociente de el conjunto de rayos geodésicos por la siguiente relación: r_1 y r_2 son equivalentes si $d(r_1(t), r_2(t))$ está uniformemente acotado.

Es claro que una isometría de M se extiende a ∂M , y que es un difeomorfismo de la variedad con borde $M \cup \partial M$. Sin embargo, la distancia inducida por este difeomorfismo en S^{n-1} no es invariante respecto de la acción de una isometría. Para obtener buenas propiedades de invariancia en el borde de M , se introducen las distancias de Gromov: para cada punto $x \in M$ se define una distancia en ∂M . Estas distancias generan la topología usual en S^{n-1} , pero a diferencia de ésta, gozan de propiedades de invariancia respecto de las isometrías de M . Para definir estas métricas necesitamos las funciones de Bussemann, dado $\xi \in \partial M$ y una geodésica σ con límite ξ consideramos

$$b_{\xi}(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(x, \sigma(t)) - d(y, \sigma(t))$$

donde $x, y \in M$.

Un concepto fundamental es el de conjunto límite de un grupo Γ de isometrías de M , definido como el subconjunto del borde de M formado por aquellos puntos que son acumulados por órbitas de Γ , y que se denota Λ_Γ . Equivalentemente, un punto η está en Λ_Γ si y sólo si es un punto de acumulación de $\{\gamma x : \gamma \in \Gamma\}$, independiente de cual sea el punto $x \in M$. Este es compacto e invariante por la acción de Γ . Además tiene interior vacío o coincide con ∂M . Diremos que Γ es elemental si Λ_Γ es finito. Dentro de Λ_Γ está el límite radial de Γ , definido como el conjunto de puntos $\xi \in \Lambda_\Gamma$ tales que una geodésica que termina en η está a distancia acotada de infinitos puntos de una órbita. Este conjunto, denotado Λ_Γ^r juega también un papel importante en el estudio de las propiedades métricas de la acción de Γ .

Una propiedad importante de los grupos de isometrías es su exponente de crecimiento o crítico, este es el ínfimo de los $s > 0$ tal que la serie

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma x)}$$

converge. Notaremos por δ_Γ al exponente crítico del grupo Γ . Si la serie para $s = \delta_\Gamma$ converge diremos que el grupo es de tipo convergente, de lo contrario diremos que es de tipo divergente. Esta condición es determinante en la dinámica del flujo geodésico del cociente $X = M/\Gamma$. Además tendremos

$$\delta_\Gamma = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \log(\text{card}\{\gamma \in \Gamma : d(x, \gamma x) \leq r\})$$

Lo que indica que δ_Γ indica como crece con respecto a r la cantidad de puntos de una órbita dentro de una bola de radio r .

Se denota por $\mathcal{M}(\partial M)$ al conjunto de medidas positivas de Radon definidas en el borde de M . La primera observación es que salvo algún caso trivial, no existe una medida en el conjunto límite que sea invariante por todos los elementos de Γ . Para estudiar las propiedades métricas y ergódicas de la acción de Γ en el conjunto límite, se introducen las densidades conformes. Consideramos un grupo discontinuo Γ de isometrías de M y un real β , una Γ -densidad conforme de dimensión β es una función

$$x \in M \rightarrow \mu_x \in \mathcal{M}(\partial M),$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. $\gamma_* \mu_x = \mu_{\gamma x}$ para todo γ en Γ y $x \in M$.
2. Dados $x, y \in M$ se tiene $\mu_y \ll \mu_x$ y

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) = e^{-\beta b_\xi(y, x)} \quad \forall \xi \in \partial M$$

3. Para todo $x \in M$ la medida μ_x está soportada en Λ_Γ .

La construcción de densidades conformes en el disco hiperbólico se debe a Samuel Patterson ([13]), quien tenía el objetivo de calcular la dimensión de Hausdorff para algunos conjuntos límites de grupos Fuchsianos. Dennis Sullivan ([15]) lo generaliza a espacios hiperbólicos de dimensión arbitraria y por lo tanto a variedades de curvatura negativa constante. En el artículo de Chengo Yue ([17]) se generaliza aún más esta construcción, es a este nivel que lo haremos en el capítulo 4, parte central de este trabajo, mostrando el siguiente teorema:

Teorema. *Sea Γ un grupo discontinuo no elemental de isometrías de M . Entonces existe una Γ -densidad conforme de dimensión δ_Γ .*

También veremos que δ_Γ es la mínima dimensión que puede tener una Γ -densidad conforme. Sobre la unicidad de Γ -densidad conforme de dimensión β veremos que es equivalente a que la acción de Γ sea ergódica con respecto a cualquiera de las medidas μ_x .

Una clase especial de grupos de isometrías discontinuos es el de los convexos cocompactos, este caso será interesante para nosotros ya que tendremos solo una densidad conforme cuya dimensión será la dimensión de Hausdorff del conjunto límite $HD(\Lambda_\Gamma)$ para las métricas de Gromov, es decir que tendremos $HD(\Lambda_\Gamma) = \delta_\Gamma$.

Toda esta teoría tiene una aplicación muy importante y es que nos da información sobre la dinámica del flujo geodésico de la variedad $X = M/\Gamma$. Si tenemos una Γ -densidad conforme de dimensión β podemos definir la medida de Bowen-Margulis asociada ν^μ en X , que es invariante por el flujo geodésico. Decimos que un punto $x \in X$ es disipativo para el flujo geodésico G_t si para todo compacto $A \subset X$ existe t_0 tal que $G_t(x) \notin A$ para todo $t \geq t_0$, de lo contrario diremos que es conservativo. Diremos que el flujo geodésico es conservativo o disipativo con respecto a una medida en el caso de que el conjunto de puntos conservativos tenga medida total o cero respectivamente. El resultado principal del capítulo 5 es el siguiente:

Teorema. *Sea μ una Γ -densidad conforme de dimensión β . Entonces tenemos*

1. *G es disipativo o conservativo con respecto a ν^μ .*
2. *G es conservativo con respecto a ν^μ si y solo si Γ es de tipo divergente.*

Este sorprendente resultado refuerza nuestra afirmación sobre el gran interés que tiene el estudio de grupos discontinuos.

Finamente se incluye un anexo donde se construye con detalle el espacio hiperbólico n -dimensional, ejemplo de curvatura constante negativa, y el cálculo explícito de las distancias de Gromov en dimensión 2.

2. Variedades de Curvatura negativa

En esta monografía se trabajará con variedades Riemannianas completas, simplemente conexas de curvatura seccional negativa acotada en $-b \leq \kappa \leq -1$. Un ejemplo clásico de estas variedades es el del plano hiperbólico que tiene curvatura -1 y dimensión 2 . En el Apéndice se hace un estudio completo de los espacios hiperbólicos, una generalización de la variedad mencionada anteriormente.

Consideremos $T^1M = \{(x, v) : x \in M, v \in T_xM\}$ el fibrado tangente unitario de M , para cada $(x, v) \in T^1M$ existe una única geodésica σ que cumple $(\sigma(0), \sigma'(0)) = (x, v)$, luego definimos el flujo geodésico $g : \mathbb{R} \times T^1M \rightarrow T^1M$ por $g_t(x, v) = (\sigma(t), \sigma'(t))$.

2.1. Preliminares

Para comenzar daremos algunas definiciones y resultados de geometría Riemanniana sin dar las demostraciones. La lectura puede complementarse consultando el libro de DoCarmo [6]. El objetivo de esta sección es simplemente tener presente las particularidades que tienen las variedades Riemannianas con las que vamos a trabajar.

Definición 2.1. Una variedad Riemanniana M es geodésicamente completa si para todo $p \in M$ el mapa exponencial está definido en todo T_pM .

Teorema 2.2 (Hopf-Rinow). *Sea M una variedad Riemanniana y $p \in M$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. \exp_p está definido en todo T_pM para algún $p \in M$.
2. Los cerrados acotados en M son compactos.
3. M es completa.
4. M es geodésicamente completa.
5. Existe una subsucesión creciente de compactos $K_n \subset M$ tal que $\bigcup_n K_n = M$ y si $q_n \notin K_n \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $d(p, q_n) \rightarrow +\infty$.
6. $\forall q \in M$ existe una geodésica γ que une p con q con $\text{long}(\gamma) = d(p, q)$.

Corolario 2.3. *Si M es compacta entonces es geodésicamente completa.*

Si M es una variedad completa (o geodésicamente completa) entonces tenemos que las geodésicas están definidas en todo \mathbb{R} , llamaremos rayo geodésico a la restricción de una geodésica al intervalo $[0, +\infty)$.

Teorema 2.4 (Hadamard). *Sea M una variedad Riemanniana completa, simplemente conexa con curvatura seccional $K(p, \sigma) \leq 0 \forall p \in M, \forall \sigma \subset T_pM$. Entonces el mapa exponencial en todo punto es un difeomorfismo. En particular M es difeomorfa a \mathbb{R}^n donde $n = \dim(M)$.*

Consideremos ahora una variedad M en las hipótesis del teorema de Hadamard, notemos que dos puntos de M definen una única geodésica. Esto sucede porque dados dos puntos $x, y \in M$ el mapa exponencial \exp_x lleva biyectivamente las rectas en $T_x M$ que pasan por 0 en las geodésicas de M que pasan por x , luego como hay una sola recta que lleva 0 en $\exp^{-1}(y)$ existe una sola geodésica que pasa por x e y , teniendo en cuenta que consideramos geodésicas solo a las parametrizadas por longitud de arco. Además esta geodésica, llamémosle σ , es globalmente minimizante por el teorema de Hopf-Rinow y resulta ser una isometría, es decir que cumple $d(\sigma(t), \sigma(s)) = |t - s|$.

2.2. Borde al infinito

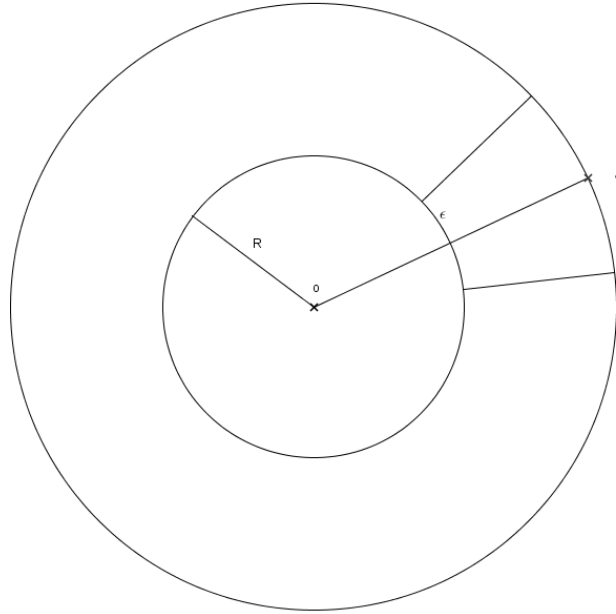
El plano hiperbólico (o disco de Poincaré) tiene un borde como subvariedad de $\bar{\mathbb{C}}$, en el caso de \mathbb{H}^n el borde puede ser visto como la frontera del conjunto visto en una esfera n -dimensional, pero esto no es claro en el caso general. Los teoremas anteriores nos permiten generalizar este hecho y definir un borde en una variedad Riemanniana en las hipótesis del teorema de Hadamard.

Definición 2.5. Consideramos el conjunto de rayos geodésicos en M parametrizados $r : [0, +\infty) \rightarrow M$. Decimos que dos rayos r_1 y r_2 son *asintóticos* si la función $t \mapsto d(r_1(t), r_2(t))$ es acotada. Notaremos por ∂M al cociente de esta relación. Dada una geodésica $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow M$ definimos sus puntos límites en ∂M como σ_+ y σ_- las clases de equivalencia de los rayos geodésicos r_1 y r_2 respectivamente, donde $r_1(t) = \sigma(t)$ y $r_2(t) = \sigma(-t)$. Es decir que $\sigma_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t)$ y $\sigma_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} \sigma(t)$. Notaremos por \bar{M} a la unión $M \cup \partial M$.

Ahora consideramos en \bar{M} la topología cuya base está formada por los siguientes conjuntos

$$U(x, \xi, R, \varepsilon) = \{z \in \bar{M} : z \notin B(x, R), d(\sigma_{x,z}(R), \sigma_{x,\xi}(R)) < \varepsilon\}$$

Donde $\sigma_{x,z}$ indica la geodésica tal que $\sigma_{x,z}(0) = x$ y $\sigma_{x,z}(T) = z$ con $T > 0$ y $\sigma_{x,\xi}$ la geodésica tal que $\sigma_{x,\xi}(0) = x$ y tiene límite positivo ξ . Se puede probar que si dejamos x fijo entonces también tenemos una base de la topología (ver del libro de Ballman Lema 2.2 de [1]).



Veremos otras dos formas de construir la compactificación de M , ambas son equivalentes a las anteriores, esto último puede leerse en el Capítulo II de [1].

Observamos que para cualquier variedad diferenciable M de dimensión n el espacio tangente $T_p M$ es difeomorfo a la bola unitaria abierta en \mathbb{R}^n ya que \mathbb{R}^n lo es por el mapa $x \xrightarrow{f} \frac{x}{1+|x|}$. Entonces si M está en las hipótesis de Hadamard es difeomorfo a una bola. Observamos entonces que todas las variedades de esta forma son isométricas a la bola con cierta métrica Riemanniana para la cual los diámetros son geodésicas. Esto nos permite construir una compactificación natural de M dada por el encaje de M en $\bar{B}(0, 1)$.

Hay dos hechos que hacen que esta definición del borde se corresponda con la anterior por una biyección natural. El primero es que dados dos geodésicas σ_1 y σ_2 la función $f(t) = d(\sigma_1(t), \sigma_2(t))$ es convexa (Corolario 5.6 de [1]), por lo que si dos rayos parten del mismo punto entonces se separan, es decir que no son asintóticos. El segundo es que dado un rayo geodésico r_1 y un punto $x \in M$ existe un rayo geodésico r_2 asintótico a r_1 tal que $r_2(0) = x$ (Lema 2.1 de [1]). Juntando estas cosas tenemos que el conjunto de rayos geodésicos que parten de un mismo punto es un conjunto completo de representantes de ∂M , lo que nos da una biyección entre la esfera de direcciones en un punto de M y las clases de equivalencia de rayos geodésicos. Luego es fácil ver que la topología es la de la bola cerrada.

Otra forma de construir la compactificación es un poco menos intuitiva. Pero nos servirá para introducirnos a las funciones de Busemann.

Definición 2.6. Consideramos la *función de Busemann* $b : M \times M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $b(x, y, z) = d(x, z) - d(x, y)$.

Fijemos un punto $y \in M$ y tomemos el mapa $b^y : M \rightarrow C(M)$ definido por

$$b^y(x)(x') = b(x, y, x')$$

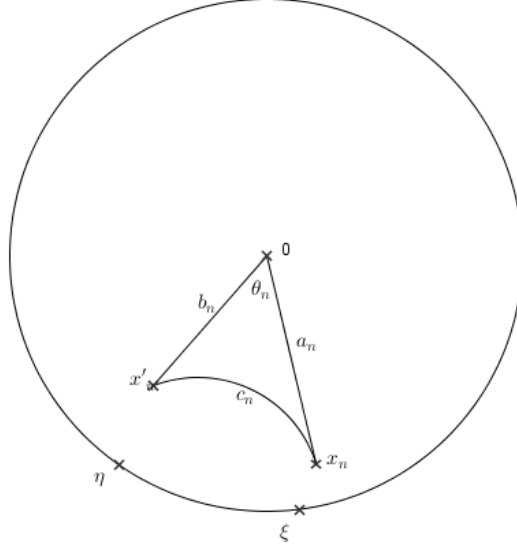
Consideramos en $C(X)$ la topología de convergencia uniforme en compactos. Decimos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a infinito si $d(y, x_n) \rightarrow +\infty$ y $b^y(x_n)$ converge en $C(M)$ para algún $y \in M$. Dos sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son equivalentes si $\lim_n b^y(x_n) = \lim_n b^y(x'_n)$ para algún $y \in M$. Se puede ver que todo esto es independiente de la elección de y . El borde es el conjunto de clases de equivalencia de esta relación. El borde de M se corresponde con la frontera del conjunto $b^y(M)$ en $C(M)$, esto da una topología en $\bar{M} = M \cup \partial M$ que no depende del punto y . Con respecto de esta topología la función de Busemann se extiende a una función continua $b : \bar{M} \times \bar{M} \times \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$.

Consideremos dos puntos $\xi, \eta \in \partial M$, cabe preguntarse cuantas geodésicas existen con estos límites o mejor dicho, bajo que hipótesis tenemos una única geodésica con estos límites. Observamos que $\sigma_+ = \zeta_+$ y $\sigma_- = \zeta_-$ si y solo si $d(\sigma(t), \zeta(t))$ está uniformemente acotado para todo t , luego el caso de \mathbb{R}^n esto lo cumple cualquier par de rectas paralelas, por lo tanto no nos alcanza con curvatura no negativa. Sin embargo en curvatura negativa sí tenemos la unicidad buscada, es decir que dos geodésicas diferentes siempre se separan para el futuro o el pasado, esto también es consecuencia del corolario 5.6 de [1].

Como ya dijimos, nos interesa estudiar las isometrías de M , una observación importante que podemos hacer en este punto es que se extienden naturalmente a homeomorfismos en \bar{M} . Esto es porque las isometrías llevan geodésicas en geodésicas, luego si $\xi \in \partial M$ y γ es una isometría de M podemos definir $\gamma\xi = (\gamma\sigma)_+$ donde σ es una geodésica tal que $\sigma_+ = \xi$. Esta definición no depende de la elección de la geodésica σ ya que $\zeta_+ = \sigma_+$ quiere decir que $d(\sigma(t), \zeta(t))$ está acotado para $t \geq 0$, luego como γ es una isometría también está acotado $d(\gamma\sigma(t), \gamma\zeta(t))$. La biyectividad es clara, mientras la continuidad se puede deducir de la continuidad de las funciones que inducen en la bola cerrada.

Lema 2.7. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones en M tal que $d(x_n, x'_n)$ está acotada y $x_n \rightarrow \xi$ en \bar{M} entonces $x'_n \rightarrow \xi$ en \bar{M}

Demostración. Supongamos que no es así, entonces a menos de tomar subsucesiones podemos suponer que $x'_n \rightarrow \eta \in \partial M$ ya que no puede haber subsucesiones acumulando en el M porque de otra forma habría subsucesiones de x_n convergiendo en M . Ahora tomemos los triangulos de vertices $0, x_n$ y x'_n .



Usaremos la siguiente desigualdad: $c_n^2 \geq a_n^2 + b_n^2 - 2a_nb_n \cos\theta_n$. La prueba de esta puede leerse en [6] (Lema 3.1 del capítulo XII de [6]). Tenemos entonces que como $a_n, b_n \rightarrow \infty$ y θ_n acotada por abajo entonces $c_n \rightarrow \infty$, lo que es absurdo porque $c_n = d(x_n, x'_n)$. \square

2.3. Funciones de Busemann y métricas de Gromov

Consideramos M variedad Riemanniana completa, simplemente conexa con curvatura $-b \leq \kappa \leq -1$. Hasta esta sección nos alcanzaba con curvatura menor o igual a cero, pero veremos en el resto del capítulo que estas hipótesis serán necesarias.

Dado $\xi \in \partial M$ definimos $b_\xi : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ por $b_\xi(x, y) = b^y(\xi)(x)$ es decir que si $x_n \rightarrow \xi$ entonces

$$b_\xi(x, y) = \lim_n d(x, x_n) - d(y, x_n)$$

Usaremos también la siguiente expresión $b_\xi(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(x, \sigma(t)) - d(y, \sigma(t))$ donde σ es una geodésica tal que $\sigma_+ = \xi$.

Proposición 2.8 (Propiedades de la función de Busemann). Sean $x, y, z \in M$ $\xi \in \partial M$.

1. $|b_\xi(x, y)| \leq d(x, y)$
2. $b_\xi(x, z) = b_\xi(x, y) + b_\xi(y, z)$.
3. $b_\xi(x, y) = -b_\xi(y, x)$.
4. Si γ es una isometría entonces $b_{\gamma\xi}(\gamma x, \gamma y) = b_\xi(x, y)$.
5. Si σ es una geodésica tal que $\sigma_+ = \xi$ entonces $b_\xi(\sigma(t), \sigma(s)) = t - s$.

Demostración. 1. Es claro a partir de la desigualdad triangular.

2. Sea σ una geodésica con $\sigma_+ = \xi$, entonces

$$\begin{aligned}
& b_\xi(x, y) + b_\xi(y, z) \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} d(x, \sigma(t)) - d(y, \sigma(t)) + \lim_{t \rightarrow +\infty} d(y, \sigma(t)) - d(z, \sigma(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} d(x, \sigma(t)) - d(y, \sigma(t)) + d(y, \sigma(t)) - d(z, \sigma(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} d(x, \sigma(t)) - d(z, \sigma(t)) = b_\xi(y, z)
\end{aligned}$$

3. Es claro a partir de la definición.
4. Si σ es una geodésica que termina en ξ entonces $\gamma\sigma$ es una geodésica que termina en $\gamma\xi$, luego

$$\begin{aligned}
b_{\gamma\xi}(x, y) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} d(x, \gamma\sigma(t)) - d(y, \gamma\sigma(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\gamma^{-1}x, \sigma(t)) - d(\gamma^{-1}y, \sigma(t)) = b_\xi(\gamma^{-1}x, \gamma^{-1}y)
\end{aligned}$$

5. $b_\xi(\sigma(t), \sigma(s)) = \lim_{r \rightarrow +\infty} d(\sigma(t), \sigma(r)) - d(\sigma(s), \sigma(r))$. Pero para $r \geq \max\{t, s\}$ tenemos $d(\sigma(t), \sigma(r)) - d(\sigma(s), \sigma(r)) = (t-r) - (s-r)$ y entonces $b_\xi(\sigma(t), \sigma(s)) = \lim_{r \rightarrow +\infty} (t-r) - (s-r) = t - s$.

□

Definición 2.9. Sean $x \in M$ y $\xi \in \partial M$, la *horo esfera* por x centrada en ξ es el conjunto $h_\xi(x) = \{y \in M : b_\xi(x, y) = 0\}$.

Fijemos $x \in M$, si σ es una geodésica que termina en ξ consideramos y sobre ésta. Tenemos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} b_\xi(x, \sigma(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} b_\xi(x, y) + b_\xi(y, \sigma(t)) = -\infty$, de la misma forma $\lim_{t \rightarrow -\infty} b_\xi(x, \sigma(t)) = +\infty$, luego la imagen de $b_\xi(x, \cdot)$ es todo \mathbb{R} . En conclusión tenemos que toda geodésica que termina en ξ intersecta a toda horoesfera centrada en el mismo punto. Sean $x, y \in M$, tomemos una geodésica σ que termina en ξ , sean $\sigma(t)$ y $\sigma(s)$ los puntos de corte de la imagen de σ con las horoesferas centradas en ξ que pasan por x e y respectivamente, luego $b_\xi(x, y) = b_\xi(x, \sigma(t)) + b_\xi(\sigma(t), \sigma(s)) + b_\xi(\sigma(s), y) = t - s$. Entonces ahora para un punto $x \in M$ consideramos los conjuntos $H_\xi(x)$ de los pares $(p, \sigma'(0)) \in T^1M$ donde p está en la horoesfera de centro ξ que pasa por x y σ

es la geodésica que termina en ξ y cumple $\sigma(0) = p$. Si g es el flujo geodésico entonces tenemos $H_\xi(y) = g_{b_\xi(y,x)}(H_\xi(x))$.

Otra cosa a observar es que si γ es una isometría de M entonces preserva el conjunto de horoesferas, es más, si $x \in M$ y $\xi \in \partial M$ entonces $\{\gamma y \in M : b_\xi(x, y) = 0\} = \{z \in M : b_{\gamma\xi}(\gamma x, z) = 0\}$. Esto es consecuencia de la propiedad 4 de la función de Busemann.

Lema 2.10. *Sean $x \in M$ y $\xi, \zeta \in \partial M$, entonces $b_\xi(x, y) + b_\eta(x, y)$ es constante para y en la geodésica de extremos ξ y η .*

Demostración. Sea σ la geodésica de puntos límites ξ y η .

$$\begin{aligned} & b_\xi(x, y) + b_\eta(x, y) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (d(x, \sigma(t)) - d(y, \sigma(t))) + \lim_{t \rightarrow -\infty} (d(x, \sigma(t)) - d(y, \sigma(t))) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} d(x, \sigma(t)) + d(x, \sigma(-t)) - d(\sigma(t), \sigma(-t)) \end{aligned}$$

Como este límite existe y no depende de y deducimos la tésis. \square

El lema anterior nos permite hacer la siguiente definición:

Definición 2.11. Sea $x \in M$. Definimos el producto de Gromov centrado en x entre dos puntos distintos de ∂M como $(\xi|\eta)_x = \frac{1}{2}(b_\xi(x, y) + b_\eta(x, y))$ donde y es un punto en la geodésica de extremos ξ y η .

La importancia que tiene para nosotros el producto de Gromov es que con él podemos definir una familia de métricas $\{d_x\}_{x \in M}$ en el borde de M por

$$d_x(\xi, \eta) = e^{-(\xi|\eta)_x}$$

para $\xi \neq \eta$ y $d_x(\xi, \xi) = 0$ para todo $\xi, \eta \in \partial M$.

Teorema 2.12. *Si M tiene curvatura menor a -1 entonces d_x es una distancia para $x \in M$.*

Puede leerse la demostración del teorema anterior para espacios $CAT(-1)$ en el artículo de Bourdon [2] (teorema 2.5.1). Para ver que efectivamente M con las hipótesis que estamos considerando es $CAT(-1)$ puede leerse el libro de Bridson y Häfliger ([3], teoremas 1A.6 y 4.1). Estas métricas tienen algunas propiedades interesantes que pueden verse a continuación.

Proposición 2.13. *Para $x \in M$ la distancia de Gromov d_x cumple con las siguientes propiedades:*

1. $d_y(\xi, \eta) = e^{\frac{1}{2}(b_\xi(x,y) + b_\eta(x,y))} d_x(\xi, \eta) \quad \forall x, y \in M \forall \xi, \eta \in \partial M$.
2. *Si γ es una isometría de M entonces $d_{\gamma x}(\gamma\xi, \gamma\eta) = d_x(\xi, \eta)$ y luego $d_x(\gamma\xi, \gamma\eta) \leq e^{d(x, \gamma x)} d_x(\xi, \eta)$.*

Demostración. 1. Sea z en la geodésica de límites ξ y η , luego

$$\begin{aligned} d_y(\xi, \eta) &= e^{-\frac{1}{2}(b_\xi(y,z)+b_\eta(y,z))} = e^{-\frac{1}{2}(b_\xi(y,x)+b_\xi(x,z)+b_\eta(y,x)+b_\eta(x,z))} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(b_\xi(y,x)+b_\eta(y,x))} e^{-\frac{1}{2}(b_\xi(x,z)+b_\eta(x,z))} = e^{\frac{1}{2}(b_\xi(y,x)+b_\eta(y,x))} d_x(\xi, \eta). \end{aligned}$$

2. Sea nuevamente z en la geodésica de límites ξ y η , entonces γz está en la geodésica de límites $\gamma\xi$ y $\gamma\eta$.

$$d_{\gamma x}(\gamma\xi, \gamma\eta) = e^{-\frac{1}{2}(b_{\gamma\xi}(\gamma x, \gamma z)+b_{\gamma\eta}(\gamma x, \gamma z))} = e^{-\frac{1}{2}(b_\xi(x,z)+b_\eta(x,z))} = d_x(\xi, \eta)$$

Luego $d_x(\gamma\xi, \gamma\eta) = d_{\gamma^{-1}x}(\xi, \eta) = e^{\frac{1}{2}(b_\xi(x, \gamma^{-1}x)+b_\eta(x, \gamma^{-1}x))} d_x(\xi, \eta)$ luego por la parte 1 y la primer propiedad de la función de Busemann tenemos $d_x(\gamma\xi, \gamma\eta) \leq e^{d(x, \gamma x)} d_x(\xi, \eta)$. □

Recordemos que dados dos puntos x e y en M tenemos $-d(x, y) \leq b_\xi(x, y) \leq d(x, y)$ para todo $\xi \in \partial M$, luego tenemos

$$-d(x, y) \leq \frac{1}{2}(b_\xi(x, y) + b_\eta(x, y)) \leq d(x, y)$$

y por lo tanto $e^{-d(x, y)} \leq e^{\frac{1}{2}(b_\xi(x, y)+b_\eta(x, y))} \leq e^{d(x, y)}$ y por lo tanto tenemos que para todo par de puntos $\xi, \eta \in \partial M$

$$e^{-d(x, y)} d_x(\xi, \eta) \leq d_y(\xi, \eta) \leq e^{d(x, y)} d_x(\xi, \eta)$$

Es decir que todas las distancias d_x son equivalentes.

Definición 2.14. Dados dos puntos ξ y η en ∂M y x en M definimos $L_x(\xi, \eta)$ como la distancia de x a la geodésica de límites ξ y η .

Más adelante veremos que la topología inducida por estas métricas es la usual en la esfera. Antes veamos otros resultados, una prueba para el siguiente lema puede encontrarse en el libro de Ghys y de la Harpe [10] (Lema 17 del capítulo 2).

Lema 2.15. Sea $x \in M$ entonces existe una constante $A > 0$ tal que para todo par de puntos ξ y η en el borde se cumple que $|L_x(\xi, \eta) - (\xi|\eta)_x| \leq A$.

Proposición 2.16. Sea $x \in M$. Entonces se cumple lo siguiente:

1. Para todo $r > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $d_x(\xi, \eta) < \varepsilon$ entonces la geodésica de extremos ξ y η no corta $B(x, r)$.
2. Para todo $k > 0$ existe $r > 0$ tal que si $d_x(\xi, \eta) > k$ entonces la geodésica de extremos ξ y η corta $B(x, r)$.

Demostración. Probemos el punto 1, tomemos $\xi, \eta \in \partial M$ e y un punto en la geodésica D con límites en estos puntos. Luego

$$d_x(\xi, \eta) = e^{-\frac{1}{2}(b_\xi(x,y)+b_\eta(x,y))} \geq e^{-d(x,y)}$$

Entonces $d_x(\xi, \eta) \geq e^{-d(x,D)}$. Si tomamos $\varepsilon = e^{-r}$ entonces tenemos que si $d_x(\xi, \eta) < \varepsilon$ luego $e^{-d(x,D)} < e^{-r}$ y entonces $d(x, S) > r$. Es decir que la geodésica de extremos ξ y η no intersecta a la bola $B(x, r)$.

La parte 2 sale del lema anterior, podemos tomar r suficientemente grande para que las geodésicas que no cortan $B(x, r)$ cumplan $(\xi|\eta)_x > \log(k)$ donde ξ y η son los límites. Entonces si una geodésica con estos límites no corta a la bola se tiene

$$d_x(\xi, \eta) = e^{-(\xi|\eta)} < e^{\log(k)} = k$$

Lo que es absurdo. □

Dados $x \in M$ y dos puntos $\xi, \eta \in \partial M$ definimos $\angle_x(\xi, \eta)$ al ángulo formado por los rayos geodésicos que unen x con ξ y x con η . La siguiente propiedad es conocida como axioma de visibilidad y puede leerse en el artículo de Eberlein y O'Neill [7]

Proposición 2.17. *Sea $x \in M$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $r > 0$ tal que si $\xi, \eta \in \partial M$ cumplen que la geodésica con límite ξ y η no corta a la bola $B(x, r)$ entonces $\angle_x(\xi, \eta) < \varepsilon$.*

Lo anterior nos permite probar lo que ya anunciamos:

Proposición 2.18. *d_x es compatible con la topología heredada de la topología del borde de la bola unitaria en \mathbb{R}^n .*

Demostración. Sabemos que las métricas d_x son equivalentes entre sí, por lo tanto es suficiente probar que la métrica d_0 induce la topología del borde de la bola. Recordemos que estamos identificando M con la bola unitaria cerrada y los rayos geodésicos que salen de 0 son radios de la bola, luego es suficiente comparar la distancia d_0 con la distancia angular \angle_0 .

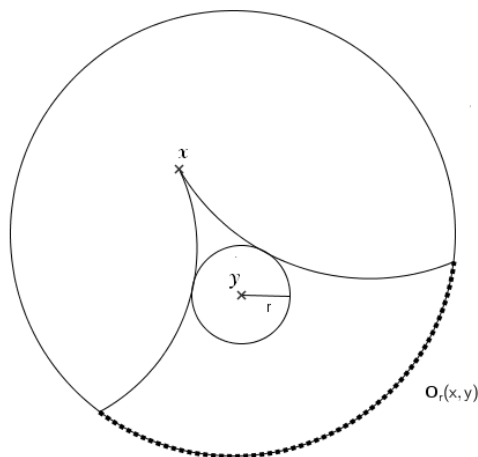
Sea $\varepsilon > 0$ y $r > 0$ el determinado por el axioma de visibilidad, usando la parte 1 del lema 2.16 tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $d_x(\xi, \eta) < \delta$ la geodésica de límites ξ y η no corta a $B(0, r)$ y entonces $\angle_0(\xi, \eta) < \varepsilon$.

Lo que necesitamos para probar la otra parte es ver que si el ángulo $\angle_0(\xi, \eta)$ es chico entonces el producto de Gromov $(\xi|\eta)_0$ será grande. Por el lema 2.15 alcanza con ver que si el ángulo es chico la geodésica que une los dos puntos en el borde está lejos de 0. Esto se deduce de lo siguiente: la geodésica que une dos puntos del borde con cierto ángulo está más lejos de cero que en el caso de curvatura constante K . Esto puede verse en [4]. □

2.4. Sombras

A continuación vamos a introducir un concepto que será importante más adelante.

Definición 2.19. Sean $x, y \in M$ y $r > 0$, definimos la sombra $\mathbf{O}_r(x, y) \subset \partial M$ como el conjunto de puntos límites de los rayos geodésicos con origen en x que intersectan $\bar{B}(y, r)$.



Veamos algunos lemas que nos resultarán muy útiles en los siguientes capítulos.

Lema 2.20. Sean $x, y \in M$, $r > 0$ y $\xi \in \mathbf{O}_r(x, y)$. Entonces

$$d(x, y) - 2r \leq b_\xi(x, y) \leq d(x, y)$$

Demostración. sea $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow M$ un rayo geodésico de forma tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma_+ = \xi$ y sea $z = \sigma(t_0)$ un punto en este rayo geodésico tal que $d(z, y) \leq r$. Para $t \geq t_0$ tenemos

$$\begin{aligned} d(y, \sigma(t)) &\leq d(y, z) + d(z, \sigma(t)) = d(y, z) + d(x, \sigma(t)) - d(x, z) \\ &\leq 2d(y, z) + d(x, \sigma(t)) - d(x, y) \leq 2r + d(x, \sigma(t)) - d(x, y). \end{aligned}$$

Y luego $b_\xi(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(x, \sigma(t)) - d(y, \sigma(t)) \geq d(x, y) - 2r$. La otra desigualdad es clara. \square

Lema 2.21. *Sea $x \in M$. Para todo $y \in M - \{x\}$ sea η_y el límite del rayo geodésico con origen en x que pasa por y . Para $r > 0$ consideramos $f(x, r) = \sup\{d_x(\xi, \eta_y) : y \neq x, \xi \notin \mathbf{O}_r(y, x)\}$. Entonces se tiene*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} f(x, r) = 0$$

Demostración. Supongamos que no es cierto, entonces existe $\varepsilon > 0$, $r_n \rightarrow \infty$ y dos sucesiones $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en M y $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en ∂M tal que $\xi_n \in \partial M - \mathbf{O}_{r_n}(y_n, x)$ y $d_x(\xi, \eta_{y_n}) > \varepsilon$, para simplificar notaremos $\eta_n = \eta_{y_n}$. Por la parte 2 de la proposición 2.16 tenemos que si n es suficientemente grande la geodésica de extremos $\xi - n$ y η_{y_n} intersecta a $B(x, r_n)$ lo que contradice el hecho de que $\xi \notin \mathbf{O}_{r_n}(y_n, x)$. \square

3. Isometrías

Consideremos una variedad Riemanniana X y su cubrimiento universal $\Pi : M \rightarrow X$. El cubrimiento nos permite definir una estructura diferenciable en M .

Si g es la métrica Riemanniana en X podemos definir una métrica Riemanniana en M por

$$\Pi^*(g)_q(v, w) = g_{\Pi(q)}(d_q\Pi(v), d_q\Pi(w))$$

Con esta métrica Π es una isometría. Consideremos Γ_Π el grupo de cubrimiento, dada $\gamma \in \Gamma_\Pi$ tenemos

$$\begin{aligned} \Pi^*(g)_{\gamma q}(d_q\gamma(v), d_q\gamma(w)) &= g_{\Pi(\gamma q)}(d_{\gamma q}\Pi \circ d_q\gamma(v), d_{\gamma q}\Pi \circ d_q\gamma(w)) \\ &= g_{\Pi(q)}(d_{\gamma q}\Pi(v), d_{\gamma q}\Pi(w)) = \Pi^*(g)_q(v, w) \end{aligned}$$

Por lo tanto el grupo de cubrimiento Γ_Π actúa por isometrías.

Dado un espacio topológico T diremos que un grupo $\Gamma \leq \text{Homeo}(T)$ actúa discontinuamente en $z \in T$ si el estabilizador $\text{Stab}_\Gamma(z)$ es finito y existe un entorno U de z tal que:

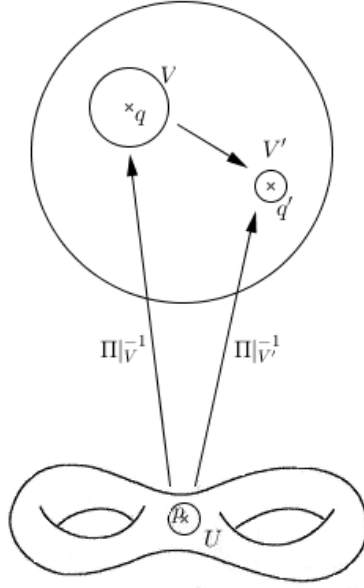
1. $\gamma(U) = U \quad \forall \gamma \in \text{Stab}_\Gamma(z)$
2. $\gamma(U) \cap U = \emptyset \quad \forall \gamma \in \Gamma - \text{Stab}_\Gamma(z)$

Diremos que la acción es discontinua si lo es en todos los puntos de T , también diremos en este caso que el grupo es discontinuo. Es claro a partir de la definición de cubrimiento que el grupo Γ_Π de arriba actúa discontinuamente y además de forma libre, es decir, el estabilizador de todo punto es trivial.

Si ahora consideramos M una variedad Riemanniana simplemente conexa y Γ es un grupo de isometrías de M que actúa de forma libre y discontinua, entonces M/Γ admite una estructura natural de variedad diferenciable, si \tilde{g} es la métrica de M podemos definir una métrica en M/Γ . Para esto observemos que $\Pi : M \rightarrow M/\Gamma$ es un cubrimiento, luego si $p \in X = M/\Gamma$ sea $q \in X$, U y V entornos de p y q respectivamente tal que $\Pi|_V : V \rightarrow U$ es un difeomorfismo. Luego definimos

$$g_p = (\Pi|_V^{-1})^*(\tilde{g})_p(v, w)$$

Veamos que está bien definido, si q' es otra preimágen de p por Π entonces existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(q) = q'$, luego si V' es un entorno de q' tal que $\Pi|_{V'} : V' \rightarrow U$ es un difeomorfismo y $\gamma(V) = V'$.



Ahora tenemos

$$\begin{aligned}
(\Pi|_{V'}^{-1})^*(\tilde{g})_p(v, w) &= \tilde{g}_{q'}(d_p \Pi|_{V'}^{-1}(v), d_p \Pi|_{V'}^{-1}(w)) \\
&= \tilde{g}_{\gamma q}(d_p(\gamma \circ \Pi|_{V'}^{-1})(v), d_p(\gamma \circ \Pi|_{V'}^{-1})(w)) \\
&= \tilde{g}_{\gamma q}(d_q \gamma(d_p \Pi|_{V'}^{-1}(v)), d_q \gamma(d_p \Pi|_{V'}^{-1}(w))) \\
&= \tilde{g}_{\gamma q}(d_p \Pi|_{V'}^{-1}(v), d_p \Pi|_{V'}^{-1}(w)) = (\Pi|_{V'}^{-1})^*(\tilde{g})_p
\end{aligned}$$

Observamos que las propiedades métricas locales como la curvatura se preservan por el cubrimiento, además el grupo Γ resulta ser el grupo de cubrimiento del mapa cociente Π . Entonces tenemos una relación entre ciertos grupos de isometrías de una variedad Riemanniana simplemente conexa y las variedades que son cubiertas por esta. Esta será nuestra principal motivación para estudiar los grupos discontinuos.

3.1. Clasificación

Definición 3.1. Decimos que una isometría γ de M es:

1. *Elíptica* si fija un punto en M .
2. *Parabólica* si fija exactamente un punto en ∂M .
3. *Hiperbólica* si no es elíptica y fija más de un punto en ∂M .

Toda isometría pertenece a exactamente una de estas clases, para probar esto hay que ver que toda isometría fija un punto en \bar{M} y no puede ser elíptica y parabólica al mismo tiempo. Lo primero es consecuencia del teorema del punto fijo de Brouwer ya que \bar{M} es homeomorfo a una bola cerrada. Si $\gamma \in Isom(M)$ fija un punto en $x \in M$ y fija $\xi \in \partial M$ entonces fija la geodésica que pasa por x y tienen límite ξ , luego fija también el otro extremo de la geodésica y por lo tanto no es parabólica. Una propiedad importante de las isometrías parabólicas es la siguiente:

Proposición 3.2. *Si γ es una isometría parabólica de M con punto fijo ξ entonces estabiliza toda horoesfera centrada en el punto ξ .*

No daremos una demostración de esto pero puede leerse en el capítulo II de [1]. En esta sección centraremos nuestra atención en las isometrías hiperbólicas.

Lema 3.3. *Sea $\gamma \in Isom(M)$, $x \in M$ y $r > 0$. Entonces para $\xi, \eta \in \mathbf{O}_r(\gamma^{-1}x, x)$ tenemos*

$$d_x(\gamma\xi, \gamma\eta) \leq e^{2r-d(x, \gamma x)} d_x(\xi, \eta)$$

Demostración. $d_x(\gamma\xi, \gamma\eta) = d_{\gamma^{-1}x}(\xi, \eta) = e^{\frac{1}{2}(b_\xi(x, \gamma^{-1}x) + b_\eta(x, \gamma^{-1}x))} d_x(\xi, \eta)$.

Por el lema 2.20 tenemos $b_\xi(\gamma^{-1}x, x), b_\eta(\gamma^{-1}x, x) \geq d(\gamma^{-1}x, x) - 2r = d(x, \gamma x) - 2r$, luego $b_\xi(x, \gamma^{-1}x), b_\eta(x, \gamma^{-1}x) \leq 2r - d(x, \gamma x)$. Por lo tanto

$$d_x(\gamma\xi, \gamma\eta) \leq e^{2r-d(x, \gamma x)} d_x(\xi, \eta)$$

□

Definición 3.4. Dada γ una isometría de M definimos su largo de traslación como

$$l(\gamma) = \inf\{d(x, \gamma x) : x \in M\}$$

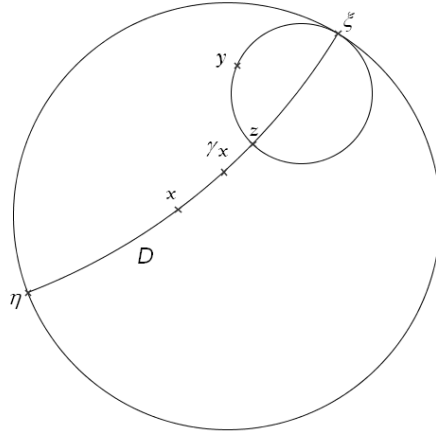
Proposición 3.5. *Sea γ una isometría hiperbólica de M , $\xi \neq \eta$ dos puntos fijos de γ en ∂M y x un punto de la geodésica D con extremos ξ y η . Entonces $l(\gamma)$ se alcanza en D y no depende del punto x elegido en D . Además dado $k > 0$ γ^n converge uniformemente a ξ fuera de $B_x(\eta, k)$. En particular ξ y η son los únicos puntos fijos de γ en ∂M .*

Demostración. γ induce una isometría en D , como además los extremos son fijos sabemos que dicha isometría preserva orientación. Es fácil verificar que las únicas isometrías de \mathbb{R} que preservan orientación son traslaciones, luego como D y \mathbb{R} son isométricas tenemos que γ induce una traslación en D que no es trivial ya que γ no es elíptico, luego está claro que $l(\gamma) > 0$ y no depende del punto elegido.

Consideramos $y \in M$, es claro que la función $x \mapsto b_\xi(y, x)$ definida en D tiene imagen $(-\infty, +\infty)$ y es continua, por lo tanto existe $z \in D$ tal que $b_\xi(y, z) = 0$, además este es único ya que para todo otro punto $z' \in D$ se tiene $b_\xi(y, z') = b_\xi(y, z) + b_\xi(z, z') \neq 0$. Luego tenemos

$$b_\xi(y, \gamma y) = b_\xi(y, z) + b_\xi(z, \gamma z) + b_\xi(\gamma z, \gamma y)$$

Como γ fija ξ entonces $b_\xi(\gamma z, \gamma y) = b_\xi(z, y) = 0$ y por lo tanto $b_\xi(y, \gamma y) = b_\xi(z, \gamma z) = d(z, \gamma z) = l(\gamma)$.



Finalmente por el lema 2.21 tenemos que existe $r > 0$ tal que $\partial M - B_x(\eta, k) \subset \mathbf{O}_r(\gamma^{-n}x, x)$, por el lema anterior tenemos que para todo $\zeta \in \mathbf{O}_r(\gamma^{-n}x, x)$ se tiene

$$d_x(\gamma^n \zeta, \xi) = d_x(\gamma^n \zeta, \gamma \xi) \leq e^{2r-l(\gamma^n)} d_x(\zeta, \xi) = e^{2r-nl(\gamma)} d_x(\zeta, \xi)$$

□

La propocisión anterior nos dice además que la sucesión $\gamma^n \zeta$ converge a ξ exponencialmente. Además tomando γ^{-1} se ve que el otro punto fijo es repulsor para γ . Notaremos por γ^+ y γ^- al punto fijo atractor y repulsor respectivamente cuando γ es una isometría hiperbólica.

3.2. Grupos discontinuos de isometrías

Como dijimos anteriormente trabajaremos con grupos de istometrías con acción discontinua sobre M .

Proposición 3.6. *Si $\Gamma \leq Isom M$ es discontinuo entonces es numerable.*

Demostración. Tomamos una bola $B(x, r)$ tal que $\gamma(B(x, r)) \cap B(x, r) = \emptyset$, luego es claro que la órbita de x no tiene puntos de acumulación. Como M es separable entonces toda órbita es numerable. Además como el estabilizador de todo punto es finito el cardinal de Γ debe ser igual al cardinal de cualquier órbita (en el caso de que sea infinito). \square

Definición 3.7. Sea Γ un grupo discontinuo de isometrías de M . Definimos el conjunto límite como $\Lambda_\Gamma = \overline{\Gamma x} \cap \partial M$. Diremos que el grupo Γ es elemental si el conjunto límite es finito.

Es claro por el lema 2.7 que la definición no depende de x ya que los elementos de Γ son isometrías. Si miramos la sección anterior podemos observar que el grupo generado por una isometría hiperbólica es elemental y su conjunto límite consiste en el punto atractor y el repulsor de dicha isometría.

Proposición 3.8. Sean g y h isometrías hiperbólicas de M sin puntos fijos comunes, $x \in M$. A menos de cambiar g o h por potencias de si mismos tenemos que el grupo Γ generado por g y h es libre, discreto y existe un real positivo $k < \min\{d(x, gx), d(x, hx)\}$ tal que si $\gamma \in \Gamma$ es $\gamma = g_1 \dots g_n$ en su descomposición reducida como palabra en g y h se tiene

$$d(x, \gamma x) \geq d(x, g_1 x) + \dots + d(x, g_n x) - nk$$

Demostración. Fijamos $\varepsilon > 0$ tal que las d_x -bolas de radio ε centradas en los puntos fijos de g y h son disjuntas y su unión no cubre todo ∂M . Sabemos que $g^{-n}x \rightarrow g^-$, luego el extremo del rayo geodésico de x a $g^{-n}x$ está tan cerca de g^- como se quiera para n suficientemente grande, por el lema 2.21 tenemos que a menos de cambiar g por una potencia de si mismo $\mathbf{O}_r(g^{-n}x, x)$ contiene todos los puntos de $\partial M - B_x(g^-, \varepsilon)$ para todo n . Nuevamente a menos de cambiar g por una potencia de si mismo podemos suponer $l(g) > 2r$ y $g(\partial M - B_x(g^-, \varepsilon)) \subset B_x(g^+, \varepsilon)$ y seguimos teniendo $\partial M - B_x(g^-, \varepsilon) \subset \mathbf{O}_r(g^{-1}x, x)$. Haciendo lo mismo con g^{-1}, h y h^{-1} tenemos

$$\partial M - B_x(g^+, \varepsilon) \subset \mathbf{O}_r(gx, x), \quad \partial M - B_x(h^-, \varepsilon) \subset \mathbf{O}_r(h^-x, x)$$

$$\text{y } \partial M - B_x(h^+, \varepsilon) \subset \mathbf{O}_r(hx, x)$$

y por otro lado

$$g^{-1}(\partial M - B_x(g^+, \varepsilon)) \subset B_x(g^-, \varepsilon), \quad h(\partial M - B_x(h^-, \varepsilon)) \subset B_x(h^+, \varepsilon)$$

$$\text{y } h^{-1}(\partial M - B_x(h^+, \varepsilon)) \subset B_x(h^-, \varepsilon)$$

Además $l(h) > 2r$.

Sea $\gamma = g_1, \dots, g_n$ una palabra reducida en g y h . Tenemos que probar que $\gamma \neq Id$. Tomamos $\xi \in \partial M$ fuera de la unión de las d_x -bolas de radio ε y centros en los puntos fijos de g y h . Luego $g_n \xi$ está en la bola centrada en el atractor de g_n , por inducción $\gamma \xi$ está en la bola centrada en el atractor de g_1 , por lo tanto $\gamma \xi \neq \xi$

y por lo tanto $\gamma = id$. Además en cada paso tenemos $g_{i+1} \dots g_n \xi \in \mathbf{O}_r(g_i^{-1}x, x)$ y luego por el lema 2.20 $b_{g_{i+1} \dots g_n \xi}(g_i^{-1}x, x) \geq d(g_i^{-1}x, x) - 2r = d(x, g_i x) - 2r$ y luego

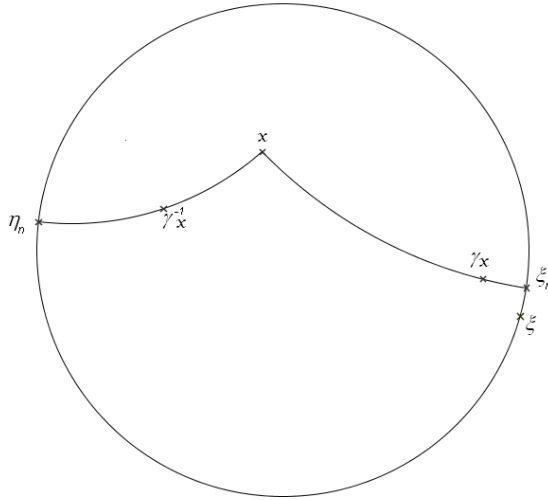
$$d(x, \gamma x) = d(\gamma^{-1}x, x) \geq b_\xi(\gamma^{-1}x, x) = \sum_{i=1}^n b_\xi(g_n^{-1} \dots g_i^{-1}x, g_n^{-1} \dots g_{i+1}^{-1}x)$$

$$\sum_{i=1}^n b_{g_{i+1} \dots g_n \xi}(g_i^{-1}x, x) \geq \sum_{i=1}^n d(x, g_i x) - 2rn$$

Como $d(x, \gamma x)$ está acotado inferiormente lejos de cero podemos decir que Id no es un punto de acumulación de Γ , esto implica que Γ no tiene puntos de acumulación, es decir, es discreto. \square

Proposición 3.9. *Sea Γ un grupo discontinuo no elemental de isometrías de M . Entonces Γ tiene isometrías hiperbólicas. El conjunto Λ_Γ es la clausura del conjunto de puntos fijos de elementos hiperbólicos de Γ y es el mínimo cerrado no vacío Γ -invariante de ∂M .*

Demostración. Sea $x \in M$, $\xi \in \partial M$ y $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en Γ tal que $\gamma_n x \rightarrow \xi$. Para cada n sea ξ_n el límite del rayo geodésico que va de x a $\gamma_n x$ y η_n el límite del que va de x a $\gamma_n^{-1}x$. Luego tenemos $\xi_n \rightarrow \xi$ y a menos de tomar una subsucesión podemos suponer $\eta_n \rightarrow \eta \in \partial M$ ya que ∂M es compacto.



Podría pasar que $\xi = \eta$, si es así consideramos $f \in \Gamma$ que no fija ξ (esto lo podemos hacer porque Γ es no elemental), luego cambiamos γ_n por $\gamma_n f^{-1}$.

Es claro que $\gamma_n f^{-1}x \rightarrow \xi$ y $(\gamma_n f^{-1})^{-1}x = f\gamma_n^{-1}x \rightarrow f\eta \neq \xi$, por lo tanto supondremos $\xi \neq \eta$. Sea $\varepsilon \in (0, \frac{1}{5}d_x(\xi, \eta))$, por el lema ?? existe $r > 0$ tal que para todo $y \neq x$ $\partial M - \mathbf{O}_r(y, x)$ está contenido en la d_x -bola de radio ε con centro en el límite del rayo geodésico que va de x a y . Luego para n suficientemente grande $\partial M - \mathbf{O}_r(\gamma_n^{-1}x, x) \subset B_x(\eta, 2\varepsilon)$ y $\partial M - \mathbf{O}_r(\gamma_n x, x) \subset B_x(\xi, 2\varepsilon)$. Por el lema 2.20 además tenemos que para todo par de puntos $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbf{O}_r(\gamma_n^{-1}x, x)$ se cumple

$$d_x(\gamma_n \zeta_1, \gamma_n \zeta_2) \leq e^{2r-d(x, \gamma_n x)} d_x(\zeta_1, \zeta_2)$$

Es decir que γ_n es $e^{2r-d(x, \gamma_n x)} d_x(\zeta_1, \zeta_2)$ -Lipschitz. Como $\xi_n \in \mathbf{O}_r(x, \gamma_n) = \gamma_n \mathbf{O}_r(\gamma_n^{-1}x, x)$ tenemos que para n suficientemente grande tenemos $B_x(\xi_n, \varepsilon) \subset B_x(\xi, 2\varepsilon)$ y γ_n contrae lo suficiente para llevar el diámetro de $\mathbf{O}_r(\gamma_n^{-1}x, x)$ a ε , entonces tenemos que γ_n es una contracción en $\partial M - B_x(\eta, 2\varepsilon)$ que es completo, luego por el teorema del punto fijo tenemos que γ_n tiene un punto fijo atractor en $B_x(\xi, 2\varepsilon)$. De la misma forma probamos que γ_n^{-1} tiene un atractor en $B_x(\eta, 2\varepsilon)$. Luego γ_n es hiperbólico por tener dos puntos fijos en el borde y además $d_x(\gamma_n^+, \xi) \leq \varepsilon$, de donde se deduce que Λ_Γ es la clausura de los atractores de los puntos fijos de los elementos hiperbólicos de Γ .

Vamos a probar lo que falta, sea $F \neq \emptyset$ un cerrado Γ -invariante en ∂M y sea γ un elemento hiperbólico de Γ , sea $\xi \in F$. Luego existe $f \in \Gamma$ tal que $f\xi \neq \gamma^-$. Luego tenemos $\gamma^n f\xi \rightarrow \gamma^+$, luego γ^+ está en F . Entonces los puntos fijos atractores de todos los elementos hiperbólicos de Γ están en F y luego por lo que probamos anteriormente $\Lambda_\Gamma \subset F$. \square

3.3. Serie de Poincaré

Es interesante entender como crece $\text{card}\{\gamma : d(x, \gamma x) \geq r\}$ con r donde $x \in M$. Veremos que esto está relacionado con la siguiente serie:

Definición 3.10. Sean $x, y \in M$ y $s > 0$, consideremos la serie

$$\Psi_s(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma y)}$$

para Γ un grupo discontinuo de isometrías, llamamos a esta serie la serie de Poincaré de Γ . Es claro que si la serie converge para s_0 entonces converge para todo $s > s_0$.

Podemos notar que

$$d(z, \gamma y) - d(x, z) \leq d(x, \gamma y) \leq d(x, z) + d(z, \gamma y)$$

por lo que

$$e^{-sd(z, \gamma y)} e^{sd(x, z)} \geq e^{-sd(x, \gamma y)} \geq e^{-sd(x, z)} e^{-sd(z, \gamma y)}$$

por lo que las series $\Psi_s(x, y)$ es de la misma clase que $\Psi_s(z, y)$, en particular la convergencia no depende de la primera coordenada. De forma similar vemos

que tampoco depende de la segunda coordenada:

$$d(x, \gamma y) - d(\gamma y, \gamma z) \leq d(x, \gamma z) \leq d(\gamma y, \gamma z) + d(x, \gamma z)$$

y entonces

$$e^{-sd(x, \gamma z)} e^{sd(\gamma y, \gamma z)} \geq e^{-sd(x, \gamma y)} \geq e^{-sd(x, \gamma z)} e^{-sd(\gamma y, \gamma z)}$$

Como γ es isometría tenemos

$$e^{-sd(x, \gamma z)} e^{sd(y, z)} \geq e^{-sd(x, \gamma y)} \geq e^{-sd(x, \gamma z)} e^{-sd(y, z)}$$

Luego podemos hacer la siguiente definición

Definición 3.11. Definimos el exponente crítico de la serie como $\delta_\Gamma = \inf\{s \in \mathbb{R} : \Psi_s(x, y) \text{ converge}\}$.

Vamos a asumir que δ_Γ es finito. Este hecho en curvatura constante se debe al crecimiento exponencial de $\text{vol}(B(0, R))$, utilizando el teorema de comparación de Rauch puede concluirse para el caso de curvatura entre dos constantes negativas. En el exponente crítico la serie puede converger o diverger, este hecho será importante más adelante.

Definición 3.12. Decimos que Γ es de tipo convergente si la serie de Poincaré $\Psi_{\delta_\Gamma}(x, y)$ converge, de otra forma diremos que es de tipo divergente.

Ahora vamos a calcular el exponente crítico δ_Γ .

Proposición 3.13. Fijemos x e y en M . Para $k \in \mathbb{N}$ definimos $S_k = \text{card}(\Gamma y \cap (B(x, k) - B(x, k-1)))$, entonces δ_Γ es igual a $\delta = \limsup \frac{1}{k} \log(S_k)$.

Demostración. Si $\gamma y \in B(x, k) - B(x, k-1)$ entonces $e^{-sk} < e^{-sd(x, \gamma y)} \leq e^{-s(k-1)}$, luego $\Psi_s(x, y)$ es de la misma clase que la serie

$$\sum_k S_k e^{-sk}.$$

Entonces para conocer δ_Γ solo debemos saber para que valores de s converge esta serie.

Si $s < \delta$ entonces existe una sucesión estrictamente creciente $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $s < \frac{1}{k_n} \log(S_{k_n}) \forall n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$$S_{k_n} e^{-sk_n} > S_{k_n} e^{-\log(S_{k_n})} = 1.$$

Entonces $\sum_n S_{k_n} e^{-sk_n}$ diverge y luego también lo hace $\sum_k S_k e^{-sk}$.

Si $s > \delta$ entonces existe $\varepsilon > 0$ y k_0 tal que $s > \frac{1}{k} \log(S_k) + \varepsilon \forall k > k_0$, lo que implica que

$$S_k e^{-sk} < S_k e^{-\log(S_k) - \varepsilon k} = \left(\frac{1}{e^\varepsilon}\right)^k$$

Luego nuestra serie converge por estar acotada por una geométrica de razón menor que 1.

En conclusión el exponente de crecimiento de $\Psi_s(x, y)$ es δ . □

Proposición 3.14. $\delta_\Gamma = \limsup \frac{1}{k} \log(\text{card}\{\gamma \in \Gamma/d(x, \gamma y) < k\})$ con $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Observamos que $\text{card}\{\gamma \in \Gamma/d(x, \gamma y) < k\} = \sum_{i=1}^k S_i$.

Es claro que $\delta_\Gamma \leq \limsup \frac{1}{k} \log(\text{card}\{\gamma \in \Gamma/d(x, \gamma y) < k\})$ porque $\frac{1}{k} \log(S_k) \leq \frac{1}{k} \log(\sum_{i=1}^k S_i) \forall k \in \mathbb{N}$.

Si $\limsup \frac{1}{k} \log(S_k) < C$ entonces existe k_0 tal que $\forall k \geq k_0$ se cumple que $\frac{1}{k} \log(S_k) < C$, es decir $S_k < e^{Ck}$. Luego

$$\frac{1}{k} \log \left(\sum_{i=1}^k S_i \right) \leq \frac{1}{k} \log \left(\sum_{i=1}^k e^{Ci} \right) \leq \frac{1}{k} \log (ke^{Ck}) = \frac{\log(k)}{k} + \frac{Ck}{k} \rightarrow C$$

Por lo tanto $\limsup \frac{1}{k} \log(\sum_{i=1}^k S_i) \leq C$ y luego $\limsup \frac{1}{k} \log(S_k) \leq \limsup \frac{1}{k} \log(\sum_{i=1}^k S_i)$. □

Corolario 3.15. $\delta_\Gamma = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \log(\text{card}\{\gamma \in \Gamma/d(x, \gamma y) < r\})$ con $r \in \mathbb{R}$.

Demostración. Hay que probar que

$$\limsup \frac{1}{k} \log(\text{card}\{\gamma \in \Gamma/d(x, \gamma y) < k\}) =$$

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \log(\text{card}\{\gamma \in \Gamma/d(x, \gamma y) < r\}) = L$$

Es obvio que $\delta_\Gamma \leq L$. Tomamos $r_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\limsup_{r_n} \frac{1}{r_n} \log(\text{card}\{\gamma \in \Gamma/d(x, \gamma y) < r_n\}) \rightarrow L$$

Observamos que

$$\frac{1}{[r_n] + 1} \log(\text{card}\{\gamma \in \Gamma/d(x, \gamma y) < r_n\}) \leq$$

$$\frac{1}{[r_n] + 1} \log(\text{card}\{\gamma \in \Gamma/d(x, \gamma y) < [r_n] + 1\})$$

El límite superior del primer miembro de la desigualdad es L mientras que el límite superior del segundo es δ_Γ , por lo que $L \leq \delta_\Gamma$. □

4. Densidades conformes

Las ideas que se desarrollarán en este capítulo fueron introducidas por Patterson ([13]) para estudiar propiedades del conjunto límite de un grupo Fuchsiano en el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 y luego generalizadas por Sullivan ([15]) en dimensión arbitraria pero en curvatura constante -1 . Aquí trabajaremos en un entorno aún más general, consideramos variedades Riemannianas completas, simplemente conexas con curvatura acotada entre $-b$ y -1 . Recordamos la definición de densidad conforme:

Definición 4.1. Consideramos Γ un grupo discontinuo de isometrías de M no elemental y sea β un número real no negativo. Sea $\mathcal{M}(\partial M)$ el conjunto de las medidas de Radon en ∂M . Una Γ -densidad conforme de dimensión β es un mapa $\mu : M \rightarrow \mathcal{M}(\partial M)$, $x \mapsto \mu_x$, que cumple:

1. Es Γ -equivariante, es decir que $\gamma_*\mu_x = \mu_{\gamma x}$ para todo γ en Γ y x en M .
2. Para todo par de puntos x e y de M se cumple $\mu_x \ll \mu_y$ y $\mu_y \ll \mu_x$, y

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) = e^{-\beta b_\xi(y,x)} \quad \forall \xi \in \partial M$$

3. Para todo $x \in M$ la medida μ_x está soportada en Λ_Γ .

Observamos en la definición anterior que como las medidas son mutuamente absolutamente continuas pedir que todas estén soportadas en Λ_Γ es equivalente a que exista $x \in M$ tal que μ_x esté soportada en Λ_Γ . Otra cosa importante a aclarar es que como las medidas están soportadas en el conjunto límite podemos ver las densidades conformes como medidas en este conjunto y no en todo el borde de M . El resultado principal de este capítulo es el que fue anunciado en la introducción, es decir, la existencia de Γ -densidades conformes de dimensión β para Γ un grupo discontinuo no elemental de isometrías de M .

4.1. Medidas de Hausdorff

Vamos a introducir ahora los conceptos de medida de Hausdorff y dimensión de Hausdorff, que serán importantes a lo largo del capítulo. No es nuestra idea dar demostraciones de las propiedades básicas, para más detalles puede consultarse el libro de Mattila [12]. El estudio de conjuntos límites de grupos Fuchsianos en el plano hiperbólico fue lo que llevó a Patterson a desarrollar herramientas para calcular o aproximar la dimensión de Hausdorff de los mismos, sin embargo los conceptos que veremos a continuación tienen una importancia mucho más que histórica en el desarrollo de esta teoría.

Definición 4.2. Sea (X, d) un espacio métrico y $\beta \geq 0$. Sea $A \subset X$. Para $\varepsilon \geq 0$ consideramos

$$H_d^\beta(A, \varepsilon) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} r_j^\beta : A \subset \bigcup_j B(x_j, r_j), r_j \leq \varepsilon, x_j \in A \right\}$$

La medida de Hausdorff de dimensión β de A es definida como

$$H_d^\beta(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_d^\beta(A, \varepsilon)$$

Teorema 4.3. H_d^β es una medida de Borel regular en X .

Notamos que en principio H_d^β no es una medida de Radon en X ya que no tiene por que ser finita en compactos, sin embargo si tenemos un subconjunto A de X con medida finita entonces la medida de Hausdorff restringida a A es una medida de Radon.

Proposición 4.4. Para $0 < \beta < \delta < +\infty$ y $A \subset X$ entonces

1. $H_d^\beta(A) < \infty \Rightarrow H_d^\delta(A) = 0$.
2. $H_d^\delta(A) > 0 \Rightarrow H_d^\beta(A) = \infty$

Este teorema nos permite hacer la siguiente definición:

Definición 4.5. La *dimensión de Hausdorff* de A es definida como

$$HD(A) = \inf\{\beta : H_d^\beta(A) = 0\} = \sup\{\beta : H_d^\beta(A) = \infty\}$$

Es importante observar que la dimensión de Hausdorff no es un invariante topológico pero si métrico. Veamos algunas propiedades que son claramente deseables para un concepto de dimensión.

Proposición 4.6. La *dimensión de Hausdorff* tiene las siguientes propiedades:

1. Si $A \subset B \subset X$ entonces $HD(A) \leq HD(B)$.
2. Si $A_i \subset X$ con $i \in \mathbb{N}$ entonces $HD(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sup_{i \in \mathbb{N}} HD(A_i)$.
3. $HD(\mathbb{R}^n) = n$ y la medida de Hausdorff de dimensión n en \mathbb{R}^n es la medida de Lebesgue a menos de una constante.

Luego de habernos familiarizado con estos conceptos vayamos a estudiar las densidades conformes asociadas a grupos discretos.

4.2. Existencia

Luego de definidas las densidades conformes es natural preguntarse acerca de la existencia de estas para una dimensión determinada. Veremos que la respuesta es afirmativa para la dimensión el exponente crítico δ_Γ definido en la sección 3.3, para esto construiremos nuestra densidad conforme utilizando propiedades topológicas del espacio de medidas $\mathcal{M}(\bar{M})$. También veremos que δ_Γ es la dimensión más pequeña que puede tener una densidad conforme. Aquí aparecerá un resultado que será fundamental tanto en este capítulo como en el siguiente: El lema de las sombras. Este nos dará una estimación para la medida

de cierto tipo de sombras.

Antes de todo esto utilizaremos las medidas de Hausdorff y la dimensión de Hausdorff para aproximarnos al problema de la existencia. Para esto necesitamos métricas en el conjunto límite, estas serán exactamente las distancias de Gromov definidas en el capítulo 2. Veamos antes que la dimensión de Hausdorff del conjunto límite para la métrica d_x no depende del punto x .

Lema 4.7. *Si d y e son dos métricas en X y $C > 0$ tal que*

$$Ce(x, y) \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

entonces $CH_e^\beta(A) \leq H_d^\beta(A)$ para todo $A \subset X$ y $\beta > 0$.

Demostración. La desigualdad nos da una relación entre las bolas con estas métricas

$$\begin{aligned} B_d(x, r) &= \{y \in X : d(x, y) < r\} \subset \{y \in X : Ce(x, y) < r\} \\ &= \{y \in X : e(x, y) < \frac{r}{C}\} = B_e(x, \frac{r}{C}) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} &\{\sum_i r_i^\beta : A \subset \bigcup_i B_d(x_i, r_i), x_i \in A, r_i < \varepsilon\} \\ &\subset \{\sum_i r_i^\beta : A \subset \bigcup_i B_e(x_i, \frac{r_i}{C}), x_i \in A, r_i < \varepsilon\} \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} &\inf\{\sum_i r_i^\beta : A \subset \bigcup_i B_d(x_i, r_i), x_i \in A, r_i < \varepsilon\} \\ &\geq \inf\{\sum_i r_i^\beta : A \subset \bigcup_i B_e(x_i, \frac{r_i}{C}), x_i \in A, r_i < \varepsilon\} \\ &= \inf\{C^\beta \sum_i \frac{r_i^\beta}{C^\beta} : A \subset \bigcup_i B_e(x_i, \frac{r_i}{C}), x_i \in A, \frac{r_i}{C} < \frac{\varepsilon}{C}\} \\ &= C^\beta \inf\{\sum_i \frac{r_i^\beta}{C^\beta} : A \subset \bigcup_i B_e(x_i, \frac{r_i}{C}), x_i \in A, \frac{r_i}{C} < \frac{\varepsilon}{C}\} \end{aligned}$$

Luego tomando límites obtenemos la desigualdad buscada. \square

Luego podemos concluir que la dimensión de Hausdorff asociado a una métrica es igual a la asociada a otra métrica equivalente y entonces la dimensión de Hausdorff de cualquier subconjunto del borde de M es independiente de la métrica d_x . Otra consecuencia del lema es que dos medidas de Hausdorff asociadas a métricas que cumplen la hipótesis son mutuamente absolutamente continuas. El siguiente lema muestra que la familia de medidas de Hausdorff $\{H_{d_x}^\beta\}_{x \in M}$ es $\text{Isom}(M)$ -equivariante.

Lema 4.8. Sea γ una isometría de M y $\beta > 0$, entonces $\gamma_* H_{d_x}^\beta = H_{d_{\gamma x}}^\beta$.

Demostración. Sabemos que $d_{\gamma x}(\xi, \eta) = d_x(\gamma^{-1}\xi, \gamma^{-1}\eta)$, luego tenemos

$$\begin{aligned} B_{d_{\gamma x}}(\xi, \varepsilon) &= \{\eta : d_{\gamma x}(\xi, \eta) < \varepsilon\} = \{\eta : d_x(\gamma^{-1}\xi, \gamma^{-1}\eta) < \varepsilon\} \\ &= \{\gamma\eta : d_x(\gamma^{-1}\xi, \eta) < \varepsilon\} = \gamma B_x(\gamma^{-1}\xi, \varepsilon) \end{aligned}$$

Luego usando la definición de la medida de Hausdorff concluimos la prueba:

$$\begin{aligned} H_{d_{\gamma x}}^\beta(A) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_i r_i^\beta : A \subset \bigcup_i B_{d_{\gamma x}}(\xi_i, r_i), \xi_i \in A, r_i < \varepsilon \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_i r_i^\beta : A \subset \bigcup_i \gamma B_x(\gamma^{-1}\xi_i, r_i), \xi_i \in A, r_i < \varepsilon \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_i r_i^\beta : A \subset \gamma \bigcup_i B_x(\gamma^{-1}\xi_i, r_i), \xi_i \in A, r_i < \varepsilon \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_i r_i^\beta : \gamma^{-1}A \subset \bigcup_i B_x(\gamma^{-1}\xi_i, r_i), \gamma^{-1}\xi_i \in \gamma^{-1}A, r_i < \varepsilon \right\} \\ &= H_{d_x}^\beta(\gamma^{-1}A) = \gamma_* H_{d_x}^\beta(A) \end{aligned}$$

□

Teorema 4.9. Sea Γ un grupo discontinuo no elemental de isometrías de M . Supongamos que $H_{d_x}^\delta(\Lambda_\Gamma)$ es finita y positiva para $x \in M$, definimos $\mu_x(A) = H_{d_x}^\delta(A \cap \Lambda_\Gamma)$ para todo $A \subset \partial M$ boreliano. Entonces $\{\mu_x\}_{x \in X}$ es una Γ -densidad conforme de dimensión δ .

Demostración. Es claro que las medidas μ_x están soportadas en Λ_Γ y son de Radon, además el lema anterior prueba que la familia es equivariante. Solo falta verificar el punto 2 de la definición 4.1, ya sabemos que las métricas d_x son todas equivalentes y por lo tanto las medidas de Hausdorff $H_{d_x}^\delta$ son mutuamente absolutamente continuas dos a dos. Tomemos $x, y \in M$, supongamos que $\frac{H_{d_x}^\delta}{H_{d_y}^\delta} = f$, lo único que queda es probar que $f = e^{-\delta b.(x,y)}$.

Supongamos que son diferentes, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto $\{\xi \in \partial M : (f(\xi))^{\frac{1}{\delta}} - e^{-b(x,y)} > \varepsilon\}$ o el conjunto $\{\xi \in \partial M : e^{-b(x,y)} - (f(\xi))^{\frac{1}{\delta}} > \varepsilon\}$ tienen medida $H_{d_y}^\delta$ positiva, supongamos que el primero tiene medida positiva ya que el otro caso resulta análogo. Podemos tomar un compacto $K \subset \{\xi \in \partial M : (f(\xi))^{\frac{1}{\delta}} - e^{-b(x,y)} > \varepsilon\}$ de medida positiva por la regularidad de la medida. Para cada $\xi \in K$ existe una bola B_ξ centrada en ξ tal que para todo par $\zeta, \eta \in B_\xi$ tenemos

$$\left| e^{-\frac{1}{2}(b_\zeta(x,y) + b_\eta(x,y))} - e^{-b_\xi(x,y)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como estas bolas cubren K entonces existe una de medida $H_{d_y}^\delta$ positiva, llamémosla B_ξ . En esta bola tenemos que $d_y(\zeta, \eta) \leq (e^{-b\xi(x,y)} + \frac{\varepsilon}{2})d_x(\zeta, \eta)$. Por el lema 4.7 tenemos

$$H_{d_y}^\delta(B_\xi) \leq (e^{-b\xi(x,y)} + \frac{\varepsilon}{2})^{n-1} H_{d_x}^\delta(B_\xi) < \int_{B_\xi} f dH_{d_x}^\delta$$

lo que es absurdo, por lo tanto concluimos la igualdad. \square

Notamos que una Γ -densidad conforme de dimensión 0 es constante y como es Γ -equivariante es invariante por la acción de Γ . Entonces el caso de dimensión cero es simplemente el de una medida Γ -invariante. Podemos preguntarnos entonces acerca de la existencia de densidades conformes de dimensión 0, la respuesta no requiere mucho esfuerzo y se da en la siguiente proposición.

Proposición 4.10. *No existen medidas Γ -invariantes en ∂M para Γ un grupo discontinuo no elemental de isometrías de M .*

Demostración. Sea $\gamma \in \Gamma$ hiperbólico (debe existir ya que estamos considerando Γ no elemental) y sean γ_+ y γ_- sus puntos fijos. Supongamos que μ es una medida finita Γ -invariante. Sea $A = \partial M - \gamma_-$ y $B = \partial M - \gamma_+$

Por la proposición 3.5 tenemos que $\gamma^n(A) \subset \gamma^{n-1}(A)$ y además $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \gamma^n(A) = \{\gamma_+\}$, y que $\gamma^{-n}(B) \subset \gamma^{-n+1}(B)$ y $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \gamma^{-n}(B) = \{\gamma_-\}$, luego tenemos

$$\mu(\{\gamma_+\}) = \lim \mu(\gamma^n(A)) = \mu(A)$$

y

$$\mu(\{\gamma_-\}) = \lim \mu(\gamma^{-n}(B)) = \mu(B)$$

Por lo que el conjunto $\{\gamma_-, \gamma_+\}$ tiene medida positiva. Como μ es Γ -invariante y las orbitas $\Gamma\gamma_+$ y $\Gamma\gamma_-$ son infinitas (porque Γ es no elemental) entonces μ debe ser infinita lo que es absurdo. \square

Nuestro objetivo más próximo es probar la existencia de Γ -densidades conformes de dimensión δ_Γ para cualquier grupo discontinuo Γ . Para esto vamos a poner una topología al espacio de medidas de Radon en \bar{M} , a la que llamaremos topología débil. Esta será descrita por la convergencia débil. Decimos que una red $\{\mu_d\}_{d \in D}$ en $\mathcal{M}(\bar{M})$ converge débilmente a μ si

$$\int f d\mu_d \rightarrow \int f d\mu \quad \forall f \in C_0(\bar{M})$$

donde $C_0(\bar{M})$ denota el espacio de funciones reales continuas con dominio \bar{M} .

El teorema de representación de Riesz junto con el teorema de Banach-Alaoglu implican el siguiente lema que será útil más adelante.

Lema 4.11. *Los subconjuntos de $\mathcal{M}(\bar{M})$ de la forma $\{\mu \in \mathcal{M}(\bar{M}) : C_1 \leq \mu(\bar{M}) \leq C_2\}$, donde C_1, C_2 son constantes no negativas, son compactos con la topología débil.*

Veamos algunas otras propiedades de la convergencia débil:

Lema 4.12. *Sea $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de Radon que converge débilmente a μ . Si $A \subset \bar{M}$ es abierto y $\mu_n(A) \rightarrow 0$ entonces $\mu(A) = 0$.*

Demostración. Sea $K \subset A$ un compacto. Por el lema de Urysohn existe $f : \bar{M} \rightarrow [0, 1]$ continua que vale 1 en K y 0 fuera de A . Luego $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$, pero $0 \leq \int f d\mu_n \leq \mu_n(A)$ por lo que $\int f d\mu_n \rightarrow 0$ y por lo tanto $\int f d\mu = 0$ y como $\int f d\mu \geq \mu(K)$ entonces $\mu(K) = 0$. Luego como las medidas de Radon son regulares por dentro en los abiertos se tiene $\mu(A) = 0$. \square

Lema 4.13. *Si $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones de medidas de Radón en un espacio topológico M tal que:*

1. $\nu_n \rightarrow \nu$ débilmente.
2. $\mu_n \ll \nu_n$.
3. $\frac{d\mu_n}{d\nu_n} = f_n$ es continua.
4. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f .

Entonces μ_n converge débilmente a μ y $\frac{d\mu}{d\nu} = f$

Demostración. Hay que probar que $\int g d\mu_n \rightarrow \int g f d\nu_n \forall g \in C(\bar{M})$.

$$\begin{aligned} \left| \int g d\mu_n - \int g f d\nu \right| &= \left| \int g f_n d\nu_n - \int g f d\nu \right| \\ &\leq \left| \int g f_n d\nu_n - \int g f d\nu_n \right| + \left| \int g f d\nu_n - \int g f d\nu \right| \end{aligned}$$

El segundo sumando converge a 0 con n , estudiemos el segundo:

$$\left| \int g f_n d\nu_n - \int g f d\nu_n \right| = \left| \int g (f_n - f) d\nu_n \right|$$

Como g es continua y X es compacto entonces g está acotada y por lo tanto $g(f_n - f)$ converge a cero uniformemente, y como ν_n converge débilmente entonces $\nu_n(\bar{M}) = \int 1 d\nu_n$ converge por lo que está acotada superiormente por una constante C , tenemos que

$$0 \leq \left| \int g (f_n - f) d\nu_n \right| \leq \|g(f_n - f)\|_\infty C \rightarrow 0$$

\square

Para construir nuestra densidad conforme estudiaremos por separado los casos en que el grupo sea de tipo divergente o convergente. Para el segundo caso necesitaremos el siguiente lema:

Lema 4.14. Sea Γ un grupo discontinuo de isometrías en M de tipo convergente, $y \in M$. Existe una función continua $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que:

1. $\sum_{\gamma \in \Gamma} h(d(x, \gamma y)) e^{-sd(x, \gamma y)}$ tiene exponente crítico δ_Γ .
2. La serie diverge para $s = \delta_\Gamma$.
3. Dados $x, x' \in M$ la función $f : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \frac{h(d(x, z))}{h(d(x', z))} & \text{si } z \in M \\ 1 & \text{si } z \in \partial M \end{cases}$$

Es continua.

Demostración. Para simplificar llamemos λ a la medida $\sum_{\gamma \in \Gamma} D_{d(x, \gamma y)}$ en \mathbb{R}_+ . De esta forma podemos escribir la serie de Poincaré de Γ como

$$\int e^{-st} d\lambda(t)$$

Consideremos una sucesión de reales positivos $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergiendo a 0. Vamos a contruir h por inducción, para esto empezamos tomando $h_0(t) = e^{\varepsilon_0 t}$ y $t_0 = 0$, tenemos

$$\int h_0(t) e^{-\delta_\Gamma t} d\lambda(t) = \int e^{-(\delta_\Gamma - \varepsilon_0)t} d\lambda(t) = +\infty$$

porque $\delta_\Gamma - \varepsilon_0 < \delta_\Gamma$. Luego existe $t_1 > 0$ lo suficientemente grande para que

$$\int_{[t_0, t_1)} h_0(t) e^{-\delta_\Gamma t} d\lambda(t) \geq 1$$

Definimos entonces h en $[t_0, t_1)$ como $h_0|_{[t_0, t_1)}$. Supongamos ahora que tenemos $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ y la función h definida en $[t_0, t_n)$ de forma tal que

$$\int_{[t_{k-1}, t_k)} h(t) e^{-\delta_\Gamma t} d\lambda(t) \geq 1 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

Sea h_n la función que tiene logaritmo afín con pendiente ε_n tal que $h_n(t_n) = \lim_{t \rightarrow t_n^-} h(t)$. Esta función es $h_n(t) = \lim_{t \rightarrow t_n^-} h(t) + e^{\varepsilon_n(t-t_n)}$ en $[t_n, +\infty)$. Luego

$$\int_{t_n, +\infty)} (\lim_{t \rightarrow t_n^-} h(t) + e^{\varepsilon_n(t-t_n)}) e^{-\delta_\Gamma t} d\lambda t \leq e^{-\varepsilon_n t_n} \int_{t_n, +\infty)} e^{-(\delta_\Gamma - \varepsilon_n)t} d\lambda t = +\infty$$

por lo que existe $t_{n+1} > t_n$ tal que

$$\int_{[t_n, t_{n+1})} h_n(t) e^{-\delta_\Gamma t} d\lambda(t) \geq 1$$

y entonces extendemos h a $[t_0, t_{n+1})$. Luego por inducción queda h continua definida en todo \mathbb{R}_+ de forma que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} h(d(x, \gamma y)) e^{-sd(x, \gamma y)} = \int h(t) e^{-\delta_\Gamma t} d\lambda(t) = +\infty$$

Para ver que se cumple 1 repetimos lo hecho en la sección 3.3 y tenemos que el exponente crítico de la serie es $\delta = \limsup \frac{1}{k} \log(h(k)S_k)$. Probemos entonces que $\delta = \delta_\Gamma$

$$\limsup \frac{1}{k} \log(h(k)S_k) = \limsup \frac{1}{k} (\log(h(k)) + \log(S_k)) = \limsup \frac{1}{k} \log(h(k)) + \delta_\Gamma$$

Tenemos que dado para todo $\varepsilon > 0$ existe k_0 tal que $\forall k \geq k_0$ se tiene $\frac{h(k)}{h(k-1)} < 1 + \varepsilon$, luego tenemos que $h(k) < (1 + \varepsilon)^{k-1} h(1)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \limsup \frac{1}{k} \log(h(k)) &< \limsup \frac{1}{k} \log((1 + \varepsilon)^{k-1} h(1)) \\ &= \limsup \frac{k-1}{k} \log(1 + \varepsilon) + \limsup \frac{1}{k} \log(h(1)) = \log(1 + \varepsilon) \end{aligned}$$

De donde se deduce la igualdad.

Para probar 3 observemos primero que para todo $d > 0$ se tiene que $\frac{h(r+d)}{h(r)} \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow +\infty$. Esto es porque si $r \in [t_n, t_n + 1]$ entonces

$$\frac{1}{d} \log\left(\frac{h(r+d)}{h(r)}\right) = \frac{1}{d} (\log(h(r+d)) - \log(h(r))) \leq \varepsilon_n$$

Cuando $r \rightarrow +\infty$ tenemos que $n \rightarrow +\infty$. Luego $\frac{h(r+d)}{h(r)} \rightarrow 1$.

Es claro que f es continua en M y ∂M . Consideremos una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $z_n \rightarrow \xi \in \partial M$. Queremos ver que $f(z_n) \rightarrow 1$. Como h es creciente tenemos

$$\frac{h(d(x, z_n))}{h(d(x, x') + d(x, z_n))} \leq f(z_n) \leq \frac{h(d(x, x') + d(x', z_n))}{h(d(x', z_n))}$$

Por lo observado anteriormente es claro que los extremos de la desigualdad convergen a 1 ya que tanto $d(x, z_n)$ como $d(x', z_n)$ tienden a $+\infty$ con n . \square

Ahora estamos en condiciones de demostrar la existencia de Γ -densidades conformes de dimensión δ_Γ para Γ un grupo discreto no elemental. El siguiente es el teorema central del capítulo.

Teorema 4.15. *Sea Γ un grupo discontinuo no elemental de isometrías de M . Entonces existe una Γ -densidad conforme de dimensión δ_Γ .*

Demostración. Supondremos primero que Γ es de tipo divergente. Fijemos un punto $y \in M$. Para $s > 0$ y $x \in M$ consideramos la serie de Poincaré $\Psi_s(x, y)$ definida en 3.4. Para $s > \delta_\Gamma$ definimos

$$\mu_x^s = \frac{1}{\Psi_s(y, y)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma y)} D_{\gamma y}$$

donde $D_\gamma y$ es la medida de Dirac asociada a γy .

Consideramos una sucesión $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ decreciente a δ_Γ , como la sucesión $\{\mu_y^{s_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ está en el espacio de medidas de probabilidad en \bar{M} y este es débilmente compacto existe una subsucesión que converge con la topología débil. Para simplificar le llamaremos de la misma manera.

Vamos a probar que dados dos puntos $x, x' \in M$ las sucesiones $\{\mu_x^{s_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\mu_{x'}^{s_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ cumplen con los puntos 2, 3 y 4 del lema 4.13, por lo que si una converge débilmente la otra también y tendremos la derivada de Radon-Nikodym. Además si esto se cumple como vimos que para y la sucesión converge débilmente estará probada la convergencia para todo punto.

$$\begin{aligned} \mu_x^{s_n} &= \frac{1}{\Psi_{s_n}(y, y)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s_n d(x, \gamma y)} D_{\gamma y} \\ &= \frac{1}{\Psi_{s_n}(y, y)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s_n(d(x, \gamma y) - d(x', \gamma y))} e^{-s_n d(x', \gamma y)} D_{\gamma y} \\ &= \frac{1}{\Psi_{s_n}(y, y)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s_n b_{\gamma y}(x, x')} e^{-s_n d(x', \gamma y)} D_{\gamma y} \end{aligned}$$

Es decir que

$$\mu_x^{s_n}(A) = \int_A e^{-s_n b.(x, x')} d\mu_{x'}^{s_n} \quad \forall A \text{ boreliano}$$

Es claro que $e^{-s_n b.(x, x')}$ es continua. Además tenemos que $b.(x, x')$ es acotada por ser continua en un compacto, entonces

$$0 < C_1 \leq e^{-b_z(x, x')} \leq C_2 \quad \forall z \in \bar{M}$$

y luego

$$0 < C_1^{s_n - \delta_\Gamma} \leq e^{-(s_n - \delta_\Gamma) b_z(x, x')} \leq C_2^{s_n - \delta_\Gamma} \quad \forall z \in \bar{M}$$

Así que $e^{-(s_n - \delta_\Gamma) b.(x, x')}$ converge uniformemente a cero, por lo que $e^{-s_n b.(x, x')} - e^{-\delta_\Gamma b.(x, x')} = e^{-\delta_\Gamma} (e^{-(s_n - \delta_\Gamma) b.(x, x')} - 1)$ converge uniformemente a cero y en conclusión $e^{-s_n b.(x, x')}$ converge uniformemente a $e^{-\delta_\Gamma b.(x, x')}$.

Ya tenemos que se cumplen todas las hipótesis del lema 4.13. Por lo tanto podemos concluir que para todo par de puntos $x, x' \in M$ las sucesiones de medidas convergen débilmente a μ_x y $\mu_{x'}$, estas medidas son mutuamente absolutamente continuas y $\frac{d\mu_x}{d\mu_{x'}} = e^{-\delta_\Gamma b.(x, x')}$.

Como Γ actúa discontinuamente en M se tiene que para todo $r \geq 0$ hay finitos elementos de la orbita de y en $B(x, r)$. Luego como $\Psi_s(x, y) \rightarrow +\infty$ entonces para todo $r \geq 0$ tenemos que $\mu_x^{s_n}(B(x, r)) \rightarrow 0$. Por el lema 4.12 tenemos que $\mu_x(B(x, r)) = 0 \quad \forall r \geq 0$ y entonces la medida está concentrada en el borde. Además tenemos que $\mu_x^{s_n}((\Gamma y)^c) = 0 \quad \forall r \geq 0$, nuevamente usando el lema

4.3 tenemos que $\mu_x((\bar{\Gamma}y)^c) = 0$ y entonces el soporte de μ_x está contenido en Λ_Γ .

Definimos entonces la densidad conforme $\{\mu_x\}_{x \in M}$ restringiendo al borde las medidas construidas. Vamos a probar que es Γ -equivariante, para esto sea $\theta \in \Gamma$ y $x \in M$.

$$\theta_* \mu_x^{s_n} = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s_n d(x, \gamma y)} D_{\theta \gamma y} = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s_n d(x, \theta^{-1} \gamma y)} D_{\gamma y} = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s_n d(\theta x, \gamma y)} D_{\gamma y} = \mu_{\theta x}^{s_n}$$

Luego $\theta_* \mu_x^{s_n} \rightarrow \mu_{\theta x}$. Además

$$\int g d(\theta_* \mu_x^{s_n}) = \int g \circ \theta d(\mu_x^{s_n}) \rightarrow \int g \circ \theta d(\mu_x) = \int g d(\theta_* \mu_x) \quad \forall g \in C(\bar{M})$$

lo que quiere decir que $\theta_* \mu_x^{s_n} \rightarrow \theta_* \mu_x$ débilmente, como la topología débil es de Hausdorff tenemos la igualdad buscada.

Lo único que nos falta probar para este caso es que el soporte es Λ_Γ . Es claro que para todo $x \in M$ la medida μ_x es Γ -cuasi-invariante, es decir, para todo $\gamma \in \Gamma$ se tiene que $\mu_x(A) = 0$ si y solo si $\mu_x(\gamma A) = 0$. Luego si $A = \text{sop}(\mu_x)$ entonces γA también tiene medida total y por lo tanto $A \subset \gamma A$, pero $\gamma^{-1} A \subset A$ también tiene medida total, por lo que concluimos que $\gamma A = A$, es decir que el soporte de μ_x es Γ -invariante. Como Λ_Γ es el menor cerrado invariante tenemos que para todo $x \in M$ $\Lambda_\Gamma \subset \text{sop}(\mu_x)$ por lo que el soporte de μ es Λ_Γ .

Ahora hay que estudiar el caso en el que $\Psi_{\delta_\Gamma}(x, y) < +\infty$. El lema anterior nos da una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que la serie

$$\Phi_s(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} h(d(x, \gamma y)) e^{-s d(x, \gamma y)}$$

diverge para $s = \delta_\Gamma$. Luego definimos

$$\mu_x^s = \frac{1}{\Phi_s(y, y)} \sum_{\gamma \in \Gamma} h(d(x, \gamma y)) e^{-s d(x, \gamma y)} D_{\gamma y}$$

Vamos a proceder de la misma forma que antes, así que consideramos nuevamente $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ decreciente a δ_Γ . Otra vez $\mu_y^{s_n} \rightarrow \mu_y$ débilmente (o tomamos una subsucesión convergente).

$$\begin{aligned} \mu_x^{s_n} &= \frac{1}{\Phi_{s_n}(y, y)} \sum_{\gamma \in \Gamma} h(d(x, \gamma y)) e^{-s_n d(x, \gamma y)} D_{\gamma y} \\ &= \frac{1}{\Phi_{s_n}(y, y)} \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{h(d(x, \gamma y))}{h(d(x', \gamma y))} h(d(x', \gamma y)) e^{-s_n(d(x, \gamma y) - d(x', \gamma y))} e^{-s_n d(x', \gamma y)} D_{\gamma y} \\ &= \frac{1}{\Psi_{s_n}(y, y)} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma y) h(d(x', \gamma y)) e^{-s_n b.(x, x')} e^{-s_n d(x', \gamma y)} D_{\gamma y} \end{aligned}$$

Luego para todo A boreliano se cumple

$$\mu_x^{s_n}(A) = \int_A f e^{-s_n b.(x,x')} d\mu_{x'}^{s_n}$$

Como $f e^{-s_n b.(x,x')}$ es continua para todo n y estas funciones convergen uniformemente a $f e^{-\delta_\Gamma b.(x,x')}$ tenemos que para $x' = y$ se cumplen las hipótesis del lema 4.13 por lo que $\{\mu_x^{s_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a μ_x , además $\frac{d\mu_x}{d\mu_y} = f e^{-\delta_\Gamma b.(x,x')}$. Luego para todo par $x, x' \in M$ se cumple que μ_x y $\mu_{x'}$ son mutuamente absolutamente continuas y $\frac{d\mu_x}{d\mu_{x'}} = f e^{-\delta_\Gamma b.(x,x')}$.

La prueba de que el soporte de estas medidas están en el conjunto límite es análoga a la del caso anterior. Luego definimos nuestra densidad conforme restringiendo estas medidas al borde. Observar que como f es constante 1 en el borde la derivada de Radon-Nikodym de dos de estas medidas es lo que queremos que sea. Resulta análogo probar que es Γ -equivariante y que el soporte es exactamente el conjunto límite. \square

Probamos la existencia de densidades conformes de dimensión δ_Γ , por otro lado habíamos probado que no hay densidades conformes de dimensión 0, en conclusión tenemos lo que habíamos anunciado antes:

Corolario 4.16. *Si Γ es un grupo discontinuo de isometrías de M no elemental entonces $\delta_\Gamma > 0$.*

No solamente no existen densidades conformes de diemensión 0 si no que además no existen de dimensiones menores a δ_Γ , vamos a avanzar en esa dirección.

Lema 4.17 (de las sombras). *Sea Γ un grupo discontinuo no elemental de isometrías de X , μ una Γ -densidad conforme de dimensión β y $x \in M$. Luego existe $r_0 > 0$ tal que para todo $r \geq r_0$ existe $C > 0$ tal que para todo $\gamma \in \Gamma$ se tiene*

$$\frac{1}{C} e^{-\beta d(x,\gamma x)} \leq \mu_x(\mathbf{O}_r(x,\gamma x)) \leq C e^{-\beta d(x,\gamma x)}$$

Demostración. Como Γ es no elemental el soporte de μ_x no es finito. Sea $\xi \in \partial M$, tenemos $\mu_x(\{\xi\}) < \mu_x(\partial M)$. Entonces por la regularidad de μ_x existe ε_ξ tal que $\mu_x(\partial M - B_x(\xi, \varepsilon_\xi)) \geq \varepsilon$, donde $B_x(\xi, \varepsilon_\xi)$ es la bola de centro ξ y radio ε_ξ para la métrica d_x . Como el borde es compacto podemos cubrirlo por finitas bolas $B_x(\xi_1, \varepsilon_{\xi_1}), \dots, B_x(\xi_k, \varepsilon_{\xi_k})$. Si ahora ρ es un número de Lebesgue para el cubrimiento podemos tomar $\varepsilon < \frac{\rho}{2}$ y $\varepsilon < \varepsilon_{\xi_j} \forall j \in \{1, \dots, k\}$ para el cual se cumple $\mu_x(\partial M - B_x(\xi, \varepsilon)) \geq \varepsilon \forall \xi \in \partial M$.

Por el lema 2.21 existe r_0 tal que $\forall r \geq r_0, \forall y \in M$ se tiene que $\partial M - B_x(\eta_y, \varepsilon) \subset \mathbf{O}_r(y, x)$ por lo que $\mu_x(\mathbf{O}_r(y, x)) \geq \varepsilon$. Además tenemos

$$\mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma x)) = \mu_x(\gamma \mathbf{O}_r(\gamma^{-1}x, x)) = \mu_{\gamma x}(\mathbf{O}_r(\gamma^{-1}x, x))$$

$$= \int_{\mathbf{O}_r(\gamma^{-1}x, x)} e^{-\beta b_\xi(\gamma^{-1}x, x)} d\mu_x(\xi)$$

Por el lema 2.20 $\forall \xi \in \mathbf{O}_r(\gamma^{-1}x, x)$ se tiene $d(\gamma^{-1}x, x) - 2r \leq b_\xi(\gamma^{-1}x, x) \leq d(\gamma^{-1}x, x)$, luego si $\beta \geq 0$ se cumple

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{O}_r(\gamma^{-1}x, x)} e^{-\beta d(\gamma^{-1}x, x)} d\mu_x(\xi) &\leq \int_{\mathbf{O}_r(\gamma^{-1}x, x)} e^{-\beta b_\xi(\gamma^{-1}x, x)} d\mu_x(\xi) \\ &\leq \int_{\mathbf{O}_r(\gamma^{-1}x, x)} e^{-\beta(d(\gamma^{-1}x, x) - 2r)} d\mu_x(\xi) \end{aligned}$$

Luego

$$e^{-\beta d(\gamma^{-1}x, x)} \mu_x(\mathbf{O}_r(\gamma^{-1}x, x)) \leq \mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma x)) \leq e^{-\beta(d(\gamma^{-1}x, x) - 2r)} \mu_x(\mathbf{O}_r(\gamma^{-1}x, x))$$

Por lo tanto

$$\varepsilon e^{-\beta d(\gamma^{-1}x, x)} \leq \mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma x)) \leq \mu_x(\partial M) e^{2\beta r} e^{-\beta d(\gamma^{-1}x, x)}$$

Y podemos tomar $C > 0$ tal que $\frac{1}{C} \leq \varepsilon$ y $C \geq \mu_x(\partial M) e^{2\beta r}$, con lo que finaliza la prueba para este caso.

Para el caso $\beta < 0$ es similar, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{O}_r(\gamma^{-1}x, x)} e^{-\beta(d(\gamma^{-1}x, x) - 2r)} d\mu_x(\xi) &\leq \int_{\mathbf{O}_r(\gamma^{-1}x, x)} e^{-\beta b_\xi(\gamma^{-1}x, x)} d\mu_x(\xi) \\ &\leq \int_{\mathbf{O}_r(\gamma^{-1}x, x)} e^{-\beta d(\gamma^{-1}x, x)} d\mu_x(\xi) \end{aligned}$$

Entonces

$$\varepsilon e^{2\beta r} e^{-\beta d(\gamma^{-1}x, x)} \leq \mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma x)) \leq \mu_x(\partial M) e^{-\beta d(\gamma^{-1}x, x)}$$

Nuevamente es fácil conseguir el C adecuado. Sin embargo más adelante veremos que el caso $\beta < 0$ nunca se cumple. \square

Antes nos habíamos preguntado para que valores de β existen densidades conformes de dimensión β , habíamos comentado que sin importar el grupo Γ no existen densidades conformes de dimensión cero. El siguiente teorema es una aplicación del lema de las sombras da otro paso en esa dirección.

Teorema 4.18. *Si existe una Γ -densidad conforme de dimensión β entonces $\beta \geq \delta_\Gamma$ (consideramos Γ con las hipótesis de siempre).*

Demostración. Sean $x \in M$, $r_0, C > 0$ como en el lema anterior. Para $n \in \mathbb{N}$ consideramos $\Gamma_n = \{\gamma \in \Gamma : n - 1 \leq d(x, \gamma x) \leq n\}$ recordamos que llamamos S_n al cardinal de Γ_n , luego tenemos $\delta_\Gamma = \limsup \frac{1}{n} \log(S_n)$. Sean γ y θ en Γ_n y supongamos que $\xi \in \mathbf{O}_r(x, \gamma x) \cap \mathbf{O}_r(x, \theta x)$ con $r \geq r_0$. Entonces el

rayo geodésico de x a ξ tiene un punto y tal que $d(y, \gamma x) \leq r$ y otro z tal que $d(z, \theta x) \leq r$, luego como $n - 1 \leq d(x, \gamma x) \leq n$ y $n - 1 \leq d(x, \theta x) \leq n$ entonces se cumple $n - 1 - r \leq d(x, y) \leq n + r$ y $n - 1 - r \leq d(x, z) \leq n + r$. Como ambos puntos están en el mismo rayo geodésico se tiene $d(y, z) \leq 1 + 2r$, y usando la desigualdad triangular concluimos $d(\gamma x, \theta x) \leq 1 + 4r$.

Ahora definimos $p = \text{card}\{\gamma \in \Gamma_n : d(x, \gamma x) < 1 + 4r\}$, entonces para todo $\xi \in \partial M$ se tiene $\text{card}\{\gamma \in \Gamma_n : \xi \in \mathbf{O}_r(x, \gamma x)\} \leq p$. Luego

$$\begin{aligned} \mu_x(\partial M) &\geq \mu_x\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma_n} \mathbf{O}_r(x, \gamma x)\right) = \frac{1}{p} \int_{\bigcup_{\gamma \in \Gamma_n} \mathbf{O}_r(x, \gamma x)} p d\mu_x \geq \frac{1}{p} \int \sum_{\gamma \in \Gamma_n} \chi_{\mathbf{O}_r(x, \gamma x)} d\mu_x \\ &= \frac{1}{p} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} \mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma x)) \geq \frac{1}{pC} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} e^{-\beta d(x, \gamma x)} \geq \frac{e^{-\beta n}}{pC} S_n \end{aligned}$$

Entonces $S_n \leq pC \mu_x(\partial M) e^{\beta n}$ de lo que se deduce que $\delta_\Gamma = \limsup \frac{1}{n} \log(S_n) \leq \limsup \frac{1}{n} \log(pC \mu_x(\partial M) e^{\beta n}) = \beta$. \square

Como dijimos al demostrar el lema de las sombras la dimensión de una densidad conforme siempre es positiva, esto implica que el segundo caso discutido en dicha demostración nunca sucede. Volvamos ahora a la prueba y observemos que el tenemos el siguiente corolario:

Corolario 4.19. *Existe $r_0 > 0$ tal que para todo $r \geq r_0$ y $\gamma \in \Gamma$ tenemos*

$$\mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma x)) \leq \mu_x(\partial M) e^{-\beta d(x, \gamma x) + 2\beta r}$$

4.3. Unicidad

Es natural a esta altura preguntarse por la unicidad de la densidad conforme definida, veremos que esta depende de la ergodicidad. Nos meteremos entonces en este terreno con el propósito de mostrar un resultado que pueda darnos alguna respuesta.

Definición 4.20. Una medida λ es Γ -cuasi-invariante si para todo conjunto de medida cero A se tiene $\lambda(\gamma(A)) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Observamos que si tenemos una Γ -densidad conforme μ entonces las medidas μ_x es Γ -cuasi-invariante.

Definición 4.21. Sea λ una medida Γ -cuasi-invariante en X donde Γ es un grupo actuando en X . Decimos que la acción de Γ es *ergódica* si los conjuntos medibles Γ -invariantes tienen medida cero o medida total, es decir, $\gamma(A) = A \forall \gamma \in \Gamma$ implica que $\lambda(A) = 0$ o $\lambda(A^c) = 0$.

Proposición 4.22. *Si la acción de Γ en X es ergódica para λ finita y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es medible Γ -invariante, entonces f es constante ctp (en un conjunto de medida total).*

Demostración. Consideramos los conjuntos $A_k = f^{-1}([k, k + 1])$ que son Γ -invariantes. Luego como $X = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ y la acción es ergódica entonces solo uno de estos conjuntos tienen medida total, el resto tienen medida cero, llamemos a este conjunto A_{k_0} . Ahora consideramos $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de particiones del intervalo $[k, k + 1]$ tal que $P_n \subset P_{n+1}$ y la norma de P_n tiende a cero con n . Por un argumento análogo al anterior para cada partición hay un intervalo cerrado I_n tal que $f^{-1}(I_n)$ tiene medida total, de esta forma se define una sucesión de intervalos cerrados encajados cuyo diámetro tiende a cero, luego $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(I_n) = \{c\}$ y por lo tanto $f^{-1}(\{c\})$ tiene medida total. \square

Corolario 4.23. *Si f es invariante ctp entonces es constante ctp.*

Demostración. Sea $g = f$ ctp tal que g es Γ -invariante, luego g es constante ctp por lo que f también lo es. \square

Definición 4.24. Diremos que la acción de Γ en ∂M es *ergódica* para la Γ -densidad conforme si lo es para alguna de las medidas μ_x .

Como todas las medidas μ_x son absolutamente continuas entre si tenemos que los conjuntos con medida cero son los mismos para todo x en M , es decir que si la acción de Γ es ergódica para μ_{x_0} lo es para $\mu_x \forall x \in M$.

Proposición 4.25. *sea $\{\mu_x\}_{x \in M}$ una Γ -densidad conforme de dimensión β . Entonces toda otra Γ -densidad conforme $\{\nu_x\}_{x \in M}$ de dimensión β es un múltiplo escalar de la anterior si y sólo si la acción de Γ en ∂M es ergódica con respecto a $\{\mu_x\}_{x \in M}$.*

Demostración. Probemos primero (\Leftarrow). Definimos para cada $x \in M$ la medida $\sigma_x = \frac{1}{2}(\mu_x + \nu_x)$, es fácil verificar que estas medidas definen una Γ -densidad conforme de dimensión β , además es claro que μ_x es absolutamente continua con respecto a σ_x , consideremos la derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\mu_x}{d\sigma_x} = f$, probemos que es Γ -invariante para casi todo punto según μ .

$$\int_A f \gamma d\sigma_x = \int_{\gamma A} f d(\gamma_* \sigma_x) = \int_{\gamma A} f d(\sigma_{\gamma x}) = \mu_{\gamma x}(\gamma(A)) = \mu_x(A) = \int_A f d\sigma_x$$

Esto prueba que f es Γ -invariante para casi todo punto con respecto a σ_x , como $\mu_x \ll \sigma_x$ tenemos que μ_x también es Γ -invariante según μ_x . Por la ergodicidad de la acción f es constante para casi todo punto según μ_x y por lo tanto $\mu_x = k\sigma_x$ con k constante, además k no depende x porque para todo A boreliano tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_y(A) &= \int_A e^{-\beta b.(x,y)} d\sigma_x = \int_A e^{-\beta b.(y,x)} k d\mu_x = k\mu_y(A) \\ &= k \int_A e^{-\beta b.(y,x)} d\mu_x = k\mu_y(A) \end{aligned}$$

Lo que termina la prueba del recíproco.

Ahora probemos (\Rightarrow), supongamos que la acción de Γ no es ergódica con respecto a $\{\mu_x\}_{x \in M}$, entonces existe un boreliano Γ -invariante $A \subset \partial M$ tal que $\mu_x(A) > 0$ y $\mu_x(A^c) > 0 \forall x \in M$, esto sucede porque las medidas μ_x son absolutamente continuas. Definimos entonces $\sigma_x(E) = \mu_x(E \cup A)$, hay que verificar estas medidas definen una densidad conforme de dimensión β y no es múltiplo de la anterior. Observamos que

$$\sigma_x(E) = \mu_x(E \cap A) = \int_{E \cap A} e^{-\beta b.(x,y)} d\mu_y = \int_E \chi_A e^{-\beta b.(x,y)} d\mu_y = \int_E e^{-\beta b.(x,y)} d\sigma_y$$

y por lo tanto $\sigma_x \ll \sigma_y$ y $\frac{d\sigma_x}{d\sigma_y} = e^{-\beta b.(x,y)}$.

$$\gamma_* \sigma_x(E) = \sigma_x(\sigma^{-1}(E)) = \mu_x(\gamma^{-1}(E) \cap A) = \mu_x(\gamma^{-1}(E \cap A)) = \mu_{\gamma x}(E \cap A) = \sigma_{\gamma x}(E)$$

Para ver que σ_x no es múltiplo positivo de μ_x basta con observar que $\sigma_x(A^c) = 0$ y $\mu_x(A^c) > 0$. □

Corolario 4.26. Sean μ y ν Γ -densidades conformes de dimensión β que cumplan que existe $x_0 \in M$ y constantes $C_1, C_2 > 0$ tal que para todo boreliano $A \subset \Lambda_\Gamma$ se tiene

$$C_1 \mu_{x_0}(A) \leq \nu_{x_0}(A) \leq C_2 \mu_{x_0}(A)$$

Entonces $\mu = \nu$ y es la única densidad conforme de dimensión β .

Demostración. Probemos que la acción de Γ es ergódica para ν_{x_0} . Supongamos que no lo es, entonces existe un boreliano $A \subset \Lambda_\Gamma$ Γ -invariante tal que $\nu_{x_0}(A), \nu_{x_0}(A^c) > 0$, como vimos en el teorema anterior podemos definir otra Γ -densidad conforme σ de dimensión β por $\sigma_x(E) = \nu_x(E \cap A)$, esta cumple que $\sigma_{x_0}(A^c) = 0$, pero esto no puede ser ya que $\mu_{x_0}(A^c) \geq \frac{\nu_{x_0}(A^c)}{C_2} > 0$ y se tiene que existe una constante $C'_2 > 0$ tal que $C'_1 \mu_{x_0}(A^c) \leq \sigma_{x_0}(A^c)$. Esto es absurdo, por lo tanto tenemos la ergodicidad y luego la unicidad. □

4.4. Grupos convexos cocompactos

Ya probamos la existencia de densidades conformes de dimensión δ_Γ para cualquier Γ grupo discontinuo no elemental de isometrías de M , además probamos una condición necesaria y suficiente para la unicidad. En esta sección probaremos la unicidad bajo ciertas hipótesis para Γ , esto nos dice que en estos casos las medidas que construimos en la sección anterior son exactamente las medidas de Hausdorff asociadas a las métricas d_x de dimensión δ_Γ que resultará ser la dimensión de Hausdorff del conjunto límite.

Definición 4.27. Dado un subconjunto $A \subset \partial M$ definimos su envolvente convexa como el conjunto de los puntos en las geodésicas con ambos límites en puntos de A . Notamos $C(A)$ a este conjunto.

Observamos que el conjunto $C(A)$ es Γ -invariante ya que Λ_Γ lo es y las isometrías llevan geodésicas en geodésicas.

Definición 4.28. Un *dominio fundamental* para la acción de un grupo Γ en $Z \subset M$ (Z es Γ -invariante) es un subconjunto $D \subset Z$ que cumple:

1. D tiene representantes de todas las órbitas por Γ .
2. Dos puntos de $\text{int}(D)$ no tiene dos representantes de la misma órbita.

Definición 4.29. Sea Γ un grupo discontinuo de isometrías de M , decimos que Γ es *convexo cocompacto* si la acción restringida a $C(\Lambda_\Gamma)$ tiene un dominio fundamental compacto.

Vamos a preparar el camino para probar el resultado principal de esta sección. Primero necesitamos el siguiente lema

Lema 4.30. Sean $\{\mu_x\}_{x \in M}$ una densidad conforme de dimensión β , $x \in M$ y $A \subset \Lambda_\Gamma$ medible. Entonces para μ_x -casi todo $a \in A$ se tiene:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_x(B_x(a, r) \cap A)}{\mu_x(B_x(a, r))} = 1$$

Donde $B_x(a, r)$ es la bola con la métrica d_x . Estos puntos a son llamados *puntos de densidad*.

La prueba del lema se deduce de resultados que pueden encontrarse en 2.8. y 2.9. del libro de Federer ([8]), vamos a enunciar estos resultados y mostrar que nuestro caso entra en las hipótesis. Antes necesitaremos definir algunos conceptos.

Definición 4.31. Sea X un espacio métrico. Una *relación de cubrimiento* en X es un conjunto $C \subset \{(x, S) : x \in S \subset X\}$. Si $Z \subset X$ definimos

$$C(Z) = \{S : (x, S) \in C \text{ con } x \in Z\}$$

Diremos que C es *fina* en x si $\inf\{\text{diam}(S) : (x, S) \in C\} = 0$. Ahora consideramos una medida de borel μ en X . Una μ -*relación de Vitali* es una relación de cubrimiento V tal que:

1. V está incluida en la σ -álgebra de Borel.
2. V es fina en todo punto de X .
3. Si $C \subset V$, $Z \subset X$ y C es fina en todo punto de Z entonces $C(Z)$ tiene una subfamilia disjunta numerable que cubre un subconjunto de medida total de Z .

Definición 4.32. Dado X un espacio métrico, μ una medida de Borel en X y C una relación de cubrimiento en X , $f : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos

$$(C)\text{limsup}_{S \rightarrow x} f(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\sup\{f(S) : (x, S), \text{diam}S < \varepsilon\})$$

De forma análoga definimos $(C)\text{liminf}_{S \rightarrow x} f(S)$ Si los límites superior e inferior son iguales definimos decimos que existe $(C)\text{lim}_{S \rightarrow x}$ y vale $(C)\text{liminf}_{S \rightarrow x} f(S) = (C)\text{limsup}_{S \rightarrow x} f(S)$.

Teorema 4.33. *Sea X un espacio métrico, μ una medida de Borel en X , V una relación de Vitali y $f : V(X) \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible tal que*

$$\int_E |f| d\mu < +\infty$$

para todo E boreliano acotado, entonces

$$(V)\lim_{S \rightarrow x} \frac{\int_S f d\mu}{\mu(S)} = f(x) \text{ para casi todo } x$$

La prueba de este teorema puede leerse en [8], ahora utilicémoslo para probar el lema:

Demostración(Lema 4.30). Primero hay que observar que $V = \{(\xi, B_x(\xi, r)) : r > 0\}$ es una relación de Vitali en ∂M .

Tomamos la función χ_A luego tenemos que para casi todo $\xi \in \partial M$ se cumple

$$(V)\lim_{S \rightarrow \xi} \frac{\mu_x(S \cap A)}{\mu_x(S)} = (V)\lim_{S \rightarrow \xi} \frac{\int_S \chi_A d\mu_x}{\mu_x(S)} = \chi_A(\xi)$$

Es decir que para casi $a \in A$ tenemos

$$(V)\lim_{S \rightarrow a} \frac{\mu_x(S \cap A)}{\mu_x(S)} = 1$$

Es claro que este límite es igual a $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_x(B_x(a, r) \cap A)}{\mu_x(B(a, r))}$ y con esto termina la prueba. \square

La demostración del siguiente lema puede leerse en el artículo de Coornaert [5].

Lema 4.34. *Sea $\{\mu_x\}_{x \in M}$ una densidad conforme de dimensión β , $x \in C(\Lambda_\Gamma)$. Entonces existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que*

$$C_1 \leq \frac{\mu_x(B_x(\xi, r))}{r^\beta} \leq C_2 \quad \forall r > 0$$

Lema 4.35. *Sea X un espacio métrico separable y $\varepsilon > 0$. Podemos elegir un cubrimiento de X por bolas $\{B(x_i, \varepsilon)\}_{i \in \mathbb{N}}$ de forma tal que las bolas $B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ son disjuntas dos a dos.*

Demostración. Sea F la familia de familias de bolas de radio $\frac{\varepsilon}{2}$ disjuntas, es claro que cada elemento de F es numerable porque X es separable. Ordenamos esta familia por inclusión. Si C es una cadena en F entonces es fácil observar que $\bigcup C$ es una cota superior. Luego existe un elemento maximal en F y si aumentamos al doble el radio de las bolas de este elemento maximal obtenemos un cubrimiento del espacio porque de otra forma se contradice la maximalidad. \square

Teorema 4.36. *Sea Γ convexo cocompacto, entonces la dimensión de Hausdorff de Λ_Γ con respecto a d_x es el exponente crítico δ_Γ . Además existe una única Γ -densidad conforme en ∂M con soporte en Λ_Γ y coincide con la densidad de Hausdorff en el límite.*

Demostración. Supongamos que $\{\mu_x\}_{x \in M}$ es una Γ -densidad conforme de dimensión β y $x \in C(\Lambda_\Gamma)$. Sea $A \subset \Lambda_\Gamma$ y B_1, B_2, B_3, \dots un cubrimiento por bolas centradas en puntos de A de radios r_i , por el lema 4.34 tenemos

$$\sum_i r_i^\beta \geq \sum_i \frac{\mu_x(B_i)}{C_2} = \frac{1}{C_2} \sum_i \mu_x(B_i) \geq \frac{1}{C_2} \mu_x\left(\bigcup_i B_i\right) \geq \frac{\mu_x(A)}{C_2}$$

Y por lo tanto tenemos $H_{d_x}^\beta(A) \geq \frac{\mu_x(A)}{C_2}$ en particular $H_{d_x}^\beta(\Lambda_\Gamma) \geq \frac{\mu_x(\Lambda_\Gamma)}{C_2}$.

Ahora tomemos $\varepsilon > 0$ y B_1, B_2, B_3, \dots un cubrimiento de Λ_Γ por bolas centradas en puntos de Λ_Γ y radios $r_i \leq \varepsilon$ tal que las bolas con los mismos centros y radios $\frac{r_i}{2}$ son disjuntas dos a dos (podemos hacerlo por el lema anterior). Luego tenemos

$$\sum_i r_i^\beta = 2^\beta \sum_i \left(\frac{r_i}{2}\right)^\beta \leq \frac{2^\beta}{C_1} \sum_i \mu_x(B'_i) = \frac{2^\beta}{C_1} \mu_x\left(\bigcup_i B'_i\right) \leq \frac{2^\beta}{C_1} \mu_x(\Lambda_\Gamma)$$

En conclusión tenemos $H_{d_x}^\beta(\Lambda_\Gamma) \leq \frac{2^\beta}{C_1} \mu_x(\Lambda_\Gamma)$, es decir que $\mu_x(\Lambda_\Gamma)$ está acotado por abajo y arriba por múltiples constantes de la medida de Hausdorff de dimensión β de Λ_Γ para la métrica d_x , pero esta solo puede ser finita y positiva para $\beta = HD(\Lambda_\Gamma)$.

Además sabemos que existe una Γ -densidad conforme de dimensión δ_Γ por lo que concluimos $\beta = HD(\Lambda_\Gamma) = \delta_\Gamma$. y la medida de Hausdorff de dimensión δ_Γ es finita y positiva. Concluimos por el teorema 4.9 que $\{H_{d_x}^{\delta_\Gamma}\}_{x \in M}$ es una densidad conforme.

Nos falta probar la unicidad, para esto usaremos el lema 4.30. Tomemos $A \subset \Lambda_\Gamma$ sabemos que para casi todo $a \in A$ se tiene que $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_x(B_x(a,r) \cap A)}{\mu_x(B_x(a,r))} = 1$, llamaremos $L(a,r)$ al cociente $\frac{\mu_x(B_x(a,r) \cap A)}{\mu_x(B_x(a,r))}$. Fijamos $\varepsilon > 0$ y definimos los conjuntos $A_r = \{a \in A : \forall r' < r \ L(r', a) > 1 - \varepsilon\}$. Si consideramos ahora una sucesión $r_n \rightarrow 0$ entonces tenemos $A_{r_n} \subset A_{r_{n+1}}$ para todo n , además $\bigcup_n A_{r_n}$ tiene medida total en A , por lo tanto

$$\mu_x(A) = \mu_x\left(\bigcup_n A_{r_n}\right) = \lim \mu_x(A_{r_n})$$

Podemos concluir entonces que para todo $\varepsilon > 0$ existe $A' \subset A$ y $r_0 > 0$ tal que $\mu_x(A - A') < \varepsilon$ y $L(a,r) > 1 - \varepsilon$ para todo $r < r_0$.

Tomemos ahora una familia de bolas B_1, B_2, \dots centradas en puntos de A' de radios r_i menores que r_0 tal que las bolas con los mismos centros y radios $\frac{r_i}{2}$ son disjuntas dos a dos. Luego definimos las bolas B'_1, B'_2, \dots centradas en los mismos puntos pero con radios $\frac{r_i}{2}$, estas son disjuntas dos a dos por lo que tenemos:

$$\sum_i r_i^{\delta_\Gamma} = 2^{\delta_\Gamma} \sum_i \left(\frac{r_i}{2}\right)^{\delta_\Gamma} \leq \frac{2^{\delta_\Gamma}}{C_1} \sum_i \mu_x(B'_i) \leq \frac{2^{\delta_\Gamma}}{C_1} \sum_i \frac{\mu_x(B'_i) \cap A}{1 - \varepsilon} \leq \frac{2^{\delta_\Gamma}}{(1 - \varepsilon)C_1} \mu_x(A)$$

Luego podemos concluir que $H_{d_x}^{\delta_\Gamma}(A') \leq \frac{2^{\delta_\Gamma}}{(1 - \varepsilon)C_1} \mu_x(A)$. Esto todavía no es lo que queremos, para terminar necesitamos probar que $H_{d_x}^{\delta_\Gamma} \ll \mu_x$, utilizaremos un argumento que a esta altura no debe resultar nada novedoso. Supongamos que $X \subset \Lambda_\Gamma$ de medida μ_x nula, como estamos trabajando con medidas de radón tenemos regularidad por fuera, así que tomamos un abierto X' tal que $X \subset X'$ y $\mu_x(X') < \varepsilon$, ahora tomamos una familia de bolas B_1, B_2, \dots como antes, por el mismo argumento tenemos

$$H_{d_x}^{\delta_\Gamma}(X) \leq H_{d_x}^{\delta_\Gamma}(X') \leq \frac{2^{\delta_\Gamma}}{C_1} \mu_x(X') < \frac{2^{\delta_\Gamma} \varepsilon}{C_1}$$

Esto es para todo ε por lo que $H_{d_x}^{\delta_\Gamma}(X) = 0$.

Si ahora consideramos una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que decrece a cero, tenemos asociada una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

1. $A_n \subset A$
2. $\mu_x(A - A_n) < \varepsilon_n$
3. $H_{d_x}^{\delta_\Gamma}(A_n) \leq \frac{2^{\delta_\Gamma}}{(1 - \varepsilon_n)C_1} \mu_x(A)$

Además es claro que podemos tomar los A_n crecientes. Entonces $\mu_x(A - A_n) \rightarrow 0$ implica $\mu_x(A - \bigcup_n (A_n)) = 0$ por lo que $H_{d_x}^{\delta_\Gamma}(A - \bigcup_n (A_n)) = 0$ lo que implica que $H_{d_x}^{\delta_\Gamma}(A_n) \rightarrow H_{d_x}^{\delta_\Gamma}(A)$. Por lo tanto si tomamos límites en el punto 3 tenemos $H_{d_x}^{\delta_\Gamma}(A) \leq \frac{2^{\delta_\Gamma}}{C_1} \mu_x(A)$. Aplicando el corolario 4.26 tenemos que existe una única densidad conforme de dimensión δ_Γ . \square

Corolario 4.37. *Si Γ es convexo cocompacto entonces Λ_Γ tiene dimensión de Hausdorff mayor a cero.*

Definición 4.38. Si Γ es un grupo discontinuo de isometrías de M decimos que es *cocompacto* si tiene un dominio fundamental compacto.

Vamos a ver que los grupos cocompactos son convexos cocompactos, además veremos otra particularidad de estos grupos que tendra que ver con la siguiente definición.

Definición 4.39. Definimos la entropía volumétrica de M como

$$\delta_M = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log(\text{vol}(B(x, r)))$$

Proposición 4.40. *Asumimos $\delta_M < +\infty$. Sea Γ es un grupo discontinuo de isometrías de M . Entonces $\delta_\Gamma \leq \delta_M < +\infty$ y si Γ es cocompacto entonces $\delta_\Gamma = \delta_M$ y $\Lambda_\Gamma = \partial M$.*

Demostración. Fijemos x , sea $s > 0$ tal que si $B(\gamma x, s) \cap B(x, s) \neq \emptyset \Rightarrow \gamma x = x$. Sea $n = \text{card}(\text{Stab}_\Gamma(x))$, para $r > 0$ tenemos

$$\text{card}\{\gamma \in \Gamma : d(\gamma x, x) \leq r\} \text{vol}(B(x, s)) \leq n \text{vol}(B(x, r + s))$$

Entonces tenemos

$$\frac{1}{2} \log(\text{card}\{\gamma \in \Gamma : d(\gamma x, x) \leq r\} \text{vol}(B(x, s))) \leq \frac{1}{r} \log(n \text{vol}(B(x, r + s)))$$

Tomando limite superior de ambos lados nos queda

$$\delta_\Gamma \leq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \log(n \text{vol}(B(x, r + s))) = \delta_M$$

Si Γ es cocompacto existe $s > 0$ tal que $M = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B(\gamma x, s)$. Luego para $r \geq 0$ tenemos

$$B(x, r) \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma, d(\gamma x, x) \leq r+s} B(\gamma x, s)$$

y entonces

$$\text{vol}(B(x, r)) \leq \text{card}\{\gamma \in \Gamma : d(\gamma x, x) \leq r + s\} \text{vol}(B(x, s))$$

De donde se deduce que $\delta_M \leq \delta_\Gamma$ y luego la igualdad.

Solo falta probar $\Lambda_\Gamma = \partial M$. Sea $\xi \in \partial M$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_n \rightarrow \xi$. Como tenemos un dominio fundamental compacto podemos afirmar que dado $x \in M$ existe para cada n un elemento $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $d(\gamma_n(x), x_n) < K$ para K constante. Luego tenemos que la sucesión $\{\gamma_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a ξ por lo que este está en ∂M . \square

4.5. Límite Radial

Ya estudiamos el conjunto límite asociado a un grupo discontinuo de isometrías, ahora estudiaremos un subconjunto de este que tiene propiedades interesantes. Más tarde será crucial para estudiar el flujo geodésico del cociente M/Γ en el caso de que Γ sea libre. Recordemos que estamos trabajando con Γ un grupo discreto no elemental de isometrías de M , donde M es completa, simplemente conexa con curvatura entre $-b$ y -1 .

Definición 4.41. Para Γ grupo discontinuo de isometrías de M definimos el *límite radial* como el conjunto Λ_Γ^r de puntos $\xi \in \Lambda_\Gamma$ para los cuales existe $x \in M$ y $\varepsilon > 0$ tal que $\xi \in \mathbf{O}_\varepsilon(x, \gamma x)$ para infinitos $\gamma \in \Gamma$.

Proposición 4.42. Si Γ es discontinuo y no elemental entonces Λ_Γ^r es no vacío, Γ -invariante y denso en Λ_Γ .

Demostración. Para ver que es no vacío tomemos $\gamma \in \Gamma$ hiperbólica, luego si x está en la geodésica de extremos γ^- y γ^+ entonces para cualquier ε tenemos que $\gamma^+ \in \mathbf{O}_\varepsilon(x, \gamma^n x) \forall n \in \mathbb{N}$, entonces γ^+ está en el límite radial. Además como los atractores de los elementos hiperbólicos de Γ son densos en Λ_Γ es claro que Λ_Γ^r también.

Veamos que es Γ -invariante. Tomemos $\gamma_0 \in \Gamma$ y $\xi \in \Lambda_\Gamma^r$, sean x y ε como en la definición. Como $\mathbf{O}_\varepsilon(\gamma_0 x, \gamma_0 \gamma x) = \gamma_0 \mathbf{O}_\varepsilon(x, \gamma x)$ entonces existen infinitas de estas sombras a las cuales pertenece $\gamma_0 \xi$ y por lo tanto $\gamma \xi \in \Lambda_\Gamma^r$. \square

Teorema 4.43. Sea μ una Γ -densidad conforme de dimensión β . Si Γ es de tipo convergente entonces $\mu_x(\Lambda_\Gamma^r) = 0$ para $x \in M$.

Demostración. Escibimos $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que

$$\sum_{n \geq N} e^{-\beta d(x, \gamma_n x)} < \varepsilon$$

Por el lema de las sombras existen $C > 1$ y $r_0 > 0$ tal que para todo $r \geq r_0$

$$\sum_{n \geq N} \mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n x)) \leq C e^{2r\beta} \varepsilon$$

y para $0 < r \leq r_0$ tenemos

$$\sum_{n \geq N} \mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n x)) \leq \sum_{n \geq N} \mu_x(\mathbf{O}_{r_0}(x, \gamma_n x)) \leq C e^{2r_0\beta} \varepsilon$$

Luego para $r > 0$ tenemos

$$\mu_x\left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n > N} \mathbf{O}_r(x, \gamma_n x)\right) = 0$$

Observamos que

$$\Lambda_\Gamma^r = \bigcup_{r > 0} \left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n > N} \mathbf{O}_r(x, \gamma_n x) \right)$$

y luego está probada la tesis. \square

Proposición 4.44. Una Γ -densidad conforme no tiene átomos en el límite radial.

Demostración. Supongamos que existe $\xi \in \Lambda_\Gamma^r$ con $\mu_x(\xi) > 0$.

Primero supongamos que existe un elemento hiperbólico $\gamma \in \Gamma$ tal que $\xi = \gamma_+$. El lema de las sombras nos dice que existe $r_0 > 0$ tal que para todo $r > r_0$ existe $C > 1$ tal que

$$\frac{1}{C}e^{-\beta d(x, \gamma^n x)} \leq \mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma^n x)) \leq Ce^{-\beta d(x, \gamma^n x)}$$

Esto implica $\mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma^n x)) \rightarrow 0$, pero como $\xi \in \mathbf{O}_r(x, \gamma^n x)$ tenemos que $\mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma^n x)) > \mu_x(\xi) > 0$ lo que es absurdo.

Existe una sucesión $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de Γ y $x \in M$ tal que $\lim e^{-b_\xi(x, \gamma_n x)} = +\infty$. Si ξ es un punto parabólico luego $Stab_\Gamma(\xi)$ preserva las horoesferas centradas en ξ , entonces podemos tomar todos los γ_n tal que dos no pertenezcan a la misma coclase de $\Gamma/Stab_\Gamma(\xi)$. Luego tenemos

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\beta b_\xi(x, \gamma_n x)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mu_x(\gamma_n \xi)}{\mu_x(\xi)} \leq \frac{\mu_x(\partial M)}{\mu_x(\xi)} < \infty$$

Pero esto es absurdo porque $\sum_{i \in \mathbb{N}} e^{-\beta b_\xi(x, \gamma_i x)} = +\infty$.

Si ξ no es punto fijo ningún elemento de Γ tenemos

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-\beta b_\xi(x, \gamma x)} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{\mu_x(\gamma \xi)}{\mu_x(\xi)} \leq \frac{\mu_x(\partial M)}{\mu_x(\xi)} < \infty$$

Lo que nuevamente es una contradicción. \square

Teorema 4.45. *Sea μ una Γ -densidad conforme de dimensión β . Si $A \subset \Lambda_\Gamma^r$ es Γ invariante entonces $\mu_x(A) = 0$ o $\mu(A) = \mu_x(\partial M)$ para $x \in M$.*

Demostración. Supongamos que $\mu_x(A) > 0$. Para cada punto de densidad $\xi \in A$ existe un $C > 0$ y una sucesión $\{\gamma_n^{-1}x\}_{i \in \mathbb{N}}$ que converge a ξ tal que $\xi \in \mathbf{O}_r(x, \gamma_n x)$ y

$$\frac{\mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x) \cap A)}{\mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x))} \rightarrow 1$$

La existencia de estos puntos de densidad se prueba igual que en el lema 4.30. Como A es invariante tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\gamma_n^{-1}x}(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x) \cap A)}{\mu_{\gamma_n^{-1}x}(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x))} &= \frac{\mu_{\gamma_n^{-1}x}(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x)) - \mu_{\gamma_n^{-1}x}(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x) - A)}{\mu_{\gamma_n^{-1}x}(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x))} = \\ &= 1 - \frac{\int_{\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x) - A} e^{-\beta b_\xi(x, \gamma_n^{-1}x)} d\mu_x(\xi)}{\int_{\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x)} e^{-\beta b_\xi(x, \gamma_n^{-1}x)} d\mu_x(\xi)} \end{aligned}$$

Por el lema 2.20 tenemos que si $\xi \in \mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x)$ entonces $d(x, \gamma_n^{-1}x) - 2r \leq b_\xi(x, \gamma_n^{-1}x) \leq d(x, \gamma_n^{-1}x)$, luego

$$e^{-\beta d(x, \gamma_n^{-1}x)} \leq e^{-\beta b_\xi(x, \gamma_n^{-1}x)} \leq e^{-\beta(d(x, \gamma_n^{-1}x) - 2r)} \quad \forall \xi \in \mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x)$$

Es decir que existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$\frac{\mu_{\gamma_n^{-1}x}(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x) \cap A)}{\mu_{\gamma_n^{-1}x}(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x))} \geq 1 - C_1 \frac{\mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x) - A)}{\mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x))}$$

Luego como

$$\frac{\mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x) \cap A)}{\mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x))} \rightarrow 1$$

tenemos

$$\frac{\mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x) - A)}{\mu_x(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x))} \rightarrow 0$$

Y entonces para n suficientemente grande

$$\frac{\mu_{\gamma_n^{-1}x}(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x) \cap A)}{\mu_{\gamma_n^{-1}x}(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x))} \geq 1 - \varepsilon$$

Sea m_0 es la medida del átomo más grande de μ_x . Por el lema 2.21 tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ si r es suficientemente grande entonces

$$\mu_{\gamma_n^{-1}x}(\mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x)) = \mu_x(\gamma_n \mathbf{O}_r(x, \gamma_n^{-1}x)) = \mu_x(\mathbf{O}_r(\gamma_n x, x)) \geq \mu_x(\partial M) - m_0 - \varepsilon$$

Combinando esto con lo anterior tenemos

$$\mu_x(A) \geq \mu_x(\mathbf{O}_r(\gamma_n x, x) \cap A) \geq (1 - \varepsilon) \mu_{\mathbf{O}_r \gamma_n^{-1}(x, \gamma_n^{-1}x)} \geq (1 - \varepsilon) (\mu_x(\partial M) - m_0 - \varepsilon)$$

Y entonces

$$\mu_x(A) \geq \mu_x(\partial M) - m_0$$

Si μ_x tiene algún átomo ν con $\mu_x(\nu) = m_0$ entonces $\mu_x(\gamma\nu) = \mu_{\gamma^{-1}x}(\nu) = e^{-b_\nu(\gamma^{-1}x, x)} \mu_x(\nu)$, es decir que $\gamma\nu$ también es un átomo de μ_x . Por la desigualdad anterior alguno de los puntos ν o $\gamma\nu$ están en A , lo que contradice la proposición anterior. \square

Corolario 4.46. *Supongamos que existe una Γ -densidad conforme μ de dimensión β tal que $\mu_x(\Lambda_\Gamma^r) > 0$ entonces:*

1. $\mu_x(\Lambda_\Gamma^r) = \mu_x(\partial M)$.
2. Γ es de tipo divergente.

5. Aplicación: Medidas de Bowen-Margulis

Las densidades conformes en ∂M nos pueden dar información acerca del flujo geodésico en $M/\Gamma = X$ con Γ actuando libremente en M . Sea g_t el flujo geodésico en el fibrado tangente unitario T^1M . Es fácil ver que la acción de Γ conmuta con el flujo geodésico: Sea σ una geodésica tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma'(0) = v$, luego $\gamma\sigma$ es una geodésica y $\gamma\sigma(0) = \gamma x$ y $(\gamma\sigma)'(0) = d_{\gamma x}\gamma(v)$, entonces

$$\begin{aligned} g_t\gamma(x, v) &= g_t(\gamma\sigma(0), (\gamma\sigma)'(0)) = (\gamma\sigma(t), (\gamma\sigma)'(t)) \\ &= (\gamma\sigma(t), d_{\gamma\sigma(t)}\gamma(\sigma'(t))) = \gamma(\sigma(t), \sigma'(t)) = \gamma g_t(x, v). \end{aligned}$$

Luego tenemos lo siguiente:

Proposición 5.1. T^1M/Γ es el fibrado unitario de X y si G_t es el flujo geodésico en T^1X entonces $G_t\Pi = \Pi g_t$, donde $\Pi : T^1M \rightarrow T^1M/\Gamma$ es la proyección al cociente de la acción de Γ .

Demostración. Sea $\tilde{\Pi} : M \rightarrow X$ la proyección al cociente. Para probar lo primero vamos a definir un mapa $F : T^1M \rightarrow T^1X$ por $F(p, v) = (\tilde{\Pi}(p), d_p\tilde{\Pi}(v))$. Es claro que F es invariante por la acción de Γ y al pasarlo al cociente resulta biyectivo.

Observamos que haciendo esta identificación $\Pi(p, v) = (\tilde{\Pi}(p), d_p\tilde{\Pi}(v))$. Ahora sea $(p, v) \in T^1M$, $\tilde{\sigma}$ la geodésica determinada por este punto, $\sigma = \tilde{\Pi}\tilde{\sigma}$ es la geodésica determinada por $\Pi(p, v)$.

$$\begin{aligned} G_t(\Pi(p, v)) &= (\sigma(t), \sigma'(t)) = (\tilde{\Pi}\tilde{\sigma}(t), (\tilde{\Pi}\tilde{\sigma})'(t)) = (\tilde{\Pi}(\tilde{\sigma}(t)), d_p\tilde{\Pi}(\tilde{\sigma}'(t))) \\ &= \Pi(\tilde{\sigma}(t), \tilde{\sigma}'(t)) = \Pi g_t(p, v) \end{aligned}$$

□

Observemos que el conjunto orientado de geodésicas en M puede ser identificado con el conjunto $\partial^2 M = \partial M \times \partial M - \Delta$ donde $\Delta = \{(\xi, \xi) : \xi \in \partial M\}$ y de esta forma darle una topología.

Tomemos una medida λ en $\partial^2 M$, consideramos ahora la medida $\hat{\lambda} = \lambda \otimes dt$ en T^1M . Esta medida es invariante por el flujo geodésico.

Si λ es invariante por la acción de Γ entonces podemos considerar una medida $\check{\lambda}$ en T^1M/Γ donde si $A \subset T^1M/\Gamma$ es tal que $\gamma A \cap A = \emptyset \forall \gamma \in \Gamma$ entonces $\check{\lambda}(A) = \hat{\lambda}(\tilde{A})$, donde \tilde{A} es un levantado de A . Además si $A \subset T^1M/\Gamma$ es un conjunto como antes

$$\check{\lambda}(G_t(A)) = \check{\lambda}(G_t(\Pi(\tilde{A}))) = \check{\lambda}(\Pi(g_t(\tilde{A}))) = \hat{\lambda}(g_t(\tilde{A})) = \hat{\lambda}(\tilde{A})$$

Es decir que $\check{\lambda}$ es invariante por el flujo geodésico G_t .

Consideremos ahora μ una Γ -densidad conforme de dimensión β . A partir de esta vamos a construir una medida en T^1M/Γ invariante por el flujo geodésico utilizando lo visto anteriormente, para esto veamos la siguiente proposición:

Proposición 5.2. *La medida de Radon $d_x^{-2\beta}d(\mu_x \otimes \mu_x)$ en $\partial^2 M$ es Γ -invariante y no depende de x .*

Demostración. Veamos que es Γ -invariante

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma(A)} d_x^{-2\beta}d(\mu_x \otimes \mu_x) &= \int_{\gamma(A)} (d_x(\xi, \eta))^{-2\beta}d(\mu_x(\xi) \otimes \mu_x(\eta)) = \\
&= \int_A (d_x(\gamma\xi', \gamma\eta'))^{-2\beta}d(\mu_x(\gamma\xi') \otimes \mu_x(\gamma\eta')) = \\
&= \int_A (d_{\gamma^{-1}x}(\xi', \eta'))^{-2\beta}e^{\beta\xi'(\gamma^{-1}x,x)}e^{\beta\eta'(\gamma^{-1}x,x)}d(\mu_x(\xi') \otimes \mu_x(\eta')) \\
&= \int_A e^{2\beta\frac{1}{2}(b_{\xi'}(\gamma^{-1}x,x)+b_{\eta'}(\gamma^{-1}x,x))} (d_x(\xi', \eta'))^{-2\beta}e^{-\beta b_{\xi'}(\gamma^{-1}x,x)}e^{-\beta b_{\eta'}(\gamma^{-1}x,x)}d(\mu_x(\xi') \otimes \mu_x(\eta')) = \\
&= \int_A (d_x(\xi', \eta'))^{-2\beta}d(\mu_x(\xi') \otimes \mu_x(\eta')) = \int_A d_x^{-2\beta}d(\mu_x \otimes \mu_x)
\end{aligned}$$

Ahora que no depende de x

$$\begin{aligned}
\int_A d_y^{-2\beta}d(\mu_y \otimes \mu_y) &= \int_{\gamma(A)} (d_y(\xi, \eta))^{-2\beta}d(\mu_y(\xi) \otimes \mu_y(\eta)) \\
&= \int_A (e^{\frac{1}{2}(b_\xi(x,y)+b_\eta(x,y))}d_x(\xi, \eta))^{-2\beta}e^{-\beta b_\xi(y,x)}e^{-\beta b_\eta(y,x)}d(\mu_x(\xi) \otimes \mu_x(\eta)) = \\
&= \int_A d_x^{-2\beta}d(\mu_x \otimes \mu_x)
\end{aligned}$$

□

Definición 5.3. *La medida de Bowen-Margulis asociada a μ es la medida*

$$\nu^\mu = (d_x^{-2\beta}d(\mu_x \otimes \mu_x))^\vee$$

definida en T^1M/Γ . Usaremos la misma notación para la medida $(d_x^{-2\beta}d(\mu_x \otimes \mu_x))^\vee$.

Definición 5.4. Consideramos $T : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ un flujo continuo en un espacio topológico. Decimos que $x \in X$ es *disipativo* si para todo $A \subset X$ compacto existe t_0 tal que $T_t(x) \notin A \forall t \geq t_0$, de otra forma decimos que x es *conservativo*. Denotamos por C^T y D^T a los conjuntos de puntos conservativos y disipativos respectivamente. Diremos que el flujo T es conservativo con respecto a una medida λ si $\lambda(D^T) = 0$, diremos que es disipativo si $\lambda(C^T) = 0$

Observar que ser disipativo para una medida λ no implica ser conservativo para λ .

Proposición 5.5. *El conjunto conservativo de G_t en T^1X es el cociente por Γ de $(\partial M \times \Lambda_\Gamma^r - \Delta) \times \mathbb{R}$.*

Demostración. $(x, v) \in T^1X$ un punto conservativo, σ geodésica en X tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma'(0) = v$, sea $\tilde{\sigma}$ un levantado de σ en M . Como (x, v) es conservativo existe un compacto $K \subset T^1X$ y una sucesión $t_i \rightarrow +\infty$ tal que $(\sigma(t_i), \sigma'(t_i)) \in K$. Sea ahora $\tilde{K} \subset T^1M$ tal que $\Pi(\tilde{K}) = K$ un entorno compacto de $(\tilde{\sigma}(0), \tilde{\sigma}'(0))$. Luego para cada i existe $\gamma_i \in \Gamma$ tal que $(\tilde{\sigma}(t_i), \tilde{\sigma}'(t_i)) \in \gamma_i \tilde{K}$. Si tomamos r tal que $B(\tilde{\sigma}(0), r)$ incluye la proyección de \tilde{K} sobre M . Entonces el rayo positivo de σ interseca a las bolas $B(\gamma_i(\sigma(0)), r)$ y por lo tanto $\sigma^+ \in \Lambda_\Gamma^r$, es decir que con la identificación que habíamos hecho el punto (x, v) está en $(\partial M \times \Lambda_\Gamma^r - \Delta) \times \mathbb{R}/\Gamma$.

Tomemos ahora (x, v) en $(\partial M \times \Lambda_\Gamma^r - \Delta) \times \mathbb{R}/\Gamma$, es decir que si σ es la geodésica en X determinada por (x, v) entonces todo levantado de σ a M tiene límites en $\partial M \times \Lambda_\Gamma^r - \Delta$. Esto quiere decir que existe un punto $x \in M$, $r > 0$ y una sucesión $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de Γ tal que la imagen de un levantado $\tilde{\sigma}$ de σ interseca a las bolas cerradas $\tilde{B}(\gamma_n x, r) = \gamma_n \tilde{B}(x, r)$. Es decir que existe una sucesión $t_i \rightarrow +\infty$ tal que $\sigma(t_i) \in \Pi(\tilde{B}(x, r))$. Luego $(\sigma(t_i), \sigma'(t_i)) \in T^1\tilde{B}(x, r)$ que es un compacto de T^1X . Por lo tanto (x, v) es conservativo. \square

Proposición 5.6. *Si μ es una Γ -densidad conforme de dimensión β con $\mu_x(\Lambda_\Gamma^r) > 0$ entonces G es conservativo con respecto a la medida ν^μ .*

Demostración. Por el corolario 4.46 se tiene $\mu_x(\Lambda_\Gamma^r) = \mu_x(\partial M)$. Es claro que el conjunto disipativo tiene medida nula porque

$$\int_{(\Lambda_\Gamma^r)^c \times \Lambda_\Gamma - \Delta} d_x^{-\beta}(\xi, \eta) d\mu_x(\xi) \otimes d\mu_x(\eta) = 0$$

\square

El siguiente lema es una versión general del lema de Borel-Cantelli, será utilizado en la prueba del teorema central del capítulo. Es probado por Sullivan en [16].

Lema 5.7. *Sean P una probabilidad en un conjunto Z y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de sucesos tales que:*

1. $\sum_n P(A_n) = \infty$
2. Existe $C \geq 1$ tal que $P(A_n \cap A_m) \leq CP(A_n)P(A_m)$ para $n \neq m$

Entonces $P(\limsup A_n) > 0$.

Teorema 5.8. *Sea μ una Γ -densidad conforme de dimensión β . Entonces tenemos*

1. G_t es disipativo o conservativo con respecto a ν^μ .
2. G_t es conservativo con respecto a ν^μ si y solo si Γ es de tipo divergente.

Demostración. Supongamos $\nu^\mu(C^G) > 0$ entonces

$$\int_{(\partial M \times \Lambda_\Gamma^r - \Delta)} d_x^{-2\beta}(\xi, \nu) d(\mu_x(\xi) \otimes \mu_x(\nu)) > 0$$

y luego

$$(\mu_x \otimes \mu_x)(\partial M \times \Lambda_\Gamma^r - \Delta) > 0$$

y entonces $\mu_x(\Lambda_\Gamma^r) > 0$. Por la proposición anterior G es conservativo con respecto a ν^μ y luego 1 está probado.

Si Γ es de tipo convergente entonces el teorema 4.43 nos dice que $\mu_x(\Lambda_\Gamma^r) = 0$ por lo que

$$(\mu_x \otimes \mu_x)(\partial M \times \Lambda_\Gamma^r - \Delta) = 0$$

y luego $\nu^\mu(C^G) = 0$, es decir que G es disipativo. La parte difícil de la prueba es ver que si Γ es de tipo divergente entonces el flujo geodésico es conservativo.

Fijemos un punto $x \in M$, sea t_0 la medida del átomo más grande de μ_x . Consideremos $C_1 = \frac{1}{2}(\mu_x(\partial M) - t_0)$ y

$$\Delta_1(y, R) = \bigcup_{z \in B(y, R)} \mathbf{O}_R(z, x)$$

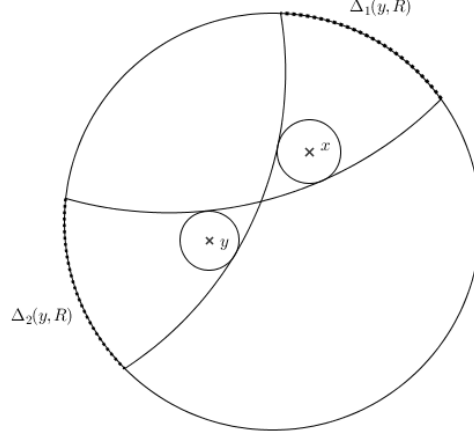
Por el lema 2.21 tenemos que existe $R > 0$ tal que para todo $y \in M$ se tiene

$$\mu_x(\Delta_1(y, R)) \geq C_1$$

Sabemos que hay finitos $\gamma \in \Gamma$ para los cuales $\gamma B(x, R) \cap B(x, R) \neq \emptyset$. Consideremos entonces el conjunto $\Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma B(x, R) \cap B(x, R) = \emptyset\}$.

Ahora consideremos el conjunto

$$\Delta_2(y, R) = \bigcup_{z \in B(x, R)} \mathbf{O}_R(z, y)$$



Notamos que para $\gamma \in \Gamma_1$ tenemos $\Delta_1(\gamma^{-1}x, R) = \gamma^{-1}\Delta_2(\gamma x, R)$, luego $\mu_x(\gamma^{-1}\Delta_2(\gamma x, R)) \geq C_1$. Tenemos también

$$\mu_x(\Delta_2(\gamma x, R)) = \mu_{\gamma^{-1}x}(\gamma^{-1}\Delta_2(\gamma x, R)) = \int_{\gamma^{-1}\Delta_2(\gamma x, R)} e^{-\beta b_\xi(\gamma^{-1}x, x)} d\mu_x(\xi)$$

Por el lema 2.20 sabemos que si $z \in B(\gamma^{-1}x, R)$ y $\xi \in \mathbf{O}_R(z, x)$ entonces $d(z, x) - 2R \leq b_\xi(z, x)$. Entonces tenemos

$$d(x, \gamma^{-1}x) - 3R \leq d(x, \gamma^{-1}x) - d(z, \gamma^{-1}x) - 2R \leq b_\xi(z, x) = b_\xi(\gamma^{-1}x, x) - b_\xi(\gamma^{-1}x, z)$$

Y entonces $b_\xi(\gamma^{-1}x, x) \geq d(x, \gamma^{-1}x) - 4R$. Esto implica

$$C_1 e^{-\beta d(x, \gamma x)} \leq \mu_x(\Delta_2(\gamma x, R)) \leq \mu_x(\partial M) e^{\beta 4R} e^{-\beta d(x, \gamma x)} \quad \forall \gamma \in \Gamma_1$$

Consideremos ahora $\tilde{O} = T^1 B(x, R)$ y $O = \Pi(\tilde{O})$. Tomemos $\gamma \in \Gamma_1$, las geodésicas determinadas por los vectores de $\tilde{O} \cap G^{-d(x, \gamma x)}(\gamma \tilde{O})$ tienen sus límites en $\Delta_1(\gamma x, R) \times \Delta_2(\gamma x, R) - \Delta$. El largo de los segmentos geodésicos en \tilde{O} está acotado por $C_2 > 0$, además $d(\Delta_2(\gamma x, R), \Delta_1(\gamma x, R)) > 0$. Luego tenemos

$$\nu^\mu(\tilde{O} \cap g^{-d(x, \gamma x)}(\gamma \tilde{O})) \leq C_2 \int_{\Delta_1(\gamma x, R) \times \Delta_2(\gamma x, R) - \Delta} d_x^{-2\beta} d(\mu_x \otimes \mu_x) \leq$$

$$C_2 d(\Delta_2(x, R), \Delta_1(x, R)) \mu_x(\Delta_1(\gamma x, R)) \mu_x(\Delta_2(\gamma x, R)) =$$

$$C_2 d(\Delta_2(x, R), \Delta_1(x, R)) C_1 \mu_x(\partial M) e^{\beta 4R} e^{-\beta d(x, \gamma x)} = C_3 e^{-\beta d(x, \gamma x)}$$

Aumentando R si es necesario tenemos por el mismo argumento de arriba que existen constantes $C_3, C_4 > 0$ tal que

$$C_4 e^{-\beta d(x, \gamma x)} \leq \mu_x(\Delta_2(\gamma x, R/6)) \leq C_5 e^{-\beta d(x, \gamma x)} \quad \forall \gamma \in \Gamma_1$$

y

$$\mu_x(\Delta_1(y, R)) \geq C_1$$

Ahora tenemos que el largo de las geodésicas que pasan por $\tilde{O}' = T^1B(x, \frac{R}{2})$ está acotada por abajo por $\frac{R}{2}$. podemos observar que las geodésicas que tienen sus límites en $\Delta_2(\gamma x, R/6) \times \Delta_1(\gamma x, R/6) - \Delta$ quedan determinadas por vectores de $\tilde{O}' \cap g^{-d(x, \gamma x)}(\gamma \tilde{O}')$, luego

$$\begin{aligned} \nu^\mu(\tilde{O} \cap g^{-d(x, \gamma x)}(\gamma \tilde{O})) &\geq \frac{R}{2} \int_{\Delta_2(\gamma x, R/6) \times \Delta_1(\gamma x, R/6) - \Delta} d_x^{-2\beta} d(\mu_x \otimes \mu_x) \geq \\ &\frac{R}{2} \text{Diam}(\partial M)^{-2\beta} \mu_x(\Delta_2(\gamma x, R/6)) \mu_x(\Delta_1(\gamma x, R/6)) \\ &\frac{R}{2} \text{Diam}(\partial M)^{-2\beta} C_4 e^{-\beta d(x, \gamma x)} C_1 = C_6 e^{-\beta d(x, \gamma x)} \end{aligned}$$

En conclusión tenemos

$$C_6 e^{-\beta d(x, \gamma x)} \leq \nu^\mu(\tilde{O} \cap g^{-d(x, \gamma x)}(\gamma \tilde{O})) \leq C_3 e^{-\beta d(x, \gamma x)} \quad \forall \gamma \in \Gamma_1$$

Ahora tenemos que existe una constante $K > 1$ tal que si $d(x, \gamma x) \in [n, n+1)$ con $n \in \mathbb{N}$ entonces tenemos

$$K^{-1} e^{-\beta d(x, \gamma x)} \leq \nu^\mu(\tilde{O} \cap g^{-n}(\gamma \tilde{O})) \leq K e^{-\beta d(x, \gamma x)}$$

Como Γ es de tipo divergente tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu^\mu(\tilde{O} \cap g^{-n}(\gamma \tilde{O})) = +\infty$$

Además observemos que si $N = \text{card}\{\gamma \in \Gamma : \gamma B(x, R) \cap B(x, R)\}$ entonces $\nu^\mu(A) \leq N \nu^\mu(\Pi(A))$ para todo A boreliano en T^1M . Por lo tanto también tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu^\mu(O \cap G^{-n}(O)) = +\infty$$

Definimos una probabilidad P en O como $P(A) = \frac{\nu^\mu(A)}{\nu^\mu(O)}$ y notamos $E_n = O \cap g^{-n}(O)$, este conjunto es interpretado como el evento de volver a O en tiempo n . Luego tenemos

$$P(E_n) = \frac{\nu^\mu(O \cap G^{-n}(O))}{\nu^\mu(O)} \geq \frac{\nu^\mu(\tilde{O} \cap g^{-n}(\Gamma \tilde{O}))}{N \nu^\mu(\tilde{O})}$$

Recordamos que $P(E_{n+m} \cap E_n) = P(E_n)P(E_{n+m}|E_n)$, usando la desigualdad

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{b_1 + b_2 + \dots + b_k} \leq \max\left\{\frac{a_j}{b_j} : 1 \leq j \leq k\right\}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}P(E_{n+m}|E_n) &\leq \frac{\nu^\mu(\tilde{O} \cap g^{-n}(\Gamma\tilde{O}) \cap g^{-n-m}(\Gamma\tilde{O}))}{\nu^\mu(\tilde{O} \cap g^{-n}(\Gamma\tilde{O}))} = \frac{\nu^\mu(\Gamma\tilde{O} \cap g^n(\tilde{O}) \cap g^{-m}(\Gamma\tilde{O}))}{\nu^\mu(\Gamma\tilde{O} \cap g^n(\tilde{O}))} \\ &\leq \frac{\nu^\mu(\gamma\tilde{O} \cap g^n(\tilde{O}) \cap g^{-m}(\Gamma\tilde{O}))}{\nu^\mu(\gamma\tilde{O} \cap g^n(\tilde{O}))} = \frac{\nu^\mu(\tilde{O} \cap g^n(\gamma^{-1}\tilde{O}) \cap g^{-m}(\Gamma\tilde{O}))}{\nu^\mu(\tilde{O} \cap g^n(\gamma^{-1}\tilde{O}))} \end{aligned}$$

Donde γ es el elemento que maximiza el cociente.

Sea ahora $\Gamma_2 = \{\alpha \in \Gamma : \tilde{O} \cap g^n(\gamma^{-1}\tilde{O} \cap g^{-m}(\alpha\tilde{O})) \neq \emptyset\}$. Por un argumento como el de arriba podemos encontrar una constante $C_7 > 0$ tal que para todo $\alpha \in \Gamma_2$ se tiene

1. $\nu^\mu(\tilde{O} \cap g^n(\gamma^{-1}\tilde{O} \cap g^{-m}(\alpha\tilde{O}))) \leq \nu^\mu(g^n(\gamma^{-1}\tilde{O}) \cap g^{-m}(\alpha\tilde{O})) \leq C_7 e^{-\beta(n+d(x,\alpha x))}$.
2. $\nu^\mu(\tilde{O} \cap g^n(\gamma^{-1}\tilde{O})) \geq C_7^{-1} e^{-n\beta}$.

Luego tenemos

$$\begin{aligned} \nu^\mu(\tilde{O} \cap g^n(\gamma^{-1}\tilde{O} \cap g^{-m}(\Gamma\tilde{O}))) &\leq \sum_{\alpha \in \Gamma_2} C_7 e^{-\beta(n+d(x,\alpha x))} \\ &\leq C_7 e^{-n\beta} \sum_{\alpha \in \Gamma_2} e^{-\beta d(x,\alpha x)} \leq C_7 K e^{-n\beta} \sum_{\alpha \in \Gamma_2} \nu^\mu(\tilde{O} \cap g^{-m}(\alpha\tilde{O})) \\ &\leq C_7 K N e^{-n\beta} \nu^\mu(\tilde{O} \cap g^{-m}(\Gamma\tilde{O})) \leq C_7 K N e^{-n\beta} \nu^\mu(\tilde{O} \cap g^{-m}(\Gamma\tilde{O})) \\ &\leq C_7 K N^2 e^{-n\beta} \nu^\mu(O \cap G^{-m}(O)) \leq C_7 K N^2 e^{-n\beta} \nu^\mu(O \cap G^{-m}(O)) P(E_m) \end{aligned}$$

Y entonces

$$\frac{1}{N}P(E_{n+m}|E_n) \leq \frac{C_7 K N^2 e^{-n\beta} \nu^\mu(O \cap G^{-m}(O)) P(E_m)}{C_7^{-1} e^{-n\beta}} = C_7^2 K N^2 P(E_m)$$

Es decir que $P(E_{n+m} \cap E_n) \leq C P(E_n) P(E_m)$ para una constante $C > 0$. Por el lema anterior la probabilidad de que se den infinitos E_n es mayor a cero. Por la parte 1 el flujo geodésico es conservativo. \square

Corolario 5.9. $\mu_x(\Lambda_\Gamma^r) = \mu_x(\Lambda_\Gamma)$ si y solo si Γ es de tipo divergente.

Demostración. Ya teníamos por el corolario 5.6 que si $\mu_x(\Lambda_\Gamma^r) = \mu_x(\Lambda_\Gamma)$ entonces Γ es de tipo divergente.

Si Γ es de tipo divergente entonces G es conservativo, es decir que $\nu^\mu(C^G) > 0$ entonces

$$(\mu_x \otimes \mu_x)(\partial M \times \Lambda_\Gamma^r - \Delta) > 0$$

Y entonces $\mu_x(\Lambda_\Gamma^r) > 0$, por lo que $\mu_x(\Lambda_\Gamma^r) = \mu_x(\partial M)$. \square

Del teorema 5.8 podemos concluir que los grupos cocompactos son de tipo divergente ya que M/Γ es compacto.

A. Apéndice: Espacios Hiperbólicos

Consideramos el conjunto $\mathbb{H}^n = \{z = (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in \mathbb{R}^n / t > 0\}$. Escribiremos $z = (x, t)$ y llamaremos altura de z a t . Ponemos en \mathbb{H}^n una métrica Riemanniana, a la que llamamos métrica de Poincaré, de la siguiente manera

$$\rho_{(x,t)}(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{t^2}$$

Llamamos a \mathbb{H}^n el espacio hiperbólico de dimensión n . Este es un ejemplo de variedad completa, simplemente conexa y con curvatura negativa, más precisamente con curvatura constante -1 , la prueba de esto último puede leerse en [6]. Al igual que en el caso de dimensión 2 nos interesará ver \mathbb{H}^n como subconjunto de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong S^n$ la compactificación del espacio euclídeo.

A.1. Transformaciones de Möbius n -dimensionales

Definición A.1. Definimos el grupo de Möbius $(n-1)$ -dimensional \mathbb{M}^n como el grupo de difeomorfismos de \mathbb{R}^n generado por:

- I. Traslaciones: $(x, t) \mapsto (x + a, t)$ con $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\infty \mapsto \infty$.
- II. Rotaciones: $(x, t) \mapsto (r(x), t)$ con $r \in \mathbb{O}^{n-1}$ y $\infty \mapsto \infty$.
- III. Homotecia: $z \mapsto \lambda z$ con $\lambda > 0$ y $\lambda \neq 1$. $\infty \mapsto \infty$.
- IV. Inversión: $z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$, $0 \mapsto \infty$ y $\infty \mapsto 0$.

Donde \mathbb{O}^{n-1} es el grupo de operadores ortogonales en \mathbb{R}^{n-1} .

Observación A.2. \mathbb{H}^n es invariante por \mathbb{M}^n .

Proposición A.3. \mathbb{M}^n actúa en \mathbb{H}^n por isometrías.

Demostración. Alcanza con ver que los generadores son isometrías.

El diferencial de una traslación es la identidad, además la traslación preserva la altura, por lo tanto es claro que es una isometría. Algo similar es lo que pasa con la rotación, esta es lineal por lo que es igual a su diferencial. Además es ortogonal y preserva altura, por lo tanto es una isometría.

Veamos que las homotecias actúan por isometrías. Sea $\lambda > 0, \lambda \neq 1$ y f la homotecia por λ , como es lineal f es igual a su diferencial en cualquier punto. Verifiquemos que es una isometría:

$$\rho_{f(x,t)}(f(v), f(w)) = \frac{\langle \lambda v, \lambda w \rangle}{(\lambda t)^2} = \rho_{(x,t)}(v, w)$$

Veamos ahora que la inversión f es una isometría, primero hallamos el diferencial. Consideremos $f = (f_1, \dots, f_n)$ y $x = (x_1, \dots, x_n)$, entonces tenemos

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_k}(x) = \frac{\delta_{km}}{|x|^2} - \frac{2x_k x_m}{|x|^4}$$

donde $\delta_{km} = 1$ si $k = m$ y $\delta_{km} = 0$ si $k \neq m$. Luego si $v = (v_1, \dots, v_n)$ y $w = (w_1, \dots, w_n)$ son dos puntos de \mathbb{R}^n entonces

$$\rho_{f(x)}(d_x f(v), d_x f(w)) = \frac{\langle d_x f(v), d_x f(w) \rangle |x|^4}{x_n^2}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \langle d_x f(v), d_x f(w) \rangle &= \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta_{i1}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_1}{|x|^4} \right) v_i, \dots, \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta_{in}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_n}{|x|^4} \right) v_i \right), \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta_{i1}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_1}{|x|^4} \right) w_i, \dots, \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta_{in}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_n}{|x|^4} \right) w_i \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{v_1}{|x|^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{2x_i x_1}{|x|^4} \right) v_i, \dots, \frac{v_n}{|x|^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{2x_i x_n}{|x|^4} \right) v_i \right), \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{w_1}{|x|^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{2x_i x_1}{|x|^4} \right) w_i, \dots, \frac{w_n}{|x|^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{2x_i x_n}{|x|^4} \right) w_i \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(v_1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{2x_i x_1}{|x|^2} \right) v_i, \dots, v_n - \sum_{i=1}^n \left(\frac{2x_i x_n}{|x|^2} \right) v_i \right), \right. \\ &\quad \left. \left(w_1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{2x_i x_1}{|x|^2} \right) w_i, \dots, w_n - \sum_{i=1}^n \left(\frac{2x_i x_n}{|x|^2} \right) w_i \right) \right\rangle > \frac{1}{|x|^4} \\ &= \frac{1}{|x|^4} \left(\langle v, w \rangle - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{2x_i x_k}{|x|^2} \right) w_i v_k - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{2x_i x_k}{|x|^2} \right) v_i w_k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{4x_i x_k x_j^2}{|x|^4} w_i v_k \right) \\ &= \frac{1}{|x|^4} \left(\langle v, w \rangle - 4 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i x_k}{|x|^2} \right) w_i v_k + 4 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{x_i x_k (x_1^2 + \dots + x_n^2)}{|x|^4} w_i v_k \right) \\ &= \frac{1}{|x|^4} \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

Entonces $\rho_{f(x)}(d_x f(v), d_x f(w)) = \frac{\langle v, w \rangle}{x_n^2} = \rho_x(v, w)$. \square

Definición A.4. Sea f es un difeomorfismo de $\bar{\mathbb{R}}^n$. Decimos que f es *conforme* en $p \in \mathbb{R}$ el diferencial $D_p f$ es un múltiplo escalar de una matriz ortogonal. f es conforme en ∞ si ff es conforme en 0 donde j es la inversión, y f es conforme en $f^{-1}(\infty)$ si ff lo es. Decimos que f es conforme si lo es en todo punto.

Es claro que si f es conforme entonces preserva ángulos, la siguiente propiedad muestra que al igual que los elementos del grupo de Möbius preservan ángulos como lo hacen las transformaciones de Möbius clásicas.

Proposición A.5. *Los elementos del grupo de Möbius son conformes.*

Demostración. Basta probarlo para los generadores.

Las traslaciones, rotaciones y homotecias son claramente conformes en \mathbb{R}^n . En la proposición anterior se ve que la inversión tiene diferencial múltiplo de una matriz ortogonal en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, además es evidente que la inversión es conforme en 0 y ∞ . Si $f(\infty) = \infty$ entonces f es conforme en ∞ si ffj lo es en cero. En el caso de f es una rotación tenemos que conmuta con j por lo que f es conforme en ∞ si lo es en cero. Para f homotecia tenemos lo siguiente:

$$jffj(z) = jf\left(\frac{z}{|z|^2}\right) = j\left(\frac{\lambda z}{|z|^2}\right) = \frac{\lambda z}{|z|^2} \frac{|z|^4}{\lambda^2 |z|^2} = \frac{z}{\lambda}$$

Es decir que la conjugada de una homotecia por la inversión es otra homotecia y por lo tanto conforme en cero.

Solo falta ver que las traslaciones son conformes en ∞ . Sea $g(x, t) = (x + a, t)$ con $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$, queremos ver que jgj es conforme en cero. Sea $g_k(x, t) = (x + (0, \dots, 0, a_k, 0, \dots, 0), t)$, tenemos que $g = g_1 g_2 \dots g_{n-1}$ y entonces $jgj = jg_1 j \dots jg_{n-1} j$ por lo que alcanza probar que $jg_k j$ es conforme para todo k .

Sea P_i el plano generado por e_k y e_n vectores de la base canónica de \mathbb{R}^n . Luego g_k y j dejan P_k invariante. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ la transformación lineal ortogonal que lleva $\{e_k, e_n\}$ en $\{1, i\}$, la función $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h(\zeta) = Tjg_k j(T|_{P_k})^{-1}(\zeta) = \frac{\zeta}{a_k \zeta + 1}$$

tiene derivada 1 en cero y por lo tanto el diferencial de $jgj|_{P_k}$ es la identidad en cero. Como el mapa actúa como la identidad en las otras direcciones tenemos que $D_0(jg_k j) = Id$ y entonces g es conforme en ∞ . \square

Podemos considerar la acción de \mathbb{M}^n en $\bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ ya que el borde de \mathbb{H}^n es invariante por el grupo. De esta forma \mathbb{M}^3 es el grupo generado por las transformaciones de Möbius en $\bar{\mathbb{C}}$ y la conjugación.

Hay una inyección natural de \mathbb{M}^n en \mathbb{M}^{n+1} . Si g es la traslación por $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$ en \mathbb{M}^n podemos definir g' en \mathbb{M}^{n+1} como la traslación por $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$.

Si es una rotación $(x, t) \mapsto (r(x), t)$ entonces g' es $(x, x_n, t) \mapsto (r(x), x_n, t)$. Para g homotecia o inversión la definición de g' es la obvia.

Podemos ver que la restricción de g' al borde de \mathbb{H}^{n+1} es g . Además g' preserva \mathbb{H}^{n+1} . También podemos decir que $g \neq Id \Rightarrow g' \neq Id$ y además $(Id)' = Id$ ya que es la identidad en \mathbb{R}^n y preserva \mathbb{H}^{n+1} .

A.2. k-esferas

Definición A.6. Una k -esfera en $\bar{\mathbb{R}}^n$ es una esfera de dimensión k en \mathbb{R}^n o un plano de dimensión k unido a ∞ . Una 0-esfera es simplemente un conjunto $\{x, y\}$.

Proposición A.7. Los elementos de \mathbb{M}^n preserva la familia de k -esferas en $\bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ para $k = 0, \dots, n-2$.

Demostración. Nuevamente lo probaremos para los generadores, además es suficiente probarlo para $k = n-2$ ya que para dimensiones menores las esferas son intersecciones de esferas de dimensión mayor.

Por ser isometrías las traslaciones y rotaciones preservan en \mathbb{R}^{n-1} preservan hiperplanos e hiperesferas. Es fácil ver que las homotecias también. Falta probarlo para la inversión.

Un hiperplano que pasa por el origen es el conjunto de puntos $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ que satisfacen $\sum_{1 \leq m \leq n-1} a_m x_m = 0$, este es mapeado por la inversión en si mismo. Un hiperplano cualquiera es determinado por la ecuación

$$\sum_{1 \leq m \leq n-1} a_m x_m = b \text{ con } b \neq 0$$

es mapeado por la inversión en la hiperesfera determinada por la ecuación

$$b \sum_{1 \leq m \leq n-1} x_m^2 - \sum_{1 \leq m \leq n-1} a_m x_m = 0.$$

Una hiperesfera que pasa por el origen determinada por

$$\sum_{1 \leq m \leq n-1} (x_m - a_m)^2 = r^2$$

donde

$$\sum_{1 \leq m \leq n-1} a_m^2 = r^2$$

es mapeada en el hiperplano

$$\sum_{1 \leq m \leq n-1} a_m x_m = \frac{1}{2r}$$

y la hiperesfera dada por

$$\sum_{1 \leq m \leq n-1} (x_m - a_m)^2 = r^2$$

es mapeada en la hiperesfera determinada por

$$(r^2 - \sum_{1 \leq m \leq n-1} a_m^2)|x|^2 + 2 \sum_{1 \leq m \leq n-1} a_m x_m - 1 = 0$$

□

Definición A.8. Un *nido* o *conjunto anidado de esferas* en $\bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ es un conjunto de esferas $S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_{n-2}$ donde S_k es una esfera de dimensión m y divide a S_{k+1} en dos discos. Decimos que el conjunto está *orientado* si $\forall k \in 0, \dots, n-2$ uno de los discos es elegido como el hemisferio positivo, además uno de los puntos de S_0 es elegido como positivo y el otro como negativo. Vamos a denominar *par orientado* a un par (\mathbb{S}, x) tal que $\mathbb{S} = \{S_0, \dots, S_{n-2}\}$ es un conjunto anidado de esferas orientado en $\bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ y x un punto en el hemisferio positivo de $S_1 - S_0$. Decimos que $f \in \mathbb{M}^n$ es un isomorfismo entre los pares orientados (\mathbb{S}, x) y (\mathbb{T}, y) si $f(S_k) = T_k$ y $f(x) = y$.

Observamos que $\{0, \infty\} \subset \bar{\mathbb{R}} \subset \dots \subset \bar{\mathbb{R}}^{n-2}$ es un conjunto anidado de esferas en $\bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ al que llamamos \mathbb{E} . Es claro que lo podemos orientar eligiendo \mathbb{H}^k como el hemisferio positivo de $\bar{\mathbb{R}}^k$ y el punto 0 como positivo. Vamos a ver que dados dos pares orientados existe un único isomorfismo entre ellos.

Lema A.9. *Sea P es un plano en \mathbb{R}^n . Si $f : P \rightarrow P$ es un difeomorfismo conforme que fija el cero entonces es una rotohomotécia eventualmente compuesta con una simetría axial.*

Demostración. Sea $T : P \rightarrow \mathbb{C}$ un operador ortogonal, luego $\tilde{f} = TfT^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es un difeomorfismo conforme. Si f preserva orientación entonces es holomorfo, si no lo componemos con la conjugación y tenemos que esta composición es holomorfa. Sabemos que los automorfismos de \mathbb{C} son polinomios de grado 1, como además fija el 0 tenemos que es una rotohomotecia. Luego si \tilde{f} es holomorfa entonces f es una rotohomotecia, si no f es una homotecia compuesta con una simetría axial. □

Usaremos el lema anterior para probar el siguiente:

Lema A.10. *Si $f \in \mathbb{M}^n$ es un isomorfismo de pares orientados de $(\mathbb{E}, 1)$ en si mismo entonces g es la identidad.*

Demostración. Si $n = 2$ entonces como f fija $\{0, 1, \infty\}$ y luego f es la identidad.

Ahora supongamos $n \geq 3$. Vamos a estudiar el diferencial $d_0 f$. Como f preserva \mathbb{R} el vector $(1, 0, \dots, 0)$ es un vector propio, además debe estar asociado a un valor propio positivo porque preserva la orientación. Como f preserva \mathbb{R}^2 y

el diferencial en el origen preserva ángulos entonces $(0, 1, 0, \dots, 0)$ es un vector propio que además tiene valor propio positivo porque d_0f preserva orientación. Continuando podemos ver que d_0f es diagonal con entradas positivas. Como f es conforme entonces d_0f debe ser un múltiplo positivo de la identidad.

Tenemos que $f(0) = 0$ y $f(\infty) = \infty$, luego f preserva la familia de rectas a través del origen ya que estas son 1-esferas. Se puede ver que además f preserva cada rayo ya que d_0f es un múltiplo positivo de la identidad, entonces preserva la familia de hiperesferas euclídeas centradas en cero. Como $f(1, 0, \dots, 0) = (1, 0, \dots, 0)$ entonces f preserva S^{n-2} y como preserva cada rayo tenemos que $f|_{S^{n-2}}$ es la identidad.

Si P es un plano por $0, 1$ y ∞ tenemos que $f(P)$ también lo es ya que f preserva las 2-esferas y fija ∞ , además $f(P)$ pasa por 0 . Como $S^{n-1} \cap P$ es un conjunto de puntos fijos de f entonces $f(P) = P$. Usando el lema anterior y que $f|_P$ tiene un círculo de puntos fijos además de 0 y ∞ entonces $f|_P$ es la identidad. Concluimos entonces que f es la identidad. \square

Lema A.11. *Dado un par orientado (\mathbb{S}, x) existe un único elemento del grupo de Möbius n -dimensional f que es un isomorfismo de pares orientados entre (\mathbb{S}, x) y $(\mathbb{E}, 1)$.*

Demostración. Si $n = 2$ consideramos $S_0 = \{y, z\}$ donde y es el positivo y z es negativo, es claro que podemos encontrar $f \in \mathbb{M}^2$ que cumple $f(y) = 0$, $f(z) = \infty$ y $f(x) = 1$.

Supongamos que $n \geq 3$, si S_{b-2} es una hiperesfera euclídea en \mathbb{R}^{n-1} hacemos lo siguiente:

1. Lo trasladamos para que pase por 0 .
2. Invertimos para obtener un hiperplano.
3. Trasladamos nuevamente para que el hiperplano pase por 0 .
4. Rotamos para llevarlo a $\bar{\mathbb{R}}^{n-2}$.
5. Si el hemisferio positivo de $\bar{\mathbb{R}}^{n-1} - S_{n-2}$ no es llevado a \mathbb{H}^{n-1} entonces componemos con una simetría $(x, t) \mapsto (x, -t)$ con $x \in \bar{\mathbb{R}}^{n-2}$.

Si S_{n-2} es un hiperplano euclídeo entonces empezamos en el paso 3. Luego de esto tenemos $f_1 \in \mathbb{M}^n$ tal que $f_1(S_{n-2}) = \bar{\mathbb{R}}^{n-2}$ y lleva el hemisferio positivo de $\bar{\mathbb{R}}^{n-1} - S_{n-2}$ en \mathbb{H}^{n-1} . De la misma forma que antes podemos encontrar $f_2 \in \mathbb{M}^{n-1}$ que mapea $f_1(S_{n-2})$ en $\bar{\mathbb{R}}^{n-3}$ y el hemisferio positivo de $f_1(S_{n-2}) - g_1(S_{n-3})$ en \mathbb{H}^{n-2} . Podemos extender f_2 a \mathbb{M}^n y luego la composición f_2f_1 lleva S_{n-2} en $\bar{\mathbb{R}}^{n-2}$, S_{n-3} en $\bar{\mathbb{R}}^{n-3}$ y los hemisferios positivos de $\bar{\mathbb{R}}^{n-1} - S_{n-2}$ y $S_{n-2} - S_{n-3}$ en \mathbb{H}^{n-1} y \mathbb{H}^{n-2} respectivamente.

Continuamos así hasta entonces $f' \in \mathbb{M}^n$ que mapea S_k en $\bar{\mathbb{R}}^k$ para $k \geq 2$ y para $k > 2$ lleva el hemisferio positivo de $S_k - S_{k-1}$ en \mathbb{H}^k (y $\bar{\mathbb{R}}^{n-1} - S_{n-2}$ en \mathbb{H}^{n-1}). Es claro además que podemos encontrar en $\bar{\mathbb{R}}^2 = \bar{\mathbb{C}}$ $g \in \mathbb{M}^3$ que lleva $f'(S_0)$ en $\{0, \infty\}$ respetando orientación, y x en 1. Esta g también mapea $f'(S_1)$ en $\bar{\mathbb{R}}$, si es necesario componemos con una conjugación para que lleve el hemisferio positivo de $f'(S_2) - f'(S_1)$ en \mathbb{H}^2 . Luego g a \mathbb{M}^n y tenemos que gf' es el mapa buscado. \square

Proposición A.12. *Dados dos pares orientados (\mathbb{S}, x) y (\mathbb{T}, y) existe un único isomorfismo entre ellos.*

Demostración. Sabemos que existen únicos f y g isomorfismos entre cada uno de estos pares y $(\mathbb{E}, 1)$, luego fg^{-1} es el isomorfismo que buscamos.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{S}, x) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (\mathbb{T}, y) \\ \downarrow & \swarrow & \\ (\mathbb{E}, 1) & & \end{array}$$

Si h es un isomorfismo entre (\mathbb{S}, x) y (\mathbb{T}, y) entonces hace conmutar el diagrama anterior y por lo tanto ghf^{-1} es un isomorfismo y por el lema A.10 debe ser la identidad por lo tanto fg^{-1} es el único isomorfismo entre (\mathbb{S}, x) y (\mathbb{T}, y) . \square

Proposición A.13. *Sea S una hiperesfera en $\bar{\mathbb{R}}^{n-1}$. Luego existe un único $f \in \mathbb{M}^n$ tal que $f|_S = Id$ y que intercambia las dos partes positivas de $\bar{\mathbb{R}}^{n-1} \setminus S$. Llamamos a f reflexión en S .*

Demostración. La transformación $(x, t) \rightarrow (x, -t)$ es una reflexión en $\bar{\mathbb{R}}^{n-2}$. Sabemos que existe un elemento de \mathbb{M}^n que lleva S en $\bar{\mathbb{R}}^{n-2}$. Luego existe una reflexión en S que resulta de conjugar la primera por la segunda. La unicidad se puede deducir de la proposición anterior eligiendo un nido orientado $S_0, \dots, S_{n-2} = S$. \square

Observación A.14. *Si j es la reflexión en $\bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ entonces j conmuta con todos los elementos de \mathbb{M}^n porque el conjugado de j es siempre una reflexión en $\bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ y como vimos anteriormente ésta es única.*

Veamos ahora como consecuencia de lo anterior una propiedad importante de la acción de los grupos de Möbius.

Proposición A.15. *El estabilizador de \mathbb{H}^n en \mathbb{M}^{n+1} es \mathbb{M}^n .*

Demostración. Es fácil ver que $\mathbb{M}^n \subset \text{Stab}_{\mathbb{M}^{n+1}}(\mathbb{H}^n) = \mathbb{G}$. Si $g \in \mathbb{G}$ por la proposición ?? existe $h \in \mathbb{M}^n$ tal que $h|_{\bar{\mathbb{R}}^{n-1}} = g|_{\bar{\mathbb{R}}^{n-1}}$. Luego $k = gh^{-1}$ es la identidad en $\bar{\mathbb{R}}^{n-1}$, y preserva \mathbb{H}^n . Por la unicidad de la proposición A.13 k es la identidad en $\bar{\mathbb{R}}^n$. Luego \mathbb{M}^{n+1} . \square

A.3. Geometría de \mathbb{H}^n

En esta sección estudiaremos la geometría de \mathbb{H}^n . Para esto observaremos que \mathbb{H}^n es homeomorfo por un elemento de \mathbb{M}^{n+1} a \mathbb{B}^n la bola de centro 0 y radio 1 en \mathbb{R}^n .

Este mapa lo podemos construir explícitamente, comenzamos con $z \mapsto \frac{z}{2}$, seguimos con la traslación $(x, t) \mapsto (x, t + \frac{1}{2})$, luego hacemos una inversión. La imagen de \mathbb{B}^n por esta composición es el semiespacio de \mathbb{R}^n dado por $t > 1$ donde t es la última coordenada, por lo que al componer con $(x, t) \mapsto (x, t - 1)$ nos queda \mathbb{H}^n . Llamamos $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a la inversa de esta composición, es claro que q se extiende a un elemento de \mathbb{M}^{n+1} en \mathbb{R}^{n+1} .

Definición A.16. El grupo de isometrías hiperbólicas en \mathbb{B}^n es definido como $\mathbb{P}^n = q\mathbb{M}^n q^{-1}$.

Observación A.17. \mathbb{P}^n es el estabilizador de \mathbb{B}^n en \mathbb{M}^{n+1} . La inclusión de \mathbb{M}^n en \mathbb{M}^{n+1} induce una inclusión de \mathbb{P}^n en \mathbb{P}^{n+1} .

Proposición A.18. \mathbb{P}^n actúa transitivamente en \mathbb{B}^n .

Demostración. Observamos que $\mathbb{O}^n \subset \mathbb{P}^n$ ya que sabemos que los elementos de \mathbb{P}^n dejan invariante a \mathbb{B}^n y \mathbb{P}^n es el estabilizador de \mathbb{B}^n . Por lo tanto es suficiente con probar que podemos mapear cualquier punto de la forma $(x, 0, \dots, 0)$, $x > 0$ al origen.

Para $n = 1$ la transformación $p(t) = \frac{t-x}{1-tx}$ cumple con esto. La extensión de esta transformación de \mathbb{P}^1 a \mathbb{P}^n por medio de sucesivas extensiones como las de antes preserva \mathbb{B}^n y mapea $(x, 0, \dots, 0)$ al origen. \square

Proposición A.19. \mathbb{P}^n actúa transitivamente en el fibrado tangente unitario de \mathbb{B}^n .

Demostración. Sea $(x, v) \in T^1\mathbb{B}^n$. Existe $p \in \mathbb{O}^n$ que lleva x en 0, además sea $r \in \mathbb{O}^n$ que lleva $w = D_x p(v)$ en e_1 . Entonces pq lleva (x, v) en $(0, e_1)$, de lo que se deduce la transitividad. \square

Observación A.20. Es claro a partir de lo anterior que \mathbb{M}^n actúa transitivamente en $T^1\mathbb{H}^n$.

Proposición A.21. En \mathbb{H}^n las geodésicas son los arcos de circunferencia ortogonales al borde.

Demostración. Sean x y x' dos puntos en \mathbb{H}^n , usando la transitividad de \mathbb{M}^n en el fibrado tangente podemos suponer $x = (0, \dots, 0, 1)$ y que x' cae en la misma semirrecta vertical que x con altura mayor, es decir $x' = (0, \dots, 0, a)$ con $a > 1$. Si $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s))$ es cualquier curva de x a x' parametrizada por el intervalo unitario. Calculamos la longitud hiperbólica de α :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\alpha_1'(s)^2 + \dots + \alpha_n'(s)^2}}{\alpha_n(s)} ds \geq \int_0^1 \frac{\alpha_n'(s)}{\alpha_n(s)} ds$$

La expresión de la derecha es la longitud hiperbólica del segmento Euclídeo que une a x con x' , la igualdad se da solo en el caso de que $\alpha'_k(s) = 0$ pra todo $k \neq 0$, es decir que un segmento geodésico es de esta forma. Luego por la transitividad de la acción de \mathbb{M}^n tenemos la tesis. \square

Proposición A.22. *Sea $x \in \mathbb{H}^n$ y L un subespacio de dimensión k de $T_x\mathbb{H}^n$. Entonces existe un único k -plano hiperbólico que pasa por x cuyo espacio tangente en x es L .*

Teorema A.23. \mathbb{M}^n es el grupo de isometrías de \mathbb{H}^n .

Demostración. Vamos a probarlo para \mathbb{B}^n . Sea g una isometría de \mathbb{B}^n . Si $g(0) \neq 0$ luego existe un elemento $f_1 \in \mathbb{P}^n$ con $f_1g(0) = 0$. Como f_1g es una isometría preserva las hipersferas centradas en el origen de donde sigue que el diferencial en el origen preserva el largo de los vectores tangentes, es decir que $D_0(f_1g)$ es ortogonal. Existe un elemento $f_2 \in \mathbb{O}^n$ con $D_0(f_2f_1g) = id$. La isometría f_2f_1g preserva los rayos que salen del origen y la esfera centrada en el origen, luego es la identidad. En conclusión $g = f_1^{-1}f_2 \in \mathbb{P}^n$. \square

De la demostración anterior se deducen los siguientes corolarios:

Corolario A.24. *El estabilizador del origen en \mathbb{P}^n es \mathbb{O}^n .*

Corolario A.25. *Si $g \in \mathbb{P}^n$ fija $(0, 1) \in T^1\mathbb{H}^n$ entonces es la identidad.*

Por último vamos a calcular la distancia visual en el caso del espacio hiperbólico.

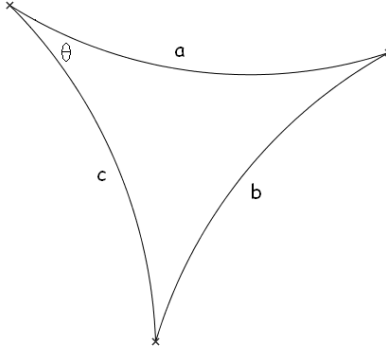
Proposición A.26. *Sean $x \in \mathbb{H}^n$, $\xi, \eta \in \partial M$ tal que el ángulo formado por los rayos geodésicos que unen x con ξ y η es θ . Entonces*

$$d_x(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}}$$

Para esto usaremos los siguientes resultados:

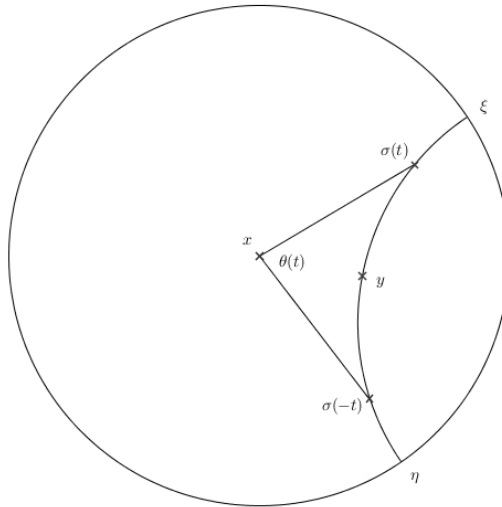
Proposición A.27 (Ley del coseno hiperbólico). *Dado un triangulo como el de la figura en \mathbb{H}^n tenemos la siguiente igualdad:*

$$\cosh(b) = \cosh(a)\cosh(c) - \sinh(a)\sinh(c)\cos(\theta)$$



Demostración(Proposición A.26). Sea σ una geodésica de límites ξ y η , y el punto de esta geodésica que minimiza la distancia a x , podemos parametrizar σ de forma tal que $\sigma(0) = y$. El producto de Gromov es

$$(\xi|\eta) = \frac{1}{2}(b_\xi(x, y) + b_\eta(x, y)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(x, \sigma(t)) - t$$



Tomemos $r = d(x, \sigma(t))$, pongamos el ángulo $\theta(t)$ en función de r , para no complicar la notación pongamos $\theta(r)$. Calculemos el tercer lado del triángulo en función de r usando la ley del coseno hiperbólico de la siguiente forma:

$$r = \operatorname{arcosh}(\cosh^2(a) - \sinh^2(a)\cos(\theta(r))) = \operatorname{arcosh}(\cosh^2(a) - (1 - \tanh^2(r)\cos(\theta(r))))$$

Observamos que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \operatorname{arcosh}(r) - \log(r) = \log(2)$ ya que $\operatorname{arcosh}(r) = \log(r + \sqrt{r^2 - 1})$, luego

$$\begin{aligned} (\xi|\eta)_x &= \lim_{r \rightarrow +\infty} r - \frac{1}{2} \operatorname{arcos}(\cosh^2(r)(1 - \tanh^2(r)\cos(\theta))) \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} r - \frac{1}{2} \log(\cosh^2(r)(1 - \tanh^2(r)\cos(\theta))) - \frac{1}{2} \log \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} r - \log(\cosh(r)) - \frac{1}{2} \log(1 - \tanh^2(r)\cos(\theta)) - \frac{1}{2} \log \end{aligned}$$

Observemos lo siguiente:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r - \log(\cosh(r)) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \log(e^r) - \log\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2}\right) = \log(2)$$

Y por lo tanto

$$(\xi|\eta)_x = \frac{1}{2} \log(2) - \frac{1}{2} \log(1 - \cos(\theta)) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{2}{1 - \cos(\theta)}\right)$$

Es decir que

$$d(\xi, \eta) = e^{-\frac{1}{2} \log\left(\frac{2}{1 - \cos(\theta)}\right)} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}}$$

□

De esto se concluye que d_0 induce la topología usual en el borde y luego esto también es verdad para d_x para todo $x \in \mathbb{H}^n$.

Referencias

- [1] W. Ballman; *Lectures on spaces with non positive curvature*, Birkhäuser, 1995.
- [2] M. Bourdon; Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(-1)-espace. *L'Enseignement Mathématique* 41 (1995), 63-102.
- [3] M. Bridson, A. Häfliger; *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer, 1999.
- [4] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov; *A course in metric geometry*, American Mathematical Society, 2001.
- [5] M. Coornaert; Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov, *Pacific Journal of Mathematics* 159 (1993), 241-270.
- [6] M. Do Carmo; *Geometria Riemanniana*, IMPA, 1988.
- [7] P. Eberlein, B. O'Neill; Visibility manifolds. *Pacific Journal of Mathematics* 46 (1973), 45-109.
- [8] H. Federer; *Geometric Measure Theory*, Spriner-Verlag, 1969.
- [9] G. Folland; *Real Analysis: modern techniques and their aplications*, Wiley, 1999.
- [10] E. Ghys, P. de la Harpe; *Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov*. Progress in Mathematics 83, 1990.
- [11] B. Maskit; *Kleinian Groups*, Springer, 1988.
- [12] P. Mattila; *Geometry of Sets and Measure in Euclidean Spaces*, Cambridge University Press, 1995.
- [13] S.J. Patterson; The limit set of a Fuchsian group, *Acta Mathematica* 136 (1976), 241-273.
- [14] J.F. Quint; *An overview of Patterson-Sullivan theory*, notas de curso disponible en <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~jquint/>.
- [15] D. Sullivan; The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, *Publications mathématiques de l'I.H.É.S* 50 (1979), 171-202.
- [16] D. Sullivan; Disjoint spheres, approximation by imaginary quadratic numbers, and the logarithm law for geodesics, *Acta Mathematica* 149 (1982), 215-237.
- [17] C. Yue; The ergodic theory of discrete isometry groups on manifolds of variable negative curvature, *Transactions of the American Mathematical Society* 348 (1996), 4965-5005.