

Trabajo Monográfico
Billares planos
Construcciones Generales e Hiperbolicidad de Billares Dispersores

Carolina Puppo
Orientador: Dr. Roberto Markarian

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

*A mis queridos abuelos
Gladys y Máximo; Gloria y Enrique.*

Agradecimientos.

Este trabajo es un esfuerzo en el cual participaron varias personas leyendo, opinando, corrigiendo, teniéndome paciencia, acompañando en los momentos de crisis. Me gustaría por lo menos que algunas de las que tuvieron que ver les llegaré un gesto de mi parte.

En primer lugar le quiero agradecer a Mámá por su amor, su apoyo, su dedicación y por haber permitido que retomará la carrera. ¡Gracias por creer en mi, te quiero! A mi hermano Nachito por la amistad, complicidad y por haberme aguantado. Love u bro! A Pápa por confiar en mi y por el cariño de siempre. A mis abuelos Gloria, Enrique, Gladys y Máximo por haber sido los mejores ejemplos de amor, trabajo y constancia. A Laura por prestarme la computadora y por la nueva amistad que hemos ido formando.

Le quiero agradecer especialmente a mi orientador, Roberto por aceptarme para realizar este trabajo bajo su dirección. Por su apoyo y confianza en mi trabajo y su capacidad para guiar mis ideas. A Martín y Matilde que leyeron y escucharon pacientemente mi trabajo y me hicieron sugerencias que me ayudaron a entender más de que se trata todo esto. Al Maqueta porque me pasó el artículo de Halpern. A Jules, el Frodo, Rambo y Adriana por ser buenos amigos haber estado al firme cuando los necesite: ¡muchas gracias, los quiero!, también porque escucharon y corrigieron varios de los argumentos que están en este trabajo. Al Gordo porque siempre se hace tiempo para explicarme algo, pasarme un artículo o darme un consejo.

A mis amigas Vic, Ani, Vale, Vicky, Iael y Nadia por tantas tardes y noches suspendidas por la facultad y a pesar de eso siempre haberme apoyado. A mi amigo Patricio por ser como es y por los lindos veranos que pasamos en Valizas. A Marti, Nacho, y Santi mis alumnos por esas tardes en la Uno y por hacerme sentir hoy orgullosa de ellos.

Índice general

1. Introducción y Contenidos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Contenidos	7
1.2.1. Capítulo 2	7
1.2.2. Capítulo 3	8
1.2.3. Capítulo 4	9
1.2.4. Capítulo 5	9
2. Construcciones Básicas	11
2.1. Mesa de Billar y Dinámica.	11
2.1.1. Mesa del Billar	11
2.1.2. Dinámica en la mesa de billar.	14
2.2. Dos descripciones de la Dinámica	15
2.2.1. El mapa de Poincaré.	15
2.2.2. El flujo del billar	16
2.2.3. El mapa colisión.	17
2.2.4. Involución	19
2.3. Ejemplos de billares: El cuadrado, el círculo y la elipse.	20
2.3.1. El cuadrado	20
2.3.2. El círculo y la elipse	22
3. Dinámica del billar.	28
3.1. Condiciones sobre la mesa de billar para la existencia del flujo del billar. 28	
3.1.1. Billar \mathcal{C}^2 con una acumulación en los tiempo de choques.	29
3.1.2. Teorema de Halpern	33
3.2. Coordenadas y Regularidad del Flujo del Billar	40
3.2.1. Coordenadas del Flujo	40
3.2.2. Regularidad del flujo	41
3.3. Derivada y medida invariante del mapa colisión del billar.	43
3.3.1. Derivada del mapa colisión	43

3.3.2.	Medida invariante del mapa colisión.	47
4.	Exponentes de Lyapunov	51
4.1.	Exponentes de Lyapunov, Hiperbolicidad y Teorema de Oseledets . .	51
4.1.1.	Exponentes de Lyapunov para el mapa del billar	53
4.1.2.	Un billar de clase \mathcal{C}^1 que no verifica el Teorema de Oseledets. .	56
4.1.3.	Exponentes de Lyapunov para el Flujo.	60
5.	Hiperbolicidad de Billares Dispersores	65
5.1.	Herramientas para el estudio de la hiperbolicidad.	65
5.1.1.	Coordenadas de Jacobi	65
5.1.2.	Construcción de un frente de onda.	67
5.1.3.	El Jacobiano en las rectas tangentes.	70
5.1.4.	Rectas tangentes en el espacio colisión.	72
5.1.5.	Conos para probar hiperbolicidad.	74
5.2.	Hiperbolicidad de Billares Dispersores.	75
5.2.1.	Frente de ondas dispersores.	76

Capítulo 1

Introducción y Contenidos

1.1. Introducción

Los billares planos recuerdan al clásico juego del billar o pool. Una partícula puntual se mueve con velocidad constante igual a uno en un conjunto del plano, al cual llamaremos mesa, y se refleja elásticamente cada vez que choca con la frontera del mismo, siempre que esté definida la tangente en el punto de choque. Son sistemas que proveen un marco para entender los sistemas dinámicos en general. Existe un gran rango de comportamientos posibles de los billares desde sistemas integrables (los más ordenados) hasta sistemas de Bernoulli (los más desordenados) pasando por billares donde conviven ambos comportamientos. Los del primer tipo se observan en billares convexos donde usando teoría KAM se pueden determinar ciertas regiones donde el mapa es conjugado a una rotación en el disco. La teoría de los billares caóticos nació en 1970 con la publicación de *Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards* [31] de mano de Y.G. Sinai. En dicho artículo Sinai probó que los billares que llevan su nombre son hiperbólicos y ergódicos.

En el trabajo mencionado, Sinai usó las técnicas desarrolladas por Hopf y Hedlund para el estudio de la hiperbolicidad uniforme de funciones diferenciables, adaptándolas a mapas diferenciables con singularidades. Dicho artículo no fue solamente importante por las técnicas allí desarrolladas y el resultado probado en el mismo, sino también por haber modelado un sistema mecánico que verificaba la Hipótesis enunciada por el científico austríaco Ludwig Boltzmann en la última década del Siglo XIX para establecer los fundamentos de la mecánica estadística.

Originariamente la mecánica estadística surge del trabajo de Maxwell y Boltzmann sobre la teoría cinética de los gases. El problema central que tiene por objeto es la predicción de propiedades observables de un sistema formado por un gran número de cuerpos, estudiando propiedades estadísticas del comportamiento de sus constituyentes individuales (que podrán ser átomos, moléculas, fotones, etc). La

mecánica estadística aparece como el eslabón entre las ramas de la ciencia que estudian problemas desde el punto de vista macroscópico y lo tratan como un continuo, por ejemplo la termodinámica, y las que los estudian de manera microscópica y los tratan de manera discreta, por ejemplo la mecánica cuántica.

En este ámbito, uno de los problemas centrales consiste en justificar la introducción de probabilidades en un contexto determinista. Para dar respuesta a este problema L. Boltzmann introdujo dicha hipótesis ergódica. La importancia de la hipótesis en cuestión es que provee un vínculo entre las probabilidades usadas en la teoría de los gases y las de la mecánica estadística, la hipótesis establece la relación entre teoría y experimento. Además se deducen las leyes de la termodinámica a partir de ella. A continuación se enunciará la Hipótesis Ergódica¹ de Boltzmann en una versión² moderna.

Hipótesis Ergódica de Boltzmann *Para sistemas con muchas partículas interactuando en equilibrio, las medias espaciales están cerca de las medias temporales.*

Por sistemas en equilibrio nos referimos a aquellos sistemas de partículas en los cuales no actúan fuerzas externas. Las medias temporales son los promedios de los valores observados (mediciones) de una función numérica f (que puede representar por ejemplo la temperatura o la presión). El modelo matemático puede estar dado por una ecuación diferencial y sus soluciones ser de tiempo continuo o puede estar dado por la aplicación sucesiva de una transformación T . Trabajaremos con este último caso y podremos escribir a las medias temporales como

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N f(S^i x).$$

Las medias espaciales consisten en integrales de mediciones simultáneas en todos los puntos respecto a una medida con sentido físico en el espacio de fases, es decir constituyen el promedio de equilibrio con respecto a la medida de Liouville en la subvariedad del espacio de fase determinada por los invariantes triviales del movimiento y será igual a:

$$\int f(x) d\mu(x).$$

La hipótesis de Boltzmann establece:

¹ La palabra ergódica (en este contexto) proviene del griego ergon (trabajo) y dos (camino, paso), el término fue inventado por Paul y Tania Ehrenfest, ambos discípulos de Boltzmann en [5]

² La hipótesis de Boltzmann fue discutida y sufrió varias modificaciones desde su existencia, ver [7], [33]; la aquí enunciada fue postulada por el matrimonio Ehrenfest en su célebre [5]

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N f(S^i x) \rightarrow \int f(x) d\mu(x). \quad (1.1)$$

Donde es importante destacar que la noción de convergencia es vaga pues se está pasando al límite en el número de partículas con lo que estaríamos variando el sistema. Según las palabras de Werner Heisenberg, *un físico teórico se siente mejor si no hay objetos matemáticos rigurosamente definidos por detrás de sus consideraciones*. Esta frase bien se podría aplicar a los trabajos de Boltzmann. Traduciendo (libremente) al matemático húngaro Dómokos Százs ³; *el trabajo de Boltzmann carece de la definición de un objeto matemático riguroso detrás del enunciado de la hipótesis, Boltzmann era ingenioso en la creación de paradigmas matemáticos y dominaba la técnica de cálculo en ellos para revelarlos y obtener herramientas muy útiles y aún sin tener entendimiento sobre el objeto matemático comprendía muchas cosas mejor de lo que lo hacemos hoy*.⁴

El hecho de la no definición de un objeto matemático de estudio sumado a ciertas paradojas que originó la hipótesis (ver [?], [7], [33], [35]) transformó a la formalización de la hipótesis en un problema relevante para la matemática. En el Congreso Internacional de Matemática que tuvo lugar en París en 1900 David Hilbert incluyó este problema en su famoso compendio de 23 problemas con el nombre de *Tratamiento Matemático de los Axiomas de la Física*. Sobre esto escribió: *es muy deseable que la discusión de los fundamentos de la Mecánica sea tomada también por los matemáticos. Así el trabajo de Boltzmann sobre los principios de la Mecánica sugiere el problema del desarrollo matemático de los procesos límite allí meramente indicados, que llevan de la visión atomística a las leyes del movimiento continuo*. Esto hizo que la comunidad matemática se vierá atraída a formalizar estas ideas. Los principales protagonistas fueron Henri Poincaré, George Birkhoff, Aleksandr Khinchin y John von Neumann, entre otros.

El resultado de esta interacción entre la física y la matemática es el desarrollo de una nueva área dentro del estudio de los sistemas dinámicos: LA TEORÍA ERGÓDICA. Dicha área estudia sistemas dinámicos con una medida invariante. El problema central de la teoría ergódica es el comportamiento de dicha clase de sistemas luego de muchas iteraciones. El primer resultado en esta dirección fue el Teorema de Recurrencia de Poincaré [16], que dice que casi todo punto de cualquier conjunto (de medida positiva) va a regresar a dicho conjunto en su futuro.

Teoremas más precisos fueron enunciados por Birkhoff, Khinchin y von Neuman que concluyen la existencia de las medias temporales y además establecen el tipo

³Extraído de [33], página 2.

⁴though the rigorously defined mathematical object behind Boltzmann's considerations around the ergodic hypothesis was indeed missing, Boltzmann was ingenious in inventing mathematical paradigmas and in mastering mathematical calculations on them to find out the truth and to obtain convincing power, and even without having the mathematical object he understood many things better than we do now.

de medidas, las llamadas ergódicas, tales que las medias espaciales convergen, c.t.p. respecto a dicha medida, a la media temporal respecto a la medida. Estos teoremas, llamados teoremas ergódicos fueron probados por von Neumann en 1929 y en 1931 por Birkhoff y Khinchin. Los mismos le dan sentido matemático a la hipótesis de Boltzmann, el cual expondremos más adelante en esta introducción. Enunciaremos la definición de ergodicidad y un teorema ergódico.

Definición. Sean (X, μ, T) donde (X, μ) es un espacio de probabilidad, $T : X \rightarrow X$ una transformación medible μ -invariante. Decimos que la medida μ es ergódica si todos los conjuntos tales que $T^{-1}(A) = A$ tienen medida uno o cero.

Teorema (Teorema Ergódico de Birkhoff y Khinchin). Sea (X, A, μ) un espacio de probabilidad. $T : X \rightarrow X$ una transformación medible. Si f es una función integrable entonces el siguiente límite existe c.t.p. x ,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N f(T^i x) = \varphi^*(x).$$

La función f^* es integrable y $\int f^*(y) d\mu(y) = \int f(y) d\mu(y)$
Si la medida es ergódica entonces

$$f^*(x) = \int f(y) d\mu(y)$$

El primer ejemplo de un sistema ergódico lo dieron, a fines de la década del 30, Hedlund y Hopf [10], [11]: el flujo geodésico en variedades compactas de curvatura negativa. No sólo probaron que era ergódico sino que proporcionaron un método general para probar ergodicidad. En dicho trabajo se concluye que el comportamiento hiperbólico de los sistemas dinámicos implicaba la ergodicidad de los mismos. Un sistema dinámico se dice hiperbólico si existen familias de subvariedades transversales sobre las que el sistema dinámico actúa expandiendo (variedad inestable) o contrayendo (estable) y tales que sus espacios tangentes son complementarios. Este comportamiento resulta en inestabilidad para todas las órbitas, trayectorias que comienzan arbitrariamente próximas unas de las otras se separan en el futuro o en el pasado.

Los trabajos de Hedlund y Hopf sobre el flujo geodésico y el trabajo del físico N.S. Krylov [12] publicado en 1941, en el cual prueba la hiperbolicidad de los sistemas de bolas elásticas que modelan los gases, inspiraron a Sinai en el enunciado de una nueva hipótesis ergódica en [30].

Hipótesis de Boltzmann-Sinai Para todo $N \geq 2$ el sistema mecánico de N bolas interactuando con choques elásticos dentro de \mathbb{T}^2 o \mathbb{T}^3 es ergódico.

La primera diferencia conceptual que tiene esta hipótesis comparada con la formulación anterior es que está no tiene suposición sobre la cantidad de bolas que chocan, es decir contrario a la idea de Boltzmann la aleatoriedad del sistema no es debido al gran número de partículas existentes. Otra característica importante es que el comportamiento local de sistemas hiperbólicos lleva a su descripción global.

El modelo llevó a Sinai a estudiar los billares dispersores. Consideremos N discos moviéndose en un conjunto R acotado del plano o N bolas moviéndose en el espacio dentro de un conjunto acotado R . Los trataremos a los dos casos en paralelo ya que son análogos. Supongamos que todos los discos (o bolas) tienen el mismo radio r y la misma masa m . Cada bola (disco) se mueve libremente (con velocidad constante), hasta que choca contra otra bola o la frontera de R . Cuando las bolas (discos) chocan los choques son del tipo elástico.

Si dos bolas chocan entre sí le llamamos q_1 y q_2 a sus centros y por v_1 y v_2 a sus velocidades en el momento de colisión. Sea s la recta que une los centros, descompongo

$$v_i = v_i^0 + v_i^\perp \quad \text{donde } i = 1, 2.$$

v_i^0 es la componente paralela a s y v_i^\perp la perpendicular. Las nuevas velocidades postcolisión son:

$$v_1^+ = v_1^\perp + v_2^0 \quad \text{y} \quad v_2^+ = v_2^\perp + v_1^0$$

Estas ecuaciones preservan la energía y el momento. Si la bola choca contra la pared en el punto $w \in \partial R$, considero t la recta entre el punto de choque w y el centro de la partícula. Descompongo la velocidad de la partícula como $v_1 = v_1^0 + v_1^\perp$ donde v_1^0 es la componente paralela a t y v_1^\perp es la componente perpendicular. La velocidad luego del choque (v_1^+) será:

$$v_1^+ = v_1^\perp - v_1^0.$$

Estas preservan la energía pero no el momento.

El modelo puede ser reducido a un billar. Supongamos que el conjunto R es un toro, por lo que las bolas chocan sólo entre ellas, ya que $\partial R = \emptyset$ y el momento total se conserva.

El sistema está compuesto por N bolas de masa 1 y radio r moviéndose en \mathbb{T}^d , donde $d = 2$ en el caso plano y $d = 3$ en el caso espacial. En el espacio de configuraciones Q de las N bolas en \mathbb{T}^d es un subconjunto de dimensión Nd . Al ser las bolas macizas sus centros están a distancias mayor o igual a $2r$ y esto implica que hay que retirar de Q los siguientes C_2^n obstáculos cilíndricos:

$$C_{i,j} = \{(q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{T}^d : |q_i - q_j| < 2r\}; \text{ con } 1 \leq i < j \leq N.$$

La energía $E = \sum_{i=1}^N v_i^2$ y el momento $M = \sum_{i=1}^N v_i$ se conservan. Podemos suponer que $H = \frac{1}{2}$ y $M = 0$. Además supondremos $B = \sum_{i=1}^N q_i = 0$. Para estos valores de E , B y de B el espacio de configuraciones M queda reducido a $M = T \times S_{a-1}$ donde;

$$\begin{aligned} T &:= \left\{ (q_1, \dots, q_N) \in Q : \sum_{i=1}^N q_i = 0 \right\} \\ &= \left\{ (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{T}^{Nd} - \cup_{1 \leq i < j \leq N} C_{ij} : \sum_{i=1}^N q_i = 0 \right\} \end{aligned}$$

Además $a = \dim T = Nd - d$ y S_k es la semiesfera unitaria k dimensional.

Se puede verificar, en [4], que la dinámica de las N bolas con choques elásticos y el flujo del billar sobre T con reflexiones en la frontera ∂T son isomorfos y preservan la medida de Liouville $d\mu = cdqdv$ donde c es una constante. El conjunto S de las singularidades contiene todas las intersecciones de las superficies cilíndricas ∂C_{ij} . Estas intersecciones corresponden a colisiones de tres o más bolas al mismo tiempo. El proceso de tres o más choques no está definido, luego ignoraremos las trayectorias del billar que chocan contra S . Es claro que la ergodicidad del sistema de N bolas será equivalente a la ergodicidad del billar.

En el artículo mencionado Sinai [31] demuestra esta conjetura en el caso de $N = 2$ y en dimensión 2. Finalmente, 100 años luego de la formulación de la hipótesis de Boltzmann se encontró un sistema mecánico para el cual promedios temporales y promedios de espaciales coinciden. Sinai usó la teoría de los sistemas dinámicos uniformemente hiperbólicos que tuvo gran progreso en y culminó con el trabajo de Anosov y Sinai. La gran dificultad del trabajo de Siani fue que los billares no son sistemas diferenciables ya que las variedades estable e inestable pueden tener tamaño arbitrariamente chico.

Mucho después Nador Simanyi y Dómokos Szász, siguiendo el trabajo de la escuela rusa (Y. Sinai, N. Chernov, L. Bunimovich) probaron en [24] que casi todos los sistemas de bolas duras de Sinai son completamente hiperbólicos, donde la noción de casi todos es en términos de masas y radios de las bolas. Un flujo es completamente hiperbólico si los exponentes de Lyapunov en la dirección perpendicular al flujo son no nulos ctp en el espacio de fases. Para estos sistemas la hiperbolicidad es la antesala de la ergodicidad, ya que lo último implica lo primero. En [26] Simanyi probó que los billares cilíndricos son todos completamente hiperbólicos y los billares cilíndricos son una generalización de los sistemas de bolas duras. En [26] probó que casi todos los sistemas de bolas duras en dimensión 2 son ergódicos, con la misma noción de casi todo punto que antes. Maás adelante en [27] se probó el mismo resultado en dimensiones mayores. Finalmente Siamnyi probó en [28] la ergodicidad pero asumiendo que las singularidades y las variedades no hiperbólicas no coinciden,

finalmente probó en [29] que localmente no coinciden en por lo que se probó la hipótesis en dimensión 2.

1.2. Contenidos

Este trabajo se basa en la lectura de los primeros cuatro capítulos de libro *Chaotic Billiards* escrito por R. Markarian y N. Chernov [3]. Este trabajo tratará de ser una introducción al estudio de la dinámica de los billares planos realizando con detalle las construcciones generales de la teoría y se expondrán algunas de las técnicas desarrolladas por Sinai en [31]. Probaremos que los billares del tipo dispersor son hiperbólicos resultado base para probar la ergodicidad. El trabajo se organiza en cinco capítulos, siendo el primero está introducción.

1.2.1. Capítulo 2

En este capítulo definiremos las clases de billar a estudiar. Se establecerán los tipos de mesas de billar con las que trabajaremos en el resto del trabajo. A grandes rasgos, una mesa de billar será un conjunto \mathcal{D} cerrado del plano con interior no vacío cuya frontera se compondrá de finitas curvas compactas de clase \mathcal{C}^3 a trozos de curvatura de signo constante. Si bien impondremos restricciones que podrán parecer arbitrarias, a lo largo del desarrollo de este trabajo las mismas quedarán más que justificadas.

Un billar plano corresponde a una partícula puntual en movimiento libre dentro de \mathcal{D} y cada vez que la partícula choca contra la frontera, es reflejada con el mismo ángulo con el cual incide, siempre que la tangente esté bien definida en el punto de choque. Se deducirán las ecuaciones de movimiento de una partícula en una mesa de billar y veremos que preservan la velocidad de la partícula por lo cual la consideraremos de módulo 1.

La dinámica del billar inducida por estas ecuaciones podrá estudiarse desde dos puntos de vista diferentes. Uno de ellos será el flujo del billar, el estado de una partícula en movimiento está dado por su posición $q \in \mathcal{D}$ y su vector de velocidad unitario $v \in S^1$. El espacio de fase del sistema será $\Omega = \mathcal{D} \times S^1$. El otro punto de vista para estudiar la Dinámica, será el mapa del primer retorno de Poincaré del flujo del billar. Como sección transversal al flujo se considerará un conjunto \mathcal{M} incluido en $\Gamma \times S^1$ que tendrá en cuenta una identificación que tendremos que realizar en Ω para asegurar la continuidad de las trayectorias en los choques.

Mostraremos tres ejemplos de billares: el cuadrado, el círculo y la elipse, que presentarán distintos comportamientos dinámicos. En el cuadrado mostraremos que la Dinámica se puede extender a todo punto del espacio de fase, que las trayectorias son periódicas o densas y se ilustrará la construcción de Katok-Zemljakov creada

para el estudio de los billares poligonales. En el círculo y la elipse se mostrará que en ambos casos hay trayectorias de todos los períodos, se explicitarán las caústicas de cada uno de ellos lo que implicará la integrabilidad de ambas pero les impedirá ser ergódicos.

1.2.2. Capítulo 3

Mediante un ejemplo construido por B. Halpern en el artículo titulado *Strange Billiard Tables* [9]) veremos que es posible obtener trayectorias que colisionan infinitas veces con la frontera de la mesa en tiempo finito. Para dicho fin hay que debilitar las condiciones impuestas a la frontera de la mesa. El ejemplo consiste en una mesa de billar cuya frontera es de clase \mathcal{C}^2 y tres veces diferenciable en todo punto con una trayectoria que acumulan sus tiempos de choque con la frontera. Las acumulaciones en los tiempos de choque implican que el flujo del billar estará definida hasta un cierto tiempo t_0 .

Se prueba un teorema que asegura la no existencia de acumulación en las colisiones en billares con derivada tercera acotada, convexos y de curvatura no nula. Dicho teorema fue enunciado en [9],

Teorema (Teorema de Halpern). *Sea \mathcal{D} una mesa de billar convexa con derivada tercera acotada y curvatura no nula. Entonces $\Phi^t(p, v)$ está definido para todo $(p, v) \in \Omega$ y $t \in \mathbb{R}$.*

Podremos mostrar que las mesas de billar con las que trabajamos no tienen acumulación en los tiempos de choques; esto implicará que si un punto no tiene definida su trayectoria por el flujo para todo tiempo t entonces, para el futuro o para el pasado, proviene de una esquina. Esto nos da control sobre los estados tales que el flujo no está definido para todo tiempo t

Escribiremos las coordenadas del flujo del billar y de su derivada deduciendolas de manera analítica. Explicitaremos una medida invariante μ_Ω para el flujo. Probaremos que los puntos para los cuales no está definida la trayectoria para todo tiempo t tiene medida cero respecto a μ_Ω .

Usando las coordenadas del flujo expresaremos la derivada del mapa colisión en coordenadas. Se encontrará una medida invariante para dicho mapa y los conjuntos de singularidades del mapa colisión que serán fundamentales para el de muchas propiedades ergódicas de los billares dispersores (ver [3], capítulo 5 y 6).

El hecho de que el mapa colisión sea el mapa de retorno a \mathcal{M} del flujo del billar implica una relación entre las medidas invariantes de la cual se deduce la fórmula de Santaló,

$$\bar{\tau} = \frac{\pi|\mathcal{D}|}{|\Gamma|} \quad \text{donde} \quad \bar{\tau} = \int_{\mathcal{M}} \tau(x) d\mu(x),$$

que nos permitirá aplicar el Teorema de Birkhoff al mapa colisión. Además dicha fórmula expresa que el tiempo medio de choque depende solamente del área de la mesa.

1.2.3. Capítulo 4

Probaremos que la clase de billares aquí estudiados tienen exponentes de Lyapunov. Veremos que esto es cierto porque el mapa colisión verificará el Teorema de Oseledets. El hecho de que el mapa del billar sea conservativo implicará que la suma de los exponentes de Lyapunov es cero. Luego un punto tiene ambos exponentes cero o de signo contrario. En el círculo mostraremos que los exponentes son idénticamente nulos en todo tiempo. Veremos que es imprescindible mediante un ejemplo que el billar tenga curvatura acotada (por lo menos que las curvas que componen su frontera sean de clase \mathcal{C}^2) para que se verifique el Teorema de Oseledets. Veremos un ejemplo de billar con frontera con curvatura no acotada tal que no verifica Oseledets [14].

Ciertos subespacios de $T_X\Omega$ invariantes para $D_X\Phi^t$ están relacionados con subespacios de $T_z\mathcal{M}$ invariantes para la derivada del mapa colisión. Esto nos permitirá mostrar que el flujo del billar también tiene exponentes de Lyapunov fctp.

1.2.4. Capítulo 5

Este es el capítulo en el cual nos dedicamos al estudio de propiedades caóticas de los billares dispersores. Un billar será dispersor cuando todas las curvas que componen su frontera son de curvatura positiva. La descomposición del espacio tangente efectuada en el capítulo anterior induce un nuevo sistema de coordenadas que nos facilitarán el estudio de las propiedades dinámicas y ergódicas de billares dispersores.

Usando las técnicas ideadas por Sinai en [31] se probará el resultado principal de este trabajo: **el mapa del billar es hiperbólico en el caso de billares dispersores**. Este resultado no sólo caracteriza a una gran familia de billares sino que también abre la puerta a la prueba de la conjetura de Boltzmann-Sinai para el caso $N = 2$.

Capítulo 2

Construcciones Básicas

2.1. Mesa de Billar y Dinámica.

Una mesa de billar $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto cerrado, conexo del plano, con interior no vacío y frontera diferenciable a trozos. Un billar plano corresponde a una partícula puntual en movimiento libre en el interior de \mathcal{D} y con choques elásticos con la frontera. Es decir, cada vez que la partícula choca contra la frontera, es reflejada con el mismo ángulo con el cual incide, siempre que la tangente esté bien definida en dicho punto de choque.

2.1.1. Mesa del Billar

Sea \mathcal{D} un conjunto del plano compacto y conexo con interior no vacío, llamamos Γ a la frontera de \mathcal{D} . Dicho conjunto \mathcal{D} verificará una serie de propiedades enunciadas a continuación.

Propiedad I La frontera del conjunto $\partial\mathcal{D} = \Gamma$ se compone de un número finito $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ de curvas compactas \mathcal{C}^l con $l \geq 3$.

Propiedad II Las curvas compactas Γ_i se podrán intersectar solamente en sus extremos: $\Gamma_i \cap \Gamma_j \subset \partial\Gamma_i \cup \partial\Gamma_j$.

En cada una de las curvas Γ_i fijamos la orientación tal que \mathcal{D} esté a la izquierda de Γ_i . Parametrizamos cada Γ_i por longitud de arco mediante una función $f_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dicha función es uno a uno en $[a_i, b_i]$; y por la Propiedad I es de clase \mathcal{C}^l con derivada a derecha en a_i y a izquierda en b_i , ambas de orden l .

Propiedad III Para toda Γ_i la derivada segunda de la parametrización en $[a_i, b_i]$ f_i'' es idénticamente nula o tiene signo constante positivo o negativo.

Cuando decimos derivada en $[a_i, b_i]$ nos referimos a la derivada en (a_i, b_i) y a la derivada a derecha en a_i y a izquierda en b_i .

Definición. Sea \mathcal{D} un conjunto compacto, conexo con interior no vacío. Diremos que \mathcal{D} es una **mesa de billar acotada** si verifica las tres propiedades enunciadas anteriormente. A los puntos de $\Gamma = \partial\mathcal{D}$ se le llama **frontera** de la mesa y a cada una de las curvas Γ_i que componen la frontera Γ las llamamos las **paredes** de la mesa.

Como las paredes Γ_i son curvas compactas, su longitud $|\Gamma_i| = |b_i - a_i|$ es finita. Notamos por

$$|\Gamma| = \sum |\Gamma_i| \text{ a la longitud total de } \Gamma \text{ la frontera de la mesa.}$$

Cuando escribamos $|\mathcal{D}|$ nos referiremos al área de la mesa.

Definición. Los puntos de la frontera del billar pertenecientes al conjunto $\Gamma_* = \partial\Gamma_1 \cup \dots \cup \partial\Gamma_r$ son llamados **puntos esquinas**. Los restantes puntos de la frontera pertenecen a $\tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \Gamma_*$ y son llamados **puntos regulares** de la frontera.

Todo punto regular de la frontera $x \in \tilde{\Gamma}$ tiene un entorno U_x que corta sólo una de las paredes Γ_i ; la pared divide a U_x en dos componentes conexas, una en el interior de \mathcal{D} y otra en $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}$. En cambio, si x es un punto esquina, entonces tiene un entorno U_x tal que $U_x \cap \Gamma$ es unión disjunta de $2m$ curvas (donde $m = m(x)$) las cuales finalizan en x . Estas curvas dividen a U_x en $2m$ componentes conexas tales que m de ellas están en el interior de \mathcal{D} y las otras m en $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}$. Llamaremos a x un punto equina simple si $m_x = 1$.

Definición. Las componentes conexas de U dentro de \mathcal{D} son las **esquinas** de la mesa. Cada esquina está acotada por dos curvas Γ_i y Γ_j , consideramos β el ángulo entre ellas dos. Si $\beta = 0$ decimos que x es un **punto cúspide**.

Al parametrizar por longitud de arco los vectores tangentes f'_i tienen norma constante igual a uno. Esto implica que $f''_i \perp f'_i$. Por lo tanto, si f''_i no es idénticamente nula, el vector f''_i apunta hacia adentro o hacia afuera de Γ_i en todo punto de dicha pared.

Definición. Podemos distinguir según la última observación tres tipos de paredes:

Paredes Chatas si $f''_i = 0$.

Paredes Focalizadoras si $f''_i \neq 0$ apunta hacia adentro de \mathcal{D} .

Paredes Dispersoras si $f''_i \neq 0$ apunta hacia afuera de \mathcal{D} .

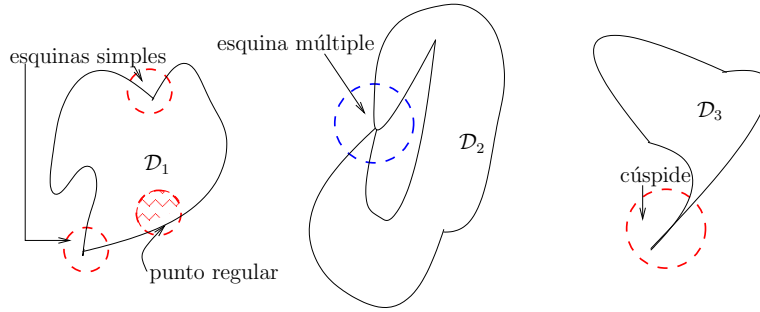


Figura 2.1: La mesa \mathcal{D}_1 presenta 2 esquinas simples, \mathcal{D}_2 una esquina múltiple de orden $m = 2$ y \mathcal{D}_3 tiene un punto cúspide.

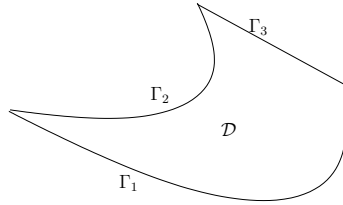


Figura 2.2: La pared Γ_1 es focalizadora, Γ_2 es una pared dispersora y Γ_3 chata.

Se define la **curvatura** (signada) usando la siguiente convención:

$$\kappa = \begin{cases} 0 & \text{si } \Gamma_i \text{ es una pared chata.} \\ -\|f''\| & \text{si } \Gamma_i \text{ es una pared focalizadora.} \\ \|f''\| & \text{si } \Gamma_i \text{ es una pared dispersora.} \end{cases}$$

Definición. Sea \mathcal{D} un conjunto cerrado con interior no vacío, conexo y no acotado diremos que es una **mesa no acotada periódica** si:

1. Para todo $b \in \mathbb{R}$, definimos $K_b = [-b, b] \times [-b, b]$, se cumple que:

$$\mathcal{D}_b = K_b \cap \mathcal{D} \text{ es una mesa de billar acotada .}$$

2. Existen dos vectores ortogonales $u, v \in \mathbb{R}^2$ tales que:

$$q \in \mathcal{D} \Leftrightarrow q + u \in \mathcal{D} \Leftrightarrow q + v \in \mathcal{D}.$$

El plano \mathbb{R}^2 está identificado como el cubrimiento universal del toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Si \mathcal{D} es una mesa de billar no acotada periódica podemos elegir los ejes coordenados paralelos a u y a v , los vectores ortogonales de esta manera y consideramos la

proyección de \mathcal{D} sobre \mathbb{T}^2 , a la cual llamaremos también \mathcal{D} . En el caso de mesas no acotadas periódicas trabajaremos con la proyección de la mesa en el toro. Se cumple que $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{T}^2$ será un abierto conexo y verificará las tres propiedades enunciadas anteriormente. Pedimos que la mesa del billar esté incluida propiamente en el toro \mathbb{T}^2 para evitar billares sin colisiones.

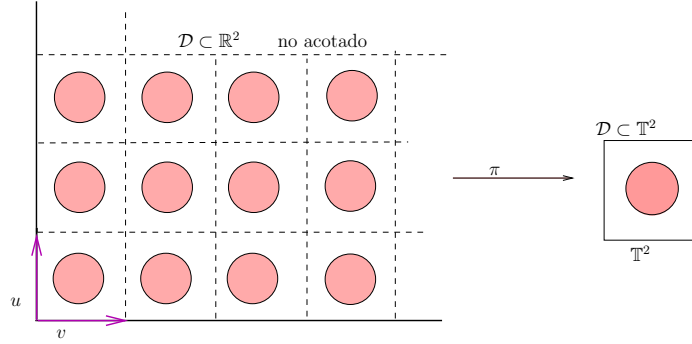


Figura 2.3: La proyección de una mesa de billar no acotada periódica \mathcal{D} sobre el toro \mathbb{T}^2

Ahora estamos en condiciones de dar *la definición* de mesa de billar que se usará a lo largo de este trabajo.

Definición. Una **mesa de billar** \mathcal{D} es un conjunto tal que $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ es una mesa de billar acotada o $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{T}^2$ es una mesa de billar no acotada periódica.

2.1.2. Dinámica en la mesa de billar.

Consideremos una partícula puntual la cual en tiempo inicial se encuentra en $q \in \mathcal{D}$ y tiene velocidad $v \in \mathbb{R}^2$. Tanto la posición $q = q(t)$ y velocidad $v = v(t)$ son funciones que dependen del tiempo $t \in \mathbb{R}$. Vamos a dar las ecuaciones de movimiento dependiendo de la posición inicial de la partícula.

- Si q está en el interior de \mathcal{D} , la partícula seguirá en línea recta con la misma velocidad:

$$\dot{q} = v \quad \text{y} \quad \dot{v} = 0 \quad (2.1)$$

- Si q está en la parte regular de la frontera de \mathcal{D} ($q \in \tilde{\Gamma}$), entonces la velocidad se refleja instantáneamente según la tangente a Γ en el punto q , obedeciendo la siguiente regla: el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Expresada de manera analítica:

$$v^+ = v^- - 2 \langle v^-, n \rangle n \quad (2.2)$$

donde v^+ y v^- son las velocidades postcolisional y precolisional respectivamente y n es el vector normal a Γ entrante en el punto q .

- Si q es un punto esquina entonces la partícula se detiene.

Las ecuaciones de movimiento de la partícula dejan constante la norma del vector velocidad, por lo que consideraremos $\|v\| = 1$. El tiempo que le toma a la partícula llegar de un punto p_0 a un punto p_1 con una cierta velocidad $v \in S^1$, es igual a la longitud de la poligonal que conforma la trayectoria recorrida por la partícula desde el punto p_0 hasta llegar al punto p_1 .

Definición. Una colisión se dice **regular** si la velocidad postcolisional (v^+) es distinta de la velocidad precolisional (v^-). En caso contrario se dice que es una **colisión tangencial**.

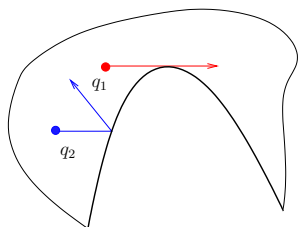


Figura 2.4: La partícula q_1 experimenta una colisión tangencial con la mesa mientras que q_2 colisiona de forma regular

2.2. Dos descripciones de la Dinámica

2.2.1. El mapa de Poincaré.

Definición. Consideremos Ω una variedad y $\Phi^t : \Omega \rightarrow \Omega$ un flujo. Diremos que una subvariedad $\mathcal{M} \subset \Omega$ es una **sección transversal global** de Φ^t si \mathcal{M} es transversal al flujo y toda trayectoria del flujo atraviesa a \mathcal{M} infinitas veces.

En el caso de que exista una sección transversal global, el flujo induce un mapa $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ que cumple:

$$\mathcal{F}(x) = \Phi^{\tau(x)}(x) \quad \text{donde} \quad \tau(x) = \min\{t > 0 : \Phi^t(x) \in \mathcal{M}\}$$

Al mapa \mathcal{F} se lo llama el **mapa de Poincaré** o mapa de primer retorno.

Usando la continuidad del flujo se tiene que el mapa de primer retorno \mathcal{F} es un homeomorfismo de \mathcal{M} . También se puede probar, usando el Teorema del Entorno Tubular, que si el flujo es de clase \mathcal{C}^k entonces el mapa de primer retorno será un difeomorfismo local de clase \mathcal{C}^k [22].

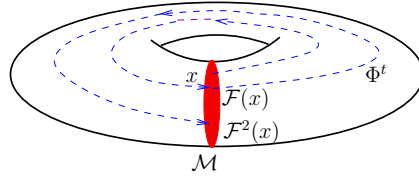


Figura 2.5: El mapa de Poincaré \mathcal{F} de un flujo Φ^t en \mathbb{T}^2 .

2.2.2. El flujo del billar

Sea \mathcal{D} una mesa de billar. El estado de una partícula en movimiento está dado por su posición $q \in \mathcal{D}$ y su vector de velocidad unitario $v \in S^1$. El espacio de fases del sistema será:

$$\Omega = \mathcal{D} \times S^1$$

El conjunto Ω tiene estructura de variedad diferenciable con esquina) de dimensión 3 cuya frontera es $\partial\mathcal{D} = \Gamma \times S^1$. Para cada punto regular $q \in \tilde{\Gamma}$ identificamos el par (q, v^+) y (q, v^-) , donde v^- es el vector precolisión y v^+ el vector postcolisión.

El espacio de fases Ω tiene asociadas dos proyecciones sobre \mathcal{D} y S^1 que notaremos por π_q y π_v respectivamente,

$$\pi_q(q, v) = q \quad \text{y} \quad \pi_v(q, v) = v.$$

Consideramos $\tilde{\Omega}$ el conjunto de puntos que tienen definida su trayectoria para todo tiempo t (más adelante en este trabajo explicitaremos con más detalle cuál es el conjunto $\tilde{\Omega}$). En dicho conjunto obtenemos un grupo de transformaciones dependiendo del parámetro $t \in \mathbb{R}$ continuo,

$$\Phi^t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$$

Cada trayectoria del flujo $\{\Phi^t(x)\}$ con $x \in \tilde{\Omega}$ es una curva continua en Ω el espacio de fases; la identificación hecha entre (q, v^+) y (q, v^-) asegura la continuidad en las colisiones.

A la proyección $\pi_q(\Phi^t(x))$ de esta curva sobre la mesa se le denomina una **trayectoria del billar**. Es una línea poligonal cuyos vértices son las colisiones y los segmentos las trayectorias de movimiento libre.

Definición. Definimos $\tilde{\Omega}_c$ como los puntos de $\tilde{\Omega}$ que experimentan colisiones y $\tilde{\Omega}_f$ los puntos de $\tilde{\Omega}$ que no experimentan colisiones.

Si $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ es una tabla de billar acotada, entonces la partícula colisiona por lo menos cada $T = \text{diam}\mathcal{D}$. Luego la partícula experimenta infinitas colisiones con las paredes del billar. Por lo tanto $\tilde{\Omega}_f = \emptyset$.

Se cumple

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_c \cup \tilde{\Omega}_f \text{ y } \tilde{\Omega}_f \cap \tilde{\Omega}_c = \emptyset.$$

Necesariamente $\tilde{\Omega}_f$ es Φ^t -invariante y por lo tanto $\tilde{\Omega}_c$ también lo es.

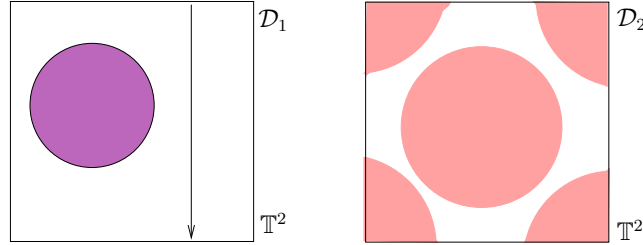


Figura 2.6: La mesa \mathcal{D}_1 tiene horizonte no acotado, mientras que \mathcal{D}_2 tiene horizonte acotado.

Definición. Una mesa de billar $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{T}^2$ tiene **horizonte finito** si $\tilde{\Omega}_f = \emptyset$. Caso contrario diremos que tiene **horizonte infinito**.

Proposición. Sea \mathcal{D} una mesa de billar no acotada periódica en \mathbb{T}^2 . Toda trayectoria en $\tilde{\Omega}$ experimenta infinitas colisiones o ninguna.

Demostración. Sea $q \in \mathcal{D}$ con velocidad $v \in S^1$ tales que $X = (q, v)$ experimenta finitas colisiones. Consideremos T_0 el tiempo para el cual ocurre la última colisión. Para tiempo $t > T_0$ la trayectoria de X no choca con $\partial\mathcal{D}$ luego es una recta en \mathbb{T}^2 . Si la recta tiene pendiente irracional entonces necesariamente vuelve a chocar con la frontera de la mesa porque es la proyección de una recta de pendiente irracional en el toro es densa [13]. Si tiene pendiente racional entonces es periódica y por lo tanto colisiona de nuevo con la frontera. Luego fue absurdo suponer que la partícula experimentaba finitas colisiones. \square

2.2.3. El mapa colisión.

A continuación construiremos el mapa de retorno del billar, debemos encontrar una sección global transversal de Φ^t , es decir una subvariedad transversal a la cual el flujo la cruce infinitas veces. Lo usual sería considerar $\Gamma \times S^1$ y es lo que haremos pero teniendo en cuenta la identificación que realizamos en $\Omega \left((q, v^+) \sim (q, v^-) \right)$.

Definición. *Definimos:*

$$\mathcal{M} = \bigcup \mathcal{M}_i; \quad \mathcal{M}_i = \{(q, v) \in \tilde{\Omega} : q \in \Gamma_i; \langle q, v \rangle \geq 0\}$$

donde n es el versor normal a Γ_i que apunta hacia adentro de \mathcal{D} en el punto q .

$\mathcal{M} \subset \Omega$ así definida es una subvariedad transversal a Ω de dimensión 2 llamada usualmente el espacio de colisión.

Si \mathcal{D} es una mesa de billar acotada, cada trayectoria colisiona infinitas veces con la frontera. En cambio si $\mathcal{D} \subset \mathbb{T}^2$, considero $x = (q, v) \in \mathcal{M}_i$. Es una trayectoria en el toro que experimenta una colisión y por lo tanto infinitas colisiones. En ambos casos, toda trayectoria regresa a \mathcal{M} infinitas veces, por esta razón \mathcal{M} es una sección transversal global de Ω .

Llamamos $\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{\Omega}_c \cap \mathcal{M}$, vamos a definir \mathcal{F} en un subconjunto \mathcal{M}_0 de $\tilde{\mathcal{M}}$ que se determinará en secciones posteriores.

$$\mathcal{F} : \mathcal{M}_0 \rightarrow \tilde{\mathcal{M}} \quad \mathcal{F}(x) = \Phi^{\tau(x)+0}(x).$$

Al mapa \mathcal{F} se llama mapa de primer retorno o **mapa colisión del billar**.

A cada Γ_i la parametrizamos por longitud de arco r , tal que r toma valores en el intervalo $[a_i, b_i]$. $|\Gamma_i| = b_i - a_i$ y asumimos a los intervalos $[a_i, b_i]$ disjuntos dos a dos. Si la curva Γ_i es cerrada identificamos a_i con b_i .

Para cada $x \in \mathcal{M}$, consideramos $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ el ángulo entre v el vector velocidad y n el vector normal unitario que apunta hacia adentro de \mathcal{D} . Entonces r y φ constituyen coordenadas para los puntos en \mathcal{M} . Para cada curva diferenciable Γ_i que forman las paredes del billar, \mathcal{M}_i es un cilindro en el caso de que la curva Γ_i sea cerrada o un rectángulo en el caso que Γ_i no sea cerrada.

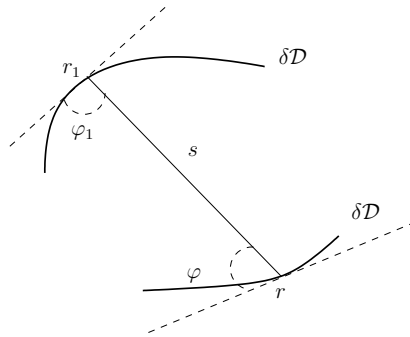


Figura 2.7: El mapa colisión

Dado un punto del espacio colisión $(r, \varphi) \in \mathcal{M}$ y su imagen por el mapa colisión $\mathcal{F}(r, \varphi) = (r_1, \varphi_1)$. El punto r_1 es la intersección de la recta s que pasa por r y

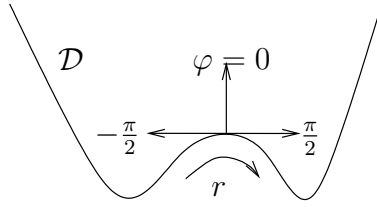


Figura 2.8: La orientación de r y de φ

forma ángulo φ con la tangente de Γ en r ; φ_1 es el ángulo que forma la recta s con Γ en r_1 . Si la partícula parte de un punto $r \in \Gamma$ formando ángulo φ entonces r_1 es el próximo punto de contacto con Γ y φ_1 el ángulo de reflexión siguiente. Si conozco los iterados de un punto $x = (r, \varphi) \in \mathcal{M}$ por el mapa colisión \mathcal{F} , voy a poder recuperar la trayectoria del billar $\{\Phi^t(x)\}$, uniendo imágenes consecutivas por segmentos de recta.

El mapa \mathcal{F} tiene asociadas dos proyecciones:

$$\pi_r : \mathcal{M} \rightarrow \Gamma \text{ y } \pi_\varphi : \mathcal{M} \rightarrow S^1 \text{ tales que } \pi_r(r, \varphi) = r \text{ y } \pi_\varphi(r, \varphi) = \varphi$$

2.2.4. Involución

Los billares tienen una propiedad de involución dada por reversibilidad en el tiempo de la Dinámica del billar.

$$\mathcal{I}_\Omega : \Omega \rightarrow \Omega \quad \mathcal{I}_\Omega(q, v) = (q, -v)$$

La involución verifica:

$$\Phi^{-t} \circ \mathcal{I}_\Omega = \mathcal{I}_\Omega \circ \Phi^t, \text{ en donde la composición tenga sentido.}$$

Análogamente el mapa colisión también admite una involución:

$$\mathcal{I} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \quad \mathcal{I}(r, \varphi) = (r, -\varphi)$$

Y cumple que:

$$\mathcal{F}^{-k} \circ \mathcal{I} = \mathcal{I} \circ \mathcal{F}^k, \text{ donde tenga sentido.}$$

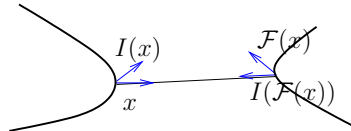


Figura 2.9: La involución del mapa \mathcal{F} .

2.3. Ejemplos de billares: El cuadrado, el círculo y la elipse.

2.3.1. El cuadrado

Considero $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 1]$ el cuadrado unidad como mesa de billar.

Notamos por $v_t = (u_t, w_t)$ al vector velocidad en coordenadas cartesianas de la partícula q .

- Si la partícula choca contra una de las paredes verticales notaremos como $v_{t-0} = (u_{t-0}, w_{t-0})$ al vector velocidad precolisional y $v_{t+0} = (u_{t+0}, w_{t+0})$ al vector velocidad postcolisional. Se tiene:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u_{t+0} &= -u_{t-0} \\ w_{t+0} &= w_{t-0}. \end{aligned}$$

- Si en cambio, choca contra una pared horizontal entonces:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u_{t+0} &= u_{t-0} \\ w_{t+0} &= -w_{t-0}. \end{aligned}$$

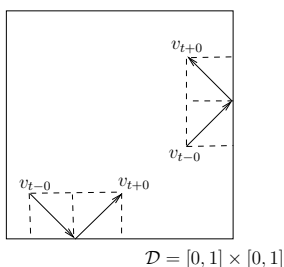


Figura 2.10: Colisiones en ambas paredes del cuadrado

Por lo tanto,

$$u_t = (-1)^m u_0 \quad w_t = (-1)^n w_0 \quad (2.5)$$

donde $v_0 = (u_0, w_0)$ es la velocidad inicial de la partícula q , m el número de veces que la q choca contra las paredes verticales entre $(0, t)$ y n el número de choques con las paredes horizontales en el mismo intervalo de tiempo.

Usaremos una construcción utilizada en el estudio de los billares poligonales la cual en lugar de reflejar la trayectoria sobre los lados del polígono consiste en reflejar las paredes del billar. En nuestro caso, cuando la trayectoria toca una lado

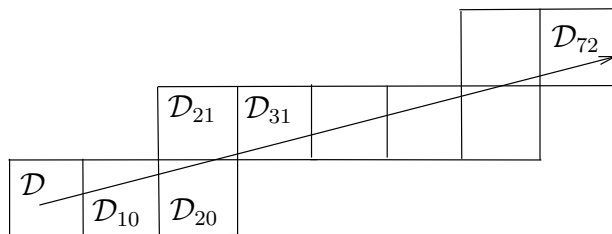


Figura 2.11: El desdoblamiento de una trayectoria del billar.

del cuadrado \mathcal{D} simetrizamos el cuadrado con respecto a dicho lado, la trayectoria continuará en línea recta sobre el cuadrado reflejado. Realizamos este procedimiento inductivamente en las colisiones. A esta construcción se le llama desdoblamiento de una órbita (unfolding)[17].

A cada copia de \mathcal{D} la indexo mediante $\mathcal{D}_{mn} = [m, m+1] \times [n, n+1]$. Para recobrar la trayectoria original se dobla la cadena de copias de \mathcal{D} sobre \mathcal{D} . El siguiente procedimiento de doblado transforma \mathcal{D}_{mn} en el cuadrado original \mathcal{D} aunque no necesariamente se preserva la orientación original.

- Si m y n son ambos pares entonces la imagen de \mathcal{D}_{mn} por la traslación $T(x, y) = (x - m, y - n)$ es \mathcal{D} preservando la orientación.
- Si m es impar entonces la orientación del lado paralelo a x se revierte: $x \rightarrow 1 + m - x$.
- Si n es impar entonces la orientación del lado paralelo a y se revierte: $y \rightarrow 1 + n - y$.

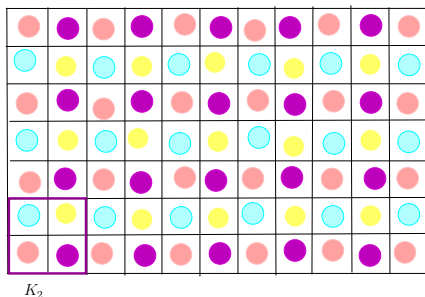


Figura 2.12: El dominio fundamental K_2 .

Los cuadrados \mathcal{D}_{mn} son un embaledado del plano, cualquier trayectoria del billar se desdobra en una recta de plano y cualquier recta se doblan en trayectorias del

billar. Observar que una trayectoria que muere en un vértice se desdobra en una recta que pasa por un punto de coordenadas enteras. La estructura de los \mathcal{D}_{mn} con las reglas de pegado es periódica y el cuadrado $K_2 = [0, 2] \times [0, 2]$ juega el rol de dominio fundamental. El plano entero puede ser cubierto por traslaciones enteras del cuadrado K_2 preservando la orientación del mismo.

La proyección de \mathbb{R}^2 sobre K_2 transforma las trayectorias desdobladas en rectas dirigidas en el toro \mathbb{T}^2 , en las cuales los puntos se mueven a velocidad constante igual a 1. El billar en el cuadrado \mathcal{D} es el flujo líneal en el toro plano \mathbb{T}^2 ver [13]. Sus propiedades principales son:

- Si la trayectoria tiene pendiente racional $\frac{dy}{dx}$ entonces es periódica,
- en caso contrario entonces la trayectoria será densa.

En el cuadrado unitario esto se traduce de la siguiente manera; si $\frac{w_0}{u_0} \in \mathbb{Q}$ entonces la trayectoria en el billar es periódica; en caso contrario la trayectoria será densa en el cuadrado.

El espacio de fase del flujo del billar del cuadrado Ω es la 3-variedad $\mathcal{D} \times S^1$. Existen estados iniciales tales que su trayectoria no está definida para todo tiempo: son aquellos que nacen o mueren en una esquina. El conjunto que contiene a estos puntos es unión de cuatro 2-subvariedades de Ω y por lo tanto es un conjunto de medida de Lebesgue nula. De manera excepcional, en el billar en una mesa cuadrada, se puede extender de forma continua el flujo del billar a todas estas trayectorias. Cada vez que una trayectoria llegue a una esquina vuelve a reflejarse por el mismo segmento por el cual llegó.

2.3.2. El círculo y la elipse

Consideremos \mathcal{D} el disco de centro $(0, 0)$ y radio 1. El espacio de colisión \mathcal{M} , dominio del mapa colisión, será un cilindro. Considero la posición t $q_t = (x_t, y_t)$ y la velocidad t $v_t = (u_t, w_t)$ de la partícula en tiempo t .

Si la partícula no experimenta ninguna colisión entre 0 y t , la posición y la velocidad en tiempo t quedan determinadas por :

$$x_t = x_0 + u_0 t, \quad u_t = u_0; \quad y_t = y_0 + w_0 t, \quad w_t = w_0.$$

Para estudiar como actúa el mapa colisión del billar, estableceremos las coordenadas a usar: sea r la longitud de arco de $\partial\mathcal{D} = S^1$ y ψ el ángulo que forma la velocidad con la tangente. El ángulo ψ está relacionado con φ (el ángulo que forma la velocidad con la normal) de la siguiente manera,

$$\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}.$$

Se tiene,

$$(2.6) \quad \begin{aligned} r_{n+1} &= r_n + 2\psi_0 \\ \psi_{n+1} &= \psi_n. \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Si (r_0, ψ_0) son los parámetros de la primera colisión entonces:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} r_n &= r_0 + 2n\psi_0 \\ \psi_n &= \psi_0. \end{aligned}$$

Esto implica que toda curva $\psi = \text{cte}$ es invariante por \mathcal{F} . Cada una de estas curvas es un círculo a altura ψ en el cilindro que constituye el espacio colisión \mathcal{M} . Si restringimos el mapa colisión a uno de estos círculos, entonces \mathcal{F} es una rotación de ángulo 2ψ . El ángulo de rotación varía continuamente con la altura del cilindro, los círculos superior e inferior están fijos $\psi = 0, \pi$. El mapa \mathcal{F} *retuerce* al cilindro \mathcal{M} . La medida $drd\varphi$ es invariante por el mapa colisión, como además es finita, considero la medida de probabilidad normalizada que proviene de $drd\varphi$. Observar el ángulo de reflexión permanece constante.

El hecho de que los círculos $\psi = \text{cte}$ sean \mathcal{F} invariantes hacen que \mathcal{F} no pueda ser ergódica respecto a la medida normalizada de probabilidad que proviene de $drd\psi$.

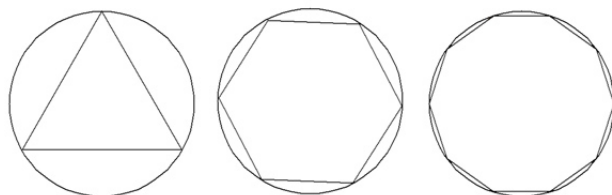


Figura 2.13: Trayectorias periódicas en el círculo para $n = 3, 6, 10$, corresponden a los polígonos regulares

Las rotaciones en el círculo son también un ejemplo frecuentemente usado en sistemas dinámicos y en teoría ergódica. Si el ángulo $2\psi_0$ es racional entonces todo punto del círculo $\psi = \psi_0$ será periódico. Si en cambio, $2\psi_0$ es irracional entonces toda órbita es densa en el círculo $\psi = \psi_0$.

En el billar circular \mathcal{D} encontramos órbitas periódica de todos los períodos; el polígono regular de n -lados circunscrito en la mesa es una órbita n -periódica.

Definición. Una **caústica** para un billar es una curva con la siguiente propiedad: si un segmento correspondiente a un tramo de la trayectoria del billar es tangente a ella, todos los segmentos de dicha trayectoria lo son.

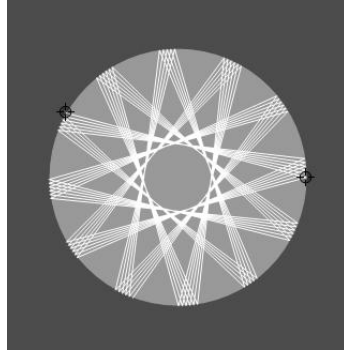


Figura 2.14: Una trayectoria no periódica (Imagen creada usando la aplicación Reflection in a Circle creada por Michael Schreiber, disponible en [39])

Las ecuaciones deducidas para el mapa colisión indican que la distancia entre los choques $\tau(x)$ es constante, $\tau(x) = 2 \cos \psi$ en cada círculo invariante. Luego los segmentos que conforman dicha trayectoria son todos tangentes a una circunferencia de radio $R = \sin \psi$ centrada en el origen. La circunferencia de radio $\sin \psi$ es una caústica para el billar en el círculo.

Consideremos ahora la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$$

con algún $a \geq 1$. La mesa de billar,

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + y^2 \leq 1\}$$

El espacio de colisión \mathcal{M} es un cilindro elíptico con base la elipse original.

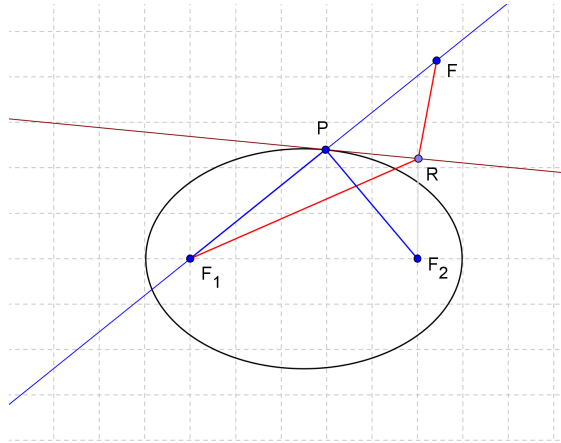
A continuación probaremos propiedades que tienen los distintos tipos de trayectoria en un billar elíptico.

Propiedad (Teorema de Poncelet). *Si una trayectoria pasa por uno de los focos entonces se refleja y vuelve a pasar por el otro.*

Demostración. Considero r una recta por el foco F_1 , P la intersección de dicha recta r con la elipse $\partial\mathcal{D}$. Sea t la tangente a la elipse por el punto P . Hay que demostrar que el ángulo formado por el segmento PF_1 y la recta t es igual al formado por el segmento PF_2 y la recta t .

Considero F el punto imagen de F_2 por la simetría de eje t . Lo primero a probar es que F_1 , P y F están alineados, como se puede apreciar en el dibujo.

Sea R un punto arbitrario de la recta t . Se tiene:

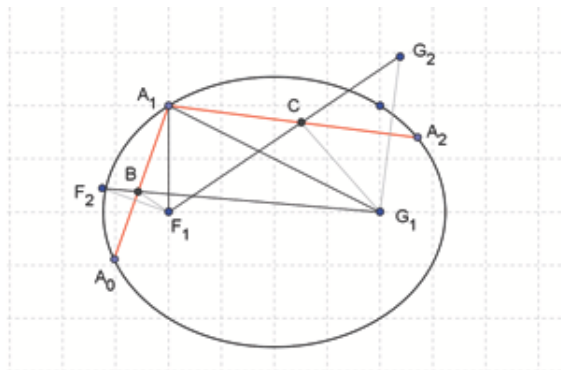


$$|F_1R| + |RF_2| = |F_1R| + |RF| \geq |F_1P| + |PF| = |F_1P| + |PF_2|,$$

a menos que $R = P$, en cuyo caso se da la igualdad. El valor de la suma $|F_1R| + |RF|$ es mínimo cuando $R = P$ esto implica que F_1 , P y F están alineados.

Entonces los ángulos (menores a $\frac{\pi}{2}$) de F_1P y PF con la recta t son iguales. Como el segundo es igual al que forma F_2P con t por ser opuestos por el vértice resulta que F_1P y F_2P forman el mismo ángulo con la recta t . \square

Propiedad. Si un segmento A_0A_1 no atraviesa el segmento que une los focos F_1F_2 entonces la trayectoria del billar que contiene al segmento A_0A_1 nunca intersecta F_1F_2 . Además todos los segmentos que componen a la trayectoria son tangentes a la misma elipse de focos F_1 y F_2 . Si un segmento intersecta a F_1F_2 entonces cada vez que la partícula se refleje, lo volverá a cruzar. Todos los segmentos de esta trayectoria son tangentes a la misma hipérbola de focos F_1 y F_2



Demostración. Sean A_0A_1 y A_1A_2 segmentos consecutivos de un trayectoria de billar tal que A_0A_1 no corte a F_1G_1 , el segmento formado por los focos de la elipse. El

teorema anterior asegura que el ángulo $A_0A_1F_1$ y el ángulo $A_2A_1G_1$ son iguales.

Sean F_2 la imagen por la simetría de eje A_0A_1 de F_1 y G_2 la imagen por la simetría de eje A_1A_2 de G_1 . Definamos

$$B = A_0A_1 \cap F_2G_1, \quad C = A_1A_2 \cap F_1G_2$$

Considero \mathcal{E} la elipse de focos F_1 y G_1 tangente a A_0A_1 . Como los ángulos F_1BA_1 y G_1BA_0 entonces la elipse corta al segmento A_0A_1 en el punto B . Del mismo modo \mathcal{G} otra elipse de focos F_1 y G_1 tangente a A_2A_1 . Análogamente corta al segmento en el punto C .

Debemos demostrar que ambas elipses son la misma o lo que es equivalente:

$$|F_1B| + |BG_1| = |F_1C| + |CG_1|,$$

que se reduce a probar $F_2G_1 = F_1G_2$

Los ángulos $F_2A_1G_1$ y $F_1A_1G_2$ son iguales, usando la simetría $|F_2A_1| = |F_1A_1|$ y $G_1A_1 = G_2A_1$. Se concluye que los triángulos $F_2A_1G_1$ y $F_1A_1G_2$ son congruentes y esto implica que $F_2G_1 = F_1G_2$. El otro caso es análogo. \square

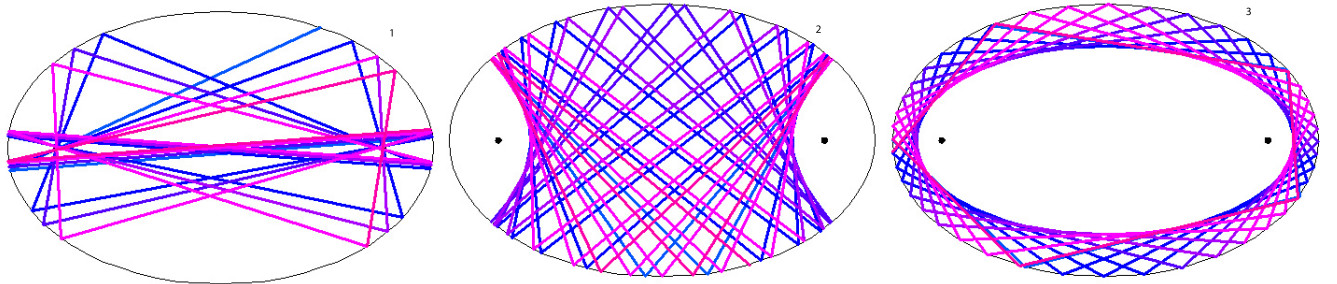
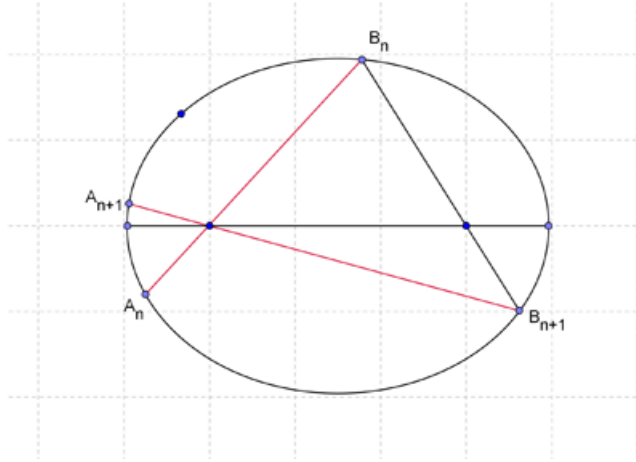


Figura 2.15: Los tres comportamientos no periódicos posibles en una mesa elítica, en la primer imagen la partícula pasa por el foco de la elipse; en la segunda la partícula inicia la trayectoria entre los dos focos; la tercera la partícula comienza el movimiento fuera de los focos. (Imágenes creadas usando la aplicación Reflections in an Elliptical Region creada por Michael Trott, disponible en [39])

Propiedad. *Toda trayectoria que pasa por los focos converge al eje principal de la elipse.*

Demostración. Consideramos los segmentos $\{A_nB_n\}$ correspondientes al tramo trayectoria que pasa por F_1 . Con un análisis geométrico se prueba que el punto de choque A_{n+1} es más próximo al eje mayor que A_n . Luego existe el límite A_∞ de la sucesión $\{A_n\}$, por ser monótona. De la misma manera, se obtiene la existencia del límite B_∞ de la sucesión $\{B_n\}$. El segmento A_\inftyB_∞ es por una trayectoria del billar. La partícula viaja de A_∞ a B_∞ y viceversa infinitas veces. Así el segmento A_\inftyB_∞



es perpendicular a la elipse en ambos extremos. Luego es un segmento contenido en el eje mayor de la elipse. \square

Hemos encontrado las caústicas de las trayectorias que no pasan por los focos. En el caso el segmento inicial de una colisión corte a $F_1 F_2$ la caústica será una hipérbola de focos F_1 y F_2 tangente a dicho segmento. En el otro caso, la caústica será la elipse de focos F_1 y F_2 tangente al segmento.

Todas las trayectorias tangentes a una caústica elíptica dada se encuentran en el espacio de colisión \mathcal{M} en una curva cerrada. Dichas curvas son invariantes por el mapa \mathcal{F} y en cada una de estas curvas invariantes el mapa \mathcal{F} es conjugada a una rotación de cierto ángulo (igual al número de rotación de \mathcal{F} restringido a la curva invariante). Cada trayectoria tangente a una caústica hipérbolica está contenida en dos curvas invariantes, éstas curvas aparecen como óvalos en el diagrama, cada uno es invariante por \mathcal{F}^2 . Las curvas que pasan por los focos están contenidas en una curva cerrada con forma de ocho y la unión de ambas por \mathcal{F} [34]. Al igual que en el caso del círculo esto impide que la transformación sea ergódica.

Definición. Si espacio \mathcal{M} puede ser foliado por variedades uno dimensionales Φ^t invariantes entonces el billar se dice completamente integrable.

Los billares en la elipse y en el círculo son completamente integrables. La siguiente conjetura fue propuesta por Birkhoff,

Conjetura. Los únicos billares completamente integrables son el billar circular y el elíptico.

Capítulo 3

Dinámica del billar.

3.1. Condiciones sobre la mesa de billar para la existencia del flujo del billar.

Cambiamos el contexto del problema del billar. Supongamos que la mesa de billar \mathcal{D} es un conjunto compacto del plano con frontera \mathcal{C}^1 . Una partícula está en movimiento rectilíneo uniforme dentro de \mathcal{D} a velocidad de módulo constante igual a 1 y cada vez que incide con la frontera $\Gamma = \partial\mathcal{D}$ el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. La siguiente pregunta, y la respuesta de la misma, motiva esta sección.

Pregunta. *¿Las condiciones impuestas sobre la mesa son suficientes para que dada una condición inicial (p, v) la trayectoria esté definida para todo tiempo t ?*

La respuesta a dicha pregunta es negativa y daremos un ejemplo de lo que puede suceder. Primero demostraremos la siguiente proposición que describe el comportamiento de un billar con una trayectoria no definida para todo tiempo t .

Proposición. *Sea \mathcal{D} un billar con frontera \mathcal{C}^1 y (p, v) tal que la trayectoria de la partícula no está definida para tiempo $t > T^*$. Entonces la sucesión de los tiempos de choques $\{t_n\}$ tiene límite t_∞ .*

Demostración. Supongamos que la trayectoria de la partícula está definida hasta un tiempo $T^* > 0$ (el caso $T^* < 0$ es análogo).

Consideremos $\{t_n\}$ la sucesión de tiempos de choques positivos de la partícula q . Dicha sucesión está acotada por T^* .

La i -ésima colisión se da en tiempo t_i en el punto q_i . Existe $\varepsilon > 0$ tal que durante el intervalo de tiempo $(t_i, t_i + \varepsilon)$ la partícula se moverá dentro de \mathcal{D} . La sucesión $\{t_n\}$ es estrictamente creciente por lo que tiene límite t_∞ \square

El hecho que la velocidad tenga norma constante igual a uno, implica que si la sucesión de los tiempos de choques t_n tiene límite, t_∞ , la sucesión formada por los puntos donde ocurren los choques q_n tiene límite ya que:

$$d(q_n, q_{n+1}) = |t_n - t_{n+1}| \rightarrow 0.$$

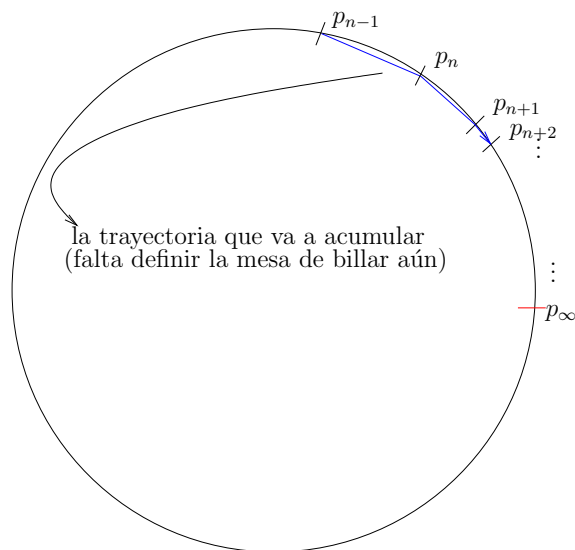
Si construimos una trayectoria tal que los choques convergan entonces dicha trayectoria no estará definida para todo tiempo t .

3.1.1. Billar C^2 con una acumulación en los tiempo de choques.

Este ejemplo se encuentra en el artículo Strange Billiards Tables de B. Halpern [9]. Vamos a construir una mesa \mathcal{D} que será de clase C^2 y todos sus puntos tendrán derivada tercera. La derivada tercera será una función no acotada y esto permitirá la existencia de una trayectoria tal que sus tiempos de colisión acumulan.

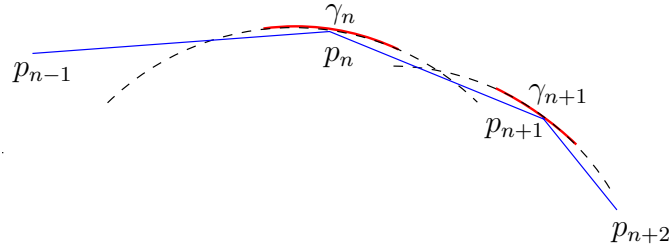
Para la construcción de la mesa del billar \mathcal{D} , primero definiremos los puntos p_n en los cuales ocurrirán las colisiones y luego la curva γ para que dichos puntos conformen una trayectoria de billar.

Consideramos p_n una sucesión de puntos de la circunferencia unidad, con coordenadas polares $\theta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Formamos la trayectoria poligonal obtenida de unir estos puntos y la regla de incidencia determina en cada punto p_n , una determinada tangente a γ .



En cada p_n construiremos una pequeña porción de la curva a la que llamaremos γ_n y tendrá la tangente necesaria en cada uno de los p_n . Cada γ_n es un arco de cir-

conferencia unidad, con el centro tomado de manera tal que en p_n se de la tangencia deseada.



Para construir la curva γ , $\gamma : r = \bar{\gamma}(\theta)$ con θ en coordenadas polares, conectaremos a las γ_n . Considero $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función chichón, es decir, una función \mathcal{C}^∞ tal que:

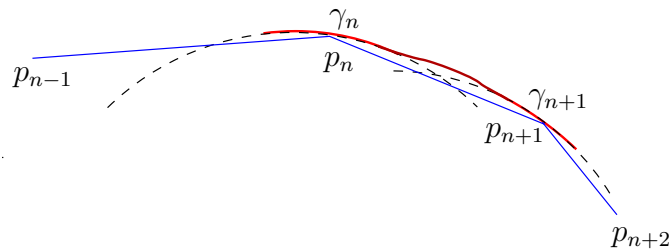
$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ 0 & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Para cada n la función promedio $\alpha_n : [\theta_{n+1}, \theta_n] \rightarrow [0, 1]$ está definida por:

$$\alpha_n(\theta) = \alpha\left(\frac{\theta - \theta_{n+1}}{\theta_n - \theta_{n+1}}\right).$$

Estamos ahora en condiciones de definir la curva γ . Sea n_0 un natural grande que se determinará a continuación.

$$\bar{\gamma}(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus (0, \theta_{n_0}) \\ \bar{\gamma}_n(\theta) + \alpha_n(\theta)[\bar{\gamma}_{n+1}(\theta) - \bar{\gamma}_n(\theta)] & \theta \in [\theta_{n+1}, \theta_n], \quad n \geq n_0 \end{cases}$$



Para $\theta \neq 0$ la curva γ es de clase \mathcal{C}^∞ . Mostraremos que la curva tiene derivada tercera en $\theta = 0$.

Para este fin unos estimados;

$$\delta_n = \theta_n - \theta_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} = a_n n^{-3/2} \quad \text{donde} \quad a_n \rightarrow -\frac{1}{2} \text{ si } n \rightarrow \infty,$$

$$\omega_n = \delta_{n+1} - \delta_n = a_{n+1}(n+1)^{-3/2} - a_n n^{-3/2} = b_n n^{-5/2} \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \rightarrow \frac{3}{4}.$$

Sea c una cota para $|\alpha'(t)|$ y $|\alpha''(t)|$ para $t \in [0, 1]$. Sea n_0 tal que para todo $n \geq n_0$

$$|an| > \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad |a_n^2| > \frac{1}{5}$$

Derivando la función promedio α_n con $n \geq n_0$ y $\theta \in [\theta_{n+1}, \theta_n]$,

$$|\alpha'_n(\theta)| \leq \frac{c}{|\delta_n|} \leq 3cn^{\frac{3}{2}}$$

$$|\alpha''_n(\theta)| \leq \frac{c}{\delta_n^2} \leq 5cn^3.$$

El ángulo entre S , la circunferencia unidad centrada en 0 y γ_n en p_n es igual a $\frac{\omega_n}{4}$. Entonces si $r = g(\theta, \omega)$ es la ecuación, en coordenadas polares, del círculo unidad que pasa por $(1, 0)$ y forma ángulo $\frac{\omega}{4}$ con S en $(1, 0)$, podemos escribir

$$\bar{\gamma}_n(\theta) = g(\theta - \theta_n, \omega_n).$$

La función g es de clase \mathcal{C}^∞ en el conjunto compacto K ,

$$K = \left\{ (\theta, \omega) : \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \omega \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \right\}$$

Se verifica que $g(0, \omega) = g(\theta, 0) = 1$ y $g_\theta(\theta, 0) = g_{\theta\theta}(\theta, 0) = 0$.

Sea e una cota superior para las derivadas parciales $g_{\theta\omega}$ y $g_{\theta\theta\omega}$ en K . Usaremos el Teorema del Valor Medio de Lagrange,

$$g_{\theta\omega}(\theta, \tilde{\omega}) = \frac{g_\theta(\theta, \omega) - g_\theta(\theta, 0)}{\omega} \quad \text{con} \quad \tilde{\omega} \in [0, \omega] \Rightarrow \quad |g_\theta(\theta, \omega)| \leq e|\omega|$$

$$g_{\theta\theta\omega}(\theta, \hat{\omega}) = \frac{g_{\theta\theta}(\theta, \omega) - g_{\theta\theta}(\theta, 0)}{\omega} \quad \text{con} \quad \hat{\omega} \in [0, \omega] \Rightarrow \quad |g_{\theta\theta}(\theta, \omega)| \leq e|\omega|.$$

Aplicando nuevamente el teorema del Valor Medio y las desigualdades obtenidas recién;

$$g_\theta(\bar{\theta}, \omega) = \frac{g(\theta, \omega) - g(0, \omega)}{\theta} \Rightarrow |g(\theta, \omega) - 1| \leq e|\omega||\theta|.$$

Recordando que para $n \geq n_0$ si $\theta \in [\theta_{n+1}, \theta_n]$ entonces $\bar{\gamma}_n = g(\theta - \theta_n, \omega)$,

$$|\bar{\gamma}'_n(\theta)| \leq e|\omega_n| \leq e|b_n|n^{-\frac{5}{2}} \leq en^{-\frac{5}{2}},$$

$$|\bar{\gamma}''_n(\theta)| \leq e|\omega_n| \leq e|b_n|n^{-\frac{5}{2}} \leq en^{-\frac{5}{2}},$$

$$|\bar{\gamma}_n(\theta) - 1| \leq e|\omega_n||\theta - \theta_n| \leq e|\omega_n||\delta_n| \leq e|a_n b_n n^{-4}| \leq en^{-4},$$

Para probar la continuidad en cero,

$$|\bar{\gamma}(\theta) - 1| = |\bar{\gamma}_n(\theta) + \alpha_n(\theta)[\bar{\gamma}_{n+1}(\theta) - \bar{\gamma}_n(\theta)] - 1| \leq |\bar{\gamma}_n(\theta) - 1| + |\bar{\gamma}_{n+1}(\theta) - 1| + |\bar{\gamma}_n(\theta) - 1| \leq 3en^{-4}.$$

Además realizando el límite del cociente incremental,

$$\frac{|\bar{\gamma}(\theta) - 1|}{\theta} \leq \frac{3en^{-4}}{n^{-\frac{1}{2}}},$$

la curva γ es derivable en $\theta = 0$ y $\gamma'(0) = 0$.

Como $g_\theta(\theta - \theta_n, \omega_n) = \bar{\gamma}'_n(\theta)$ entonces,

$$|\bar{\gamma}'(\theta)| \leq 3en^{-\frac{5}{2}} + 3cn^{\frac{3}{2}}2en^{-4} \leq (3e + 6ce)n^{-\frac{5}{2}},$$

Así γ es globalmente de clase C^1 y además,

$$\frac{|\bar{\gamma}'(\theta)|}{\theta} \leq \frac{(3e + 6ce)n^{-\frac{5}{2}}}{n^{-\frac{1}{2}}},$$

lo cual implica la existencia de la derivada segunda en 0 y que $\gamma''(0) = 0$. Análogamente

$$|\bar{\gamma}''(\theta)| \leq 6en^{-\frac{5}{2}} + 2en^{\frac{5}{2}}(3cn^{\frac{3}{2}}) + 5cn^32en^{-4} \leq 16Kcen^{-1},$$

siendo K una constante positiva.

$$\left| \frac{\bar{\gamma}''(\theta)}{\theta} \right| \leq \frac{6cen^{-1}}{(n+1)^{-\frac{1}{2}}},$$

con $n \geq n_0$ y $\theta \in [\theta_{n+1}, \theta_n]$.

Así que,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\bar{\gamma}''(\theta) - \bar{\gamma}''(0)}{\theta - 0} = 0,$$

por lo tanto $\bar{\gamma}'''(0)$ también existe. Se tiene entonces que la curva \mathcal{C}^2 además tres veces diferenciable en $\theta = 0$ y por lo tanto tres veces diferenciable en todo θ .

Tomando n_0 lo suficientemente grande podemos tomar la curvatura de γ arbitrariamente cerca de la de S , la circunferencia unidad centrada en el origen, por lo que puedo suponer que la curvatura de γ nunca se anula. Esto implica además que el billar se puede tomar convexo.

3.1.2. Teorema de Halpern

El ejemplo muestra que era relevante cuestionarse si la trayectoria estaba definida para todo tiempo en el caso de que la frontera fuera \mathcal{C}^1 . Surge una nueva pregunta de manera natural.

Pregunta. *¿Qué condiciones debemos pedirle a la frontera del billar para que no se produzcan acumulaciones en los tiempos de choques?*

El ejemplo expuesto anteriormente, es minimal en el sentido de que en el mismo artículo B.Halpern [9] demuestra un resultado que descarta las acumulaciones de los choques para billares de clase \mathcal{C}^2 con derivada tercera acotada.

Teorema (Halpern). *Sea \mathcal{D} una mesa de billar convexa con derivada tercera acotada y curvatura no nula. Entonces $\Phi^t(p, v)$ está definido para todo $(p, v) \in \Omega$ y $t \in \mathbb{R}$.*

Como el billar es convexo está definido el mapa colisión $\mathcal{F} : \Gamma \times (0, \pi) \rightarrow \Gamma \times (0, \pi)$. Al igual que cuando estudiamos el billar en el círculo, usaremos el ángulo ψ que forma la velocidad con la tangente.

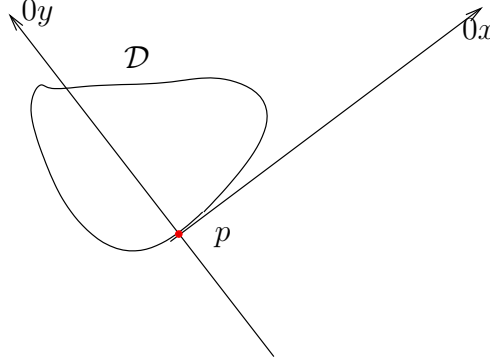
Proposición. *Sea \mathcal{D} una mesa de billar convexa con frontera \mathcal{C}^1 que verifica:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_r \circ \mathcal{F}^n(r, \psi) = p.$$

Entonces:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\psi \circ \mathcal{F}^n(r, \psi) = 0$ ó π
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_\psi \circ \mathcal{F}^n(r, \psi) < \infty$ o $\sum_{n=1}^{\infty} \pi - \pi_\psi \circ \mathcal{F}^n(r, \psi) < \infty$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \|\pi_r \circ \mathcal{F}^{n+1}(r, \psi) - \pi_r \circ \mathcal{F}^n(r, \psi)\| < \infty$

Demostración. Consideramos un sistema de coordenadas cartesianas centrado en p , la dirección positiva del eje $\vec{0x}$ en la dirección tangente Γ y la dirección positiva del eje $\vec{0y}$ según la normal entrante en dicho punto.



Podemos expresar a la curva Γ alrededor del punto p mediante una función g de clase \mathcal{C}^1 $y = g(x)$ con $|x| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ que verifique $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ y $|g'(x)| \leq 10^{-6}$ para todo $|x| \leq \varepsilon$. A la porción de Γ parametrizada de esta manera le llamamos $\bar{\gamma}$.

Considero $p_n = \pi_r \circ \mathcal{F}^n(r, \psi) \in \bar{\gamma}$, $p_n = (x_n, y_n)$ en coordenadas cartesianas. Por hipótesis $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ existe, luego a partir de un n_0 se cumple que $p_n \in \bar{\gamma}$, podemos asumir que $n_0 = 0$.

Sea $\psi_n = \pi_\psi \circ \mathcal{F}^n(r, \psi)$. Usando el teorema de valor medio se deduce que la pendiente s de la recta $\overline{p_n p_{n+1}}$ verifica $|s| \leq 10^{-6}$. Esto implica que la sucesión $\{x_n\}$ es monótona. Si no lo fuera, $x_n < x_{n+1} > x_{n+2}$ ó $x_n > x_{n+1} < x_{n+2}$ para algún n . Si esto sucediera entonces en p_{n+1} la pendiente sería casi vertical lo cual contradice el hecho de que la pendiente s está acotada.

Por lo tanto $\{x_n\}$ es monótona y podemos suponerla monótona creciente (en caso de ser decreciente revertimos la orientación de $0x$). Además $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ entonces $x_n \leq 0$.

La monotonía de x_n implica que por cada colisión el ángulo entre la posición inicial y el $0x$ crece $2\psi_i$. La serie $\sum 2\psi_n$ representa el ángulo entre la posición inicial y la tangente en p , por lo tanto la serie converge y $\psi_n \rightarrow 0$. El caso $\psi_n \rightarrow \pi$ se da cuando la sucesión x_n es decreciente, ya que habíamos revertido la orientación del eje $0x$.

La monotonía de x_n también implica que la serie,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\pi_r \circ \mathcal{F}^{n+1}(r, \psi) - \pi_r \circ \mathcal{F}^n(r, \psi)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|r_{n+1} - r_n\|,$$

está acotada superiormente por la longitud de arco de la curva $\bar{\gamma}$ desde r_1 la posición inicial y p . \square

Corolario 1. Dado $(r, \psi) \in \mathcal{M}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\Phi^t(r, \psi)$ está definida para todo tiempo $t \geq 0$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \|\pi_r \circ \mathcal{F}^{n+1}(r, \psi) - \pi_r \circ \mathcal{F}^n(r, \psi)\|$ *diverge*.

3. $\pi_r \circ \mathcal{F}^n(r, \psi)$ *diverge*.

Demostración.

- [(3) \Leftrightarrow (2)] Supongamos que la afirmación (2) es falsa, es decir la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\pi_r \circ \mathcal{F}^{n+1}(r, \psi) - \pi_r \circ \mathcal{F}^n(r, \psi)\|$$

es convergente. Por lo tanto la sucesión $\{\pi_r \circ \mathcal{F}^n(r, \psi)\}$ es de Cauchy y esto implica que converge.

Si $\{\pi_r \circ \mathcal{F}^n(r, \psi)\}$ es convergente entonces la proposición anterior implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\pi_r \circ \mathcal{F}^{n+1}(r, \psi) - \pi_r \circ \mathcal{F}^n(r, \psi)\| < \infty$$

y esto es absurdo

- [(2) \Leftrightarrow (1)] Es una consecuencia de la proposición anterior.
- [(1) \Rightarrow (3)] Supongamos $\pi_r \circ \mathcal{F}^n(r, \psi)$ converge la proposición anterior implica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\pi_r \circ \mathcal{F}^{n+1}(r, \psi) - \pi_r \circ \mathcal{F}^n(r, \psi)\| < \infty \text{ y } \pi_r \circ \mathcal{F}^n(r, \psi) \rightarrow 0 \text{ ó } \pi.$$

Por lo tanto si empezamos en (r, ψ) la partícula se aproxima tangencialmente a un cierto $p \in \Gamma$ en un tiempo finito t_0 . Podríamos continuar la trayectoria de dos maneras diferentes en dicho punto. Por lo tanto no está definido $\Phi^t(r, \psi)$ para $t > t_0$ \square

Ahora sí estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Halpern.

Demostración. Sea $\gamma : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la parametrización por longitud de arco de la curva Γ , $\kappa(s)$ la curvatura de Γ en el punto s , $n(s)$ la normal apuntando para adentro de la mesa \mathcal{D} en s . Se tiene que la función κ' existe en todo punto y es acotada.

Supongamos que existe un punto (r, ψ) tal que la sucesión

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_0, \quad \text{donde} \quad r_n = \pi_r \circ \mathcal{F}^n(r, \psi)$$

Se probó anteriormente que esto implica que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{\psi} \circ \mathcal{F}^n(r, \psi) < \infty,$$

(quizás debamos revertir la orientación para que esto sea posible).

Le llamamos $\psi_n = \pi_{\psi} \circ \mathcal{F}^n(r, \psi)$.

Afirmación. *Existe L y n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica la siguiente relación:*

$$\psi_{n+1} = \psi_n + d_n \psi_n^2$$

para alguna d_n tal que $|d_n| \leq L$.

Primero veamos como esto implica el teorema y luego probaremos que la sucesión $\{\psi_n\}$ efectivamente lo verifica.

Supongamos que a_n el término general de una serie de términos complejos verifica $m > m_0$ con $m_0 \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + c_n$$

con $\sum |c_n| < \infty$. Un teorema de Weierstrass [15] establece que en dichas hipótesis $\sum a_n$ es convergente sí y sólo sí la parte real de α es mayor a 1.

Aplicamos este resultado con: $a_n = \psi_n$, $m_0 = n_0$, $c_n = d_n \psi_n$ y $\alpha = 0$. Tenemos:

$$\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} = 1 - \frac{0}{n} + c_n.$$

Para $n \geq n_0$ se tiene:

$$\sum_{n \geq n_0} |c_n| \leq \sum_{n \geq n_0} |d_n \psi_n| \leq \sum_{n \geq n_0} L \psi_n < \infty$$

El resultado de Weierstrass implica que $\sum \psi_n$ diverge y esto es absurdo.

Faltaría probar la afirmación para concluir la prueba del teorema.

Considero $a < s < t < b$ y le llamo α y β a los ángulos que forman $\gamma'(s)$ y $\gamma'(t)$ con el vector $\gamma(t) - \gamma(s)$. Cada vez que escribamos

$$\sigma(t - s)^2,$$

nos estamos refiriendo a una función $f(t, s)$ que verifica,

$$f(t, s) \leq L|t - s|^2 \quad \text{tal que } L > 0.$$

Usando el desarrollo de Taylor de orden 2 de $\gamma(s) - \gamma(t)$ en $t = s$ con el resto de Lagrange de orden 3,

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{\langle n(s), \gamma(t) - \gamma(s) \rangle}{\|\gamma(t) - \gamma(s)\|} \\ &= \frac{\langle n(s), \gamma'(s)(t-s) + \frac{1}{2}\gamma''(s)(t-s)^2 + \frac{1}{6}\gamma'''(\xi)(t-s)^3 \rangle}{\|\gamma'(s)(t-s) + \frac{1}{2}\gamma''(\eta)(t-s)^2\|} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\kappa(s)(t-s) + \sigma(t-s)^2}{\|\gamma'(s)(t-s) + \frac{1}{2}\gamma''(\eta)(t-s)^2\|},\end{aligned}$$

donde $\xi, \eta \in [s, t]$ y usamos la relación, $\gamma''(h) = \kappa(h)n(h)$.
De manera análoga

$$\sin \beta = \frac{1}{2}\kappa(t)(t-s) + \sigma(t-s)^2.$$

Usando el desarrollo Taylor de arcsin obtenemos:

$$\alpha = \frac{1}{2}\kappa(s)(t-s) + \sigma(t-s)^2, \quad \beta = \frac{1}{2}\kappa(t)(t-s) + \sigma(t-s)^2.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\beta - \alpha &= \frac{1}{2}(\kappa(t) - \kappa(s))(t-s) + \sigma(t-s)^2 \\ &= \frac{1}{2}\kappa'(\delta)(t-s)^2 + \sigma(t-s)^2,\end{aligned}$$

donde $\delta \in [s, t]$ según el Teorema de Valor Medio. Usando la acotación de κ' , debido a la acotación de la derivada tercera, concluimos que:

$$|\beta - \alpha| \leq L_1(t-s)^2$$

donde L_1 es independiente de s y de t .

Como κ es continua y positiva, usando la compacidad de la mesa, existe $\Delta > 0$ tal que $\kappa(r) \geq \Delta$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Despejando $t-s$, de la expresión hallado para α , para valores de s cercanos a t ,

$$(t-s) = 2\frac{\alpha}{\kappa(s)} + \sigma(t-s)^2$$

Entonces $\exists \varepsilon > 0$ y L tal que si s, t verifican,

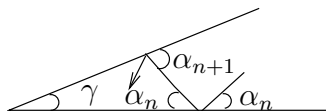
$$|s-t| < \varepsilon \Rightarrow |\alpha - \beta| \leq L\alpha^2$$

Aplicando esto a los tiempos de choques se obtiene la igualdad deseada \square

Este resultado soluciona la definición del flujo del billar para mesas convexas tres veces diferenciable y con derivada tercera acotada, pero las mesas presentadas en este trabajo son \mathcal{C}^3 a trozos y sin restricciones en cuanto a la convexidad de las mismas. Entonces,

Pregunta. ¿Podemos extender este resultado a las mesas de billar presentadas en el capítulo 1?

Lema. Supongamos que la partícula entra en un entorno de una esquina de la mesa de billar \mathcal{D} con ángulo interior positivo $\gamma > 0$ y colisiona con ambos lados de la frontera, entonces necesariamente se escapa de dicho entorno después de a lo sumo $[\pi/\gamma] + 1$ colisiones.

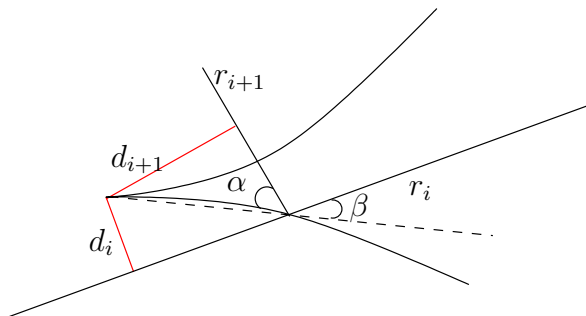


Demostración. Supongamos que los lados de la esquina son chatos, el ángulo que forman la trayectoria del billar con las paredes, crece de la siguiente manera:

$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \gamma$. Luego de $[\pi/\gamma] + 1$ colisiones el ángulo se vuelve mayor a π y eso implica que la partícula se escapa del vértice. Para el caso no lineal, basta aproximarlos con el caso lineal \square

Si la partícula colisiona con un sólo lado de la esquina entonces q_∞ es un punto regular. Mediante este lema concluimos que la única posibilidad para que q_∞ sea un punto esquina, será que sea un punto cúspide. El próximo lema descarta esta posibilidad en el caso que la cúspide esté formada por dos paredes dispersoras o una dispersora y la otra chata.

Lema. Si la partícula entra a una cúspide con ambos lados dispersores o uno dispersor y el otro chato, entonces deberá escaparse de allí luego de un número finito de colisiones.



Demostración. Sea U un entorno de la cúspide, p el punto cúspide. Sea (x, v) una trayectoria que experimenta infinitas colisiones en U , necesariamente las colisiones q_i tienen un límite y por lo visto anteriormente dicho punto debe ser p . Considero d_i la distancia entre el punto cúspide p a la recta por la cuál se mueve la partícula

luego de la i -ésima colisión. Esta distancia está acotada por el diámetro de U , así que la sucesión $\{d_n\}$ es acotada y es positiva. Además necesariamente d_i tiende a cero. Supongo que en la colisión i -ésima sucede en una pared dispersora Sean T_i y T_{i+1} el triángulo rectángulo determinado por d_i y r_i y por d_{i+1} y r_{i+1} respectivamente. Le llamo r a la longitud de la hipotenusa que comparten, β al ángulo opuesto a d_i y α el ángulo opuesto a d_{i+1} . El punto de colisión q_i pertenece a una pared dispersora luego el ángulo ψ que forma con la tangente verifica:

$$\alpha > \psi > \beta$$

Entonces se cumple:

$$d_i = r \sin \beta < r \sin \psi < r \sin \alpha = d_{i+1}$$

Luego de cada colisión con la pared dispersora esta distancia aumenta. Si colisiona contra la pared chata la distancia se mantiene constante. Si la i -ésima colisión se produce en la pared chata, entonces la siguiente se producirá en la pared dispersora. Entonces la sucesión d_i converge a un número estrictamente positivo y esto es absurdo. \square

El caso en que $q_\infty \in \Gamma_*$ sólo se podría dar en un billar con una cúspide formada por una pared dispersante y otra focalizadora. Si esto es posible o no es una pregunta sin contestar aún. Por esta razón la excluiré del trabajo.

Propiedad IV Un billar nunca tendrá una cúspide formada por una pared foco y otra dispersante.

Si la pared es dispersora o chata no se podrá dar una acumulación de los tiempos de colisión allí. Como este fenómeno es local, podemos aplicar el resultado a las paredes focalizadoras. Así que la propiedad IV y el Teorema de Halpern aseguran la no existencia de acumulación en los tiempos de colisión para las mesas de billar presentadas en el capítulo 1 que verifiquen la Propiedad IV. A partir de ahora las mesas a considerar la verificarán por defecto.

Por lo tanto, **si un punto no tiene definida su trayectoria por el flujo para todo tiempo t entonces, para el futuro o para el pasado, proviene de una esquina.** El conjunto $\tilde{\Omega}$ es el complemento de los puntos que para el futuro o para el pasado proviene de una esquina.

3.2. Coordenadas y Regularidad del Flujo del Billar

3.2.1. Coordenadas del Flujo

Al flujo $\Phi^t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$ lo expresaremos en coordenadas $(x, y, w) \in \mathcal{D}$, donde (x, y) son las coordenadas cartesianas y $w \in [0, 2\pi)$ denota el ángulo entre el eje $0x$ positivo y el vector velocidad.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, Φ^t actúa en $\tilde{\Omega}$: al punto (x^-, y^-, w^-) le asocia el punto (x^+, y^+, w^+) .

$$\begin{array}{c} \Phi^t \\ (x^-, y^-, w^-) \mapsto (x^+, y^+, w^+) \end{array}$$

Si en tiempo $(0, t)$ no se produce ninguna colisión entonces:

$$x^+ = x^- + t \cos w^- \quad y^+ = y^- + t \sin w^- \quad w^+ = w^- \quad (3.1)$$

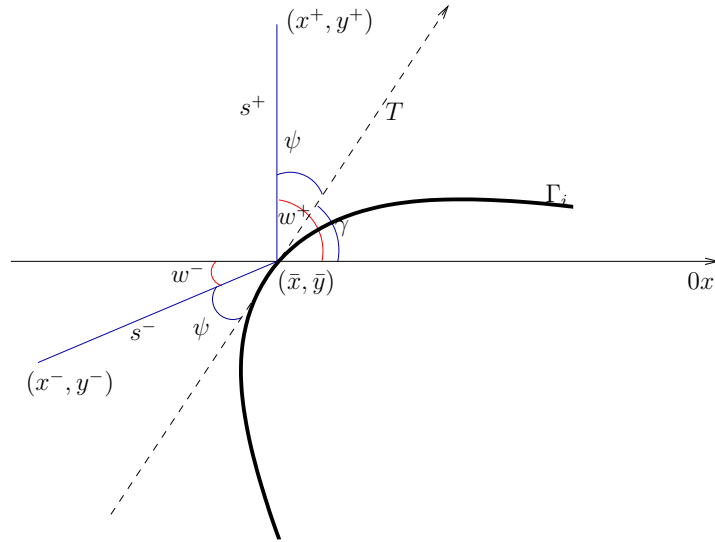


Figura 3.1: Una colisión.

Supongamos que en tiempo $(0, t)$ se produce una única colisión en el punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma_i$. Le llamamos T al vector tangente a la curva Γ_i en el punto (\bar{x}, \bar{y}) ; γ al ángulo entre T y el eje Ox ; ψ al ángulo entre v^+ y T ; s^- al tiempo hasta que colisiona; s^+ tal que $s^+ = t - s^-$ y r la longitud de arco.

Mirando la figura se puede deducir:

$$\begin{aligned}
x^- &= \bar{x} - s^- \cos w^- & x^+ &= \bar{x} + s^+ \cos w^+ \\
y^- &= \bar{y} - s^- \sin w^- & y^+ &= \bar{y} + s^+ \sin w^+ \\
w^- &= \gamma - \psi & w^+ &= \gamma + \psi
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Además al estar la curva parametrizada por longitud de arco, se cumplen la siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
(3.3) \quad d\bar{x} &= \cos \gamma dr \\
d\bar{y} &= \sin \gamma dr \\
d\gamma &= -\kappa dr
\end{aligned}$$

Derivando las ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned}
(3.4) \quad dx^- &= \cos \gamma dr - \cos w^- ds^- + s^- \sin w^- dw^- \\
dy^- &= \sin \gamma dr - \sin w^- ds^- - s^- \cos w^- dw^- \\
dw^- &= -\kappa dr - d\psi
\end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned}
(3.5) \quad dx^+ &= \cos \gamma dr + \cos w^+ ds^+ - s^+ \sin w^+ dw^+ \\
dy^+ &= \sin \gamma dr + \sin w^+ ds^+ + s^+ \cos w^+ dw^+ \\
dw^+ &= -\kappa dr + d\psi
\end{aligned}$$

.

3.2.2. Regularidad del flujo

Definiremos la medida de probabilidad invariante para el flujo del billar y probaremos que los puntos que tienen la trayectoria definida para todo tiempo tienen medida uno con respecto a la medida invariante. Se probará la regularidad del flujo.

Proposición. *El flujo del billar preserva la medida de Lebesgue $dx dy dw$ en Ω .*

Demostración. Computando explícitamente la forma de volumen $dx \wedge dy \wedge dw$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
(3.6) \quad dx^+ \wedge dy^+ \wedge dw^+ &= \sin \psi dr \wedge ds^+ \wedge d\psi \\
dx^- \wedge dy^- \wedge dw^- &= -\sin \psi dr \wedge ds^- \wedge d\psi
\end{aligned}$$

Como $s^+ + s^- = t$ entonces $ds^- = -ds^+$, obtenemos que la forma de volumen es preservada por la acción del flujo en cada colisión. Haciendo inducción en la cantidad de colisiones entre $(0, t)$ se tiene que se preserva la forma de volumen $dx \wedge dy \wedge dw$. Esto implica que la medida de Lebesgue es invariante para Φ^t \square

Definición. *La medida de Lebesgue normalizada en Ω*

$$d\mu_\Omega = (2\pi|\mathcal{D}|)^{-1} dx dy dw$$

es la **medida de probabilidad canónica** preservada por el flujo Φ^t .

Proposición. *El flujo del billar es de clase \mathcal{C}^{l-1} en los puntos de colisión regular.*

Demostración. Las ecuaciones presentadas en (3.4) y (3.5), muestran que la derivada del flujo Φ^t depende de la curvatura κ de la frontera. La curvatura corresponde a la derivada segunda de la parametrización f_i que es una función \mathcal{C}^l , esto implica que la derivada del flujo es una función de clase \mathcal{C}^{l-2} . Por lo tanto Φ^t es una función de clase \mathcal{C}^{l-1} \square

Proposición. *El conjunto de los puntos $\tilde{\Omega}$ es un conjunto denso G_δ de medida 1 respecto a μ_Ω .*

Demostración. Según lo visto en la sección anterior, el conjunto de puntos $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$ corresponde a aquellos estados (q, v) cuya Dinámica está definida durante una cantidad limitada de tiempo hasta que choca contra una esquina (para el futuro o para el pasado).

Al ser el flujo Φ^t es de clase \mathcal{C}^{l-1} en las colisiones regulares, obtenemos que los estados cuyas trayectorias chocan contra las esquinas en el pasado o en el futuro conforman una subvariedad de dimensión 2 y regularidad \mathcal{C}^{l-1} . Por lo tanto $\tilde{\Omega}^c$ es unión finita de subvariedades de dimensión 2. \square

Es una consecuencia directa del teorema anterior que el flujo Φ^t está definido para casi todo punto respecto a la medida μ_Ω . Hemos probado que a menos de un conjunto de medida cero toda trayectoria está definida para todo tiempo t .

Proposición. *El flujo es continuo en $\tilde{\Omega}$.*

Demostración. En las colisiones tangenciales se tiene que $w^+ = w^-$ considerando las ecuaciones obtenidas en (3.2) para (x^+, y^+, w^+) y (x^-, y^-, w^-) se obtiene que el flujo es continuo. Para el resto de los puntos de $\tilde{\Omega}$ probamos que el flujo era diferenciable, por lo tanto el flujo será continuo para todo punto de $\tilde{\Omega}$ \square

Las dos proposiciones anteriores implican que podemos extender de manera continua el flujo Φ^t a todo Ω pero dicha extensión podría no ser única.

3.3. Derivada y medida invariante del mapa colisión del billar.

Al haber descrito las ecuaciones de flujo Φ^t , estamos en condiciones de escribir la derivada del mapa colisión \mathcal{F} .

3.3.1. Derivada del mapa colisión

Considero los siguientes conjuntos en los cuales se producirán las singularidades del mapa colisión.

- $S_0 = \partial\mathcal{M} = \{(r, \varphi) : \varphi = \pm\frac{\pi}{2}\} \cup \{(r, \varphi) : r = a_i, b_i\}$,
donde el conjunto $\{(r, \psi) : r = a_i, b_i\}$ estará incluido en los casos en que Γ_i no sea una curva cerrada diferenciable. S_0 contiene a los estados de Ω correspondientes a puntos esquina y a los correspondientes a salidas tangenciales. Por esta razón el conjunto S_0 es unión de curvas.
- $S_1 = S_0 \cup \{x \in \text{int}M \text{ tales que } \mathcal{F}(x) \in (\text{int}M)^c\}$ S_1 corresponde a puntos que están en S_0 o cuya imagen está en S_0 , es decir puntos que colisionan con una esquina o tangencialmente.
- $S_{-1} = S_0 \cup \{x : x \in \text{int}M \text{ y } \mathcal{F}^{-1}(x) \notin \text{int}M\}$ El conjunto S_{-1} está formado por puntos de S_0 o cuya preimagen por \mathcal{F} está en S_0 .

Sea $x \in \text{int}M$ tal que $\Phi^t(x)$ está definido, al menos para todo $0 \leq t \leq \tau(x)$ entonces

1. $\mathcal{F}(x) \in \text{int}M$,
2. $\mathcal{F}(x)$ corresponde a un colisión tangencial ($\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$),
3. $\mathcal{F}(x)$ es una esquina.

Los casos (2) y (3) corresponden a puntos que colisionan tangencialmente o en esquinas y tales que su colisión anterior fue regular y en un punto regular de la frontera Γ . Esto corresponde a los elementos de $S_1 \setminus S_0$. Si una partícula pertenece a $M \setminus S_1$ tendrá su trayectoria definida por lo menos hasta el próximo choque. Los puntos de $M \setminus S_{-1}$ tendrán definida su trayectoria por lo menos hasta el próximo choque en el pasado.

Proposición. *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $M \setminus S_1, \mathcal{M} \setminus S_{-1}$ son conjuntos abiertos.
2. $\mathcal{F} : M \setminus S_1 \rightarrow M \setminus S_{-1}$ es un homeomorfismo.

Demostración. Los puntos de $\mathcal{M} \setminus S_1$ corresponden a los estados de las partículas en Γ que tienen definida su trayectoria hasta por lo menos el siguiente choque. La función \mathcal{F} es una función continua y abierta en los puntos de $\mathcal{M} \setminus S_1$ por ser el primer retorno del flujo Φ^t , es decir \mathcal{F} es un homeomorfismo local.

Dado $x \in \mathcal{M} \setminus S_1$, entonces $x \in \text{int}\mathcal{M}$ y $F(x) \in \text{int}\mathcal{M}$, por lo que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B(\mathcal{F}(x), \varepsilon) \subset \text{int}\mathcal{M}$. Usando el δ de continuidad, de la función F , se tiene que si $y \in B(x, \delta)$ entonces $\mathcal{F}(y) \in B(\mathcal{F}(x), \varepsilon) \subset \text{int}\mathcal{M}$. Por lo que el conjunto $\mathcal{M} \setminus S_1$ es un conjunto abierto. El conjunto $\mathcal{M} \setminus S_{-1}$ es abierto ya que es imagen por la involución, que es un homeomorfismo, del conjunto $\mathcal{M} \setminus S_1$, que es abierto.

Si considero el primer retorno de Φ^{-t} , obtengo que el primer retorno a \mathcal{M} (el primer choque en el pasado) será una función continua de $\mathcal{M} \setminus S_{-1}$ y necesariamente es la función inversa de \mathcal{F} , por construcción. Hemos probado que $\mathcal{F} : M \setminus S_1 \rightarrow M \setminus S_{-1}$ es un homeomorfismo \square

Vamos a derivar al mapa colisión \mathcal{F} usando las coordenadas halladas para el flujo del billar. Sea $x = (r, \varphi)$ en el interior de \mathcal{M} tal que $\mathcal{F}(x) = (r_1, \varphi_1) \in \text{int}\mathcal{M}$. Sea $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial D, (x_1, y_1) \in \partial D$ las coordenadas de Γ que corresponden a r y a r_1 y w el ángulo que forma la trayectoria del billar y el eje $0x$ positivo. Se tiene:

$$\bar{x}_1 - \bar{x} = \tau \cos w, \quad \bar{y}_1 - \bar{y} = \tau \sin w,$$

donde $\tau = \tau(x)$.

Usamos la misma notación para los ángulos γ, φ , introducidas cuando estudiamos Φ^t , el flujo del billar:

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Usamos las ecuaciones para $(d\bar{x}, d\bar{y}, \gamma)$ deducidas en (3.3). Le llamamos γ_1 y ψ_1 a los ángulos análogos para el punto r_1 :

$$w = \gamma + \psi = \gamma_1 - \psi_1.$$

Derivando esto:

$$dw = -\kappa dr + d\psi = -\kappa_1 dr_1 + d\psi_1.$$

Usando lo anterior y derivando el primer conjunto de ecuaciones de esta sección se llega a:

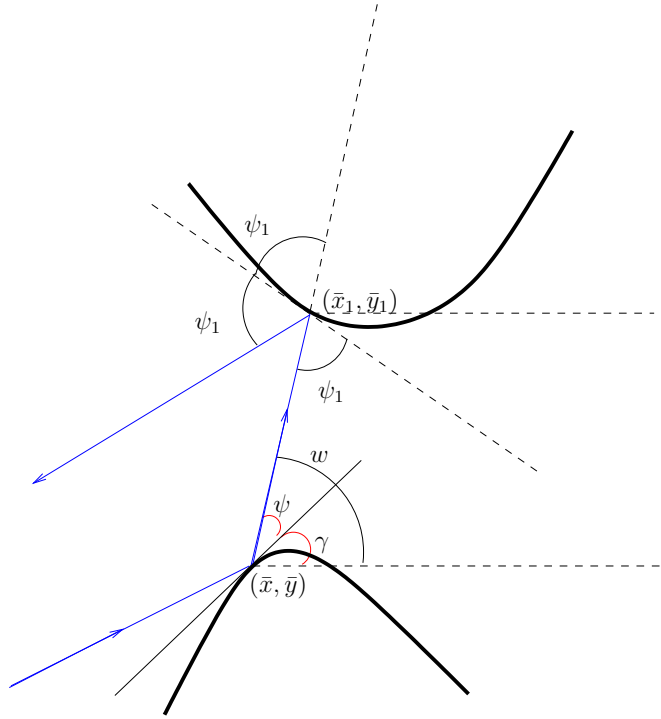


Figura 3.2:

$$\begin{aligned}\cos \gamma_1 dr_1 - \cos \gamma dr &= \cos w d\tau - \sin w \tau dw, \\ \sin \gamma_1 dr_1 - \sin \gamma dr &= \sin w d\tau + \cos w \tau dw.\end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por $(-\sin w)$ y la segunda por $\cos w$ obtenemos:

$$\tau dw = \sin \varphi_1 dr_1 - \sin \psi dr.$$

La cual combinada con la derivación explícita de w que se calculó anteriormente da lugar a:

$$\begin{aligned}-\cos \varphi_1 dr_1 &= (\tau \kappa + \cos \varphi) dr + \tau d\varphi, \\ \cos \varphi_1 d\varphi_1 &= (\tau \kappa \kappa_1 + \kappa \cos \varphi_1 + \kappa_1 \cos \varphi) dr \\ &\quad + (\tau \kappa_1 + \cos \varphi_1) d\varphi.\end{aligned}$$

Así obtenemos explícitamente la matriz Jacobiana del mapa \mathcal{F} en un punto $x = (r, \varphi)$:

$$D_x \mathcal{F} = \frac{-1}{\cos \varphi_1} \begin{bmatrix} \tau \kappa + \cos \varphi & \tau \\ \tau \kappa \kappa_1 + \kappa \cos \varphi_1 + \kappa_1 \cos \varphi & \tau \kappa_1 + \cos \varphi_1 \end{bmatrix}$$

Proposición. *El mapa de primer retorno $\mathcal{F} : \mathcal{M} \setminus S_1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus S_{-1}$ es un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^{l-1}*

Demostración. Se probó que \mathcal{F} es un homeomorfismo; vía la computación explícita del $D_x \mathcal{F}$ y el teorema de la función inversa, se tiene que es un difeomorfismo.

La derivada de la curvatura depende de las curvaturas κ y κ_1 de la frontera $\partial \mathcal{D}$, que corresponden a las derivadas segundas de las parametrizaciones f_i , ambas de clase \mathcal{C}^l . Esto implica que la derivada de \mathcal{F} es de clase \mathcal{C}^{l-2} y por lo tanto \mathcal{F} de clase \mathcal{C}^{l-1} \square

Cuando $\cos \varphi_1 \rightarrow 0$ las derivadas de \mathcal{F} no son acotadas y esto sucede si x_1 está cerca de S_0 y x cerca de S_1 . El conjunto S_1 consiste en las singularidades de \mathcal{F} y S_{-1} son las singularidades de \mathcal{F}^{-1} .

$$S_{n+1} = S_n \cup \mathcal{F}^{-1}(S_n) \quad \text{y} \quad S_{-(n+1)} = S_{-n} \cup \mathcal{F}(S_{-n}).$$

S_{n+1} y $S_{-(n+1)}$ son los conjuntos de singularidades de \mathcal{F}^n y \mathcal{F}^{-n} .

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S_n$$

Teorema. *$\mathcal{F} : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_0$ es un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^{l-1} y están sus iterados están definidos y son todos de clase \mathcal{C}^{l-1} . La medida de Lebesgue $\text{drd}\varphi$ del conjunto $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$ es \emptyset .*

Demostración. La primera afirmación ya se probó en la proposición anterior, probaremos que la medida de $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$ es nula.

Se cumple lo siguiente

$$S_1 = S_0 \cup \mathcal{F}^{-1}(S_0)$$

Si $x = (r, \varphi) \in S_1 \cap S_0$, luego $(r, \varphi) \in S_0 \cup \mathcal{F}^{-1}(S_0)$. Si $(r, \varphi) \in S_1 \cap S_0^c$ entonces el punto (r, φ) colisiona tangencialmente o en una esquina saliendo de manera regular en punto regular de la frontera. En ambos casos $\mathcal{F}(r, \varphi) \in S_0$ ya que $\mathcal{F}(r, \varphi)$ es una salida tangencial o un punto esquina. Así que $S_1 \subset S_0 \cup \mathcal{F}^{-1}(S_0)$. Se observó que el conjunto S_0 es unión de curvas. Si p es un punto esquina y considero $\mathcal{F}^{-1}(p, \varphi)$ con φ variando entre $\pm \frac{\pi}{2}$, esto corresponde distintos trozos de la frontera de la mesa del billar, por lo tanto es una curva compacta diferenciable a trozos de clase \mathcal{C}^l . Del mismo modo los puntos que colisionan tangencialmente forman una curva compacta, así se concluye que S_1 es unión de curvas diferenciables y compactas. Análogamente se muestra que S_n es unión de curvas diferenciables para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Entonces el conjunto $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$ es unión de curvas compactas diferenciables luego \mathcal{M}_0 es un denso G_δ de medida total respecto a la medida de Lebesgue. \square

3.3.2. Medida invariante del mapa colisión.

Teorema. *El mapa \mathcal{F} preserva la medida $\cos \varphi dr d\varphi$ en \mathcal{M}*

Demostración. Se tiene que:

$$\det(D_x \mathcal{F}) = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1}.$$

Usando el teorema del cambio de variable se llega a:

$$\int \int_{\mathcal{F}(A)} \cos \varphi_1 dr_1 d\varphi_1 = \int \int_A \cos \varphi dr d\varphi$$

para todo conjunto A boreliano □

Observar que la medida es finita:

$$\int \int_A \cos \varphi dr d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_{\Gamma} dr = 2|\Gamma|$$

Definición. *La medida normalizada en \mathcal{M}*

$$d\mu = (2|\Gamma|)^{-1} \cos \varphi dr d\varphi$$

*es la **medida canónica de probabilidad** preservada por \mathcal{F}*

Definición. *La integral de los tiempos de retorno*

$$\bar{\tau} = \int_{\mathcal{M}} \tau(x) d\mu(x),$$

*se llama el **tiempo de retorno promedio**, también llamado camino medio libre.*

Lema. *La integral de los tiempos de retorno es finita, por lo que la función τ pertenece a $\mathfrak{L}^1(\mu)$.*

Demostración. Se probó en 3.6 que

$$dx^- \wedge dy^- \wedge dw^- = -\sin \psi dr \wedge ds^- \wedge d\psi = \cos \varphi dr \wedge ds^- \wedge d\varphi$$

$$2\pi|\mathcal{D}| = 2|\Gamma|\bar{\tau},$$

Integrando la forma de volumen $dx^- \wedge dy^- \wedge dw^-$ en Ω :

$$\int_{\Omega} dx^- dy^- dw^- = 2\pi|\mathcal{D}|$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 2\pi|\mathcal{D}| &= \int_{\Omega} \cos \varphi dr ds^- d\varphi = \int_{\mathcal{M}} \cos \varphi dr d\varphi \int_0^{\tau(r,\varphi)} ds^- \\ &= \int_{\mathcal{M}} \tau \cos \varphi dr d\varphi = 2|\Gamma|\bar{\tau}. \end{aligned}$$

□

Con el lema anterior se deduce la fórmula de Santaló:

$$\bar{\tau} = \frac{\pi|\mathcal{D}|}{|\Gamma|}. \quad (3.7)$$

Tenemos una medida invariante y una función integrable podemos aplicar el Teorema Ergódico de Birkhoff.

Teorema (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida, T una transformación que preserve μ y $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Entonces:*

1. *Para casi todo $x \in \mathcal{M}$ existe el siguiente límite:*

$$f^+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} f(T^i x)$$

2. *f^+ es T -invariante, integrable y*

$$\int_{\mathcal{M}} f^+ d\mu = \int_{\mathcal{M}} f d\mu.$$

Una demostración de este teorema se puede encontrar en [16] y en [36]. Es una consecuencia directa del Teorema de Birkhoff, que para toda función integrable

$$g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{se tiene que} \quad \frac{1}{n} g(\mathcal{F}^n x) \rightarrow 0,$$

para ctp x por ser el término general de una serie convergente.

El mapa del billar \mathcal{F} es μ invariante y la función τ integrable, por lo tanto están en las hipótesis del teorema de Birkhoff. Existe una función $\bar{\tau}_x$ \mathcal{F} -invariante:

$$\bar{\tau}_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} \tau(\mathcal{F}^i x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} \tau(\mathcal{F}^{-i} x),$$

que verifica

$$\int \bar{\tau}_x d\mu = \bar{\tau}$$

Sea $X \in \tilde{\Omega}_c$ dado (a, b) le llamo $n_X(a, b)$ al número de colisiones que experimenta la trayectoria $\Phi^t(X)$ durante el intervalo de tiempo (a, b) .

Proposición. *Se tiene que el siguiente límite existe ctp $X \in \tilde{\Omega}_c$*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T}{n_X(0, T)} = \lim_{T \rightarrow -\infty} \frac{T}{n_X(0, T)} = \bar{\tau}_x \quad (3.8)$$

donde $x \in \mathcal{M}$ pertenece a la trayectoria de X .

Demostración. El punto X experimenta infinitas colisiones a lo largo de toda su trayectoria ($X \in \tilde{\Omega}_c$), entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} n_X(0, T) = \infty$$

Considero $x \in \mathcal{M}$ el primer retorno de X i.e, $x = \Phi^{\tau(X)}(X)$. Le llamamos $\tau_0 = \tau(X)$, $\tau_i = \tau(\Phi^{\tau_{i-1}(X)}) = \tau(\mathcal{F}^i x)$. Por Birkhoff el siguiente límite existe,

$$\bar{\tau}_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \tau(\mathcal{F}^i x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \tau(\Phi^{\tau_i(X)}(X)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1}}{n}$$

Dado $T \in \mathbb{R}$ considero $\tau_{n_X(0, T)}$ el tiempo en que se da el último rebote de la trayectoria de X en $(0, T)$, sea x el primer choque de X con la frontera del billar.

Entonces:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T}{n_X(0, T)} - \bar{\tau}_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T - T_{n_X(0, T)}}{n_X(0, T)} \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\tau_{n_X(0, T)} + 1}{n_X(0, T)}.$$

Se cumple que:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\tau_{n_X(0, T)} + 1}{n_X(0, T)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\tau_{n_X(0, T)} + 1}{n_X(0, T)} \frac{(n_X(0, T) + 1)}{(n_X(0, T) + 1)} = 0$$

Hemos probado que el siguiente límite existe ctp y su valor es:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T}{n_X(0, T)} = \bar{\tau}_x$$

donde $x \in \mathcal{M}$ es tal que está en la trayectoria de X . El caso $T \rightarrow -\infty$ es análogo. A dicho límite se lo llamará $\bar{\tau}_X$ \square

Capítulo 4

Exponentes de Lyapunov

4.1. Exponentes de Lyapunov, Hiperbolicidad y Teorema de Oseledets

Sean \mathcal{M} una variedad Riemanniana y $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ un difeomorfismo.

Definición. Decimos que el punto $x \in \mathcal{M}$ tiene exponente de Lyapunov λ asociado al subespacio no trivial DF -invariante E_λ si

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x \mathcal{F}^n v\| = \lambda$$

para todo $v \in E_\lambda$. A la dimensión de dicho subespacio E_λ se le denomina la multiplicidad de λ .

Aproximadamente los exponentes de Lyapunov miden tasa de crecimiento exponencial,

$$\|D_x \mathcal{F}^n v\| \sim e^{n\lambda_x^{(i)}}.$$

Entonces si $\lambda_x^{(i)} > 0$ los vectores tangentes $v \in E_x^{(i)}$ crecen exponencialmente en el futuro y se contraen exponencialmente en el pasado. Si $\lambda_x^{(i)} < 0$ entonces experimentan el comportamiento contrario. Si $\lambda_x^{(i)} = 0$ los vectores no se expanden ni contraen de manera exponencial aunque si podrían hacerlo de manera polinomial.

Definición. El punto $x \in \mathcal{M}$ es **regular** si $x \in \mathcal{M}$ tiene exponentes de Lyapunov $\lambda_x^{(1)}, \dots, \lambda_x^{(m)}$ y existe una descomposición DF -invariante del espacio tangente $T_x \mathcal{M}$ por los subespacios $E_x^{(1)}, \dots, E_x^{(m)}$ asociados a los exponentes de Lyapunov $\lambda_x^{(1)}, \dots, \lambda_x^{(m)}$:

$$T_x \mathcal{M} = E_x^{(1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(m)}$$

para algún $m = m(x)$. Al conjunto de los puntos regulares lo notaremos por \mathbf{R}

El teorema de Oseledets [21] establece que el conjunto de los puntos regulares \mathbf{R} tiene medida 1, la prueba no se escribirá en este trabajo y se puede consultar en [37].

Teorema (Teorema de Oseledets). *Sea \mathcal{M} una variedad compacta Riemanniana con borde y esquinas. $N \subset \mathcal{M}$ un conjunto abierto y denso. $F : N \rightarrow \mathcal{M}$ un difeomorfismo entre N y $F(N)$ de clase \mathcal{C}^r con $(r \geq 2)$ tal que preserva una medida de probabilidad μ . Sea*

$$\tilde{N} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^n(N).$$

Si $\mu(\tilde{N}) = 1$ y se verifica,

$$\int \log^+ \|D_x \mathcal{F}\| d\mu(x) < \infty \quad y \quad \int \log^+ \|D_x \mathcal{F}^{-1}\| d\mu(x) < \infty$$

donde $\log^+ s = \max\{\log s, 0\}$.

Entonces existe un conjunto H \mathcal{F} -invariante, $H \subset \tilde{N}$, $\mu(H) = 1$ tal que para todo $x \in H$ existen los exponentes de Lyapunov.

Es una consecuencia del teorema de Oseledets que los exponentes de Lyapunov y sus multiplicidades son $D\mathcal{F}$ -invariantes.

Definición. *Un punto $x \in M$ regular se dice **hiperbólico** si los exponentes no son nulos. Un mapa se dice **hiperbólico** si ctp $x \in M$ es hiperbólico.*

Muchas veces en lugar de decir que f es hiperbólico decimos que la medida μ es f -hiperbólica [13].

Para un punto hiperbólico $x \in \mathcal{M}$ podemos descomponer el espacio tangente en dos subespacios $D_x \mathcal{F}$ -invariantes, $T_x \mathcal{M} = E_x^u \oplus E_x^s$ donde,

$$E_x^u = \bigoplus_{\lambda_x^{(i)} > 0} E_x^{(i)} \quad y \quad E_x^s = \bigoplus_{\lambda_x^{(i)} < 0} E_x^{(i)}$$

Al espacio E_x^u se lo llama subespacio inestable, contiene todos los vectores que se contraen para el pasado y se expanden en el futuro. Al subespacio E_x^s se lo llama el subespacio estable y contiene los vectores que expanden en el pasado y contraen en el futuro.

En el caso de un punto hiperbólico los subespacios E_x^u y E_x^s son transversales luego ángulo entre ellos es positivo. Vamos a enunciar una propiedad que nos dará control sobre la evolución del ángulo el ángulo entre estos dos subespacios.

Proposición. Sea \mathcal{F} , \mathcal{M} , N , μ en hipótesis del teorema de Oseledets. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que los exponentes de Lyapunov son diferentes a a ctp $x \in M$. Le llamamos,

$$E_x^{a+} = \bigoplus_{\lambda_x^{(i)} > a} E_x^{(i)} \quad y \quad E_x^{a-} = \bigoplus_{\lambda_x^{(i)} < a} E_x^{(i)}$$

Al ángulo entre E_x^{a+} y E_x^{a-} lo notaremos por $\gamma_a(x)$. Para casi todo $x \in M$ se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \gamma_a(F^n(x)) = 0. \quad (4.1)$$

Proposición. Sea F es hiperbólico entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante $C(x, \varepsilon) > 0$ tal que para todo $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|D_x F^{-n}(v)\| &\leq C(x, \varepsilon) e^{-n(\lambda_x - \varepsilon)} \|v\| & \forall v \in E_x^u, \\ \|D_x F^n(v)\| &\leq C(x, \varepsilon) e^{-n(\lambda_x - \varepsilon)} \|v\| & \forall v \in E_x^s. \end{aligned}$$

donde $\lambda_x = \min_i |\lambda_x^{(i)}| > 0$. $\lambda_x > 0$ y $C(x, \varepsilon) > 0$ son ambas funciones medibles en M .

La proposición anterior motiva la siguiente definición.

Definición. Decimos que el mapa es **uniformemente hiperbólico** si existe $\lambda > 0$ y $C > 0$ tal que para todo $x \in M$ y $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|D_x F^{-n}(v)\| &\leq C e^{-n\lambda} \|v\| & \forall v \in E_x^u, \\ \|D_x F^n(v)\| &\leq C e^{-n\lambda} \|v\| & \forall v \in E_x^s. \end{aligned}$$

4.1.1. Exponentes de Lyapunov para el mapa del billar

Teorema. El mapa del billar \mathcal{F} tiene exponentes de Lyapunov en ctp x con respecto a la medida μ .

Demostración. Para que el mapa de colisión esté en las hipótesis de Oseledets necesitamos verificar que

$$\int \log^+ \|D_x \mathcal{F}\| d\mu(x) < \infty \quad y \quad \int \log^+ \|D_x \mathcal{F}^{-1}\| d\mu(x) < \infty.$$

Usando la propiedad de la involución basta probar que

$$\int \log^+ \|D_x \mathcal{F}\| d\mu(x) < \infty.$$

La norma de $D_x\mathcal{F}$,

$$\|D_x\mathcal{F}\| = \frac{1}{|\cos \varphi_1|} \left((\tau\kappa + \cos \varphi)^2 + \tau^2 + (\tau\kappa\kappa_1 + \kappa \cos \varphi_1 + \kappa_1 \cos \varphi)^2 + (\tau\kappa_1 + \cos \varphi_1)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

▪ Si $0 \leq \tau \leq 1$ entonces:

$$\|D_x\mathcal{F}\| \leq \frac{1}{|\cos \varphi_1|} \left((\kappa + 1)^2 + 1 + (\kappa\kappa_1 + \kappa + \kappa_1)^2 + (\kappa_1 + 1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{C}{\cos \varphi_1}.$$

Para poder realizar la acotación por $C > 0$ es necesario que la frontera del billar está formada por curvas de clase \mathcal{C}^l , $l \geq 3$, así la curvatura está acotada.

▪ Del mismo modo si $\tau > 1$,

$$\|D_x\mathcal{F}\| = \frac{\tau}{|\cos \varphi_1|} \left((\kappa + 1)^2 + 1 + (\kappa\kappa_1 + \kappa + \kappa_1)^2 + (\kappa_1 + 1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\tau C}{\cos \varphi},$$

Considero $A = \{x = (r, \varphi) \in \mathcal{M} : 0 \leq \tau(x) \leq 1\}$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \log^+ \|D_x\mathcal{F}\| d\mu(x) &\leq \int_A \log^+ \|D_x\mathcal{F}\| d\mu(x) + \int_{A^c} \log^+ \|D_x\mathcal{F}\| d\mu(x) \\ &\leq \int_A \left| \log \frac{C}{\cos \varphi_1} \right| d\mu(x) + \int_{A^c} \left| \log \frac{\tau(x)C}{\cos \varphi} \right| d\mu(x) \\ &\leq \int_{\mathcal{M}} |\log \tau(x)| d\mu(x) + \int_{\mathcal{M}} |\log^+ \cos \varphi_1| d\mu(x) + |\log C|. \end{aligned}$$

Para acotar el primer término;

$$\int_{\mathcal{M}} |\log \tau(x)| d\mu(x) \leq \int_{\mathcal{M}} \tau(x) d\mu(x) < \infty$$

Usando la invarianza de la medida μ ,

$$\int |\log^+ \cos \varphi_1| d\mu(x) = \int |\log^+ \cos \varphi| d\mu(x)$$

Por último calculamos la integral de manera explícita:

$$\begin{aligned} \int_M |\log \cos \varphi| \cos \varphi d\varphi dr &= |\Gamma| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\log \cos \varphi| \cos \varphi d\varphi \\ &= |\Gamma| (2 - \log 4) < \infty. \end{aligned}$$

Obtenemos que $\int \log^+ \|D_x\mathcal{F}\| d\mu(x) < \infty$ por tanto \mathcal{F} verifica el teorema de Osele-dets \square

Como $\dim \mathcal{M} = 2$, entonces c.t.p. $x \in \mathcal{M}$ tiene un único exponente con multiplicidad 2 o dos distintos $\lambda_x^{(1)} > \lambda_x^{(2)}$ de multiplicidad uno cada uno.

Teorema. $\lambda_x^{(1)} + \lambda_x^{(2)} = 0$ para casi todo punto.

Demostración. Sea $x \in \mathcal{M}$ un regular. R un paralelogramo en $T_x\mathcal{M}$ cuyos lados a y b son paralelos a E_x^1 y a E_x^2 los subespacios asociados a los exponentes de Lyapunov respectivamente. Al ángulo entre a y b le llamamos γ entonces el área de R es

$$|R| = ab \sin \gamma.$$

$D_x\mathcal{F}^n(R)$ es un paralelogramo en $T_{\mathcal{F}^n(x)}\mathcal{M}$ de lados a_n y b_n y ángulo γ_n . Se tiene:

$$|\det D_x\mathcal{F}^n| = \frac{\sin \gamma_n}{\sin \gamma} \frac{a_n}{a} \frac{b_n}{b}.$$

Usando la definición de exponentes de Lyapunov:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{a_n}{a} = \lambda_x^{(1)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{b_n}{b} = \lambda_x^{(2)}$$

Por otro lado usando la fórmula del jacobiano de \mathcal{F} hallada anteriormente :

$$|\det D_x\mathcal{F}^n| = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_n}$$

donde φ y φ_n son las coordenadas φ -ésimas de x y de $\mathcal{F}^n(x)$ respectivamente.

La función $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $g = \cos \circ \Pi_\varphi$ tiene integral finita y $g \circ \mathcal{F}^n = \cos \varphi_n$ entnces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \cos \varphi_n \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\det D_x\mathcal{F}^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_n} = 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\det D_x\mathcal{F}^n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{\sin \gamma_n}{\sin \gamma} \frac{a_n}{a} \frac{b_n}{b} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{\sin \gamma_n}{\sin \gamma} + \frac{1}{n} \log \frac{a_n}{a} + \frac{1}{n} \log \frac{b_n}{b} \\ &= \lambda_x^{(1)} + \lambda_x^{(2)}, \end{aligned}$$

donde hemos usado (4.1) para probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{\sin \gamma_n}{\sin \gamma} = 0.$$

Con esto se concluye que

$$\lambda_x^{(1)} + \lambda_x^{(2)} = 0$$

□

Ejemplo. Volvamos a los ejemplos en el círculo y el cuadrado. En el círculo, usando las ecuaciones deducidas en (2.7) se llega a que la matriz que representa a $D_z\mathcal{F}^n$ es

$$D_z\mathcal{F}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se deduce por la forma de la matriz que los exponentes de Lyapunov existen en todo punto y son nulos ya que la derivada crece de manera líneal.

En el cuadrado mirando las ecuaciones (2.5) concluye que la derivada es nula y por tanto los exponentes de Lyapunov existen para todo punto y valen cero.

En el billar en la elipse los exponentes son cero pero esto no lo probaremos.

4.1.2. Un billar de clase \mathcal{C}^1 que no verifica el Teorema de Oseledets.

A continuación se presentará un ejemplo de un billar construido en [14], cuya frontera es \mathcal{C}^∞ en todo punto menos uno en el cual la curvatura es infinita. Dicho billar no verifica Teorema de Oseledets ya que $\int \log^+ \|D_x\mathcal{F}\| d\mu = \infty$. El ejemplo mostrará que es esencial que la curvatura sea una función acotada.

Vamos a construir a la mesa \mathcal{D} y H un subconjunto de \mathcal{M} de medida positiva para el cual la integral diverge. La frontera de del billar Γ será un rectángulo con los bordes redondeados, en el cual remplazaremos un intervalo I por una curva L que será la culpable del comportamiento particular de este billar .

Considero

$$d = \sum_{n=2}^{\infty} r_n \quad \text{donde} \quad r_n = \frac{1}{n(\log n)^2}$$

El rectángulo tendrá cada lado más largo que $12d$. El intervalo I , determinado por los puntos A y B , estará situado en el lado inferior del rectángulo, tendrá largo $4d$ con su extremo derecho B situado en el punto medio del lado.

Al rectángulo lo redondearemos de manera tal que la longitud de cada uno de los cuatro arcos sea menor a $\frac{1}{4}r_2$. Esto asegurará que el proceso de suavizado de las esquinas no se intersectará con la curva que construiremos en sustitución del intervalo I .

Para definir la curva y H debemos particionar el intervalo $I = [0, 4d]$. Usaremos los subintervalos consecutivos I_n y J_n de largo $2r_n$ cada uno con este fin.

$$\begin{array}{ccccccc} | & I_2 & | & J_2 & | & I_3 & | & J_3 & | & \dots & | & I_n & | & J_n & | \\ \hline \end{array}$$

Para construir la curva L , consideremos $f \in \mathcal{C}^\infty(-1, 1)$ definida como:

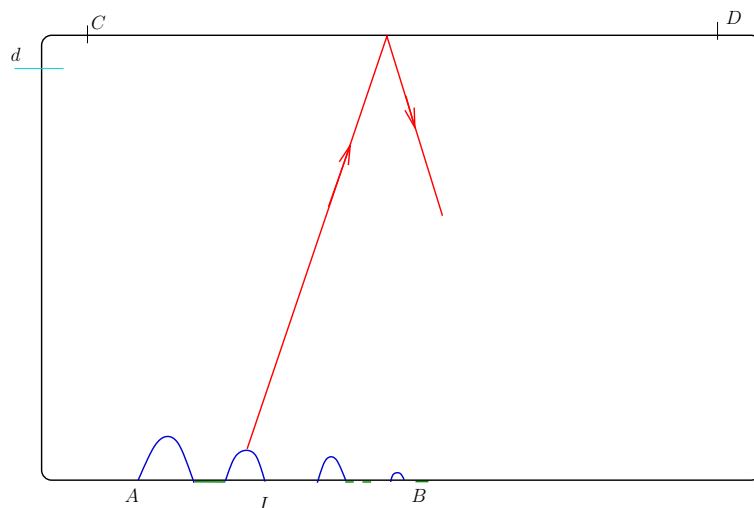


Figura 4.1: El billar y los parámetros usados en construcción.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| \leq \frac{3}{4} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{4}{5} \\ \text{estrictamente creciente en} & [-\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}] \\ \text{estrictamente decreciente en} & [\frac{3}{4}, \frac{4}{5}] \end{cases}$$

La curvatura de una curva dada como gráfico de una función $y = h(x)$ es igual a,

$$k(x) = \frac{h''(x)}{(1 + h'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para cada $a \in (0, 1]$ definimos

$$f_a : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}, f_a(x) = a^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{x}{a}\right).$$

Entre $(-\frac{3}{4}a, \frac{3}{4}a)$ esta función es un elipse si $a \neq 1$ y si $a = 1$ es un círculo, ambas curvas de curvatura dada por $y = f_a(x)$ y es mayor o igual a $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

Definamos la curva en el intervalo AB ,

$$g(x) = \begin{cases} f_{r_n}\left(x - 4 \sum_{k=2}^{n-1} (r_k - r_n)\right) & \text{si } x \in I_n \\ 0 & \text{si } x \in J_n \end{cases}$$

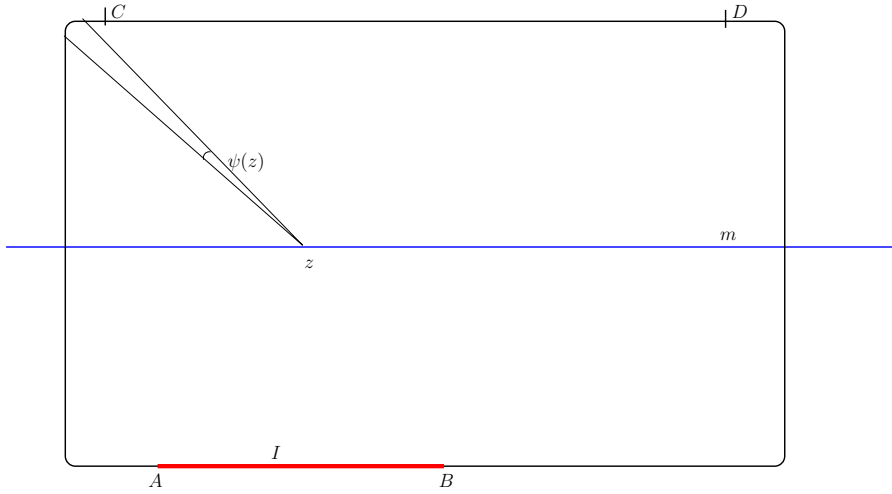
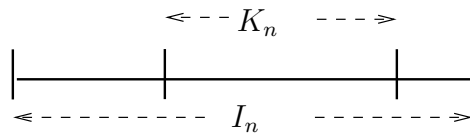


Figura 4.2: El suavizado de las esquinas

La función g es de clase \mathcal{C}^1 luego la curva L tiene esa regularidad. La curvatura de la curva L en los puntos medios de I_n igual a $\frac{1}{\sqrt{r_n}}$ así que tiendeo a ∞ cuando $n \rightarrow \infty$, esto le impedirá tener derivada segunda en el punto B . La curva L tiene altura máxima $(r_2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}} \log 2^3}$ por lo que no se intersectará con las curva con las que realizamos el suavizado de los vértices.

Ahora vamos a determinar el subconjunto H . Para cada I_n , le llamo K_n al subintervalo de I_n de longitud $\frac{3}{4}r_n$ tal que el centro de I_n coincide con el extremo izquierdo de K_n .

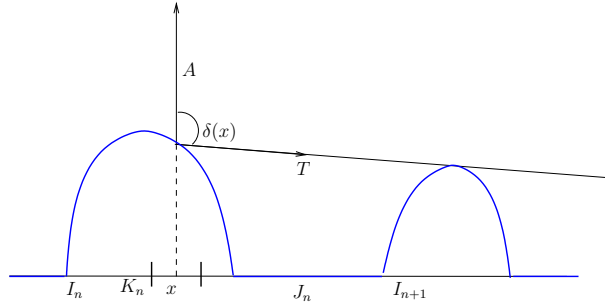


Consideremos $x \in K_n$ para algún n . Sea T el único vector unitario tal que el rayo

$$\{(x, g(x)) + sT : s \geq 0\}$$

es tangente a la curva L en algún punto $(y, g(y))$ donde $y \in I_{n+1}$. Sea $\delta(x)$ al ángulo que forma dicho vector T con el $(0, 1)$. Existe un $\gamma > 0$ tal que para todo $n \geq 2$ y todo $x \in K_n$ $\delta(x) \geq \gamma$

Sean C y D los puntos pertenecientes al lado opuesto de la curva L que conforman el segmento que no se vió afectado por el proceso de suavizado. El conjunto H consistirá,



$$H = \{(r, \varphi) : r \in K_n \text{ para alg\u00fan } n, r_1 \in CD\}$$

donde $(r_1, \varphi_1) = \mathcal{F}(r, \varphi)$. Para los puntos de H ($\kappa_1 = 0$), se tiene

$$\left| \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right| = \frac{1}{\sin \psi_1} (\tau \kappa \kappa_1 + \kappa \sin \psi_1 + \kappa_1 \sin \psi) = |\kappa|$$

Como la funci\u00f3n g es \mathcal{C}^1 la longitud de la curva es finita podemos parametrizarla con $(x, g(x))$. Entonces:

$$\int_H \log(k(r)) \sin \psi dr d\psi = \int_H \log(k(x)) \sin \psi dx d\psi.$$

Sea $K = \cup K_n$. Para cada $x \in K_n$ la medida de Lebesgue de $\{\psi : (x, \psi) \in H\}$ es mayor a $\frac{\gamma}{2}$.

Por lo tanto se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_H \log k(x) \sin \psi dx d\psi &\geq \int_K \log k(x) dx \int_0^{\frac{\gamma}{2}} \sin \psi d\psi \\ &\geq \frac{\gamma^2}{16} \int_K \log k(x) dx > \frac{\gamma^2}{16} \sum \int_{K_n} \log k(x) dx \geq \frac{\gamma^2}{16} \sum \int_{K_n} \log(n(\log n)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\gamma^2}{16} \frac{3}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} \log(n(\log n)^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\int_H \log^+ \|D_x \mathcal{F}\| d\mu(x) = \infty.$$

Por lo tanto este billar no verifica el Teorema de Oseledets.

4.1.3. Exponentes de Lyapunov para el Flujo.

Vamos a hallar los exponentes de Lyapunov del flujo, usando las las coordenadas del flujo y los exponentes de Lyapunov del mapa del billar.

Definición. Sea $\Phi^t : \Omega \rightarrow \Omega$ un flujo diferenciable definido en Ω una variedad Riemanniana. Si existe H un subconjunto Φ^t invariante, de medida 1 respecto a una medida de probabilidad Φ^t -invariante. Tal que para todo punto $X \in H$ existe una descomposición $D_X \Phi^t$ invariante del espacio tangente:

$$T_X \Omega = E_X^{(0)} \oplus \dots \oplus E_X^{(m)}$$

con $m=m(X)$ que cumple que para todo $v \in E_X^{(i)}$

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{T} \log \|D_X \Phi^t v\| = \lambda_X^{(i)}.$$

Entonces a los $\lambda_X^{(1)}, \dots, \lambda_X^{(m)}$ se les llama **exponentes de Lyapunov** en el punto X y $m_i = \dim E_X^{(i)}$ a sus respectivas multiplicidades. Los valores de los $\lambda_X^{(i)}$ y sus multiplicidades son invariantes respecto del flujo.

Sea $X = (x, y, w) \in \Omega$, $dX = (dx, dy, dw) \in T_X \Omega$ un vector tangente. Le llamamos

$$X_t = (x_t, y_t, w_t) = \Phi^t(X) \quad \text{y} \quad dX_t = (dx_t, dy_t, dw_t) = D_X \Phi^t(dX).$$

Definimos el siguiente subespacio vectorial,

$$T_X^0 \Omega = \{dX : \sin w dx = \cos w dy, dw = 0\} \quad (4.2)$$

Este subespacio corresponde a los vectores de la forma

$$dx = c \cos w, \quad dy = c \sin w, \quad dw = 0; \quad (4.3)$$

para algún $c \neq 0$. Es decir, el subespacio $T_X^0 \Omega$ corresponde a los vectores tangentes dX es paralelos a la dirección del flujo.

Consideramos el espacio ortogonal a $T_X^0 \Omega$:

$$T_X^\perp \Omega = (T_X^0 \Omega)^\perp = \{dX : \cos w dx + \sin w dy = 0\}. \quad (4.4)$$

Proposición. $T_X^0 \Omega$ y $T_X^\perp \Omega$ son ambos conjuntos $D_X \Phi^t$ -invariantes. Además $T_X^0 \Omega$ está incluido en el subespacio correspondiente al exponente de Lyapunov cero.

Demostración. Sea $dX \in T_X^0\Omega$ de la forma

$$dx = c \cos w, \quad dy = c \sin w, \quad dw = 0 \quad \text{para algún } c \neq 0$$

Antes de la colisión, considerando las ecuaciones deducidas para la derivada del flujo en (3.4) y usando que en este caso;

$$dr = d\psi = 0 \quad y \quad ds^- = -c.$$

Se obtiene $ds^+ = -ds^-$ y por lo tanto $ds^+ = c$. Además con la ecuaciones para la derivada del flujo postcolisional (3.5) se tiene:

$$dx^+ = c \cos w, \quad dy^+ = c \sin w, \quad dw^+ = 0.$$

Usando un argumento inductivo, se concluye que el vector $D_X\Phi^t(dX)$ es paralelo a la dirección del flujo, para todo $t \in \mathbb{R}$, luego $T_X^0\Omega$ es $D\Phi^t$ -invariante y la longitud del vector no cambia.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|D_X\Phi^t(dX)\| &= \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|(c \cos w, c \sin w, 0)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log c^2 = 0. \end{aligned}$$

Por lo que $T_X^0\Omega$ está incluido en el subespacio correspondiente a exponente de Lyapunov cero.

Utilizando las ecuaciones de las coordenadas del flujo obtenemos,

$$\begin{aligned} \cos w^+ dx^+ + \sin w^+ dy^+ &= \cos \psi dr + ds^+, \\ \cos w^- dx^- + \sin w^- dy^- &= \cos \psi dr - ds^- = \cos \psi dr + ds^+. \end{aligned}$$

Lo que prueba la invarianza de $T_X^\perp\Omega$ □

La descomposición ortogonal del espacio tangente

$$T_X^0\Omega = T_X\Omega \oplus T_X^\perp\Omega \tag{4.5}$$

es $D_X\Phi^t$ invariante. Esta descomposición es la que da a lugar a un nuevo sistemas de coordenadas para $T_X\Omega$.

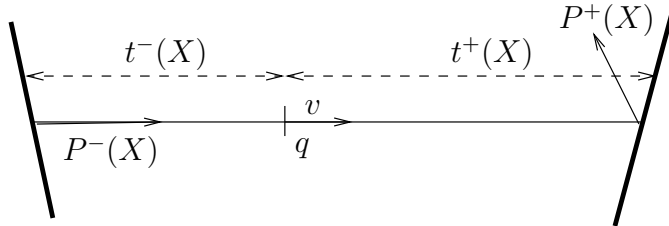
A continuación nos restringimos al subespacio $T_X^\perp\Omega$ y lo relacionamos con el subespacio $T_z\mathcal{M}$ para algún z que se determinará a continuación.

Definición. Sea $X = (q, v) \in \Omega$ definimos,

$$\begin{aligned} t^+(X) &= \min\{t > 0 : \Phi^t(X) \in \mathcal{M}\} \\ t^-(X) &= \max\{t < 0 : \Phi^t(X) \in \mathcal{M}\}. \end{aligned}$$

son los tiempos de la primer colisión en el futuro y la primera en el pasado respectivamente. Tenemos definidas dos proyecciones de Ω sobre \mathcal{M} :

$$P^\pm(X) = \Phi^{t^\pm(X)}(X)$$



Es claro que si $x \in \mathcal{M}$,

$$t^+(x) = \tau(x), \quad t^-(x) = \tau(\mathcal{F}^{-1}x), \quad \mathcal{F}^{\pm 1}(x) = P^\pm(x)$$

Teorema. El flujo Φ^t tiene exponente de Lyapunov cero en el subespacio $T_X^0\Omega$ y dos exponentes de Lyapunov proporcionales al los del mapa \mathcal{F} :

$$\lambda_X^{(0)} = 0 \quad y \quad \lambda_X^{(i)} = \bar{\tau}_X^{-1} \lambda_z^{(i)}, \quad \text{con } i = 1, 2, \quad z = P^+(X) \quad (4.6)$$

y $\bar{\tau}_X$ el promedio de Birkhoff de la función τ .

Si $\lambda_X^{(i)} \neq 0$ para $i = 1, 2$ entonces los subespacios $E_X^{(i)}$ asociados verifican:

$$E_X^{(i)} \subset T_X^\perp \Omega \quad y \quad DP^+(E_X^{(i)}) = E_z^{(i)}. \quad (4.7)$$

Demostración. En la proposición anterior se probó la afirmación sobre $T_X^0\Omega$.

Consideremos,

$$D_X P^+ : T_X \Omega \rightarrow T_z \mathcal{M} \quad \text{donde } z = P^+(X).$$

Si $dX \in T_X^0\Omega$ entonces $dr = d\psi = 0$ luego el núcleo de la transformación lineal es igual a $T_X^0\Omega$.

Como $T_X^0\Omega$ es un subespacio de dimensión 1 y complementario a $T_X^\perp\Omega$ se tiene que $D_X P^+$ restringida a $T_X^\perp\Omega$,

$$D_X P^+ : T_X^\perp\Omega \rightarrow T_z \mathcal{M} \quad \text{es un isomorfismo lineal.}$$

Supongamos que z es un punto que admite exponente de Lyapunov λ del mapa \mathcal{F} y $dz = (dr, d\varphi) \in T_z \mathcal{M}$ un vector perteneciente al subespacio de Lyapunov asociado a λ . Sea $dX = (dx, dy, dw)$ la única preimagen por $D_X P^+$ del vector dz .

Como $dX \in T_X^\perp\Omega$ entonces:

$$\|dX\| = \sqrt{(d\xi)^2 + (dw)^2} \quad \text{donde} \quad d\xi = -\sin w dx + \cos w dy \quad (4.8)$$

Observar que $d\xi$ es la componente ortogonal del vector (dx, dy) sobre la velocidad. Se cumple que:

$$d\xi = \cos \varphi dr - s dw, \quad d\omega = -\kappa dr + d\varphi, \quad \text{donde } s = t^+(X). \quad (4.9)$$

Despejando obtenemos,

$$dr = \frac{d\xi + s dw}{\cos \varphi}, \quad d\varphi = \frac{\kappa d\xi + (s\kappa + \cos \varphi) dw}{\cos \varphi}. \quad (4.10)$$

Le llamamos $\hat{t}_X = \max\{t^+(X), 1\}$ y acotamos:

$$\|dz\| = \sqrt{(dr)^2 + (d\varphi)^2} = \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{(d\xi)^2(1 + \kappa) + (d\varphi)^2(s\kappa + 1)} \leq c_1 \frac{\hat{t}_X \|dX\|}{\cos \varphi}, \quad (4.11)$$

donde $c_1 > 0$ es una constante determinada por \mathcal{D} . De manera análoga,

$$\|dX\| \leq c_2 \hat{t}_X \|dz\|, \quad (4.12)$$

donde $c_2 > 0$ es una constante determinada por \mathcal{D} .

Se obtiene:

$$\log \|dX\| = \log \|dz\| + \mathcal{O}(\log \cos \varphi) + \mathcal{O}(\log \hat{t}_X).$$

Consideramos la trayectoria $\Phi^t(X)$ durante un intervalo de tiempo $(0, T)$ y denotamos $n = n_X(0, T)$ el número de colisiones que experimenta,

$$\log \|D_X \Phi^T(dX)\| = \log \|D_x \mathcal{F}^n(dz)\| + \mathcal{O}(\log \cos \varphi_n) + \mathcal{O}(\log \hat{t}_{\Phi^T(X)}),$$

donde φ_n es la coordenada φ -ésima en el punto $\mathcal{F}^n z$. Como se vió antes, es una consecuencia del teorema de Birkhoff que

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{T} \cos \varphi_n \rightarrow 0 \text{ y que } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{T} \log \hat{t}_{\Phi^T(X)} \rightarrow 0.$$

Observar que si $T \rightarrow \pm\infty$ entonces $n \rightarrow \infty$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \|D_X \Phi^T(dX)\| &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \|D_z \mathcal{F}^{n_X(0,T)}(dz)\| = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \frac{n_X(0,T)}{n_X(0,T)} \log \|D_z \mathcal{F}^{n_X(0,T)}(dz)\| \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{n_X(0,T)}{T} \frac{1}{n_X(0,T)} \log \|D_z \mathcal{F}^{n_X(0,T)}(dz)\| = \bar{\tau}_X^{-1} \lambda \end{aligned}$$

Donde en la última igualdad se uso (3.8).

Análogamente

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} \frac{1}{T} \|D_X \Phi^T(dX)\| = \bar{\tau}_X^{-1} \lambda$$

Podemos concluir que

$$\lambda_X^{(0)} + \lambda_X^{(1)} + \lambda_X^{(2)} = 0 \text{ ctp respecto a } \mu_\Omega.$$

□

Capítulo 5

Hiperbolicidad de Biliares Dispersores

5.1. Herramientas para el estudio de la hiperbolicidad.

5.1.1. Coordenadas de Jacobi

Propondremos un nuevo sistema de coordenadas $(d\eta, d\xi, dw)$ para $T_X\Omega$ que resulta más conveniente para el estudio del flujo del bilar. Definiendo

$$d\eta = \cos w dx + \sin w dy, \quad d\xi = -\sin w dx + \cos w dy. \quad (5.1)$$

A estas coordenadas les llamaremos **coordenadas de Jacobi**.

Se tiene que $d\eta$ es la componente del vector (dx, dy) sobre el vector velocidad v y $d\xi$ la componente ortogonal. Estas coordenadas descomponen el tangente de manera natural en

$$T_X\Omega = T_X^0\Omega \oplus T_X^\perp\Omega,$$

ya que $d\eta$ es la coordenada del subespacio vectorial unidimensional $T_X^0\Omega$ y $(d\xi, dw)$ las coordenadas del 2-subespacio vectorial $T_X^\perp\Omega$.

Sea $dX = (d\eta, d\xi, dw)$ un vector tangente cualquiera y llamamos $dX_t = (d\eta_t, d\xi_t, dw_t) = D_X\Phi^t(dx)$.

El mapa $D_X\Phi^t$ está dado por la siguiente matriz 3×3 :

$$D_X\Phi^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix}.$$

El bloque 2×2 de abajo a la derecha de la matriz, que se determinará a continuación, corresponde a la transformación $(d\xi, dw) \rightarrow (d\xi_t, dw_t)$. Para estudiar esto restringimos $D_X \Phi^t$ al subespacio $T_X^\perp \Omega$, le llamamos $D_X^\perp \Phi^t$ a dicha restricción.

$$D_X^\perp \Phi^t : T_X^\perp \Omega \rightarrow T_{\Phi^t X}^\perp \Omega.$$

Supongamos que no hay colisiones entre $(0, T)$:

$$\begin{aligned} d\xi_t &= -\sin w dx_t + \cos w dy_t \\ &= -\sin w(dx + t(-\sin w)dw + \cos w) + \cos w(dy + t \cos w dw + \sin w) \\ &= d\xi + t dw. \end{aligned}$$

La acción de $D_X^\perp \Phi^T$ queda determinada por la siguiente matriz 2×2 de forma triangular superior:

$$U_t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si hubiera una colisión en tiempo T ,

$$\begin{aligned} d\xi^- &= \cos \varphi dr - s^- dw^- & dw^- &= -\kappa dr + d\varphi \\ d\xi^+ &= -\cos \varphi dr + s^+ dw^+ & dw^+ &= -\kappa dr - d\varphi \end{aligned}$$

Consideramos $s^+ = s^- = 0$ para ver la acción del flujo en el tiempo de colisión,

$$\begin{aligned} d\xi^+ &= -d\xi^- \\ dw^+ &= -\mathcal{R}d\xi^- - dw^- \quad \text{donde} \quad \mathcal{R} = \frac{2\kappa}{\cos \varphi}, \end{aligned}$$

Definición. Dado $x \in \mathcal{M}$ sean κ la curvatura de la curva en dicho punto y φ la coordenada φ -ésima de x , a

$$\mathcal{R} = \frac{2\kappa}{\cos \varphi}$$

se le llama *parámetro de la colisión*.

El parámetro de colisión es igual al inverso de la distancia recorrida en el círculo de curvatura κ .

La acción del flujo en una colisión está determinado por la matriz triangular inferior:

$$L_{\mathcal{R}} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathcal{R} & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces podemos expresar a $D_X^\perp \Phi^t$ por el producto alternado de matrices triangulares superiores e inferiores:

$$D_X^\perp \Phi^T = U_{t-t_n} L_{\mathcal{R}_n} \dots U_{t_2-t_1} L_{\mathcal{R}_1} U_1,$$

t_i es el tiempo de la i -ésima en el intervalo $(0, t)$ y $\mathcal{R}_i = \frac{2\kappa_i}{\cos \varphi_i}$ es el parámetro de la i -ésima colisión.

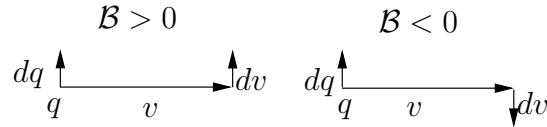
5.1.2. Construcción de un frente de onda.

Considero $L \subset T_X^\perp \Omega$ una recta tangente, su pendiente,

$$\mathcal{B} = \frac{dw}{d\xi},$$

en el caso que $d\xi = 0$ establecemos $\mathcal{B} = \infty$.

El vector $(0, d\xi)$ corresponde al desplazamiento $dq = (dx, dy)$ del punto $q = (x, y)$ en la dirección ortogonal a v , por ser $d\xi$ la proyección ortogonal del vector (dx, dy) sobre v . El valor de $d\xi$ corresponde al desplazamiento dv del vector v . Luego $\mathcal{B} > 0$ sí y sólo sí dq y dv apuntan hacia la misma dirección.



A cada vector tangente t de $T_X^\perp \Omega$ le podemos asociar una curva \mathcal{C}^1 que pasa por X y es tangente en dicho punto a t . Podemos realizar la misma construcción para rectas en el espacio tangente. Sea $\gamma' \subset \Omega$ una curva de que pasa por $X = (q, v)$ y es tangente a L . Asumimos $d\xi \neq 0$. Sea $\sigma' = \pi_q(\gamma')$ la proyección de γ' en la mesa de billar \mathcal{D} , que es ortogonal a v en q .

Los puntos de la forma $X' = (q', v')$ en γ' se mueve sobre la trayectoria del billar, $(q' + sv', v')$ (donde s deberá ser chico para estar en el interior de \mathcal{D}). Esto nos da una familia de rectas dirigidas de clase \mathcal{C}^1 y dos dimensional,

$$\mathcal{A} = \{q' + sv' : (q', v') \in \gamma', 0 \leq s \leq S(\gamma')\}.$$

Consideramos a σ la sección ortogonal a \mathcal{A} que pasa por el punto q . Es decir una curva de clase \mathcal{C}^1 que corta a cada una de las rectas de la familia \mathcal{A} de manera perpendicular. La curva σ contiene al punto (q, v) y es tangente a γ' en X luego a L en X .

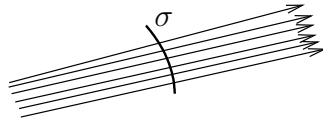


Figura 5.1: Sección ortogonal de una familia de rectas dirigidas.

Definición. A cada punto de σ le asociamos un vector unitario normal a σ , v' , apuntando hacia la dirección del movimiento. A la curva σ junto con la familia de vectores unitarios asociados se le llama **frente de onda**.

Sea $L \subset T_X^\perp \Omega$ una recta tangente tal que $\mathcal{B} = \infty$, en este caso no hay frentes de onda diferenciables, pero se puede representar con un frente de onda colapsado. Si $\gamma \in \Omega$ una curva diferenciable tal que $X = (q, v)$ y $\pi_q(\gamma) = \{q\}$. Entonces L es tangente a la curva γ .

Un frente de onda es una curva en el espacio de fases: todo punto $q \in \sigma$ viene equipado con v_q un vector velocidad v_q .

$$\gamma = \{(q, v_q) \in \Omega : q \in \sigma\}.$$

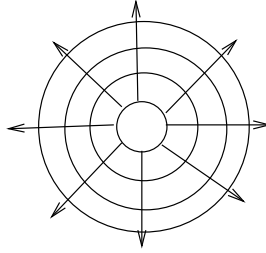


Figura 5.2: Un frente de onda circular en movimiento.

Se tiene que la recta tangente $T_Y \gamma$ está incluida en $T_Y^\perp \Omega$ para todo punto $Y \in \Omega$.

Lema. $\gamma \in \Omega$ un frente de onda, t chico entonces $\Phi^t(\gamma)$ es un frente de onda.

Demostración. Este hecho es debido a que $D_X \Phi^t(T_X^\perp \Omega) \subset T_{\Phi^t X}^\perp \Omega$ □

Para valores grandes de t el frente de onda va a desarrollar singularidades, por ejemplo cuando se refleje pro luego se recuperará. También el frente puede colapsar (focalizarse) cuando las trayectorias de sus puntos se intersectan entre sí, por ejemplo un círculo equipado con normal unitaria entrante. Pero inmediatamente se desfocalizará.

Sea $X \in \Omega$ y $L \subset T_X^\perp \Omega$ una recta tangente con pendiente $\mathcal{B} \neq \infty$. Consideramos $\gamma \subset \Omega$ un frente de onda tangente a L en $X = (q, v)$ y $\sigma = \pi_q(\gamma)$. Usando la definición de curvatura se prueba que \mathcal{B} representa a la curvatura de la curva σ en el punto q con respecto al vector normal v .

Dependiendo del signo de \mathcal{B} podemos distinguir distintos tipos de frente de onda:

- Si $\mathcal{B} > 0$ el frente de onda es dispersor.
- Si $\mathcal{B} < 0$ el frente de onda es focalizador.
- Si $\mathcal{B} = 0$ el frente de onda es chato.

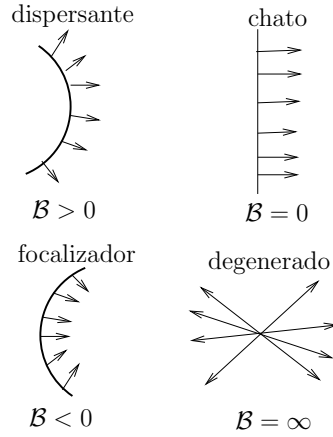


Figura 5.3: Clasificación de los frentes de onda.

En el caso $\mathcal{B} = \infty$ corresponde a los frente de onda degenerados que puede estar colapsando o enfocándose. A X le llamamos punto focalizador del frente.

El siguiente teorema es una herramienta poderosa a la hora de estudiar billares, fue introducida por Sinai en [31].

Teorema. Dada $L \subset T_X^\perp \Omega$ una recta tangente, L_t la imagen de L por $D_X \Phi^t$ y \mathcal{B}_t la pendiente de L_t . Si entre $(0, t)$ se producen n colisiones en tiempos $0 < t_1 < \dots < t_n < t$ y sea \mathcal{R}_i el parámetro del i -ésimo choque. La pendiente \mathcal{B}_t es igual a,

$$\mathcal{B}_t = \frac{1}{t - t_n + \frac{1}{\mathcal{R}_n + \frac{1}{t_n - t_{n-1} + \frac{1}{\mathcal{R}_{n-1} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{t_1 + \frac{1}{\mathcal{B}}}}}}}} \quad (5.2)$$

Demostración. Si no hay colisiones entre $(0, t)$ entonces:

$$\begin{aligned} (d\xi_t, dw_t) &= D_X \Phi^t(d\xi, dw) = U_t(d\xi, dw)^\top \\ &= (d\xi + tdw, dw) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{B}_t = \frac{dw_t}{d\xi_t} = \frac{\mathcal{B}}{1 + t\mathcal{B}} = \frac{1}{t + \frac{1}{\mathcal{B}}}.$$

Supongamos que en tiempo t ocurre una colisión. Notemos a la pendiente precolisional por $\mathcal{B}^- = \mathcal{B}_{t-0}$ y a la pendiente postcolisional por $\mathcal{B}^+ = \mathcal{B}_{t+0}$. Calculamos,

$$(d\xi^+, dw^+) = D_X \Phi(d\xi^-, dw^-) = L_{\mathcal{R}}(d\xi^-, dw^-)^\top = (-d\xi^-, -\mathcal{R}d\xi^- - dw^-).$$

Entonces,

$$\mathcal{B}^+ = \frac{dw^+}{d\xi^+} = \mathcal{R} + \mathcal{B}^- \quad (5.3)$$

A esta ecuación se la llama **ecuación de espejo**.

Combinando las ecuaciones obtenidas para la pendiente,

$$\mathcal{B}_t = \frac{1}{t - t_n + \frac{1}{\mathcal{R}_n + \frac{1}{t_n - t_{n-1} + \frac{1}{\mathcal{R}_{n-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{t_1 + \frac{1}{\mathcal{B}}}}}}}}$$

□

En $t = t^* = -\frac{1}{\mathcal{B}}$ se tiene $\mathcal{B}_t = \infty$. Esto indica que todo frente de onda tangente a L en el punto X va a colapsar en tiempo t^* . Al punto $\Phi^{t^*}X$ le llamamos el punto focalizador en la evolución del frente. Para tiempo $t > t^*$, el frente se desfocalizará y se seguirá moviendo de manera diferenciable.

5.1.3. El Jacobiano en las rectas tangentes.

La expresión (5.2) explicita como se transforma la pendiente de una recta. Como el mapa $D_X \Phi^t$ no es una isometría, nos interesa también sus efectos sobre la norma de los vectores $dX \in L$.

En la recta tangente $L \subset T_X^\perp \Omega$ definimos una métrica por $|d\xi|$. La métrica $|d\xi|$ está definida sólo sobre las rectas no degeneradas. El caso de rectas degeneradas no será de nuestro interés.

Proposición. *El Jacobiano de la transformación lineal que lleva $L \rightarrow L_t$ es*

$$\frac{|d\xi_t|}{|d\xi|} = \prod_{i=0}^{n-1} |1 + \tau_i \mathcal{B}_i^+| \quad (5.4)$$

donde $\tau_0 = t_1$, $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ para $1 \leq i \leq n-1$ y $\tau_n = t - t_n$. $\mathcal{B}_0^+ = \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_i^+ = \mathcal{B}_{t_{i+1}}$ para $1 \leq i \leq n$, calculado en la norma inducida por $d\xi$.

En la norma euclídea es,

$$\frac{\|dX_t\|}{\|dX\|} = \sqrt{\frac{1 + \mathcal{B}_t^2}{1 + \mathcal{B}^2} \prod_{i=0}^{n-1} |1 + \tau_i \mathcal{B}_i^+|} \quad (5.5)$$

Demostración. Sea $(d\xi, dw) \in L$ y sea $(d\xi_t, dw_t) = D_X \Phi^t(d\xi, dw) \in L_t$. Si no hay colisiones entre $(0, t)$:

$$d\xi_t = (1 + t\mathcal{B})d\xi, \quad dw_t = dw.$$

En el momento de la colisión se tiene que $d\xi^+ = -d\xi^-$ entonces, $|d\xi^-| = |d\xi^+|$. Combinando estos dos últimos resultados, tenemos:

$$\frac{|d\xi_t|}{|d\xi|} = \prod_{i=0}^{n-1} |1 + \tau_i \mathcal{B}_i^+|$$

donde $\tau_0 = t_1$, $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ para $1 \leq i \leq n-1$ y $\tau_n = t - t_n$. $\mathcal{B}_0^+ = \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_i^+ = \mathcal{B}_{t_{i+1}}$ para $1 \leq i \leq n$.

La expresión hallada anteriormente, es el Jacobiano de la transformación lineal $L \rightarrow L_t$.

El Jacobiano en la métrica en $T_X^{bot}\Omega$, $\|dX\| = \sqrt{(d\xi)^2 + (dw)^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\|dX_t\|}{\|dX\|} &= \frac{\|dX_t\|}{|d\xi_t|} \frac{|d\xi_t|}{|d\xi|} \frac{|d\xi|}{\|dX\|} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{dw_t}{d\xi_t}\right)^2} \prod_{i=0}^{n-1} |1 + \tau_i \mathcal{B}_i^+| \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dw}{d\xi}\right)^2} \right]^{-1} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \mathcal{B}_t^2}{1 + \mathcal{B}^2} \prod_{i=0}^{n-1} |1 + \tau_i \mathcal{B}_i^+|} \end{aligned}$$

□

Observación. Supongamos que $\mathcal{B}_s \neq \infty$ para todo $0 \leq s \leq t$,

$$\int_0^t \mathcal{B}_s ds = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathcal{B}_s ds = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{t + \frac{1}{\mathcal{B}_i^+}}$$

$$(5.6) \quad \int_0^t \mathcal{B}_s ds = \sum_{i=0}^{n-1} \log |1 + \tau_i \mathcal{B}_i^+| = \log \prod_{i=0}^{n-1} |1 + \tau_i \mathcal{B}_i^+|$$

$$= \log \frac{|d\xi_t|}{|d\xi|}$$

5.1.4. Rectas tangentes en el espacio colisión.

Consideremos $L \subset T_x \mathcal{M}$ una recta tangente perteneciente al espacio tangente del espacio colisión \mathcal{M} , queda determinada por

$$\nu = \frac{d\varphi}{dr}$$

Si $dr = 0$ entonces $\nu = \infty$.

Definición. Dado $x \in \mathcal{M}$ considero,

$$X^+ = \lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi^t(x), \quad X^- = \lim_{t \rightarrow 0^-} \Phi^t(x),$$

los estados inmediatamente antes y después de la colisión.

$$t^+(X^-) = t^-(X^+) = 0 \quad y \quad P^+(X^-) = P^-(X^+) = x$$

Las transformaciones lineales

$$D_{X^-} P^+ : T_{X^-}^\perp \Omega \rightarrow T_x \mathcal{M} \quad y \quad D_{X^+} P^- : T_{X^+}^\perp \Omega \rightarrow T_x \mathcal{M}$$

son dos isomorfismos lineales. Consideramos L^- tal que $D_{X^-} P^+(L^-) = L$ y L^+ a la preimagen de L $D_{X^+} P^-(L^+) = L$. Llamaremos rectas precolisional y postcolisional a L^- y L^+ de pendiente \mathcal{B}^- y \mathcal{B}^+ respectivamente. La pendiente de la recta postcolisional está relacionada co la pendiente de la recta precolisional a través de la ecuación de espejo (5.3)

$$\mathcal{B}^+ = \mathcal{R} + \mathcal{B}^-.$$

A cada recta tangente $L \in T_x \mathcal{M}$ le hemos asociado dos rectas en el tangente al espacio colisión.

Proposición. Dada $L \in T_x \mathcal{M}$ se cumple:

$$\nu = \mathcal{B}^- \cos \varphi + \kappa = \mathcal{B}^+ \cos \varphi - \kappa, \quad (5.7)$$

donde κ es la curvatura de $\partial \mathcal{D}$ en el punto x .

Demostración. Usando las ecuaciones para $(dr, d\varphi)$ deducidas en (4.10) en el nuevo sistemas de coordenadas:

$$\nu = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\kappa d\xi + (s\kappa + \cos \varphi)dw}{\cos \varphi} \frac{\cos \varphi}{d\xi + sdw} = \frac{\kappa d\xi + (s\kappa + \cos \varphi)dw}{d\xi + sdw}.$$

Haciendo $s \rightarrow 0^-$

$$\nu = \frac{\kappa d\xi + \cos \varphi dw}{d\xi} = K + \mathcal{B}^- \cos \varphi.$$

Usando la ecuación de espejo (5.3)

$$\nu = -K + \mathcal{B}^+ \cos \varphi$$

□

Definición. La norma $|d\xi|$ en las rectas L^+ y L^- induce la misma norma en la recta L y está dada por:

$$\|(dr, d\varphi)\|_p = \cos \varphi |dr|.$$

A esta norma inducida se le llama **la norma p** y está definida en las rectas tangentes no degeneradas del espacio colisión.

Se relaciona con la norma euclídea $\|dx\| = \sqrt{(dr)^2 + (d\varphi)^2}$ según,

$$\begin{aligned} \|dx\| &= |dr| \sqrt{1 + \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} \\ (5.8) \quad &= \frac{\|dx\|_p}{\cos \varphi} \sqrt{1 + (\mathcal{B}^+ \cos \varphi - \kappa)^2}. \end{aligned}$$

Proposición. El Jacobiano de $D_x \mathcal{F}^n$ en la norma p es igual a,

$$\frac{\|D_x \mathcal{F}^n(dx)\|_p}{\|dx\|_p} = \prod_{i=0}^{n-1} |1 + \tau_i \mathcal{B}_i^+|. \quad (5.9)$$

donde $\tau_i = \tau(\mathcal{F}^i(x))$ al tiempo del i -ésimo retorno y sean \mathcal{B}_i^+ y \mathcal{B}_i^- las pendientes de las rectas postcolisional y precolisional respectivamente.

Demostración. Si $dx \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\|\mathcal{D}_x \mathcal{F}^n(dx)\|_p}{\|dx\|_p} &= \frac{\|(dr_n, d\varphi_n)\|_p}{\|(dr, d\varphi)\|_p} = \frac{\cos \varphi_n |dr_n|}{\cos \varphi |dr|} = \frac{|d\xi_n|}{|d\xi|} \\
&= \prod_{i=0}^{n-1} |1 + \tau_i \mathcal{B}_i^+|
\end{aligned}$$

□

5.1.5. Conos para probar hiperbolicidad.

Sea \mathcal{M} una variedad compacta Riemanniana quizás con borde y esquinas. $N \subset \mathcal{M}$ un conjunto abierto y denso. $F : N \rightarrow \mathcal{M}$ un difeomorfismo entre N y $F(N)$ de clase \mathcal{C}^r con $(r \geq 2)$ tal que preserva una medida de probabilidad μ absolutamente continua respecto a Lebesgue.

Definición. Sea L una recta en $T_z \mathcal{M}$ y $\alpha \in (0, \pi/2)$. Un cono \mathcal{C} con eje L y ángulo α es el conjunto de vectores de $T_z \mathcal{M}$ tales que forman ángulo menor que α con L .

Definición. Supongamos que ctp x encontramos un cono \mathcal{C}_x .

- Decimos la familia de conos $\{\mathcal{C}_x\}$ es **invariante** si

$$D_x \mathcal{F}(\mathcal{C}_x) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{F}x};$$

- La familia \mathcal{C}_x se dirá **estrictamente invariante** si:

$$D_x \mathcal{F}(\mathcal{C}_x) \subset \text{int}(\mathcal{C}_{\mathcal{F}x}) \cup \{0\}.$$

- La familia \mathcal{C}_x se dirá **eventualmente estrictamente invariante** para \mathcal{F} si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$:

$$D_x \mathcal{F}^n(\mathcal{C}_x) \subset \text{int}(\mathcal{C}_{\mathcal{F}^n x}) \cup \{0\}.$$

El siguiente teorema cuya demostración se puede encontrar en [37] da un criterio suficiente para probar la hiperbolicidad de mapas.

Teorema (Wojtkowski). Sea \mathcal{M} una variedad de dimensión 2 y \mathcal{F}, μ definidas como arriba. Si ctp $x \in \mathcal{M}$ existen dos familias de conos $\{\mathcal{C}_x^u\}$ y $\{\mathcal{C}_x^s\}$ que verifican las siguientes dos propiedades:

1. Los conos \mathcal{C}_x^u son de ángulo α_x y eje L_x , ambas funciones medibles, son estrictamente invariantes para \mathcal{F} ;
2. los \mathcal{C}_x^s , tiene ángulo β_x y eje J_x , ambas funciones medibles, invariantes y eventualmente estrictamente invariantes para \mathcal{F}^{-1} .

Entonces ctp x es hiperbólico.

Definición. Sea C_x una familia de conos para x perteneciente a un conjunto de medida uno. Diremos que la familia es **expansiva** si $\forall v \in C_x$:

$$\|D_X \mathcal{F}(v)\| \geq \Lambda \|v\|, \text{ donde } \Lambda > 1 \text{ no depende ni de } v \text{ ni de } x.$$

Una familia de conos es **contractiva** si es expansiva para \mathcal{F}^{-1} .

Este es un criterio de conos para probar la hiperbolicidad uniforme de mapas con singularidades [1]

Teorema (Aleksiev). Sea \mathcal{M} una variedad, \mathcal{F} y μ como al inicio de esta sección. Supongamos que ctp $x \in \mathcal{M}$ encontramos dos familias de conos $\{C_x^u\}$ y $\{C_x^s\}$.

1. Los conos C_x^u tienen ángulo α_x y eje L_x , ambas funciones medibles. Si la familia de conos C_x^u es invariante y expansora para \mathcal{F} .
2. $\{C_x^s\}$ familia de conos con de ángulos β_x y ejes J_x ambas funciones medibles y la familia es invariante y expansora para \mathcal{F}^{-1} .

Entonces el mapa es uniformemente hiperbólico.

5.2. Hiperbolicidad de Billares Dispersores.

Una mesa de billar \mathcal{D} se dice dispersora si todas sus paredes son dispersoras. Estas mesas se pueden clasificar según tres características: el horizonte es o no finito, tener o no esquinas y si alguna de dichas esquinas son o no cúspides. Podemos resumir esto con en el siguiente cuadro:

	sin esquinas	esquinas sin cúspides	con cúspides
horizonte finito	A	C	E
horizonte infinito	B	D	F

Ejemplo. Consideremos $\mathcal{D}_r = \mathbb{T}^2 \setminus B_r$ donde B_r es la bola de centro $(0,0)$ y radio r . Se tiene que si $r < \frac{1}{2}$ entonces \mathcal{D} está en la categoría B, en la categoría E si $r = \frac{1}{2}$ y en la C si $r > \frac{1}{2}$.

Si la mesa de billar está en la categoría A o B entonces la frontera es unión de curvas diferenciables cerradas tales que encierran una región convexa, necesariamente $\mathcal{D} \subset \mathbb{T}^2$. A dichas regiones se le llaman dispersores.

5.2.1. Frente de ondas dispersores.

Como el billar es dispersor, todas las paredes tienen curvatura estrictamente positiva, al ser las paredes curvas compactas, se tiene:

$$0 < \kappa_{\min} < \kappa < \kappa_{\max} < \infty.$$

El parámetro de colisión \mathcal{R} está acotado por encima de cero:

$$\mathcal{R} = \frac{2\kappa}{\cos \varphi} > \mathcal{R}_{\min} = 2\kappa_{\min} > 0 \quad (5.10)$$

Cerca de las colisiones tangenciales ($\cos \varphi \approx 0$) podemos estimar:

$$\frac{C_1}{\cos \varphi} \leq \mathcal{R} \leq \frac{C_2}{\cos \varphi} \quad (5.11)$$

donde C_1 y C_2 son dos constantes positivas que dependen de κ_{\min} y κ_{\max} . La función B_t tiene una discontinuidad en las colisiones.

Consideramos a la recta tangente $L \in T_X^\perp \Omega$ de pendiente $\mathcal{B} = dw/d\xi > 0$, vamos a representar a dicha recta por frentes de onda de curvatura $\mathcal{B} > 0$

Proposición. *Sea $L \in T_X^\perp \Omega$ una recta tangente de pendiente $\mathcal{B} = dw/d\xi > 0$. Entonces $L_t = D_X \Phi^t(L)$ va a tener pendiente \mathcal{B}_t positiva, $t > 0$.*

Demostración. Si no hay colisiones entre $(0, t)$

$$\mathcal{B}_t = \frac{\mathcal{B}}{1 + t\mathcal{B}} > 0.$$

Si hubiera una colisión, el parámetro de colisión

$$\mathcal{R} = \frac{2\kappa}{\cos \varphi} > 0 \Rightarrow B^+ = \mathcal{R} + \mathcal{B}^- > 0$$

□

El resultado del lema indica que **los frentes de onda dispersores van a seguir siendo dispersores para el futuro.**

Lema. *Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, la curvatura de dos frentes de onda en el punto X . Si $\mathcal{B} > \mathcal{B}'$ entonces para todo t $\mathcal{B}_t > \mathcal{B}'_t$.*

Demostración. Si no hay colisiones entre $(0, t)$:

$$t + \frac{1}{\mathcal{B}} < t + \frac{1}{\mathcal{B}'} \Rightarrow B_t = \frac{1}{t + \frac{1}{\mathcal{B}}} > \frac{1}{t + \frac{1}{\mathcal{B}'}} = \mathcal{B}'_t$$

Si hay una colisión en t :

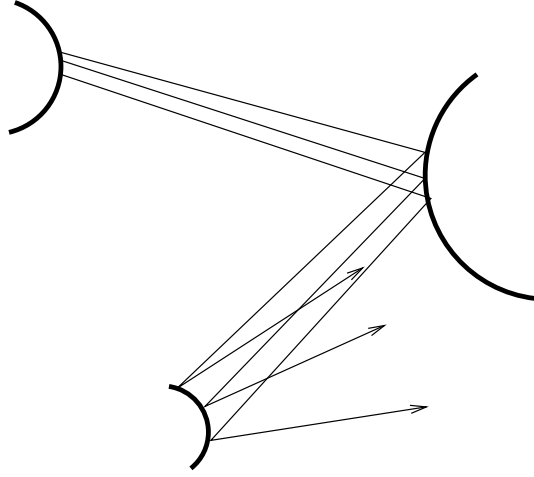


Figura 5.4: Los frentes de onda dispersores en billares dispersores crecen

$$\mathcal{B}^+ = R + \mathcal{B}^- > R + (\mathcal{B}')^- = (\mathcal{B}')^+$$

Por lo tanto se obtiene lo deseado □

Lema. Si un vector tangente $(d\xi, dw) \in T_X^\perp \Omega$ tiene pendiente positiva $dw/d\xi > 0$, entonces su imagen $(d\xi_t, dw_t) = D_X \Phi^t(d\xi, dw)$ va a crecer monotonamente, i.e, si $0 < t_1 < t_2$ entonces

$$|d\xi_{t_1}| < |d\xi_{t_2}| \quad y \quad |dw_{t_1}| < |dw_{t_2}|.$$

Demostración. Hemos observado en (5.6) que

$$\log \frac{|d\xi_t|}{|d\xi|} = \int_0^t \mathcal{B}_s ds$$

entonces

$$\frac{d}{dt} \log |d\xi_t| = \mathcal{B}_t > 0.$$

Esto implica que $|d_t \xi|$ es monótona creciente

Si no hay colisiones entonces: $|d\xi_t| = |d\xi|$ y si hay colisiones:

$$|dw^+| = |-dw^- - \mathcal{R}d\xi| > |dw^-|.$$

Esto implica la monotonía creciente de dw . □

Estamos en condiciones de probar el resultado principal de este trabajo.

Teorema. *El mapa \mathcal{F} es hiperbólico para los billares dispersantes respecto a la medida de probabilidad invariante.*

Demostración. Es claro que si encontramos una familia estrictamente invariante para \mathcal{F} y otra estrictamente invariante para \mathcal{F}^{-1} el mapa colisión del billar verificará el criterio de conos de Wojtkowski.

Vamos a definir el cono inestable, recordar que $\nu = \frac{d\varphi}{dr}$

$$\mathcal{C}_x^u = \{(dr, d\varphi) : \kappa \leq \nu \leq \infty\}$$

Consideramos al cono \mathcal{C} , la única preimagen del cono \mathcal{C}_x^u por el isomorfismo lineal $D_X - P^+$. Se cumple que

$$\nu = \mathcal{B}^- \cos \varphi + \kappa$$

El cono \mathcal{C} corresponde a aquellos frentes de onda (direcciones de rectas) con $\mathcal{B} > 0$, i.e los frentes de onda dispersantes.

Sea $L \in \mathcal{C}_x^u$ una recta y su imagen $L_1 = D_x \mathcal{F}(L)$. Consideramos L_1^+ la única preimagen por $D_X - P^+$ que va a tener pendiente

$$\mathcal{B}_1^- = \mathcal{B} \geq 0$$

Se cumple que,

$$\nu_1 = \mathcal{B}_1^- \cos \varphi_1 + \kappa_1 \geq \kappa_1.$$

Esto implica que

$$D_x \mathcal{F}(\mathcal{C}_x^u) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{F}x}^u.$$

Hemos probado la invarianza del cono inestable.

Análogamente definimos el cono estable:

$$\mathcal{C}_x^s = \{(dr, d\varphi) : -\infty \leq \eta \leq -\kappa\}$$

Usando la involución $I : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $I(r, \varphi) = (r, -\varphi)$, $D_x I : T_x \mathcal{M} \rightarrow T_{Ix} \mathcal{M}$

$$J_x I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces se cumple,

$$D_x I(\mathcal{C}_x^s) = \mathcal{C}_{Ix}^u \quad \text{y} \quad D_x I(\mathcal{C}_x^u) = \mathcal{C}_{Ix}^s$$

Usando que $\mathcal{F}^{-1} \circ I = I \circ \mathcal{F}$ y que $I^2 = id$, tenemos

$$D_x \mathcal{F}^{-1} = D_{I(\mathcal{F}x)} I \circ D_{Ix} \mathcal{F} \circ D_x.$$

La imagen de C_x^s por $D_x\mathcal{F}^{-1}$ es,

$$\begin{aligned} D_x\mathcal{F}^{-1}(C_x^s) &= D_{I(\mathcal{F}x)}I \circ D_{I_x}\mathcal{F} \circ D_x(C_x^s) = D_{I(\mathcal{F}x)}I \circ D_{I_x}\mathcal{F}(C_{I_x}^u) \subset D_{I(\mathcal{F}x)}(C_{\mathcal{F}(I_x)}^u) \\ &= C_{\mathcal{F}^{-1}(x)}^s \end{aligned}$$

Hemos demostrado que el cono estable es invariante para \mathcal{F}^{-1} .

A continuación mostraremos que la invarianza de ambos conos es estricta, por lo que podremos usar el resultado de Wojtkowski, para obtener la hiperbolicidad.

El cono $D_x\mathcal{F}(C_x^u)$ está limitado por dos rectas L_{\inf} y L_{\sup} de pendientes ν_{\inf} y ν_{\sup} respectivamente y este sub-cono está incluido en $C_{\mathcal{F}(x)}^u$.

Tenemos que

$$\mathcal{B}^- = \mathcal{B}_{\tau_0} = \frac{1}{\tau_0 + \frac{1}{\mathcal{B}}}$$

y esto implica:

$$\nu = \mathcal{B}^- \cos \varphi_0 + \kappa_1 \leq \frac{\cos \varphi_0}{\tau_0} + \kappa_1.$$

Entonces

$$\nu_{\inf} := \frac{\cos \varphi_0}{\tau_0} + \kappa_1.$$

Se tiene

$$B^+ \leq \mathcal{R} + \kappa_0$$

lo cual implica

$$\mathcal{B}^- \leq B^+ \leq \mathcal{R} + \kappa_0$$

. Entonces:

$$\nu = \mathcal{B}^- \cos \varphi_0 + \kappa_1 \leq \frac{\cos \varphi_1}{\tau + \mathcal{R}} + \kappa_1$$

Sea

$$\nu_{\sup} := \frac{\cos \varphi_1}{\tau + \mathcal{R}} + \kappa_1$$

Como $\nu_1 \leq \nu_{\inf} \leq \nu_{\sup} \leq \infty$, entonces:

$$D_x(\mathcal{F})(C_x^u) \subset \text{int}C_{\mathcal{F}x}^u \cup \{0\}.$$

Así hemos demostrado la invarianza estricta del cono inestable. Usando el mapa involución se prueba que C_x^s es también un cono estrictamente invariante, por lo tanto, vía el resultado de Wojtkowski, se concluye que el mapa \mathcal{F} es hiperbólico \square

Los billares de categorías A, B, C y D son uniformemente hiperbólicos, en este trabajo probaremos que los de la categoría A y B lo son usando el criterio de conos de Alekseev en [Al].

Teorema. *Los billares de categorías A y B son uniformemente hiperbólicos.*

Demostración. La idea es usar el criterio de Alekseev para las familias de conos \mathcal{C}_x^u y \mathcal{C}_x^s definidas en el teorema anterior. Probaremos que \mathcal{C}_x^u es expansora. Usando el mapa involución obtenemos que \mathcal{C}_x^s es contractiva.

Sea $dx = (dr, d\varphi) \in \mathcal{C}_x^u$ un vector inestable y $dx_n = (dr_n, d\varphi_n) = D_x \mathcal{F}^n(dx)$ su imagen. Para billares en las categorías A y B el factor de expansión en la métrica p que está dado por la fórmula demostrada en 5.9

$$\frac{\|dx_{n+1}\|_p}{\|dx_n\|_p} = |1 + \tau_n \mathcal{B}_n^+|$$

En los billares A y B:

$$\tau \geq \tau_{\min}$$

siendo τ_{\min} la distancia entre los dispersores. La ecuación espejo $\mathcal{B}^+ = \mathcal{R} + \mathcal{B}^-$ implica que

$$\mathcal{B}^+ \geq \mathcal{R} = \frac{2\kappa}{\cos \varphi} \geq 2\kappa_{\min} := \mathcal{B}_{\min} > 0$$

por ser un billar dispersor. Podemos acotar inferiormente la norma p :

$$\frac{\|dx_{n+1}\|_p}{\|dx_n\|_p} \geq 1 + \tau_n \mathcal{B}_{\min}$$

En las las categorías A y B

$$\Lambda = 1 + \tau_{\min} \mathcal{B}_{\min} > 1$$

Usando el criterio de Alekseev la hiperbolicidad es uniforme en estas dos categorías. \square

Bibliografía

- [1] V. M. Alekseev, Quasi-random dynamical systems, *Mathematical Notes* Volume 6, Number 4 (1969).
- [2] N. Chernov & R. Markarian, Dispersing Billiards with Cusps: Slow Decay of Correlations, *Comm. in Math. Physics* 270 (2007), 727-758.
- [3] N. Chernov & R. Markarian, *Chaotic Billiards*, *Mathematical Surveys and Monographs*, Providence, Amer. Math. Soc., (2006)
- [4] P. Cornfield, S. Fomin, Y. G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer, Berlin, 1982.
- [5] P. Ehrenfest y T. Ehrenfest, *The conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics*, Dover Phoenix Editions, 2002.
- [6] C. Foltin, *Billiards with Positive Topological Entropy*, *PreMat* 01/52, 2001.
- [7] R. Guzman y J.A.Cervera, *La mecánica estadística: sus orígenes y paradojas a la luz de los escritos de Paul y Tania Ehrenfest*, LUL, vol 29, 2006, 331-356.
- [8] P. R. Halmos, *Measure Theory*. D. van Nostrand, New York (1950); Springer, New York (1974).
- [9] B. Halpern, Strange billiard tables, *Trans. Am. Math. Soc.* 232 (1977), 297305.
- [10] Gustav A. Hedlund, The dynamics of geodesic flows, *Gustav A. Hedlund Journal: Bull. Amer. Math. Soc.* 45 (1939), 241-260.
- [11] Hopf, *Ergodic Theory and the geodesic flow on surfaces of negative curvature*, *Bulletin of the mathematical society*, Vol 77, number 6, 1977.
- [12] N. S. Krylov, *The Processes of Relaxation of Statistical Systems and the Criterion of Mechanical Instability*, Thesis, Moscow, (1942); Republished in English by Princeton University Press, Princeton N. J. (1979).
- [13] A. Katok & B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge Univ. Press (1995).

- [14] A. Katok & J.-M. Strelcyn, with the collaboration of F. Ledrappier and F. Przytycki, Invariant manifolds, entropy and billiards; smooth maps with singularities, Lect. Notes Math., 1222, Springer, New York (1986).
- [15] K. Knopp, Infinite sequences and series, Dover, New York, 1956. MR 18, 30.
- [16] R. Mañe, Introducao a Teoria Ergodica. IMPA, Rio de Janeiro (1983). English Ed. Ergodic Theory and Differentiable Dynamics, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1987).
- [17] H. Masur & S. Tabachnikov, Rational billiards and flat structures, In Handbook of Dynamical Systems, vol. 1A, edited by B. Hasselblatt and A. Katok, Amsterdam: Elsevier, (2002).
- [18] R. Markarian, Modelos con Dinámicas Caóticas, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. IX, No. 2 (2002) 109.
- [19] R. Markarian, Billiards with Pesin region of measure one, Comm. Math. Phys. 118 (1988), 8797.
- [20] L. Markus y K.R. Meyer, Generic Hamiltonian Dynamical Systems are neither Integrable nor Ergodic, Memoirs of the American Mathematical Society 144 (AMS, 1974).
- [21] V. I. Oseledec, A multiplicative ergodic theorem, Trans. Moskow Math. Soc., 19 (1968), 197231.
- [22] J. Palis & W. de Melo, Introducao aos Sistemas Dinâmicos. IMPA, Rio de Janeiro (1978). English Ed. Geometric Theory of Dynamical Systems, Springer, New York - Berlin (1982).
- [23] U. A. Rozikov, What is a Mathematical Billiard?, Math Track, Vol 3(2007), 56-65.
- [24] N. Simanyi y D. Szász, Hard ball systems are completely hyperbolic, Annals of Mathematics 149 (1) (1999)
- [25] N: Simanyi, The Complete Hyperbolicity of Cylindric Billiards, Ergodic theory and dynamical systems, Vol. 22 (2002), 281-302
- [26] N. Simanyi, Proof of the Boltzmann-Sinai Ergodic Hypothesis for Typical Hard Disk Systems, Inventiones Mathematicae, 154 (1) (2003) 123.
- [27] N. Simanyi, Proof of the Ergodic Hypothesis for Typical Hard Ball Systems, Annales Henri Poincaré 5 (2004), pp. 203-233

- [28] N. Simanyi, Conditional Proof of the Boltzmann-Sinai Ergodic Hypothesis, *Inventiones Mathematicae*, Vol. 177, No. 2, August 2009, pp. 381-41.
- [29] Singularities and nonhyperbolic manifolds do not coincide, arXiv:1205.0061v1, enviado a publicar.
- [30] Ya. G. Sinai, On the Foundation of the Ergodic Hypothesis for a Dynamical System of Statistical Mechanics, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 153 (1963), 1261-1264.
- [31] Ya. G. Sinai, Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards, *Russ. Math. Surv.* 25 (1970), 137-189.
- [32] Ya. G. Sinai, Hyperbolic Billiards, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Kyoto, Japan, 1990.
- [33] D. Szász, Boltzmann's Ergodic Hypothesis, a Conjecture for Centuries?, preprint ESI 98, Viena (1994).
- [34] S. Tabachnikov, *Billiards*. Panor. Synth. No. 1, SMF, Paris (1995).
- [35] E. Ugalde, De la mecánica estadística a la teoría ergódica, *Revista Mexicana de Física* 53(2), 191-194.
- [36] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1982).
- [37] M. Wojtkowski, Invariant families of cones and Lyapunov exponents, *Ergodic Theory Dynam. Sys.* 5 (1985), 145-161.
- [38] M. Wojtkowski, Principles for the design of billiards with nonvanishing Lyapunov exponents, *Commun. Math. Phys.* 105 (1986), 391-414.
- [39] Wolfram Demonstration Project disponible en <http://www.demonstrations.wolfram.com/>