

# Introducción a la Teoría de Nudos

Gabriel Illanes

Orientador: Dr. Richard Muñiz

# Índice general

<b>1. Definiciones básicas</b>	<b>4</b>
<b>2. Primeros invariantes</b>	<b>10</b>
2.1. Coeficiente de enlaces . . . . .	10
2.2. Invariante por colores . . . . .	12
<b>3. Teorema de Reidemeister - Superficies de Seifert</b>	<b>16</b>
3.1. Teorema de Reidemeister . . . . .	16
3.2. Superficies de Seifert . . . . .	20
3.3. Invariante de Género . . . . .	22
<b>4. Enlaces en Superficies de <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>25</b>
<b>5. Aritmética de Nudos</b>	<b>34</b>
<b>6. Polinomios de Enlaces</b>	<b>41</b>
6.1. El polinomio de Jones . . . . .	41
6.2. El polinomio HOMFLY . . . . .	47
<b>7. Grupo fundamental - Grupo de un nudo</b>	<b>58</b>
<b>8. Representación de 3-variedades orientables combinatorias</b>	<b>72</b>
8.1. Isotopías y homeomorfismos en complejos simpliciales . . . . .	72
8.2. Homeomorfismos en 2-variedades . . . . .	73

# Introducción

Intuitivamente, podemos pensar a un nudo como un pedazo de cuerda anudada, cuyos extremos están pegados. Matemáticamente, decimos que un nudo es la imagen de una función  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua, con cierta regularidad. A estos nudos les imponemos una relación de equivalencia, la cual puede ser pensada como mover la cuerda en el espacio, sin romperla (luego se introduce una definición formal de estos dos conceptos). Así, si tenemos dos nudos, queremos saber si moviendo uno de los nudos en el espacio, obtenemos el otro; o sea, nos interesará saber si ambos pertenecen a la misma clase de equivalencia bajo la relación antes mencionada: ésta es la gran pregunta que se realiza la teoría de nudos. Con tal fin, es que deseamos encontrar funciones definidas en las clases de equivalencias de nudos: estas funciones son llamadas invariantes de nudos.

Pese a que la teoría de nudos es introducida en el siglo XVIII a partir de trabajos de Vandermonde, Gauss y Klein, no es hasta mediados del siglo XIX que comienza el estudio sistemático en esta área. En 1867, Lord Kelvin sugirió que los átomos podían modelarse a través de nudos, con lo cual, clasificar los posibles nudos equivalía a estudiar los elementos de lo que hoy es la tabla periódica. Es así, que varios matemáticos y físicos se dedicaron al estudio y clasificación sistemática de los nudos.

A principios del siglo XX, los resultados de algunos experimentos realizados dentro de la física contradicen a la teoría desarrollada por Lord Kelvin, por lo que el interés en la teoría de nudos desaparece temporalmente. Sin embargo, con el desarrollo de la topología, la teoría de nudos resurge a partir de trabajos de Dehn, Alexander y Reidemeister.

El gran avance en el área se produce en la segunda mitad del siglo XX, con importantes aportes de Conway, Kauffman, y Jones entre otros. Actualmente, la teoría de nudos tiene aplicaciones en la física (en la física cuántica, y en teoría de cuerdas, por ejemplo), en la biología (en el estudio de las cadenas de ADN), y en otras áreas, además del su interés dentro de la matemática.

En este trabajo explicaremos los fundamentos en la teoría de nudos. Empezaremos con las definiciones básicas, y algunos invariantes básicos, para luego estudiar dos importantes herramientas, como lo son los movimientos de Reidemeister (fundamentales en la demostración de varios invariantes) y la existencia de superficies de Seifert, que además de ser interesantes en sí, son importantes para estudiar la operación entre nudos  $\#$  que introduciremos en el capítulo 5.

Como caso particular, estudiaremos los nudos que pueden ser encajados en una esfera con un asa, los llamados nudos toroidales. Sobre el final, estudiaremos tres invariantes fuertes de nudos, como lo son los polinomios de Jones, el polinomio HOMFLY, y el grupo fundamental del complemento de un nudo.

Por último, estudiaremos un artículo de Lickorish que establece un estrecho vínculo entre los nudos y las variedades de dimensión 3.

# Capítulo 1

## Definiciones básicas

**Definición 1.** Por ‘nudo’ nos referimos a un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  que puede ser visto como una curva cerrada simple, lineal a trozos.

Por defecto pensaremos los nudos en  $\mathbb{R}^3$ , pero también pueden ser pensados en  $S^3$  cuando sea conveniente.

Si tenemos un nudo  $K \subset \mathbb{R}^3$ , y deformamos el espacio ambiente, el nudo  $K$  se deformará, y se transformará en otro nudo  $K' \subset \mathbb{R}^3$ .

**Definición 2.** Decimos que dos nudos  $K, K'$  son ‘isotópicos’ si existe  $d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  homeomorfismo lineal a trozos, que preserve la orientación, tal que  $d(K) = K'$ .

*Notación.*  $K \simeq K'$ .

*Observación.* En esta presentación, trabajaremos únicamente con enlaces de cierta regularidad: los llamados enlaces dóciles. Aquellos nudos que no son dóciles (los llamados *nudos salvajes*) pueden ser vistos como las imágenes ( $J$ ) de las funciones  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  continuas e inyectivas, tales que no exista un homeomorfismo  $h$  isotópico a la identidad en la clase de homeomorfismos, tal que  $h(J)$  sea una curva cerrada simple lineal a trozos.

Una definición alternativa de nudo (dócil) puede darse trabajando con encajes suaves y difeomorfismos. Demostrar la equivalencia de ambas definiciones es muy trabajoso, por lo cual no se incluye en esta presentación.

**Definición 3.** Por ‘nudo’ nos referimos a un encaje suave  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . También llamaremos nudo a la imagen de dicho encaje.

*Notación.* Con el fin de distinguir la versión lineal a trozos de un nudo y la versión diferencial, a veces nos referiremos por ‘nudo poligonal’ a la versión lineal a trozos del nudo.

**Definición 4.** *Decimos que dos nudos  $K, K'$  son ‘isotópicos’ si existe  $d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  difeomorfismo, isotópico a la identidad en la clase de difeomorfismos, tal que  $d(K) = K'$ .*

Por regla general, trabajaremos con nudos poligonales (lo cual es, en varios casos, más práctico), y a la hora de hacer dibujos, pensaremos los nudos en su versión diferenciable. Sin embargo, a veces será más práctico trabajar con la versión diferenciable de nudo, en cuyo caso lo aclararemos.

Dado que “ser isotópicos” es una relación de equivalencia, podemos hablar de clases de nudos, a las cuales también llamaremos nudos. Esto no producirá confusión en el futuro.

*Notación.*  $\mathfrak{K} = \{\text{curvas simples en } \mathbb{R}^3 \text{ lineales a trozos}\} / \simeq$  es el conjunto de todos los nudos.

La gran pregunta que nos hacemos es: ¿Cómo sabemos si dos nudos dados son isotópicos?

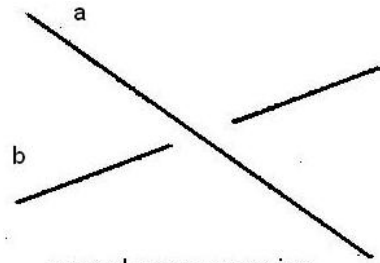
Como caso particular, nos podemos preguntar qué nudos son isotópicos al nudo trivial.

**Definición 5.** *Llamaremos ‘nudo trivial’ a aquel nudo que puede estar contenido en un plano de  $\mathbb{R}^3$ .*

*Notación.* Por  $U$  nos referiremos al nudo trivial.

Es por esto que nos interesa encontrar invariantes de nudos, o sea, funciones cuyo dominio es el conjunto de clases de isotopía de nudos.

Vamos ahora a codificar un nudo a través de un dibujo en el plano. Supongamos que tenemos un nudo  $K \subset \mathbb{R}^3$ . Consideremos un plano  $h \subset \mathbb{R}^3$  (por ejemplo,  $Oxy$ ), y proyectemos  $K$  en  $h$ . Obtenemos así un grafo en  $h$ . Cada vértice ‘v’ del grafo (o ‘cruce’) puede ser visto como la intersección de la proyección de dos intervalos del nudo (llamados ‘ramas’); llamémoslos ‘a’ y ‘b’. Dado que ‘a’ y ‘b’ no se cortan, las preimágenes de ‘v’ tienen coordenada en  $z$  distinta. De esta manera, podemos distinguir cuál de las ramas “va por arriba” y cuál “va por abajo” (llamaremos ‘cruce superior’ a la rama que va por arriba, y ‘cruce inferior’ a la que va por abajo), y así diferenciarlas en el dibujo



a es el cruce superior  
b es el cruce inferior

A este dibujo lo llamaremos 'diagrama planar del nudo'



Ejemplo 1.

*Observación.* Si algún cruce tiene más de dos preimágenes, podemos perturbar el nudo localmente, de tal manera que obtenemos un nudo isotópico al original, cuyo diagrama contiene más cruces, pero de dos preimágenes cada uno (en el entorno del cruce original). También podemos lograr esto moviendo el plano  $h$ , y dejando quieto el nudo.

*Observación.* Razonando similarmente, podemos suponer que los cruces del diagrama de un nudo son transversales.

**Definición 6.** Un 'arco' es una de las componentes conexas de un diagrama; comienzan y terminan en los cruces.

Ejemplo 2. El nudo trivial tiene sólo un arco, mientras que el trébol tiene 3.

*Observación.* La definición de arco es global, y se refiere al diagrama del nudo (a diferencia de la de rama, que es local, y se refiere tanto al diagrama como a la imagen del encaje). Por ejemplo, en un cruce se encuentran 2 ramas, pero pueden encontrarse 1, 2 o 3 arcos (dependiendo del nudo).

**Definición 7.** Dado un nudo, su 'imagen especular' es el resultado de simetrizar el nudo respecto a un plano.

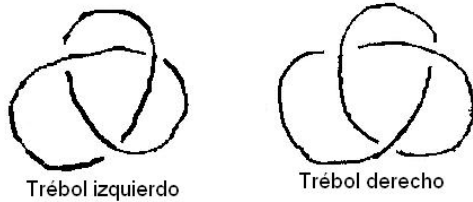
*Observación.* Si tenemos dos nudos  $K$ ,  $K'$  isotópicos, entonces existe  $d$  homeomorfismo lineal a trozos, que preserva la orientación, tal que  $d(K) = K'$ . Si  $h$  es un homeomorfismo que representa simetrizar respecto de un plano, tenemos que  $h(K)$  y  $h(K')$  son isotópicos, ya que  $hdh^{-1}$  es un homeomorfismo lineal a trozos, que cumple  $hdh^{-1}(h(K)) = h(K')$ . Concluimos que la imagen especular está bien definida.

Dado un diagrama de  $K$ , podemos obtener el diagrama de la imagen especular intercambiando todos los tipos de cruces (cruces superiores por cruces inferiores).

**Definición 8.** Un nudo se dice que es ‘ambidiestro’ si es isotópico a su imagen especular.

*Ejemplo 3.* El trébol no es ambidiestro, mientras que la figura 8 sí lo es. Eso lo veremos más adelante.

*Observación.* El hecho que el trébol no sea ambidiestro, nos permite hablar de ‘trébol izquierdo’ y ‘trébol derecho’.

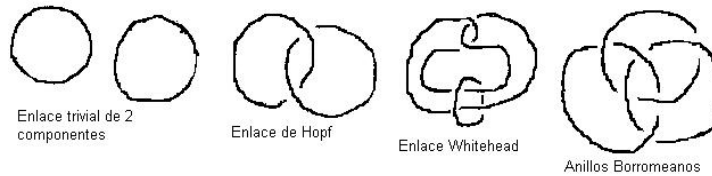


**Definición 9.** Por ‘enlace de  $n$  componentes’ nos referimos a  $n$  nudos disjuntos.

La versión diferenciable de enlace sería la siguiente:

**Definición 10.** Por ‘enlace de  $n$  componentes’ nos referimos a un encaje suave  $f : \coprod_{i=1}^n S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (donde  $\coprod$  representa la unión disjunta,  $n \in \mathbb{N}$ ), como así también a la imagen de dicho encaje.

*Observación.* Claramente, la definición de enlace contiene a la de nudo.



*Ejemplo 4.*

*Observación.* Al igual que con los nudos, podemos hablar de isotopías, invariantes, y diagramas de enlaces. También llamaremos enlace a cada una de las clases de equivalencia de dichos encajes bajo la relación ‘ser isotópicos’.

*Notación.*  $\mathfrak{L} = \{L \subset \mathbb{R}^3 \mid L \text{ es un enlace} \} / \simeq$  es el conjunto de todos los enlaces.

*Notación.* Por  $U^n$  nos referimos al enlace trivial de  $n$  componentes, el cual puede ser representado como  $n$  nudos triviales sin cruces.



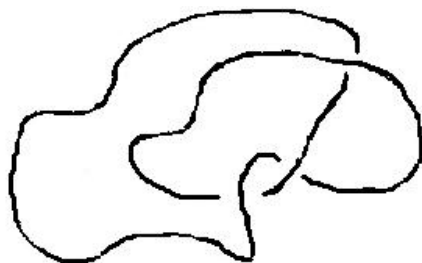
**Definición 11.** Un ‘enlace orientado’ es un enlace tal que todas sus componentes están orientadas.

Introduciremos ahora la noción de diagrama ascendente, la cual será de utilidad más adelante.

**Definición 12.** Un diagrama  $D$  de un enlace orientado se dice ‘ordenado’ si se elige un orden para sus componentes.

**Definición 13.** Un diagrama  $D$  de un enlace orientado se dice ‘basado’ si se elige un punto base para cada componente del enlace.

**Definición 14.** Dado un diagrama  $D$  de un enlace orientado, que esté ordenado y basado, llamamos ‘diagrama ascendente asociado a  $D$ ’ a aquel diagrama que se obtiene a partir de  $D$  cambiando algunos cruces (cruces superiores por cruces inferiores), de tal manera que, al recorrer el diagrama (según la orientación) por todas sus componentes en el orden dado, y empezando a recorrer cada componente en su punto base, sucede que pasamos por cada cruce primero por el cruce inferior.



**Trébol luego de isotopías planares**

*Notación.* Llamaremos  $\alpha D$  al diagrama ascendente asociado al diagrama  $D$  de un enlace orientado, que esté ordenado y basado.

**Definición 15.** Un diagrama  $D$  de un enlace es ‘ascendente’ si existe una base y un orden para  $D$  tal que  $\alpha D = D$ .

Más adelante veremos que los diagramas ascendentes representan al enlace trivial de  $n$  componentes, para algún  $n$ .

Enunciaremos ahora un teorema que nos permitirá encontrar los primeros invariantes de enlaces. Veremos la demostración en el capítulo 3. Para ello, introduciremos la siguiente noción.

**Definición 16.** Una ‘isotopía planar’ de un diagrama de enlaces es un difeomorfismo del plano en sí mismo, que preserva la orientación, y que no cambia ningún cruce.

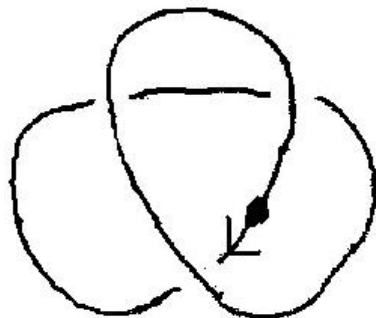
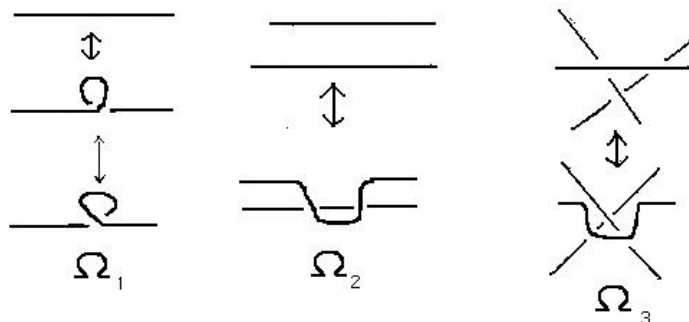


Diagrama ascendente asociado al trébol

**Teorema 1. Reidemeister:** Dos diagramas  $D_1$  y  $D_2$  de enlaces representan enlaces isotópicos si y sólo si podemos transformar  $D_1$  en  $D_2$  mediante una secuencia finita de isotopías planares y los tres movimientos de Reidemeister:  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ .



**Definición 17.** Dos enlaces son regularmente isotópicos si puedo transformar el diagrama de uno en el del otro vía isotopías planares,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ .

Esta definición, a priori, parece inútil. Más adelante, veremos que  $\Omega_1$  a veces genera problemas, lo cual motiva dicha definición.

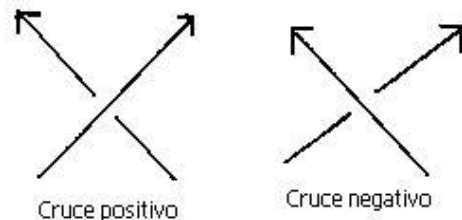
## Capítulo 2

# Primeros invariantes

Nos dispondremos ahora a encontrar algunos invariantes de nudos y de enlaces. Representando los nudos como diagramas en el plano, veremos que, efectivamente, los siguientes invariantes están bien definidos. Para esto, usaremos el teorema de Reidemeister.

### 2.1. Coeficiente de enlaces

Sea un enlace  $L$  orientado, que consta de dos componentes  $A$  y  $B$ , y sea  $D$  un diagrama planar de  $L$ . Nos podemos encontrar con dos tipos de cruces con respecto a la orientación.



A cada cruce positivo le asignamos un  $+1$ , y a cada cruce negativo un  $-1$ .

*Observación.* Una manera sencilla de ver si un cruce es positivo o negativo es la siguiente: imaginemos que nos acercamos al cruce por la rama inferior en la dirección de la orientación. Si vemos, desde ese punto de vista, que la orientación del cruce superior va de izquierda a derecha, entonces es positivo; de lo contrario, es negativo.

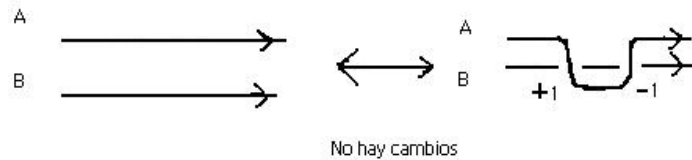
Consideremos todos los cruces donde una rama de A es el cruce superior, y una rama de B el cruce inferior. Ahora sumemos todos los (+1) y (-1) que obtenemos.

**Definición 18.** *Dicha suma es el ‘coeficiente de enlace’ de A con B.*

Veamos que el coeficiente de enlace es un invariante. Basta verificar la invariancia bajo los movimientos de Reidemeister (ya que, obviamente, las isotopías planares no afectan el coeficiente de enlace).

$\Omega_1$ : Este movimiento sólo afecta a una componente (añade un cruce de una componente consigo misma). Por lo tanto, el coeficiente de enlace es invariante bajo  $\Omega_1$ .

$\Omega_2$ :



Si consideramos dos ramas de la misma componente, o si B pasa sobre A, no hay cambios; por ende,  $\Omega_2$  no afecta el coeficiente de enlace.

$\Omega_3$ :



Este movimiento mantiene la cantidad de cruces, y al no alterar de forma alguna la orientación, también mantiene el signo de los cruces. Concluimos que  $\Omega_3$  no afecta el coeficiente de enlace.

*Notación.*  $lk(A, B)$  es el coeficiente de enlace de A con B.

**Proposición 1.** *Dado un enlace D de dos componentes A y B, se cumple que  $lk(A, B) = lk(B, A)$ .*

*Demostración.* Supongamos (sin pérdida de generalidad) que el enlace está contenido en la bola de centro 0 y radio 1/2 en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces, podemos ver el nudo desde arriba (proyectando sobre el plano  $z = -1$ ) o desde abajo (proyectando sobre el plano  $z = 1$ ). Visto desde arriba, tengo que para calcular  $lk(A, B)$ , ciertos cruces suman (+1) y otros suman (-1). Ahora, visto desde abajo, tengo que para calcular  $lk(B, A)$ , los cruces que suman (+1) son los mismos que sumaban (+1) antes (idem con los cruces que suman (-1)). Como el coeficiente de enlace es un invariante de enlaces, tenemos que  $lk(A, B) = lk(B, A)$ .  $\square$

*Observación.* El coeficiente de enlace del enlace de Hopf es +1 (o -1, dependiendo de la orientación), mientras que el coeficiente de enlace del enlace trivial de 2 componentes es 0. Podemos concluir que los enlaces no son isotópicos.

*Observación.* Podemos extender la definición de coeficiente de enlace a enlaces  $L$  de  $n$  componentes ( $n \geq 2$ )  $A_1, \dots, A_n$  como

$$lk(L) = \sum_{i < j \leq n} lk(A_i, A_j) \quad (2.1)$$

Como  $lk(A_i, A_j)$  es un invariante, también lo es  $lk(L)$ . Por ejemplo, en este caso, los anillos Borromeos tienen coeficiente de enlace 0, y no podemos concluir que no son isotópicos al enlace trivial de 3 componentes.

*Observación.* En el caso de los nudos, les podemos asociar el ‘coeficiente de autoenlace’ de la siguiente manera: dado un nudo  $K$ , tomamos otro nudo paralelo  $K'$  contenido en un entorno tubular de  $K$  suficientemente chico, y consideramos  $lk(K, K') = \omega(K)$ .

El problema es que ahora, como  $K$  y  $K'$  corren paralelos,  $\Omega_1$  sí afecta al coeficiente de autoenlace, cambiándolo en  $\pm 1$ . Sin embargo, no es alterado bajo  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ , por lo cual concluimos que el coeficiente de autoenlace es invariante en nudos regularmente isotópicos. Análogamente, puedo definir el coeficiente de autoenlace para un enlace  $L$ , pero este ya no es un invariante de enlaces. Lo notaremos como  $\omega(L)$ .

## 2.2. Invariante por colores

Este invariante para enlaces (no orientados) es conocido desde hace ya mucho tiempo. Lo que hacemos será asignarle un color a cada arco del diagrama del enlace, cumpliendo 3 condiciones.

**Definición 19.** Una ‘3-coloración propia’ de un diagrama de enlace le asigna un color a cada arco del diagrama, tal que

1. A cada arco le asignamos exactamente 1 color.
2. No podemos usar más de 3 colores (fijos).
3. En cada cruce, sucede que todos los arcos tienen el mismo color, o todos distintos.

**Teorema 2.** La cantidad de 3-coloraciones propias es un invariante de enlaces.

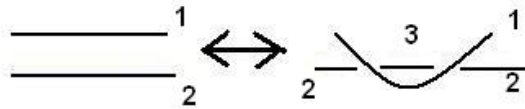
*Demostración.* Demostraremos la invariancia bajo los movimientos de Reidemeister caso a caso (nuevamente, está claro que las isotopías planares no cambian nada). La idea será asignarle a cada coloración propia antes del movimiento en cuestión, una coloración propia después del movimiento, y notar que esa coloración propia final es la única que le podemos asignar. Como los movimientos de Reidemeister son locales, alteraremos la coloración localmente; o sea, la coloración de los arcos que entran y salen del entorno del movimiento no deben cambiar (así no afectarán la coloración del resto del enlace).

$\Omega_1$ :

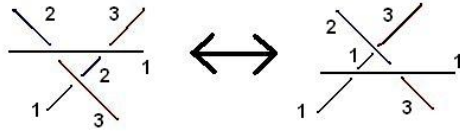


No hay más coloraciones posibles, ya que en ambos casos tenemos menos de 3 arcos.

$\Omega_2$ :



$\Omega_3$



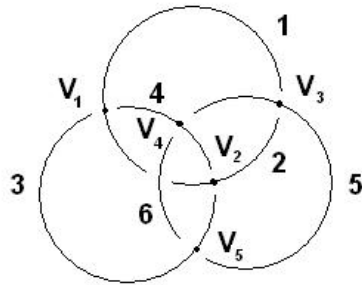
De esta manera vemos que podemos asociar una coloración luego de los movimientos, y sólo una, tal que la coloración coincida fuera del cruce. Las otras variantes son análogas.  $\square$

*Notación.*  $CI(L)$  es el invariante por colores de  $L$ .

*Ejemplo 5.* El invariante por colores del nudo trivial es 3, y el del enlace trivial de  $n$  componentes es  $3^n$

*Ejemplo 6.* El invariante por colores de los anillos Borromeos es 3, por lo cual, no es isotópico al enlace trivial de 3 componentes.

*Demostración.*



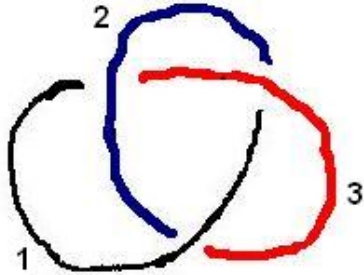
Tenemos dos opciones, 3 es del mismo color que 1 (gris), o es distinto.

1. Si tienen el mismo color (gris), entonces 4 también es gris. Luego, viendo  $v_2$ , concluimos que 2 también es gris. Por último, viendo  $v_3$ , tenemos que 5 es gris, y por ende 6 también.
2. Si tienen distinto color, entonces suponemos que 3 es negro y 2 es azul. Viendo  $v_1$ , tenemos que 4 es negro. Si nos paramos en  $v_2$ , tenemos que 2 es gris, y de  $v_3$  tenemos que 5 es gris.
  - Viendo en  $v_4$ , tenemos que 6 es azul.
  - Viendo en  $v_5$ , tenemos que 6 es negro

Lo cual es absurdo

$\square$

*Ejemplo 7.*



Observamos que el trébol admite una coloración no trivial, por lo cual, el trébol no es trivial.

*Ejemplo 8.* El invariante por colores de la figura 8 es 3; por lo cual, no podemos concluir que no es isotópico al nudo trivial.



## Capítulo 3

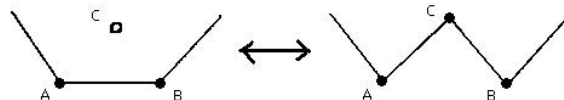
# Teorema de Reidemeister - Superficies de Seifert

En este capítulo demostraremos dos herramientas importantes. Una de ellas, el teorema de Reidemeister, ya ha demostrado su utilidad en el capítulo anterior. La otra, la existencia de superficies de Seifert para un enlace, será igualmente útil (entre otras cosas, para obtener el invariante de género, aunque es un resultado interesante en sí mismo).

### 3.1. Teorema de Reidemeister

Como ya dijimos antes, sólo trabajamos con enlaces dóciles, y en esta demostración usaremos fuertemente eso.

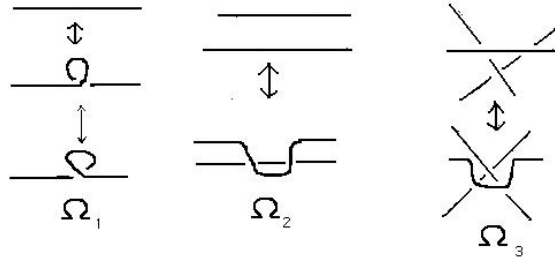
**Proposición 2.** *Dos enlaces poligonales son isotópicos si uno de ellos puede ser transformado en el otro vía una secuencia finita de 'isotopías elementales' y sus transformaciones inversas.*



Lo que hacemos es cambiar el lado  $\overline{AB}$  por dos lados  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$ , siempre y cuando el triángulo  $ABC$  relleno no interseque a ningún otro lado del enlace.

*Observación.* Esto equivale a ver cómo afecta un homeomorfismo lineal a trozos, que preserva la orientación, a un enlace poligonal.

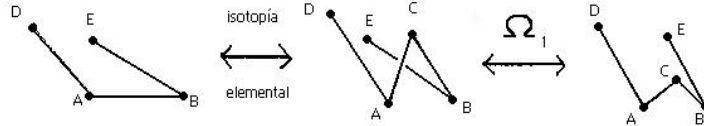
**Teorema 3. Reidemeister:** Dos diagramas  $D_1$  y  $D_2$  de enlaces representan enlaces isotópicos si y solo si  $D_1$  puede ser transformado en  $D_2$  vía una secuencia finita de isotopías planares y los 3 movimientos de Reidemeister.



*Demostración.*

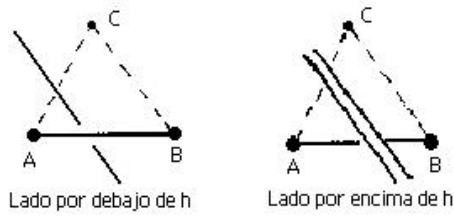
( $\Leftarrow$ ) Es evidente que ni las isotopías planares, ni los movimientos de Reidemeister, alteran la clase de isotopía del enlace. Para cada movimiento, se pueden hallar isotopías (que sólo alterarán una región acotada del espacio) que representen en el espacio dicho movimiento en el plano.

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $D_1$  y  $D_2$  generan enlaces isotópicos  $K_1$  y  $K_2$  (los cuales podemos suponer que son poligonales). Por lo tanto, podemos transformar  $K_1$  en  $K_2$  vía una secuencia de isotopías elementales.

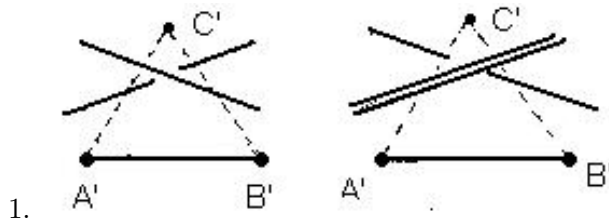


Esto muestra que, para cada isotopía elemental, podemos asumir que ni  $\overline{DA}$  ni  $\overline{BE}$  cortan el interior de  $ABC$  en el diagrama que se obtiene proyectando  $K_1$  en el plano 'h' determinado por  $ABC$ ; llamémosle  $L_1$ .

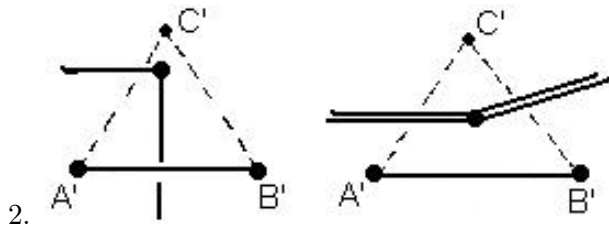
Ahora, viendo  $L_1$ , tenemos que dentro del triángulo  $ABC$  hay varias componentes del diagrama del enlace (ya sean ramas proyectadas, vértices del enlace, o cruces), y debemos distinguir si están por encima o por debajo de  $h$ . Por lo tanto, un lado con línea doble estará por encima de  $h$ , y un lado con línea simple estará por debajo.



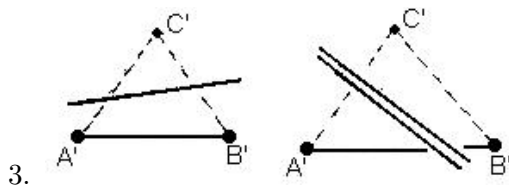
La idea de la demostración es construir la isotopía elemental con isotopías planares,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ . Para ello, dividimos el triángulo ABC en triángulos más chicos, de tal manera que cada triangulito entre en uno de los cuatro caso siguientes:



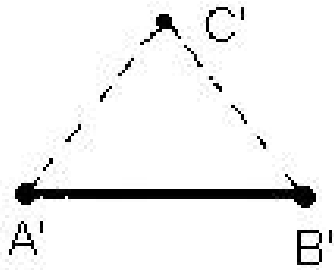
El triángulo contiene sólo un cruce de  $L_1$ , y todos los lados de  $L_1$  cortan sólo a dos lados de ABC.



El triángulo contiene un vértice de  $L_1$ , y los lados que salen de él.



El triángulo contiene sólo un lado de  $L_1$ .



4.

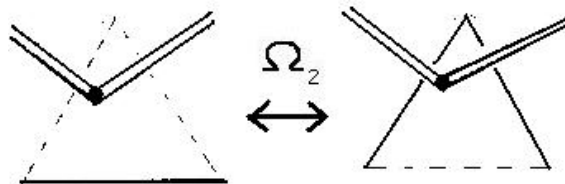
El triángulo está vacío.

Esto es posible ya que no hay más componentes posibles, siempre terminamos llegando a uno de esos casos. Ahora debemos ver que podemos lograr, en cada uno de los casos, la isotopía elemental  $\overline{A'B'} \mapsto \overline{A'C'} \cup \overline{C'B'}$  y su inversa vía isotopías planares,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ .

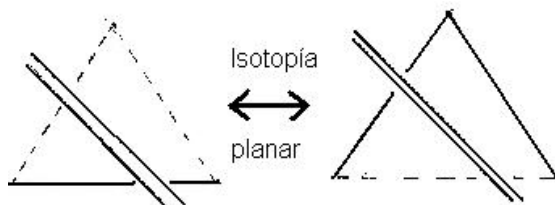
1<sup>er</sup> caso:



2<sup>do</sup> caso:

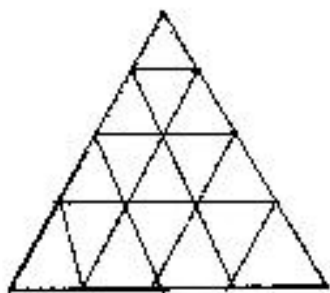


3<sup>er</sup> caso:



el 4<sup>to</sup> caso es trivial.

Habiendo resuelto el problema en cada caso puntual, hay que verlo ahora a nivel global. Supongamos (sin pérdida de generalidad) que partimos  $ABC$  así:



de tal manera que cada triángulo entra en uno de los 4 casos. Sabiendo que en cada uno de esos casos podemos realizar isotopías elementales y sus inversas, logramos  $\overline{A'B'} \mapsto \overline{A'C'} \cup \overline{C'B'}$  y su inversa así:



Como cada isotopía elemental es una secuencia finita de isotopías planares y los 3 movimientos de Reidemeister, tenemos probado el teorema.  $\square$

*Observación.* Dado un enlace poligonal  $L$ , sea  $h$  un homeomorfismo lineal a trozos, que preserve la orientación, tal que  $h(L) = L'$ , donde  $L'$  es otro enlace poligonal. Por lo dicho anteriormente, podemos transformar  $L$  en  $L'$  vía una cantidad finita de isotopías elementales. Cada triángulo  $ABC$  puede ser contenido en un entorno  $U$  (en el espacio) que no interseque al resto del enlace. Concluimos que existe un homeomorfismo lineal a trozos  $i_1$  tal que  $i_1(x) = x$  si  $x \in U^c$ , y  $i_1|_U$  realiza la transformación elemental. Concluimos que si dos enlaces son equivalentes, existe una isotopía que transforma un enlace en el otro, que se comporta como la identidad fuera de una bola.

### 3.2. Superficies de Seifert

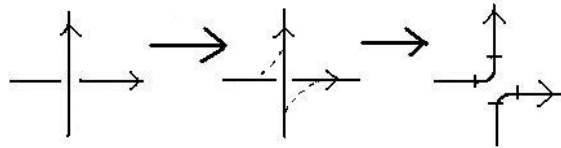
Como en esta sección trabajamos con los nudos como variedades de  $\mathbb{R}^3$ , trabajaremos con su forma diferenciable.

**Definición 20.** Sea  $L$  un enlace orientado. Una superficie de Seifert para  $L$  es una variedad compacta, orientable, bidimensional encajada en  $\mathbb{R}^3$ , cuyo borde es  $L$ , tal que la orientación de  $L$  es la misma que la que hereda como borde de la superficie.

**Teorema 4.** Para cada enlace en  $\mathbb{R}^3$  existe una superficie de Seifert.

*Demostración.* Sea  $L$  un enlace orientado, y  $D$  un diagrama de  $L$ .

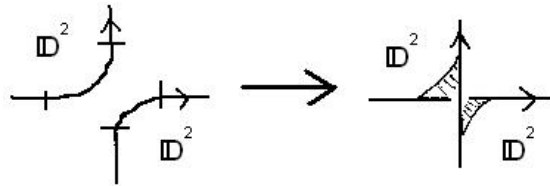
Paso 1: Deshacemos los cruces en  $D$  de la siguiente manera:



Al final, obtendremos varias curvas simples orientadas que no se intersectan (en el plano), llamadas *círculos de Seifert*.

Paso 2: A cada círculo de Seifert (viéndolos ahora en  $\mathbb{R}^3$ ) le adjuntamos un disco orientado  $\mathbb{D}^2$  (topológico) cuyo borde sea el círculo de Seifert en cuestión. Como los círculos de Seifert no se intersectan en el plano, podemos lograr que los discos no se intersecten en  $\mathbb{R}^3$  (ya que, como los círculos de Seifert no se cortan en el plano, se deduce que no están enlazados en  $\mathbb{R}^3$ ; por ende, podemos moverlos hacia “arriba” y hacia “abajo” sin alterar el diagrama  $D$ ). Así, obtenemos una variedad que consiste en varios discos disjuntos, cuyo borde son algunas ramas del enlace  $L$ , y las cuerdas auxiliares que agregamos.

Paso 3: Ahora, debemos agregar las ramas eliminadas, lograr que sean borde de nuestra variedad, y hacer que las cuerdas auxiliares que agregamos dejen de ser borde de nuestra variedad. Todo esto lo lograremos uniendo los discos con una banda doblada y orientada en todos los lugares donde había cruces.



De esta manera, obtenemos una superficie compacta cuyo borde es  $L$ . Si es disconexa, la podemos unir con tubos (que no toquen el borde). La orientación de la superficie será la que induce la orientación de  $L$ .  $\square$

Llamaremos a las superficies de Seifert que obtenemos a través del método anterior ‘superficies de Seifert algorítmicas’.

### 3.3. Invariante de Género

Vamos a introducir ahora otro concepto relacionado. Supongamos que tenemos un nudo  $K$ , la imagen de  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , y sea  $F$  una superficie de Seifert para  $K$ . Sea  $\mathbb{D}^2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $\partial\mathbb{D}^2 = S^1$ ,  $\mathbb{D}^2 \cap F = \emptyset$ . Lo que queremos es “pegar”  $S^1$  con  $K$ , y así,  $F \cup \mathbb{D}^2$  sería una variedad compacta, orientable (esto se logra poniéndole a  $S^1$  la orientación contraria a la de  $K$ ), sin borde. Logramos esto vía la siguiente relación de equivalencia:

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y, z) = (x', y', z') \\ f((x, y, z)) = (x', y', z') \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ .

Así,  $F \cup \mathbb{D}^2 / \sim$  es un  $n$ -toro  $\mathbb{T}_n$  (topológico). Si  $\chi(F)$  es la característica de Euler de  $F$ , tenemos que el género  $g$  de  $F \cup \mathbb{D}^2 / \sim$  vale  $1 - \frac{1}{2}(\chi(F) + 1)$  (es decir, que  $\chi(F \cup \mathbb{D}^2 / \sim) = \chi(F) + 1$ ; esto es porque lo que falta contar, fuera de  $F$ , es la cara del disco). Esto implica que  $g(F \cup \mathbb{D}^2 / \sim)$  depende únicamente de  $\chi(F)$ . De esta manera, puedo definir

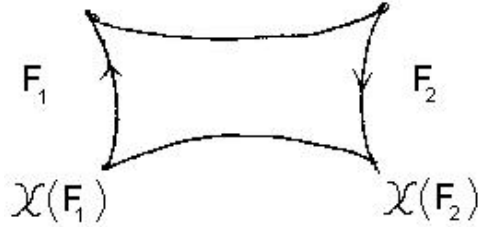
$$g(K) = \min\{g(F \cup \mathbb{D}^2 / \sim)\} \quad (3.2)$$

donde  $F$  es una superficie de Seifert para  $K$ .

Claramente, si  $K \simeq K'$ , tenemos que  $g(K) = g(K')$ : dada una superficie de Seifert  $F$  de  $K$ , y un difeomorfismo  $d$  isotópico a la identidad tal que  $d(K) = K'$ , tengo que  $d(F) = F'$  es una superficie de Seifert de  $K'$ , y  $\chi(F) = \chi(F')$ . Concluimos que  $g(K)$  es un invariante de enlaces.

*Observación.* Supongamos que tenemos un nudo  $K$  cuyo diagrama es  $D$ ; revisemos otra vez la construcción de su superficie de Seifert  $F$  para  $K$ , usando el diagrama  $D$ .

Luego del paso 1, obtuvimos varios círculos de Seifert, los cuales terminan siendo bordes de discos, que luego son unidos por bandas dobladas. O sea, que por cada círculo de Seifert, tengo un disco  $\mathbb{D}^2$  (topológico), y sabemos que  $\chi(\mathbb{D}^2) = 1$ . Ahora supongamos que tengo dos variedades  $F_1$  y  $F_2$ , y queremos unir las con una banda doblada.



Tenemos que agregamos dos lados y una cara. Concluimos que, al unir  $F_1$  y  $F_2$  con una banda doblada, estamos bajando su característica de Euler en 1.

De esta manera, por cada círculo de Seifert, agregamos un  $+1$  a la característica de Euler de  $F$ , y por cada banda doblada agregamos un  $-1$ . Como hay tantas bandas dobladas como cruces en  $D$ , tenemos que  $\chi(F) = s - c$ , donde  $s$  es la cantidad de círculos de Seifert luego del paso 1, y  $c$  la cantidad de cruces de  $D$ .

**Proposición 3.** Sea  $K \in \mathfrak{K}$ , entonces  $g(K) = 0 \Leftrightarrow K$  es el nudo trivial.

*Demostración.*

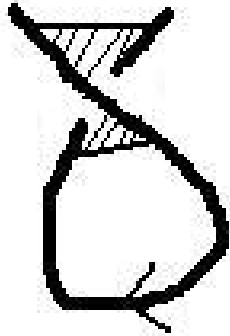
( $\Leftarrow$ ) Obvio.

( $\Rightarrow$ ) Sea  $K$  un nudo tal que  $g(K) = 0$ . Por lo visto anteriormente, tenemos que existe un diagrama de  $K$ ,  $D$ , tal que  $0 = g(K) = (1 + c - s)/2$ , donde  $s$  es la cantidad de círculos de Seifert en el diagrama  $D$ , y  $c$  la cantidad de cruces de  $D$ . Tendremos entonces que  $s = c + 1$ .

Si pensamos a  $D$  como un grafo, donde cada círculo de Seifert sea un vértice y cada cruce sea una arista, tendremos que dicho grafo será conexo (ya que  $K$  es un nudo), tendrá  $n$  vértices y  $n-1$  aristas; por lo cual, el grafo será un árbol, y por lo tanto acíclico.

Tomemos una hoja de dicho grafo, ésta representará a un círculo de Seifert en  $D$ . Cuando armemos la superficie de Seifert de  $K$ , dicho círculo estará unido a la superficie por una sola banda doblada. La única opción entonces (por la forma en que se eliminan los cruces al formar los círculos de Seifert) es que se vea de la siguiente forma.





Concluimos que dicho círculo puede ser eliminado vía  $\Omega_1$ , y por lo tanto que  $K$  es trivial.  $\square$

## Capítulo 4

# Enlaces en Superficies de $\mathbb{R}^3$

En este capítulo estudiaremos los nudos y enlaces que pueden aparecer en un toro  $\mathbb{T}_1 \subset \mathbb{R}^3$ . Más en general, nos interesaría saber: dado un  $g \in \mathbb{N}$  fijo, ¿qué enlaces pueden ser encajados en un  $g$ -toro  $\mathbb{T}_g \subset \mathbb{R}^3$ ?

A continuación, veremos que todo enlace  $L$  puede ser encajado en un  $g$ -toro, para algún  $g$ .

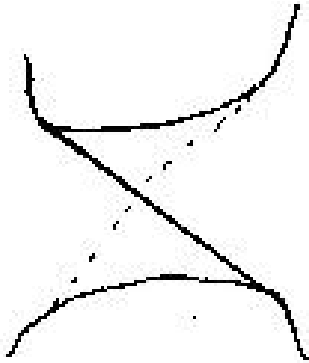
**Teorema 5.** *Dado un enlace  $L \subset \mathbb{R}^3$ , existen  $L' \simeq L$  y  $g \in \mathbb{N}$  tal que  $L' \subset \mathbb{T}_g \subset \mathbb{R}^3$ .*

*Demostración.* Veamos de vuelta la demostración de la existencia de superficies de Seifert. Intentaremos modificarla para obtener, en vez de una superficie de Seifert, una superficie  $T$  compacta, sin borde, orientable, isotópica a  $\mathbb{T}_g$  para algún  $g \in \mathbb{N}$ , tal que  $L \subset T \subset \mathbb{R}^3$ .

Paso 1: Mantendremos el primer paso intacto para obtener los círculos de Seifert.

Paso 2: A cada círculo de Seifert, le adjuntamos una esfera  $S^2$  (topológica) tal que el círculo esté incluido en dicha esfera. Usando el mismo argumento que en la demostración de la existencia de las superficies de Seifert, pediremos que dichas esferas no se intersecten y no se contengan entre sí.

Paso 3: En los lugares donde había cruces, conectamos las esferas vía tubos que contengan las ramas eliminadas.



Obtenemos así una superficie posiblemente desconexa, la cual unimos a través de tubos. Elegimos dichos tubos con el cuidado que no queden enlazados con ningún asa, así nuestra variedad no quedará anudada. A la postre, nuestra superficie (que por construcción contiene a  $L$ ) será compacta, orientable, sin borde, que se ve como varias esferas conectadas por tubos (no enlazados), y esto es claramente isotópico a  $\mathbb{T}_g$  para algún  $g$ . Dicha isotopía lleva  $L$  en  $L' \subset \mathbb{T}_g \subset \mathbb{R}^3$ .  $\square$

*Observación.* El único nudo encajable en  $\mathbb{T}_0$  (la esfera  $S^2$ ) es el nudo trivial. Esto se desprende del Teorema de Jordan.

Introduciremos ahora el concepto de *espacios de cubrimiento*, el cual usaremos en este capítulo y en el capítulo de grupo fundamental. No ahondaremos mucho en el tema, a pesar de su importancia: sólo veremos las propiedades necesarias para obtener los resultados deseados en nudos.

**Definición 21.** Sea  $B$  un espacio topológico conexo por caminos, localmente conexo por caminos. Un ‘mapa de cubrimiento’ es un mapa continuo  $p: E \rightarrow B$  tal que:

1.  $E$  es conexo por caminos y no vacío.
2. Para todo  $b \in B$  existe un entorno abierto  $V$  de  $B$  tal que  $p^{-1}V$  es una unión disjunta de abiertos en  $E$ , y  $p$  restricto a cada uno de esos abiertos es un homeomorfismo.

Decimos que el mapa  $p$  es la proyección del espacio de cubrimiento  $E$  al espacio base  $B$ . Los ejemplos que usaremos son los siguientes.

*Ejemplo 9.*

- $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ ,  $\pi(x) = x \pmod{1}$  es un espacio de cubrimiento.
- $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}_1$ ,  $\pi((x, y)) = (x \pmod{1}, y \pmod{1})$  es un espacio de cubrimiento.

Dado un espacio topológico  $B$ , y una curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$ , usamos mapas de cubrimiento para poder pensar la curva en  $E$ , y así observar mejor su comportamiento en  $B$  (por ejemplo, cuántas vueltas da un camino alrededor de  $S^1$ ). Para poder trabajar bien con espacios de cubrimiento, necesitamos dos lemas.

**Lema 1.** *Levantado de caminos:* Sea  $p : E \rightarrow B$  un mapa de cubrimiento,  $e_0 \in E$ , y  $f : [0, 1] \rightarrow B$  tal que  $f(0) = p(e_0)$ , entonces existe un único mapa continuo  $\hat{f} : [0, 1] \rightarrow E$  tal que  $\hat{f}(0) = e_0$  y  $p\hat{f} = f$ .

*Demostración.* Para todo  $t \in [0, 1]$ , tomemos el abierto  $V$  de la definición de mapa de cubrimiento correspondiente al punto  $f(t)$ . Tenemos entonces un cubrimiento por abiertos de la curva  $f$ , y por ser compacta, tenemos un subcubrimiento finito  $\{V_i\}_{i=1}^n$ , y también una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  del intervalo  $[0, 1]$  tal que  $f([t_{i-1}, t_i]) \subset V_i$  para todo  $i$ .

Sabemos entonces que existe un abierto  $W_{1,k}$  de  $E$  tal que  $p$  restringido a  $W_{1,k}$  es un homeomorfismo, donde  $e_0 \in W_{1,k}$ . Definamos entonces  $\hat{f}|_{[0,t_1]} := (p|_{W_{1,k}})^{-1} \circ f|_{[0,t_1]}$ , y así tenemos la curva deseada definida en  $[0, t_1]$ . Repitiendo el proceso obtenemos la curva  $\hat{f}$  deseada, definida en  $[0, 1]$ .

Para la unicidad, supongamos que  $\hat{\phi}$  es un segundo levantado de  $f$  tal que  $\hat{\phi}(0) = e_0$ . Sea  $\tau = \sup\{t : \hat{\phi}|_{[0,t]} = \hat{f}|_{[0,t]}\}$ . Por continuidad,  $\hat{\phi}(\tau) = \hat{f}(\tau)$ . Si  $\tau < 1$ , usando el abierto  $V_\tau$  correspondiente a la definición de mapa de cubrimiento, con un argumento como el anterior, obtenemos que  $\hat{\phi}|_{[0,\tau+\epsilon]} = \hat{f}|_{[0,\tau+\epsilon]}$ , lo cual es absurdo.  $\square$

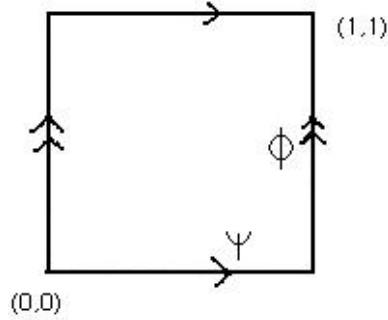
**Lema 2.** *Levantado de homotopías:* Sean  $p : E \rightarrow B$  un mapa de cubrimiento, un mapa continuo  $\hat{f}_0 : [0, 1] \times \{0\} \rightarrow E$ , y  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$  otro mapa continuo, tal que  $f(t, 0) = p\hat{f}_0(t, 0)$ , entonces existe una única extensión continua de  $\hat{f}_0$ ,  $\hat{f} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E$  tal que  $p\hat{f} = f$ .

*Demostración.* Para todo par  $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , tomemos el abierto  $V$  de la definición de mapa de cubrimiento correspondiente al punto  $f((s, t))$ . Tomemos un subcubrimiento finito  $\{V_i\}_{i=1}^n$ , y tomemos una partición de  $[0, 1] \times [0, 1]$  de la forma  $\{[t_j, t_{j+1}] \times [t_k, t_{k+1}] \mid 0 \leq j, k \leq m-1\}$ , tal que  $f([t_j, t_{j+1}] \times [t_k, t_{k+1}]) \subset V_i$  para algún  $i$ , donde  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ .

Tomemos el  $V_i$  que contiene a  $f([t_0, t_1] \times [t_0, t_1])$ , y al abierto  $W_{i,k}$  de  $E$  tal que  $\widehat{f}_0((0,0)) \subset W_{i,k}$  y  $p|_{W_{i,k}}: W_{i,k} \rightarrow V_i$  es un homeomorfismo. Usando dicho homeomorfismo, y luego usando un proceso similar al de la demostración anterior, construimos  $\widehat{f}: [0,1] \times [0,t_1] \rightarrow E$  tal que  $p\widehat{f}|_{[0,1] \times [0,t_1]} = f|_{[0,1] \times [0,t_1]}$ . Luego extendemos al resto del cuadrado unidad. La unicidad se demuestra igual que en la demostración anterior.  $\square$

*Observación.* Consideraremos muchas veces caminos cerrados  $\alpha$  en un espacio como  $B$ , lo cuales tienen como dominio  $S^1$  y no  $[0,1]$ . A la hora de trabajar con levantados de esos caminos, no cambiaremos el dominio  $S^1$ , pero será pensado como  $\alpha: [0,1] \rightarrow B$ , con  $\alpha(0) = \alpha(1)$ .

Pensaremos a  $\mathbb{T}_1$  como  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ :



Sea  $K$  un nudo en  $\mathbb{T}_1$ , o sea, la imagen de un encaje  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{T}_1$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $f(0) = [(0,0)]$ . Tomando el levantado de  $f$ , podemos ver a  $K$  como la imagen de  $\widehat{f}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $\widehat{f}(0) = (0,0)$ ,  $\widehat{f}(1) = (q,p)$  con  $(q,p) \in \mathbb{Z}^2$

**Lema 3.** *Sea  $K$  un nudo en  $\mathbb{T}_1$ , imagen de  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{T}_1$ , y  $\widehat{f}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  el levantado de  $f$ , tal que  $\widehat{f}(0) = (0,0)$  y  $\widehat{f}(1) = (q,p)$ . Entonces  $K$  es isotópico a  $K'$ , donde  $K'$  es la imagen de  $g: S^1 \rightarrow \mathbb{T}_1$ , tal que  $\widehat{g}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  cumple  $\widehat{g}(x) = (qx, px)$*

*Demostración.* Sea  $K$  un nudo en el toro  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , tal que el levantado del nudo en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\widehat{f}$ , cumpla  $\widehat{f}(1) = (q,p) \in \mathbb{Z}^2$ , y supongamos que  $q, p \geq 0$ .

Introduciremos la siguiente notación:

*Notación.*

1.  $\pi_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es la proyección sobre el eje  $\vec{x}$
- $\pi_y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es la proyección sobre el eje  $\vec{y}$

2. Supongamos que  $q > 0$ . Llamaremos “retroceso” en  $\vec{x}$  a una rama de  $K$ , que en el levantado se vea como una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\pi_x(\gamma(0)) = \pi_x(\gamma(1))$ , y  $\pi_x(\gamma(t)) < \pi_x(\gamma(0)) \forall t \in (0, 1)$ .

En el caso  $q = 0$ , llamaremos “retroceso” en  $\vec{x}$  a una rama de  $K$  que en el levantado se vea como una curva  $\pi_x(\gamma(0)) = \pi_x(\gamma(1)) = 0$ ,  $\pi_x(\gamma(t)) \neq 0 \forall t \in (0, 1)$ .

Análogamente, definimos “retroceso” en  $\vec{y}$ .

El primer paso será probar que podemos suponer que  $\pi_x(\widehat{f})$  y  $\pi_y(\widehat{f})$  son crecientes, o sea, que no tienen retrocesos.

Haremos el siguiente procedimiento: recorreremos  $\widehat{f}$  empezando por  $\widehat{f}(0)$ , y nos detendremos en  $\widehat{a}_1$ , donde  $a_1 = \max\{t \in I \mid t \geq 0 \text{ y } \pi_x \widehat{f}|_{[0,t]} \text{ es creciente}\}$ . Si  $a_1 = 1$ , entonces no hay retrocesos en  $\vec{x}$ . Si no, definimos  $b_1 = \min\{t \in I \mid t > a_1 \text{ y } \widehat{f}(t) = \widehat{f}(a_1)\}$ . Así, tendremos que la curva  $\widehat{f}|_{[a_1, b_1]}$  es un retroceso. Análogamente, definimos  $a_i = \max\{t \in I \mid t \geq b_{i-1} \text{ y } \pi_x \widehat{f}|_{[b_{i-1}, t]} \text{ es creciente}\}$  y  $b_i = \min\{t \in I \mid t > a_i \text{ y } \widehat{f}(t) = \widehat{f}(a_i)\}$ . Como trabajamos con nudos dóciles, obtenemos sólo una cantidad finita de retrocesos en  $\vec{x}$ , cuyos levantados son  $\{\widehat{f}|_{[a_i, b_i]}\}_{i=1}^n$ .

En el toro, y para cada retroceso, tomemos el segmento  $\overline{f(a_i)f(b_i)}$  tal que  $\overline{f(a_i)f(b_i)} \cup f([a_i, b_i])$  encierre un disco  $D_i$  en  $\mathbb{T}_1$ . Si el interior del disco intersecta a una rama del nudo, entonces esa rama está contenida en uno de los retrocesos. Consideremos entonces un entornno de  $D_i$ ,  $U_i$ , tal que  $U_i$  no intersecte a ninguna rama de  $K$  fuera de un retroceso (con la inevitable excepción de  $f((a_i - \epsilon, a_i))$  y  $f((b_i, b_i + \epsilon))$ , pero esto es irrelevante). Usando  $U_i$ , construimos un homeomorfismo  $h_i$  lineal a trozos, que preserva la orientación, tal que  $h_i|_{U_i^c} = id$ ,  $h_i(f|_{[a_i, b_i]}) = \overline{f(a_i)f(b_i)}$ . Con dicho homeomorfismo, sólo alteramos el retroceso  $i$  (el que queremos eliminar en este paso) y posiblemente otras ramas del nudo, que igual debemos eliminar más tarde, por lo cual no importa. De esta manera, eliminamos uno por uno los retrocesos en  $\vec{x}$ . Haremos lo mismo con los retrocesos en  $\vec{y}$ .

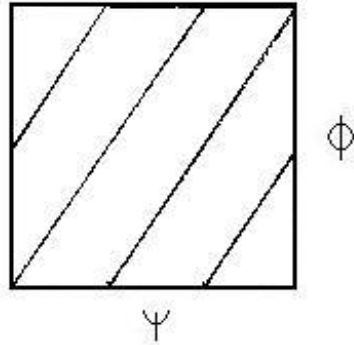
Si  $q = 0$ , tendremos que  $\pi_x(\widehat{f})$  es constante, por lo cual  $\pi_y(\widehat{f})$  es constante, o se tiene que  $\widehat{f}(1) = (0, 1)$  (de lo contrario, el nudo se cortarí). Para obtener el resultado deseado, basta con reparametrizar  $\pi_y \widehat{f}$ .

De lo contrario, una vez que podemos suponer que  $\pi_x(\widehat{f})$  es creciente, perturbaremos  $K$  para que  $\pi_x(\widehat{f})$  sea estrictamente creciente. Tendremos entonces que, pensando  $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , la curva  $[y] = 0$  corta a  $K$  en  $p$  puntos  $[\alpha_1], \dots, [\alpha_p]$ , y la curva  $[x] = 0$  corta a  $K$  en  $q$  puntos  $[\beta_1], \dots, [\beta_q]$ . Sean  $[\alpha'_1], \dots, [\alpha'_p]$  los puntos de corte de  $K'$  con  $[y] = 0$ , y  $[\beta'_1], \dots, [\beta'_q]$  los

puntos de corte de  $K'$  con  $[x] = 0$ . Como  $\widehat{f}(1) = \widehat{g}(1) = (q, p)$ , tenemos que si orientamos la curva  $[y = 0]$ ,  $[\alpha_1], \dots, [\alpha_p]$  y  $[\alpha'_1], \dots, [\alpha'_p]$  aparecen en el mismo orden, por lo cual, existe un homeomorfismo  $h_x : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}_1$  lineal a trozos, tal que  $h_x([\alpha_i]) = [\alpha'_i] \forall i = 1, \dots, p$ , que sea la identidad fuera de un entorno tubular de  $[y] = 0 \setminus \{(0, 0)\}$ , y lo mismo podemos hacer para la recta  $[x] = 0 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Si vemos ahora a  $\mathbb{T}_1$  como  $I \times I$  con sus lados opuestos identificados, tenemos  $K$  se ve como varias curvas en  $I \times I$ , que no se cortan. Podemos encontrar entonces un homeomorfismo  $H : I \times I \rightarrow I \times I$  lineal a trozos, que preserve la orientación, tal que dichas curvas sean ahora rectas, dejando fijos los extremos. Tenemos ahora que, luego de varios homeomorfismos lineales a trozos que preservan la orientación,  $K = K'$ .  $\square$

*Observación.* Lo anterior equivale a que, en el diagrama del toro, podemos ver a cada nudo como varias líneas paralelas.



**Trébol en el toro**

**Lema 4.** Sea  $K \subset \mathbb{T}_1$  un nudo, la imagen de  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{T}_1$ , y  $\widehat{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  el levantado de  $f$ , tal que  $\widehat{f}(0) = (0, 0)$  y  $\widehat{f}(1) = (q, p)$ . Entonces,  $q$  y  $p$  son coprimos.

*Demostración.* Ya sabemos que podemos pensar a  $\widehat{f}(I)$  como un segmento en  $\mathbb{R}^2$  que une  $(0, 0)$  y  $(q, p)$ . Si  $\text{mcd}(q, p) = c > 1$ , dicho segmento contendrá a  $(q/c, p/c) \in \mathbb{Z}^2$ , lo cual es absurdo.  $\square$

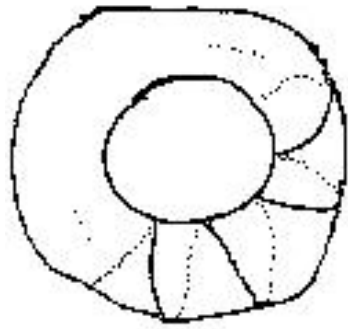
*Observación.* Dados  $p, q \in \mathbb{Z} \mid \text{mcd}(p, q) = 1$ , tenemos definido un nudo tomando  $\{(\psi, \phi) \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \mid q\phi - p\psi = 0 \pmod{1}\}$  en el toro.

De todo lo anterior, podemos concluir que, a cada par  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  le podemos asociar un nudo  $K(p, q)$ , y que a cada nudo le podemos asociar un par  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  como ya vimos.

*Ejemplo 10.*

1. Si  $p = 0$  o  $q = 0$ , entonces  $D(p, q)$  es el nudo trivial en  $\mathbb{R}^3$  (ya que sería análogo a encajar el nudo en una esfera). Podremos suponer siempre que  $p, q \neq 0$ .
2. Si  $p = \pm 1$  o  $q = \pm 1$ , entonces  $(p, q)$  es el nudo trivial en  $\mathbb{R}^3$ .

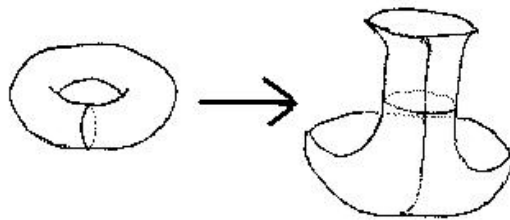
*Demostración.* Supongamos  $q = 1$  y tomemos  $K(p, 1) = \{(\psi, \phi) \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \mid \phi - p\psi = 0 \pmod{1}\}$ , con  $p \in \mathbb{Z}$ . Entonces, el nudo se puede ver así



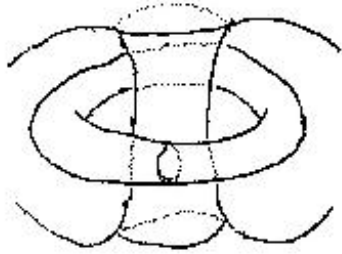
Como el nudo sólo da una vuelta sobre el meridiano, se puede encontrar un diagrama del nudo sin cruces (por ejemplo, el que tomamos)  $\square$

**Teorema 6.** *Dados  $p$  y  $q$  coprimos, los nudos  $K(p, q)$  y  $K(q, p)$  son isotópicos en  $S^3$ .*

*Demostración.* Tomemos  $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ . Podemos representar a  $S^3$  como la unión de dos toros rellenos. Si lo vemos en  $\mathbb{R}^3$  sería así:







⇒

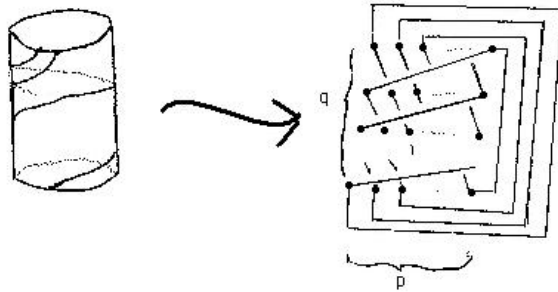
Construimos un difeomorfismo que lleva  $S^3$  en  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  tal que cada toro representa una mitad de  $S^3$  ( $|z|^2 \leq |w|^2$  y  $|z|^2 \geq |w|^2$ ). Por ende, el nudo  $K(p, q)$  en el borde de uno de los toros rellenos, es el nudo  $K(q, p)$  en el borde del otro.

Si llevamos (vía una isotopía) una mitad de  $S^3$  en la otra (o sea, en  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ , llevamos un toro en el otro), transformamos al nudo  $K(p, q)$  en el nudo  $K(q, p)$  vía una isotopía.  $\square$

Consideremos ahora otra manera de ver al toro; esta vez, como un cilindro  $S^1 \times [0, 1]$ , bajo la relación de equivalencia

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b) = (a', b') \\ a = a'; b = 0; b' = 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Ahora tomemos el nudo  $K(p, q)$  en  $\mathbb{T}_1$ , lo cual vemos como

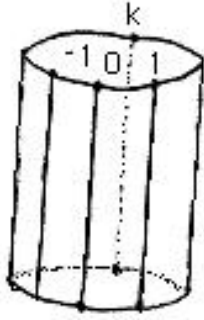


Numeremos los puntos de corte de  $K(p, q)$  con  $S^1 \times \{0\}$  según la orientación, desde 0 hasta  $p - 1$ . Numeraremos de igual maera a  $K(p, q) \cap S^1 \times \{1\}$  tal que la numeración sea coherente con la relación de equivalencia que tomamos.

Empecemos por 0 en  $S^1 \times \{0\}$ . Recorriendo el nudo a través del cilindro (desde  $S^1 \times \{0\}$  hasta  $S^1 \times \{1\}$ ), terminamos en  $q/p \pmod{1}$ . Repitiendo el proceso, arrancando desde  $q/p \pmod{1}$  en  $S^1 \times \{0\}$ , llegamos a  $2q/p \pmod{1}$  en  $S^1 \times \{1\}$ . De esta manera, pasaremos por los  $p$  puntos en  $S^1 \times \{0\}$ . Esto refuerza el hecho que  $p$  y  $q$  son coprimos.

Modifiquemos ligeramente el modelo anterior. Tomando una relación de equivalencia distinta, podemos ver a  $K(p, q)$  como un conjunto de líneas verticales en  $S^1 \times [0, 1]$

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b) = (a', b') \\ a = (p/q) + a' \pmod{1}; b = 0; b' = 1 \end{cases} \quad (4.2)$$



De esta manera cambia la numeración de  $K(p, q) \cap S^1 \times \{1\}$  (para ser coherente con la nueva relación de equivalencia).

¿Qué pasa si, manteniendo intacto el dibujo, cambiamos la relación de equivalencia?. Por ejemplo, cambiando ' $a = (p/q) + a' \pmod{1}$ ' por ' $a = (Np/q) + a' \pmod{1}$ ', con  $N \in \mathbb{Z}$ . En otras palabras, identificando  $K(p, q) \cap S^1 \times \{0\}$  con  $\mathbb{Z}_p$ , queremos ver qué pasa con  $\{nqN \pmod{p}, n \in \mathbb{Z}\}$ .

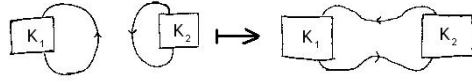
Si  $\text{mcd}(N, p) = 1$ , por analogía, obtenemos el nudo  $K(p, q)$ . Sino, tendremos  $\text{mcd}(N, p) = c > 1$ ; ahora ya no recorreremos todo el dibujo si arrancamos en 0: estaríamos dividiendo  $\mathbb{Z}_p$  en  $c$  conjuntos de la forma  $\{i + nK \pmod{p}, i \in \mathbb{Z}_p \text{ fijo}, n \in \mathbb{Z}\}$ . Así, obtenemos un enlace de  $c$  componentes, todas ellas de la forma  $K(p/c, q/c)$ .

## Capítulo 5

# Aritmética de Nudos

En este capítulo introduciremos una operación entre nudos, y estudiaremos sus propiedades.

**Definición 22.** Por composición, concatenación, o suma conexas de dos nudos  $K_1$  y  $K_2$ , nos referimos al nudo obtenido de anexas el nudo  $K_2$  al nudo  $K_1$  con respecto a la orientación de ambos.



Notación.  $K_1\#K_2$

**Proposición 4.** Se cumple

1. Si  $K_1 \simeq K_2$ , entonces  $K_1\#L \simeq K_2\#L$  y  $L\#K_1 \simeq L\#K_2$ , donde  $K_1, K_2$  y  $L$  son las imágenes de los encajes suaves  $f_1, f_2, g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  respectivamente.
2.  $K_1\#K_2 = K_2\#K_1 \ \forall K_1, K_2 \in \mathfrak{K}$ .
3.  $(K_1\#K_2)\#K_3 \simeq K_1\#(K_2\#K_3) \ \forall K_1, K_2, K_3 \in \mathfrak{K}$ .
4.  $K\#U = K \ \forall K \in \mathfrak{K}$ , donde  $U$  es el nudo trivial.

De estas 4 proposiciones, sólo probaremos la primera y la segunda. La primera es, probablemente, la menos intuitiva, y nos asegura que  $\# : \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}$  está bien definida. La segunda será inmediata luego de que probemos en el ítem 2 que “ $\#$  no depende del lugar donde anexamos  $K_1$  y  $K_2$ ”. Las otras dos proposiciones pueden llegar a ser muy engorrosas, y a muy bajo precio, ya que son (intuitivamente) muy claras.

*Demostración.*

1. Como  $K_1 \simeq K_2$ , sabemos que existe una isotopía lineal a trozos  $h : I \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $I = [0, 1]$ ,  $h(0, x) = x \forall x \in \mathbb{R}^3$ ,  $h(1, K_1) = K_2$ , tal que  $h(t, x) = x \forall t \in I, \forall x \in B(0, N)^c$  para algún  $N \in \mathbb{R}$ . Situemos, entonces, a  $L$  en  $B(0, N)^c$ , y consideremos  $K_1 \# L$ . Tendremos, entonces, que  $h(1, K_1 \# L) = K_2 \# L$ . Razonando análogamente, probamos que  $L \# K_1 \simeq L \# K_2$ .
2. Pensemos los nudos en su forma diferenciable (en particular, los pensemos como subvariedades orientadas de  $\mathbb{R}^3$ ). Tomemos un entorno tubular de  $K_2$ ,  $\mathcal{N}_\epsilon(K_2)$ , y sea  $\Pi : \mathcal{N}_\epsilon(K_2) \rightarrow K_2$  tal que  $d(x, \Pi(x)) = d(x, K_2) \forall x \in \mathcal{N}_\epsilon(K_2)$ . Sea  $\phi : U \rightarrow V$  una carta local de  $K_2$  ( $U \subset K_2$  entorno de  $P$ ,  $V \subset \mathbb{R}$  entorno de  $\phi(P)$ ). Podemos extender  $\phi$  a un difeomorfismo  $\Phi_U : \Pi^{-1}(U) \rightarrow V \times B((0, 0), 1)$  tal que el diagrama siguiente conmute.

$$\begin{array}{ccc}
 \Pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi_U} & V \times B((0, 0), 1) \\
 \Pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 U & \xrightarrow{\phi} & V
 \end{array} \tag{5.1}$$

Esto se debe a que  $\mathcal{N}_\epsilon(K_2)$  es una variedad,  $\Pi$  es una submersión, y al teorema local de las submersiones (podemos ver a  $\Phi_U$  como una carta local de  $\mathcal{N}_\epsilon(K_2)$ ). Más aún, se puede dar una forma explícita para  $\Phi_U$ , por ejemplo  $\Phi_U(x) = (\phi(\Pi(x)), d(x, \Pi(x))/\epsilon)$ , y por lo tanto,  $\Phi_U^{-1} \circ \Phi_U = id$  en donde esté definida.

Por todo lo anterior, podemos definir un campo en  $\mathbb{R}^3$ , que sea nulo en  $\mathcal{N}_\epsilon(K_2)^c$ , y no nulo en  $\mathcal{N}_\epsilon(K_2)$ , tal que las soluciones de dicho campo en  $\mathcal{N}_{\epsilon/2}(K_2)$  “corran paralelas” a  $K_2$ .

Consideremos ahora  $K_1$ , y supongamos que  $K_1 \subset \mathcal{N}_{\epsilon/2}(K_2)$ . Consideremos  $K_1 \# K_2$ : usando el campo anterior, obtenemos varios nudos de la forma  $K_1 \# K_2$  posibles, pero el lugar de  $K_2$  donde están anexados es siempre distinto.

□

Nos gustaría agregar a esta lista de propiedades la existencia del inverso, y así los nudos serían un grupo respecto de  $\#$ . Sin embargo, el resultado que tenemos es el siguiente.

**Teorema 7.** *Sea  $K_1$  un nudo no trivial. Entonces, para todo nudo  $K_2$ , tenemos que  $K_1 \# K_2$  es no trivial.*

Obtendremos la demostración de dicho teorema como corolario del siguiente teorema.

**Teorema 8.**  $\forall K_1, K_2 \in \mathfrak{K}$ , se cumple  $g(K_1) + g(K_2) = g(K_1 \# K_2)$ .

*Demostración.*

1.  $\underline{g(K_1) + g(K_2) \geq g(K_1 \# K_2)}$

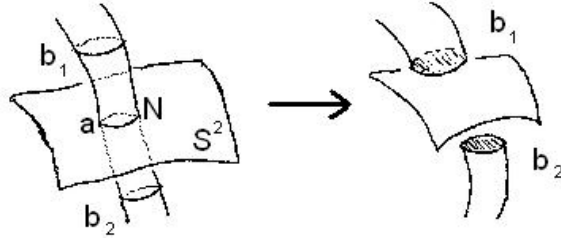
Sean  $F_1, F_2$  superficies de Seifert de mínimo género para  $K_1$  y  $K_2$  ( $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ). Conecto  $F_1$  y  $F_2$  con una banda con respecto a la orientación, tal que el borde de la nueva superficie  $F$  sea  $K_1 \# K_2$ , y así obtengo una superficie de Seifert para  $K_1 \# K_2$ . Recordando las cuentas que realizamos al estudiar el género de una superficie de Seifert, tenemos que  $g(F) = g(F_1) + g(F_2)$ . Como  $g(F_i) = g(K_i)$ ,  $i = 1, 2$ , tenemos que  $g(K_1) + g(K_2) \geq g(K_1 \# K_2)$ .

2.  $\underline{g(K_1) + g(K_2) \leq g(K_1 \# K_2)}$

Sea  $F$  una superficie de Seifert de mínimo género para  $K_1 \# K_2$ . Separo  $K_1$  y  $K_2$  con una esfera  $S^2$  (topológica). Entonces  $S^2 \cap (K_1 \# K_2) = \{A, B\}$ . Eventualmente perturbando  $S^2$ , podemos suponer cortes transversales entre  $S^2$  y  $F$ ; así tenemos que  $F \cap S^2$  es una variedad de dimensión 1 compacta, cuyo borde está incluido en  $\partial F \cap S^2 = \{A, B\}$ .

Concluimos del teorema de clasificación de variedades con borde de dimensión 1, que  $F \cap S^2$  es la unión finita de variedades homeomorfas a  $S^1$  (que por estar en  $S^2$  son el nudo trivial) y un intervalo cuyos bordes son  $A$  y  $B$ . Cada una de estas componentes (los  $S^1$ ) separa  $S^2$  en dos componentes, una contiene a  $\overline{AB}$  y la otra no.

De esas curvas cerradas en  $S^2$ , tomemos una tal que la componente que no contiene a  $\overline{AB}$  no contenga otras curvas (llamémosla  $a$ ), y consideremos un entorno  $N$  de  $a$  en  $F$ , el cual puede ser visto como un cilindro cuyos bordes son  $b_1$  y  $b_2$  (ver imagen). Ahora eliminaremos  $N$  y anexaremos un disco a  $b_1$  y otro a  $b_2$ .



Repetiremos este proceso hasta que  $F \cap S^2 = \overline{AB}$ . Al final, nuestra superficie puede constar de varias componentes conexas: eliminaremos todas menos la que contiene a  $K_1 \# K_2$ , a la cual llamaremos  $F'$  (esto también reduce el género). Tendremos que  $F'$  también es una superficie de Seifert de género mínimo para  $K_1 \# K_2$ .

Tenemos entonces que  $g(F') \leq g(F)$ , pero como  $F$  es de género mínimo, tenemos que  $g(F') = g(F)$ . Pero ahora  $S^2$  separa  $F'$  en dos superficies que ahora pueden ser vistas como superficies de Seifert para  $K_1$  y  $K_2$  (las llamaremos  $F'_1, F'_2$ ;  $F'_1 \cap F'_2 = \overline{AB}$ , pero podemos considerarlas disconexas por todo lo anterior). De la parte 1,  $g(F'_1) + g(F'_2) = g(F') = g(K_1 \# K_2)$ . Entonces  $g(K_1) + g(K_2) \leq g(K_1 \# K_2)$ .

□

Veamos entonces la demostración del teorema 7.

*Demostración.* Sea  $K_1$  un nudo no trivial, entonces  $g(K_1) \geq 1$ . Sea  $K_2$  otro nudo, entonces  $0 < g(K_1 \# K_2)$ . Concluimos que  $K_1 \# K_2$  es no trivial. □

Al igual que en los naturales, con el producto usual, podremos hablar de nudos primos.

**Definición 23.** Un nudo  $K$  se dice que es ‘primo’ si no es trivial, y si  $\forall L, M \mid K = L \# M$ , entonces  $L$  es trivial o  $M$  es trivial.

**Definición 24.** Decimos que el nudo  $M$  ‘divide al nudo’  $K$  si existe un nudo  $L$  tal que  $M \# K = L$ .

*Observación.*

1. Ningún nudo se puede descomponer en infinitos nudos primos.

*Demostración.* Si  $K = L_1 \# L_2 \# \dots \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} g(L_i) = g(K)$  con  $g(L_i) \geq 1 \forall i$ , lo cual es absurdo. □

2. Si un nudo  $K$  cumple  $g(K) = 1$  entonces es primo.

*Demostración.* Si  $K = L\#M \Rightarrow 1 = g(K) = g(L) + g(M) \Rightarrow g(L) = 0$  o  $g(M) = 0$ .  $\square$

3. Si un nudo puede ser encajado en  $\mathbb{T}_1$  entonces es primo o trivial.

*Demostración.* Supongamos que  $K$  puede ser encajado en  $\mathbb{T}_1$ , y que  $K = L_1\#L_2$ . Si  $K$  es trivial, no hay nada que demostrar; de lo contrario, sabemos que es un nudo  $(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$  (suponemos que ambos son positivos),  $a \geq b \geq 2$ . Tomemos entonces una esfera  $S^2$  (topológica) tal que  $K \cap S^2 = \{P, Q\}$ , donde  $L_1$  se encuentra en la región acotada por  $S^2$  y  $L_2$  se encuentra en la región no acotada por  $S^2$ .

Si pensamos los nudos en su forma diferenciable, sabemos que existe un difeomorfismo  $h$ , isotópico a la identidad, tal que  $h(K) \subset \mathbb{T}_1$ . Dicho difeomorfismo llevará a  $S^2$  en otra esfera, la cual podemos suponer (eventualmente perturbando la  $S^2$  original) que corta transversalmente a  $\mathbb{T}_1$ . Podemos concluir que  $S = (h(S^2) \cap \mathbb{T}_1) \subset \mathbb{T}_1$  es un conjunto disjunto de círculos. En particular, tendremos que  $\{h(P), h(Q)\} = K \cap h(S^2) \subset S$ , y podremos suponer que  $K$  (seguiremos llamando  $K$  al nudo, y no  $h(K)$ ) corta transversalmente a  $S$  en  $\mathbb{T}_1$ . Analicemos cada esfera  $S^1$  de  $S$ , según el caso que corresponda.

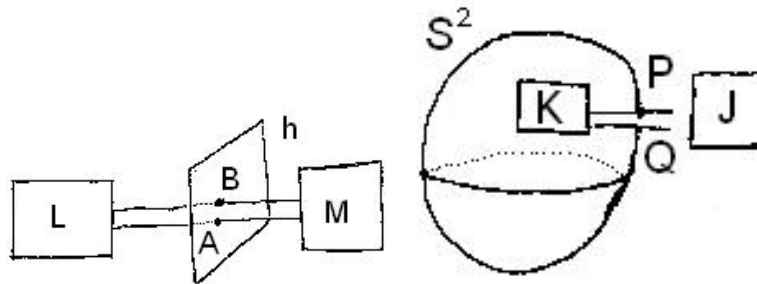
- Si  $S^1 \cap K = \emptyset$  entonces podemos deformar sin problemas la esfera  $S^2$  original para que  $S^1$  desaparezca.
- $P \in S^1, Q \notin S^1$ : si  $S^1$  es homotópica a un punto,  $K$  y  $S^1$  no pueden cortarse solo en un punto. Tenemos entonces que  $S^1$  no es homotópica a un punto, pero esto también es absurdo: como  $K$  es un nudo  $(a, b)$  con  $a$  y  $b$  como antes, si  $S^1$  no es homotópica a un punto,  $S^1 \cap K$  debe constar de, por lo menos, dos puntos.
- Si  $\{P, Q\} \subset S^1$ , como  $K \setminus \{P, Q\}$  es desconexo, tenemos que  $S^1$  es homotópica a un punto (de vuelta usamos que  $K \cap S^1 = \{P, Q\}$ , y que  $K$  no es trivial), y tenemos que  $L_1$  (o  $L_2$ ) está contenido en un disco, y por ende es trivial.

$\square$

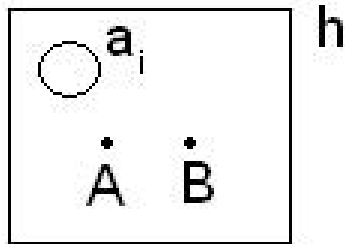
Además de la descomposición de un nudo  $K$  en finitos nudos primos  $L_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , podemos asegurar la unicidad de dicha descomposición.

**Teorema 9.** Sean  $L, M \in \mathfrak{K}$ , y  $K \in \mathfrak{K}$  primo tal que  $K$  divide a  $L\#M \Rightarrow K$  divide a  $L$  o  $K$  divide a  $M$ .

*Demostración.* Considero un plano  $h$  que separe a  $L\#M$  en  $L$  y  $M$ . Sabemos que  $L\#M = K\#J$  para algún  $J \in \mathfrak{K}$ , entonces existe una esfera  $S^2$  (topológica) tal que  $K$  se encuentra en la región acotada por  $S^2$ , y  $J$  en la región no acotada,  $S^2 \cap K\#J = \{P, Q\}$ .

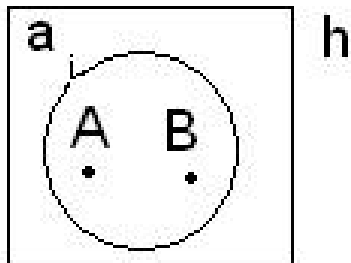


Si  $S^2 \cap h = \emptyset \Rightarrow S^2$  está del lado de  $L$  o del lado de  $M$ , y entonces  $K$  divide a  $L$  o a  $M$ . Si no  $S^2 \cap h$  consta de varias curvas cerradas  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Estudiemos caso a caso.



1.

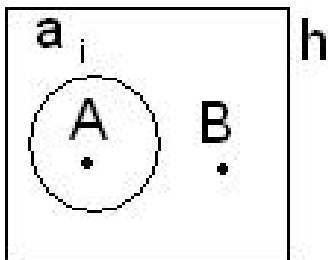
Puedo deformar  $S^2$  para que siga conteniendo a  $K$  y  $a_i$  desaparezca.



2.



$S^2$  tiene que contener a todo  $L$  o a todo  $M$  (si no  $L\#M \cap (S^2)^c$  son dos componentes conexas). Supongamos que  $M$  está en la región acotada por  $S^2$ , entonces  $K = M$  (si  $K$  fuese más grande, entonces  $K = M\#J'$ ,  $J'$  del lado de  $L$ , no trivial, lo cual es absurdo).



3.

Tengo que  $P$  y  $Q$  están en distintos lados de  $h$ . Uniendo  $P$  y  $Q$ , tengo que  $K = J'\#J''$ , uno de cada lado de  $h$ , entonces uno de ellos es trivial (supongo que es  $J'$  del lado de  $P$ ). Entonces, puedo llevar  $P$  al otro lado de  $h$  sin alterar a  $K$ .

□

*Observación.* Si  $K = L_1\#\dots\#L_n$ ,  $L_i$  primo  $\forall i$ ,  $M$  primo que divide a  $K$ , entonces  $M$  divide a  $L_1$  o a  $L_2\#\dots\#L_n$ . Si  $M$  divide a  $L_1$ , entonces  $M = L_1$ . De lo contrario, hacemos el mismo razonamiento otra vez. Concluimos que existe un  $k$  tal que  $M = L_k$ , lo cual asegura la unicidad de la descomposición.

## Capítulo 6

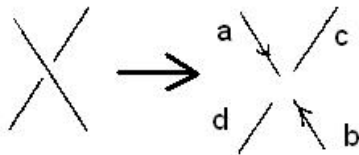
# Polinomios de Enlaces

En este capítulo, veremos cómo asociarle un polinomio a un enlace, tal que a dos enlaces isotópicos les corresponda el mismo polinomio. De esta manera, obtendríamos un invariante de enlaces. Existen varias asociaciones del estilo posibles; nosotros veremos dos de ellas: el polinomio de Jones y el polinomio HOMFLY.

### 6.1. El polinomio de Jones

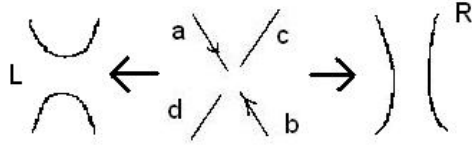
Estudiaremos el polinomio de Jones según el enfoque de Kauffman. Para esta sección, usaremos la siguiente notación.

- $D$  será el diagrama de un enlace (posiblemente sin orientar).
- $DU$  representa al diagrama de un cruce (o sea,  $D$ ) junto con una componente trivial  $U$ , sin cruces con  $D$ .
- Sea  $D$  el diagrama de un enlace. Miremos un cruce cualquiera



Removamos las dos pequeñas ramas que constituyen el cruce, como en la figura. De esta manera, obtenemos (localmente) cuatro ramas; dos de ellas ( $a$  y  $b$ ) eran parte del cruce superior, y las otras dos ( $c$

y d) eran parte del cruce inferior. Supongamos que, estando en a, me dirijo en dirección de b, y viceversa (como en las flechitas de la figura anterior).



Fijémonos en a. En relación a la dirección que elegimos, tengo una rama del cruce inferior a la izquierda de a (en la figura, sería c) y otra a la derecha (la cual sería d). Observemos que en b sucede lo opuesto: la rama del cruce inferior a la izquierda de b es la que está a la derecha de a, y viceversa.

Si unimos entonces las ramas del cruce superior con las ramas del cruce inferior a izquierda (a con c, b con d), obtenemos un nuevo enlace, al cual llamaremos  $L$ . Análogamente, uniendo las ramas del cruce superior con las ramas del cruce inferior a derecha, obtenemos otro enlace, al cual llamaremos  $R$ .

**Definición 25.** Sea  $D$  un diagrama de enlace sin orientar. Defino ‘el polinomio corchete’ de  $D$  como el polinomio de Laurent  $\langle D \rangle$  en una variable,  $A$ , que cumple las siguientes propiedades

- PC1:  $\langle U \rangle = 1$
- PC2:  $\langle DU \rangle = -(A^2 + A^{-2}) \langle D \rangle$
- PC3:  $\langle D \rangle = A \langle L \rangle + A^{-1} \langle R \rangle$

La base de esta definición recursiva es PC1. PC2 nos da una manera de eliminar componentes del enlace sin cruces con  $D$  ni con sí misma, mientras que PC3 nos dice cómo eliminar los cruces de  $D$ . Sin embargo, surgen preguntas: si  $D$  y  $D'$  son diagramas de enlaces isotópicos, ¿tenemos que  $\langle D \rangle = \langle D' \rangle$ ?, ¿depende  $\langle D \rangle$  del orden en que removemos los cruces y las componentes triviales?. Investigaremos primero la primera pregunta.

**Lema 5.** Si  $D$  y  $D'$  son diagramas de dos enlaces regularmente isotópicos, entonces  $\langle D \rangle = \langle D' \rangle$ .

*Demostración.* Invariancia bajo  $\Omega_2$ :

$$\begin{aligned}
\langle \text{D} \rangle &= A \langle \text{U} \rangle + A^{-1} \langle \text{U} \rangle \\
&= A (A \langle \text{R} \rangle + A^{-1} \langle \text{S} \rangle) + A^{-1} (A \langle \text{L} \rangle + A^{-1} \langle \text{S} \rangle) \\
&= (A^2 + A^{-2}) \langle \text{S} \rangle + \langle \text{S} \rangle \text{U} + \langle \text{L} \rangle \langle \text{L} \rangle = \langle \text{L} \rangle \langle \text{L} \rangle
\end{aligned}$$

Invariancia bajo  $\Omega_3$ :

$$\langle \text{X} \rangle = A \langle \text{Y} \rangle + A^{-1} \langle \text{Z} \rangle = A \langle \text{S} \rangle + A^{-1} \langle \text{L} \rangle \langle \text{L} \rangle = \langle \text{X} \rangle$$

por simetría. □

**Lema 6.** *El polinomio corchete no es un invariante de enlaces.*

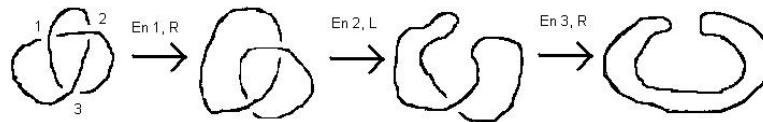
*Demostración.*

$$\begin{aligned}
\langle \rho \rangle &= A \langle \text{O} \rangle + A^{-1} \langle \text{P} \rangle = (-A)(A^2 + A^{-2}) \langle \text{L} \rangle + A^{-1} \langle \text{L} \rangle = -A^3 \langle \text{L} \rangle \\
\langle \rho \rangle &= A \langle \text{P} \rangle + A^{-1} \langle \text{O} \rangle = A \langle \text{L} \rangle + (-A^{-1})(A^2 + A^{-2}) \langle \text{L} \rangle = -A^3 \langle \text{L} \rangle
\end{aligned}$$

□

Esto es, sin dudas, un problema. Intentaremos solucionarlo luego de responder a la segunda pregunta.

Para ello, encontraremos otra representación del polinomio corchete. Al usar PC3, deshacemos los cruces, transformando  $D$  en  $R$  y  $L$ . Consideremos por ahora sólo una de esas transformaciones, por ejemplo, llevamos  $D$  en  $R$  en el primer cruce. Una vez que, para cada cruce de  $D$ , elegimos una opción de ese estilo, obtenemos un enlace trivial de  $k$  componentes, para algún  $k \in \mathbb{N}$ .





El proceso anterior puede ser expresado en el diagrama con una barra que una las regiones que se juntarán. Las barras son llamadas *marcadores*.

Luego que asignamos un marcador a cada cruce, decimos que tenemos un estado  $S$  de  $D$ . Si  $D$  tiene  $c$  cruces, tenemos  $2^c$  posibles estados. Para cada estado de  $D$ , hay asociado un polinomio

$$A^{r(S)-l(S)} \langle U...U \rangle = A^{r(S)-l(S)} (-A^2 - A^{-2})^{k(S)-1}; \quad (6.1)$$

donde  $r(S)$  es la cantidad de marcadores para los que elegimos  $R$ ,  $l(S)$  es la cantidad de marcadores que fueron marcados con  $L$ , y  $k(S)$  es la cantidad de componentes triviales al final del proceso en el estado  $S$ .

Basta observar que, al utilizar PC3 en todos los cruces, obtenemos los  $2^c$  estados posibles juntos, ya que siempre, en cada cruce, recorremos ambas opciones:  $R$  y  $L$ . En consecuencia

$$\langle D \rangle = \sum_S A^{r(S)-l(S)} (-(A^2 + A^{-2}))^{k(S)-1}. \quad (6.2)$$

Ver  $\langle D \rangle$  de esta manera, deja claro que no importa en qué orden eliminemos los cruces, ya que el resultado va a ser los  $2^c$  estados posibles; así respondemos la segunda pregunta.

Nos disponemos ahora a encontrar un polinomio que sí sea un invariante de enlaces.

El problema estaba en  $\Omega_1$ ; teníamos que agregar un cruce con ese movimiento agregaba un factor  $(-A)^{\pm 3}$  multiplicando, dependiendo de si el marcador para elegir  $L$  en el nuevo cruce crea una componente trivial (agrega  $(-A)^3$ ) o no. La anterior distinción puede realizarse más naturalmente si el enlace está orientado; así, si  $\Omega_1$  aumenta el coeficiente de autoenlace de  $D$  en 1, se estaría agregando un factor  $(-A)^3$ , y si  $\Omega_1$  disminuye  $\omega(D)$  en 1, agregamos un factor  $(-A)^{-3}$ .

**Proposición 5.** Sea  $D$  el diagrama de un enlace orientado. El polinomio  $f[D] = (-A)^{-3\omega(D)} \langle D \rangle$  es un invariante de enlaces, donde  $\omega(D)$  es el coeficiente de autoenlace de  $D$ .

*Demostración.* Sabemos que  $\omega(D)$  y  $\langle D \rangle$  son regularmente isotópicos, por lo que sólo debemos revisar  $\Omega_1$ . Por lo mencionado anteriormente, tenemos que cada cruce que suba  $\omega(D)$  en 1, añade un factor  $(-A)^{-3}$  al polinomio  $f[D]$ , y otro factor  $(-A)^3$  por parte de  $\langle D \rangle$ , los cuales se cancelarán. También se añaden factores inversos si el cruce disminuye  $\omega(D)$  en 1.  $\square$

Veamos algunos ejemplos:

*Ejemplo 11.*

1.

$$\langle D \rangle = \langle \text{Diagrama 1} \rangle = A \langle \text{Diagrama 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagrama 3} \rangle = -A^4 \langle \emptyset \rangle - A^{-4} \langle \emptyset \rangle = -(A^4 + A^{-4})$$

$$f[\text{Diagrama 1}] = (-A)^{-3\omega(D)} \langle \text{Diagrama 1} \rangle = -A^6 (A^4 + A^{-4}) = -(A^{10} + A^2)$$

2.

$$\langle D \rangle = \langle \text{Diagrama 1} \rangle = A \langle \text{Diagrama 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagrama 3} \rangle = A^7 - A^3 - A^{-5}$$

$$f[\text{Diagrama 1}] = (-A)^{-3\omega(D)} \langle D \rangle = (-A)^9 (A^7 - A^3 - A^{-5})$$

$$f[\text{Diagrama 2}] = (-A)^{-9} (A^7 - A^3 - A^{-5})$$

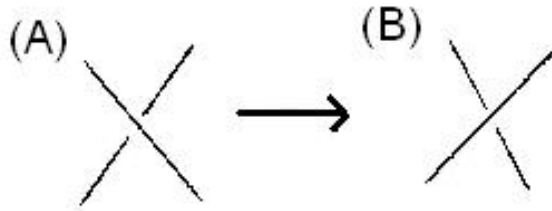
3.

$$\langle D \rangle = \langle \text{Diagrama 1} \rangle = A \langle \text{Diagrama 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagrama 3} \rangle = A \langle \text{Diagrama 4} \rangle + A^{-4} \langle \emptyset \rangle$$

$$= A^8 - A^4 - A^{-4} - A^{-4} (A^4 - A^{-4})$$

$$f[D] = \langle D \rangle \quad \text{ya que } \omega(D) = 0$$

*Observación.* Supongamos ahora que tenemos un cruce  $C$  como el siguiente.



Si la rama que constituía el cruce superior fuese ahora el cruce inferior y viceversa, obtendríamos un nuevo cruce  $C'$ . Observemos que el enlace  $L$  que obtendríamos del cruce  $C$ , sería igual al enlace  $R$  que obtendríamos de  $C'$ . De esto, podemos concluir lo siguiente.

**Proposición 6.** *Sea  $D$  el diagrama de un enlace, y  $D'$  su imagen especular. Entonces podemos obtener  $\langle D' \rangle$  intercambiando en  $\langle D \rangle$   $A$  y  $A^{-1}$ .*

*Demostración.* Sabemos que obtenemos  $D'$  intercambiando todos los cruces de  $D$  como hicimos recién con  $C$  y  $C'$ . Si tenemos que

$$\langle D \rangle = \sum_S A^{r(S)-l(S)} (- (A^2 + A^{-2}))^{k(S)-1} \quad (6.3)$$

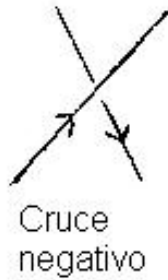
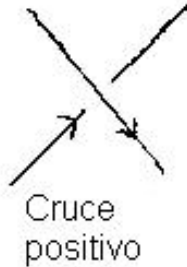
sabemos, por lo dicho anteriormente, que para  $D'$ ,  $l'(S) = r(S)$  donde  $S$  es un estado de  $D$  (como podíamos ver un estado asociándole un marcador a cada cruce de  $D$ , también podemos ver a  $S$  como un estado de  $D'$ ),  $r'(S) = l(S)$ , y además  $k'(S) = k(S)$ , ya que deshacemos igual los cruces en los diagramas  $D$  y  $D'$  dado un estado  $S$ . Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \langle D' \rangle &= \sum_S A^{r'(S)-l'(S)} (- (A^2 + A^{-2}))^{k'(S)-1} \\ &= \sum_S A^{l(S)-r(S)} (- (A^2 + A^{-2}))^{k(S)-1} \end{aligned} \quad (6.4)$$

□

*Observación.* Si observamos la parte 2 del ejemplo anterior, si  $D$  es el trébol derecho, vemos que al intercambiar  $A$  por  $A^{-1}$  en el polinomio  $f[D]$  obtenemos un polinomio distinto. Podemos concluir que el trébol derecho no es isotópico a su imagen especular. Lo mismo se puede verificar para el trébol izquierdo.

*Observación.* Si en la observación anterior, el cruce  $C$  viniese de un enlace orientado, tendríamos que el cruce  $C'$  sería negativo si  $C$  fuera positivo, y viceversa.



Deducimos que, si  $D'$  es la imagen especular de  $D$ ,  $\omega(D') = -\omega(D)$ .

Junto con la proposición anterior, podemos deducir que podemos obtener  $f[D']$  intercambiando en  $f[D]$   $A$  y  $A^{-1}$ .

**Definición 26.** Si  $D$  es el diagrama de un enlace orientado, definimos al ‘polinomio de Jones’ de  $D$  como  $V_D(t) = f[D](t^{-1/4})$ . O sea, se obtiene a través de  $f[D]$  vía un cambio de variable.

## 6.2. El polinomio HOMFLY

El descubrimiento del polinomio de Jones abrió la posibilidad de estudiar la teoría de nudos con nuevas técnicas y distintos enfoques. Así, tiempo después, fue encontrada una generalización del polinomio de Jones: un polinomio en dos variables, llamado HOMFLY en honor a los seis investigadores que, simultáneamente, lo descubrieron. Con el fin de ser lo más claros posibles, vamos a presentar ahora algunas herramientas que utilizaremos en el proceso de definición del polinomio HOMFLY, para que no entorpezcan luego la explicación.

**Lema 7.** Si un diagrama  $D$  de un enlace es ascendente, entonces representa a un enlace trivial.

*Demostración.* Empecemos por el caso en que  $D$  tiene sólo una componente. Sea  $A$  el punto base de  $D$  y  $A'$  un punto de  $D$  ubicado inmediatamente después del último cruce inferior recorrido.

Llamo  $p$  al camino que obtengo recorriendo el nudo desde  $A$  hasta  $A'$  según la orientación de  $D$ , y  $p'$  al camino que obtengo recorriendo el nudo desde  $A'$  hasta  $A$  según la orientación de  $D$ . Observemos que podemos suponer (si estamos proyectando sobre el plano  $\overrightarrow{Oxy}$ ) que, si  $x \in p$  y  $x' \in p'$ , la coordenada en  $\overrightarrow{z}$  de  $x$  es menor o igual que la coordenada en  $\overrightarrow{z}$  de  $x'$ , y la igualdad se cumple si y sólo si  $x, x' \in \{A, A'\}$ . También debemos observar que todos los cruces de  $D$  están formados por una rama en  $p$  (el cruce inferior) y otra en  $p'$  (el cruce superior), por lo cual los diagramas de  $p$  y  $p'$  no tienen cruces. Concluimos que  $D$  puede ser visto como  $U \# U$ , lo cual prueba que  $D$  es trivial.

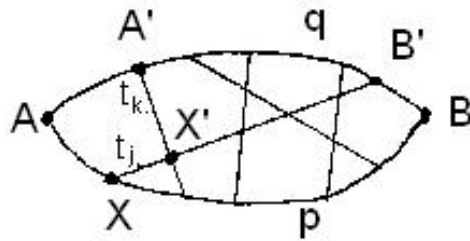
En el caso que  $D$  tenga  $n$  componentes  $U_1, \dots, U_n$  (todas ellas triviales) ordenadas, con un razonamiento similar al anterior, podremos suponer que si  $x_i \in U_i$  y  $x_j \in U_j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , entonces la coordenada en  $\overrightarrow{z}$  de  $x_i$  es



menor estricta a la coordenada en  $\vec{z}$  de  $x_j$ . Así, tenemos que  $D$  es un enlace trivial de  $n$  componentes.  $\square$

**Lema 8.** *Supongamos que  $p$  y  $q$  son dos arcos en  $\mathbb{R}^2$  que se intersectan sólo en sus extremos ( $A$  y  $B$ ), y sea  $R$  la componente acotada cuyo borde es  $p \cup q$ . Supongamos que  $t_1, \dots, t_n$  son arcos en  $R$ , donde cada uno tiene un extremo en  $p$  y otro en  $q$ . Supongamos además que  $t_i \cap t_j$  no consta de más de un punto, y no hay puntos de triple intersección. Entonces, el grafo cuyos vértices son todas las intersecciones de los arcos  $\{p, q, t_1, \dots, t_n\}$  y cuyos lados, que componen  $p \cup q \cup t_i$ , separan  $R$  en un conjunto de poliedros; en particular, existe un triedro con un lado en  $p$  y otro con un lado en  $q$ .*

*Demostración.* Haremos una demostración por inducción en la cantidad de arcos,  $n$ . Si  $n = 1$ , el teorema es trivial, así que podemos asumir que  $n > 1$ .



Sea  $t_j$  el arco cuyo extremo en  $p$  (al cual llamaremos  $X$ ) está más próximo a  $A$ , y sea  $B'$  su extremo en  $q$ . Si es posible, dentro de  $\{t_i \mid i \neq j\}$ , escogeremos  $t_k$  tal que  $t_k \cap t_j = X'$ ,  $t_k \cap q = A'$ , y  $t_k$  no intersecciona a ningún  $t_i$  entre  $A'$  y  $X'$ , con  $X'$  lo más cercano posible a  $B'$  (en el caso de tener varios  $t_k$  posibles). Si no existe ningún  $t_k$  que cumpla lo anterior, seleccionármelos a  $p$  ( $A = A'$ ,  $X = X'$ ).

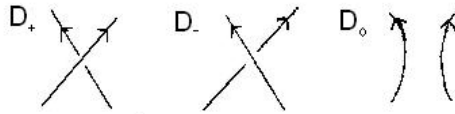
Sea  $p'$  el arco que empieza en  $A'$ , recorre  $t_k$  (o  $p$ ) hasta llegar a  $X'$ , y luego recorre  $t_j$  hasta llegar a  $B'$ ; sea  $q'$  el subarco de  $q$  comprendido entre  $A'$  y  $B'$ , y  $R'$  la región acotada cuyo borde es  $p' \cup q'$ . Si ningún  $t_i$  intersecciona el interior de  $R'$ , tenemos que  $R'$  es un triedro con un lado en  $q$ . De lo contrario,  $R'$  intersecciona  $\{t_i \mid i \neq j, i \neq k\}$  en menos de  $n$  arcos, y aplicando inducción obtenemos lo deseado.

Vale observar que la elección de  $t_k$  es importante: como  $X'$  no cuenta como vértice en  $R'$ , necesitamos saber que  $A'$  no es un vértice de dicho triedro, y así tenemos que el triedro que viene de la inducción es uno de los originales.  $\square$

A continuación, definiremos el polinomio HOMFLY, y veremos cómo calcular el polinomio HOMFLY de un enlace dado su diagrama.

**Definición 27.** Dado un enlace orientado  $L$ , definimos el polinomio HOMFLY de  $L$ ,  $P(L)(l, m)$ , como el único polinomio de Laurent en 2 variables definido por

- P1:  $P(L)$  es un invariante de enlaces.
- P2:  $P(U) = 1$ .



- P3: Si  $L_+$ ,  $L_-$  y  $L_0$  son tres enlaces con diagramas  $D_+$ ,  $D_-$  y  $D_0$  iguales salvo en un cruce, como lo muestra la figura, se tiene que

$$lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0$$

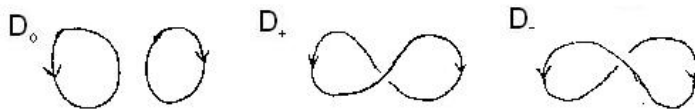
*Observación.* Supongamos que tenemos un cruce en un diagrama, por ejemplo, como en  $D_+$ . Al cambiar dicho cruce por el cruce  $D_-$ , claramente no cambiamos la cantidad de componentes de  $D$ .

Creemos por un rato que el polinomio HOMFLY está bien definido, y calculemos  $P(U^n)$ .

**Proposición 7.**  $P(U^n) = -(l + l^{-1})m^{-1})^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.*

- Para  $n = 1$ ,  $P(U) = 1$ .
- Para  $n = 2$



Podemos ver a  $U^2$  como  $D_0$  en P3. Entonces,  $lP(D_+) + l^{-1}P(D_-) + mP(D_0) = 0$ . Pero  $D_+$  y  $D_-$  son el nudo trivial, por lo cual  $P(D_0) = -(l + l^{-1})m^{-1}$ .

- En general, aplicando lo anterior a dos de las componentes de  $U^n$ , obtenemos  $P(U^n) = -(l + l^{-1})m^{-1}P(U^{n-1})$ .

□

A diferencia del polinomio corchete, no está claro *a priori* que exista un algoritmo que permita, dado el diagrama de un enlace, obtener el polinomio HOMFLY. Antes teníamos un método para eliminar todos los cruces del diagrama, ya que tanto el diagrama  $L$  como el diagrama  $R$  (de la definición del polinomio corchete) tienen un cruce menos que el diagrama original  $D$ ; sin embargo, ese no es el caso ahora.

Por ende, la estrategia ahora será distinta: dado un diagrama  $D$ , ordenado y basado, cambiaremos algunos de sus cruces (o sea, intercambiaremos cruce superior y cruce inferior), para obtener  $\alpha D$ , su diagrama ascendente asociado. De esta manera, usando la propiedad P3 en todos los cruces que queremos cambiar, vemos que calcular  $P(D)$  equivale a calcular  $P(\alpha D)$  y varios  $P(D_0)$  (tendré tantos diagramas de la forma  $D_0$  como cruces cambiados, y todos ellos tienen un cruce menos que  $D$ ). La idea, pues, será definir el polinomio  $P(D)$  (cuyo dominio será el conjunto de diagramas de enlaces, no el conjunto de enlaces) por inducción en la cantidad de cruces de  $D$  (lo cual tiene sentido si pensamos en lo anterior). El problema es que, por cómo queremos definir  $P(D)$ , podría pasar que dependiera de cómo basamos y ordenamos a  $D$ , ya que podríamos tener dos diagramas ascendentes  $\alpha D$  y  $\beta D$  distintos (por más que ambos representen al enlace trivial), y también iríamos obteniendo distintos  $D_0$  en el camino. Procederemos a formalizar todas estas ideas.

**Teorema 10.** *El polinomio HOMFLY está bien definido*

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{D}_n$  el conjunto de todos los diagramas de enlaces orientados con  $n$  cruces a lo sumo. Sea  $P : \mathfrak{D}_n \rightarrow \mathbb{Z} [l^{\pm 1}, m^{\pm 1}]$  tal que

1. P3 se cumple si  $D_+, D_-, D_0 \in \mathfrak{D}_n$ .
2.  $P(D)$  es invariante por los movimientos de Reidemeister que involucren a lo sumo  $n$  cruces.
3.  $P(\alpha D) = -(l + l^{-1})m^{-1} \#D^{-1} \forall \alpha D$  diagrama ascendente asociado a  $D$ ; donde  $\#D$  es la cantidad de componentes de  $D$ .

*Observación.*

1. Diremos que dos diagramas  $D, D'$  son iguales si difieren en isotopías planares.
2. P3 determina el valor de  $P(D_+), P(D_-)$  o  $P(D_0)$  si conocemos el valor de los otros dos.

Dado un enlace orientado  $L$ , y su diagrama  $D$ , tendríamos que  $P(L) = P(D)$ , donde  $P(L)$  es el polinomio HOMFLY de  $L$ , y  $P(D)$  es el valor que toma en  $D$  la función que acabamos de definir. Nuestro objetivo, entonces, pasa a ser probar que esta función  $P$  está bien definida y puedo definirla en  $\mathfrak{D}_n \forall n \in \mathbb{N}$ . Con eso obtendremos lo deseado.

En el caso de  $\mathfrak{D}_0$ , todos los diagramas son ascendentes trivialmente, así que tenemos que  $P(D) = -(l + l^{-1})m^{-1} \forall D \in \mathfrak{D}_0$ . Todas las condiciones se cumplen trivialmente.

Por ende, podemos suponer que  $P$  está definida en  $\mathfrak{D}_{n-1}$ , y queremos extender la definición a  $\mathfrak{D}_n$ . Sea  $D \in \mathfrak{D}_n$ , asignémosle a  $D$  una base y un orden, y sea  $\alpha D$  el diagrama ascendente asociado a  $D$  con dicha base y dicho orden. Definiremos, para ese diagrama,  $P(\alpha D) := -(l + l^{-1})m^{-1} \# \alpha D - 1$  donde  $\# \alpha D$  es la cantidad de componentes de  $\alpha D$ . Para obtener  $\alpha D$  a partir de  $D$ , tuvimos que cambiar algunos cruces; a dichos cruces les aplicamos P3 (uno a la vez).

- Supongamos que tenemos  $\alpha D$  y queremos aplicar P3 en uno de los cruces a cambiar, y supongamos que el cruce de  $\alpha D$  es de la forma  $D_+$ . Tenemos entonces que  $P(D_-) = -l(lP(D_+) + mP(D_0))$ . Como ya sabemos cuanto vale  $P(D_0)$  por inducción, y también cuánto vale  $P(D_+) = P(\alpha D)$ , también sabemos cuánto vale  $P(D_-)$ .
- Razonando análogamente tantas veces como cruces a cambiar, sabremos cuanto vale  $P(D)$ .

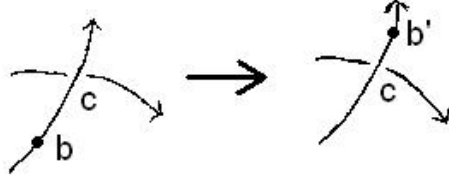
Así, tendríamos un algoritmo para hallar  $P(D)$  de un diagrama  $D \in \mathfrak{D}_n$ . Para probar la tesis inductiva, debemos verificar 4 cosas:

- $P(D)$  no depende de la base que le asignemos a  $D$ .
- $P(D)$  es invariante por los movimientos de Reidemeister que no involucren más de  $n$  cruces.
- $P(D)$  no depende del orden que le asignemos a  $D$ .

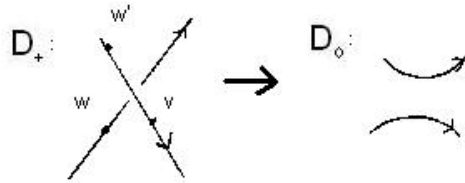
- $P(\alpha D) = (-(l+l^{-1})m^{-1})^{\#D-1} \forall \alpha D$  diagrama ascendente; donde  $\#D$  es la cantidad de componentes de  $D$ .

Paso 1:  $P(D)$  no depende de la base de  $D$ .

Supongamos que tenemos un diagrama  $D$  basado y ordenado, y elijamos uno de los puntos base  $b$  de una de las componentes de  $D$ . Ahora consideremos otra base: en vez de  $b$ , tomemos otro punto  $b'$  en la misma componente, inmediatamente después de pasar por el primer cruce  $c$  al recorrer dicha componente (según la orientación de  $D$ ) empezando en  $b$ .



Sean  $\alpha D$  y  $\beta D$  los diagramas ascendentes asociados a  $D$  con la primera y la segunda base respectivamente. Si las ramas que forman a  $c$  son de componentes distintas, entonces  $\alpha D$  y  $\beta D$  son iguales, y eso probaría lo que deseamos. De lo contrario,  $\alpha D$  y  $\beta D$  serán iguales salvo en ese cruce. Podemos suponer entonces que  $\alpha D$  es  $D_+$  en ese cruce, y  $\beta D$  será  $D_-$ . Tendremos que  $lP(D_+) + l^{-1}P(D_-) + mP(D_0) = 0$ .



Como las dos ramas del enlace son de la misma componente, si nos fijamos en la orientación, podremos observar que si recorremos la componente empezando en  $v$  (ver figura), pasaremos por  $w$  antes que por  $w'$ . Por lo tanto,  $D_0$  tendrá una componente más que  $D_+$  y  $D_-$ . Si  $D_+ = \alpha D$  tiene  $k$  componentes, tenemos que

$$\begin{aligned}
 P(D_-) &= l(-l(-(l+l^{-1})m^{-1})^{k-1} - m(-(l+l^{-1})m^{-1})^k) \\
 &= l(-l - m(-(l+l^{-1})m^{-1}))(-(l+l^{-1})m^{-1})^{k-1} \\
 &= l(-l + l + l^{-1})(-(l+l^{-1})m^{-1})^{k-1} \\
 &= (-(l+l^{-1})m^{-1})^{k-1}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Concluimos que  $P(D)$ , en este caso, es independiente de la forma ( $D_+$  o  $D_-$ ) del cruce  $c$ ; esto implica que  $P(D)$  con la primera base da lo mismo que con la segunda. Esto completa la prueba de la independencia de la base.

*Observación.* Esto implica que  $P(D) = -(l + l^{-1})m^{-1} \#^{D-1}$  para el orden fijado inicialmente en  $D$ , y para toda base de  $D$  (no sólo para la elegida inicialmente). O sea, dado un diagrama  $D$  con un orden fijo, tenemos la libertad de elegir una base de nuestra conveniencia para hallar  $P(D)$ . Usaremos esto de ahora en más.

*Paso 2:  $P(D)$  es invariante por los movimientos de Reidemeister que no involucren más de n cruces.*

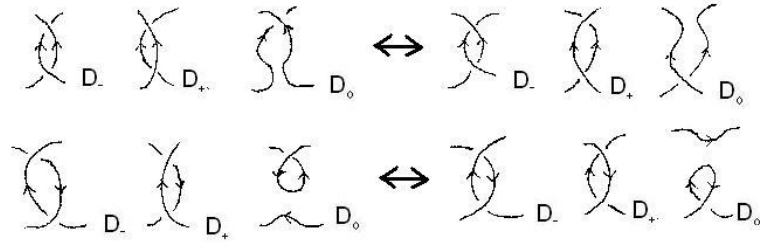
*Observación.* Aclaremos que todavía no tenemos la independencia del orden; por ello, observemos que dado un orden inicial, los movimientos de Reidemeister inducen un orden en el enlace resultante. Así que, por ahora, debemos pensar los enlaces resultantes con dicho orden.

Supongamos que, en una componente del enlace  $D$  (el cual tiene cierto orden fijo), deseamos eliminar un cruce vía  $\Omega_1$  para obtener  $D'$ . Al elegir la base en  $D$ , tomemos el punto base de dicha componente de tal manera que, para obtener  $\alpha D$ , no haya que cambiar dicho cruce. Ahora apliquemos  $\Omega_1$  y consideremos a  $D'$  con el orden y la base inducida. O sea, para obtener  $\alpha D$  a partir de  $D$  hay que cambiar los mismos cruces que para obtener  $\alpha D'$  a partir de  $D'$ .

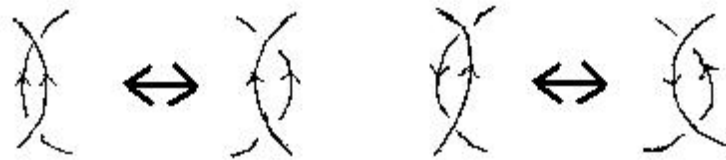
- Como no hay que cambiar el cruce que elimina  $\Omega_1$  para obtener  $\alpha D$ , tenemos que  $\# \alpha D = \# \alpha D'$ , y por ende,  $P(\alpha D) = P(\alpha D')$ .
- Supongamos que tenemos  $\alpha D$  y  $\alpha D'$ , y usamos P3 en ambos diagramas en un mismo cruce (distinto al que eliminamos con  $\Omega_1$ ). Los diagramas  $D_0$  y  $D'_0$  que obtendremos tienen  $n-1$  cruces, por lo cual entran en nuestra hipótesis inductiva. Como  $D_0$  y  $D'_0$  sólo difieren por  $\Omega_1$ , tenemos que  $P(D_0) = P(D'_0)$ .

Concluimos que  $P(D) = P(D')$ , y así demostramos la invariancia de  $P$  bajo  $\Omega_1$ .

Veamos el caso de  $\Omega_2$ . Consideremos los siguientes dibujos.

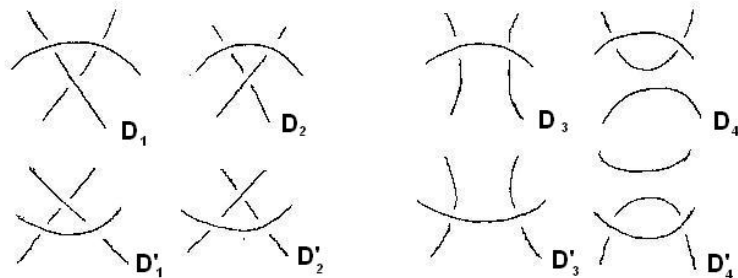


En a) tengo que  $lP(D_+) + l^{-1}P(D_-) + mP(D_0) = 0$  en ambos casos, por P3. Observando que la única diferencia en ambos casos es  $D_+$ , deducimos que  $P(D_+)$  es igual antes y después. En b) sucede lo mismo, con la salvedad que, además, usamos la invariancia de  $\Omega_1$ . De esta manera, vemos que el movimiento



mantiene invariante a  $P$ . Dicha libertad nos permite (eligiendo puntos base lejos de la zona, e independientemente del orden) suponer que no cambio esos cruces para obtener  $\alpha D$  a partir de  $D$ . Usando el mismo argumento que antes, obtenemos la invariancia de  $\Omega_2$ .

Usaremos un argumento similar para probar la invariancia de  $\Omega_3$ . Veamos los siguientes dibujos



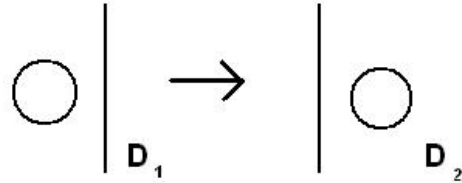
Dependiendo de la orientación, tendremos que P3 nos da una relación entre  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_i$  ( $i = 3, 4$ ), y también una relación entre  $D'_1$ ,  $D'_2$  y  $D'_i$  (el mismo  $i$  que antes). Como  $D_3 = D'_3$  y  $D_4$  difiere de  $D'_4$  por  $\Omega_2$ , tenemos

que  $P(D_i) = P(D'_i)$  ( $i = 3, 4$ ). De esta manera, vemos que si probamos que  $P(D_1) = P(D'_1)$ , obtenemos  $P(D_2) = P(D'_2)$ , y viceversa.



Esto quiere decir que podremos cambiar los cruces como en la figura anterior. Observemos que, una vez que cambiamos un cruce, podemos repetir el proceso para el nuevo diagrama. La utilidad de esto es que, ahora, podremos suponer que los tres cruces en cuestión no cambian cuando obtenemos el diagrama ascendente. Concluimos así, la invariancia de  $\Omega_3$ .

*Observación.* Vamos a necesitar un movimiento auxiliar en nuestra demostración (esto es porque no podemos aumentar la cantidad de cruces del diagrama). Lo llamaremos  $\Omega_4$ .



Observemos que dicho movimiento no involucra ningún cruce. Por lo cual, con un orden fijo, y dada una base cualquiera para  $D_1$ , asignémosle a  $D_2$  el orden y la base inducida por  $\Omega_4$ . Tendremos que los cruces a cambiar en ambos diagramas para obtener los diagramas ascendentes son los mismos. Usando el mismo argumento que antes, tendremos que  $P(D)$  es invariante por  $\Omega_4$ .

Paso 3:  $P(D)$  no depende del orden de  $D$ .

Sea  $\alpha D$  el diagrama ascendente asociado a  $D$  con su orden original, o sea, con el cual sabemos que  $P(\alpha D) = (-(l + l^{-1})m^{-1})^{\#D-1}$ . Tomemos ahora otro orden para  $D$ , y sea  $\beta D$  el diagrama ascendente asociado a  $D$  con el nuevo orden. Deseamos probar que  $P(\alpha D) = P(\beta D)$ : de esta manera, si nuestro orden de referencia original fuese el segundo, y supiéramos originalmente  $P(\beta D) = (-(l + l^{-1})m^{-1})^{\#D-1}$ , podríamos saber que  $P(\alpha D) = (-(l + l^{-1})m^{-1})^{\#D-1}$ , y por lo tanto, usar el método para hallar



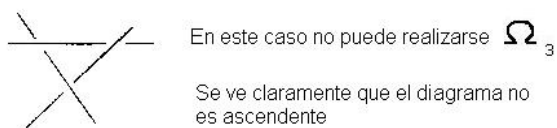
$P(D)$  como antes. Para esto, hallaremos  $\beta D$  con el orden nuevo, y luego le asignaremos el mismo orden que a  $\alpha D$  (observemos que  $\beta D$  dejará de ser ascendente). Vale observar que estaríamos probando las dos cosas que restan para completar la tesis inductiva. Nos disponemos entonces a calcular  $\beta D$  con el procedimiento usado hasta ahora.

Concentrémonos en  $\beta D$ . Si el diagrama contiene una componente trivial que no tiene cruces, tal que el disco que encierra es disjunto del resto del diagrama, podemos remover dicha componente a la parte no acotada del diagrama con  $\Omega_4$ . Supondremos entonces que el diagrama no contiene dichas componentes triviales.

Supongamos, ahora, que el diagrama contiene un lazo (o sea, una parte de un arco que comience y termine en el mismo cruce) tal que el disco que encierra es disjunto del resto del diagrama. Podemos entonces deshacer el lazo con  $\Omega_1$ , y obtenemos así un diagrama (que es ascendente para un orden y una base) con  $n-1$  cruces. Por la hipótesis inductiva, obtenemos lo deseado.

Si todos los lazos encierran un disco que contiene elementos del diagrama, entonces consideremos un lazo que no contenga por completo componentes del enlace. Dicho lazo será intersectado transversalmente por varios arcos: la intersección de cada uno de estos con el disco que encierra el lazo puede ser vista como una curva que comienza y termina en el lazo (a partir de ahora, puede ser útil no tener en cuenta la información de cruces inferiores y superiores, y ver todo como un grafo). Consideremos una de estas curvas: ella dividirá al lazo en dos componentes, una contiene al cruce del lazo y la otra no; por lo tanto, la curva (a la cual llamaremos  $p$ ) junto con la componente del lazo que no contiene el cruce ( $q$ ) forman un 2-edro ( $p \cup q$ ), el cual puede ser intersectado por varios arcos al igual que antes. La intersección del disco que encierra dicho 2-edro con los arcos que lo cortan puede ser visto como varias curvas (a las cuales llamaremos  $t_i$ ) que comienzan y terminan en el 2-edro. De todos los 2-edros que podemos considerar, elijamos uno tal que cada  $t_i$  tenga un extremo en  $p$  y otro en  $q \forall i$  (de lo contrario, existe un  $t_k$  que corta dos veces a  $q$ , y podemos tomar a  $p = t_k$ ), y tal que  $t_i \cap t_j$  consista a lo sumo en un punto  $\forall i, j$  (si existen  $t_k, t_l$  tal que  $A, B \in t_k \cap t_l$  consecutivos según la orientación de  $t_k$ , tendríamos que existe un segmento de  $t_k$  y otro de  $t_l$  que forman un 2-edro con extremos en  $A$  y  $B$ , y dicho 2-edro estará contenido en el 2-edro  $p \cup q$ ; tomaremos entonces a  $p$  y a  $q$  como los segmentos considerados de  $t_k$  y de  $t_l$ ). Entramos así en las hipótesis del lema 4, y concluimos que existe un triedro contenido en  $p \cup q$  tal que uno

de sus lados está contenido en  $p$ . Como existe un orden y una base tal que el diagrama  $\beta D$  es ascendente, concluimos que los cruces de dicho triedro se prestan para realizar un movimiento  $\Omega_3$ .



Luego de realizar el movimiento, tenemos que el diagrama sigue siendo ascendente. Repetiremos el proceso hasta que no haya más triedros contenidos en  $p \cup q$ ; cuando esto suceda, la región encerrada por  $p \cup q$  puede ser removida con un movimiento  $\Omega_2$  (de vuelta usamos que el diagrama es ascendente). Tendremos así un nuevo diagrama de  $\beta D$ , ahora con  $n-2$  cruces, y por nuestra hipótesis inductiva obtenemos lo deseado.  $\square$

## Capítulo 7

# Grupo fundamental - Grupo de un nudo

Sea  $X$  un espacio topológico y  $x_0$  un punto en  $X$ ; consideraremos el conjunto de funciones  $\mathfrak{F}_{X,x_0} = \{f : I \rightarrow X \mid f \text{ continua}, f(0) = f(1) = x_0\}$ , donde  $I = [0, 1]$ .

Además, si  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  son dos caminos en  $X$ , tal que  $\alpha(1) = \beta(0)$ , podemos definir  $\alpha \cdot \beta : I \rightarrow X$  tal que

$$(\alpha \cdot \beta)(x) = \begin{cases} \alpha(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ \beta(2x - 1) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.1)$$

Dicha operación puede verse como la concatenación de dos caminos en  $X$ .

Consideraremos ahora la siguiente relación de equivalencia en  $\mathfrak{F}_{X,x_0}$ ,  $f_0 \sim f_1$  si existe  $h : I \times I \rightarrow X$  homotopía entre  $f_0$  y  $f_1$ , tal que  $h(0, t) = h(1, t) = x_0 \forall t \in I$ .

**Definición 28.** Sean  $X, Y$  dos espacios topológicos. Una ‘homotopía’ entre dos funciones  $f, g : Y \rightarrow X$  es una función continua  $h : Y \times I \rightarrow X$  tal que  $h(y, 0) = f(y)$  y  $h(y, 1) = g(y) \forall y \in Y$

A continuación, veremos que en  $\mathfrak{F}_{X,x_0}/\sim$ , la operación

$$([f_0], [f_1]) \mapsto [f_0 \cdot f_1]$$

está bien definida, y convierte a  $\mathfrak{F}_{x,x_0}/\sim$  en un grupo.

**Definición 29.** Llamaremos a este grupo, el ‘grupo fundamental’ del espacio  $X$

*Notación.*  $\pi_1(X, x_0)$

**Proposición 8.**  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo con la operación  $([f_0], [f_1]) \mapsto [f_0 \cdot f_1]$ .

*Demostración.*

Paso 1:  $\cdot$  está bien definida

Supongamos  $f_0 \sim g_0$ ,  $f_1 \sim g_1 \Rightarrow \exists h_0, h_1 : I \times I \rightarrow X$  homotopías entre  $f_0$  y  $g_0$ ,  $f_1$  y  $g_1$  respectivamente, tal que  $h_0(0, t) = h_0(1, t) = h_1(0, t) = h_1(1, t) = x_0 \forall t \in I$ .

Construiremos  $h : I \times I \rightarrow X$

$$h(x, t) = \begin{cases} h_0(2x, t) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ h_1(2x - 1, t) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.2)$$

Tenemos que  $h(x, 0) = (f_0 \cdot f_1)(x)$ ,  $h(x, 1) = (g_0 \cdot g_1)(x)$ ,  $h(0, t) = h(1, t) = x_0 \forall t \in I$ . Concluimos que  $[f_0 \cdot f_1] = [g_0 \cdot g_1]$ .

Paso 2:  $\cdot$  es asociativa

Dados  $f_0, f_1, f_2 \in \mathfrak{F}_{X, x_0}$ , lo primero que debemos notar es que  $(f_0 \cdot f_1) \cdot f_2$  y  $f_0 \cdot (f_1 \cdot f_2)$  tienen la misma imagen en  $X$ , pero no son el mismo camino.

Debemos construir una homotopía  $h : I \times I \rightarrow X$  que reparametrice los caminos

$$h(x, t) = \begin{cases} f_0(4x/(1+t)) & \text{si } 0 \leq x \leq (1+t)/4 \\ f_1(4x - t - 1) & \text{si } (1+t)/4 \leq x \leq (2+t)/4 \\ f_2((4x - t - 2)/(2-t)) & \text{si } (2+t)/4 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.3)$$

Claramente,  $h$  cumple las propiedades deseadas. Entonces  $([f_0] \cdot [f_1]) \cdot [f_2] = [f_0] \cdot ([f_1] \cdot [f_2])$ .

Paso 3: existencia del neutro

Queremos ver que  $e : I \rightarrow X$ ,  $e(x) = x_0 \forall x \in I$  es el neutro de  $\cdot$ . Sea  $f \in \mathfrak{F}_{X, x_0}$ , y consideremos  $f \cdot e$  (para  $e \cdot f$  es análogo).

La homotopía  $h$  deseada es la siguiente

$$h(x, t) = \begin{cases} f(2x/(t+1)) & \text{si } 0 \leq x \leq (t+1)/2 \\ x_0 & \text{si } (t+1)/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.4)$$

Paso 4: existencia del inverso

Sea  $f \in \mathfrak{F}_{X, x_0}$ , consideremos  $\bar{f} : I \rightarrow X$ ,  $\bar{f}(x) = f(1-x)$ . Claramente,  $\bar{f} \in \mathfrak{F}_{X, x_0}$ . Consideremos  $f \cdot \bar{f}$

La idea es definir  $f$  hasta  $(1-t)$ , y  $\bar{f}$  a partir de  $t$ . Sea entonces  $h : I \times I \rightarrow X$

$$h(x, t) = \begin{cases} f(2x(1-t)) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ \bar{f}(2x(1-t) + 2t) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.5)$$

□

**Proposición 9.** *Si  $X$  es arcoconexo y  $x_0, x_1 \in X$ , entonces  $\pi_1(X, x_0)$  es isomorfo a  $\pi_1(X, x_1)$ .*

*Demostración.* Sea  $\alpha : I \rightarrow X$  un camino tal que  $\alpha(0) = x_0$ ,  $\alpha(1) = x_1$ , y sea  $\bar{\alpha} : I \rightarrow X$ ,  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ .

Observemos que, si  $f \in \mathfrak{F}_{X, x_0}$ , entonces  $\bar{\alpha} \cdot f \cdot \alpha$  está bien definida, y pertenece a  $\mathfrak{F}_{X, x_1}$ . Por ende, podemos definir  $F : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ ,  $[f] \mapsto [\bar{\alpha} \cdot f \cdot \alpha]$ .

- $F$  es inyectiva:

Si  $f \in \mathfrak{F}_{X, x_0}$ , entonces existe una homotopía  $h$  entre  $f$  y  $\bar{\alpha} \cdot f \cdot \alpha$ , que cumplirá  $(h_t \circ f)(I) = (\bar{\alpha}_t \cdot f \cdot \alpha_t)(I)$ , donde  $\alpha_t(s) = \alpha(ts)$ ,  $s \in I$ . Ahora, si  $[f] \neq [g]$  y  $F([f]) = F([g])$ , tenemos que  $\exists h'$  homotopía entre  $\bar{\alpha} \cdot f \cdot \alpha$  y  $\bar{\alpha} \cdot g \cdot \alpha$ , y esto implicaría que  $[f] = [g]$ , lo cual es absurdo.

- $F$  es sobreyectiva:

Sea  $[f_1] \in \pi_1(X, x_1)$ , y sea  $[f_0] = [\alpha \cdot f_1 \cdot \bar{\alpha}] \in \pi_1(X, x_0)$ . Tenemos que  $F([f_0]) = [\bar{\alpha} \cdot \alpha \cdot f_1 \cdot \bar{\alpha} \cdot \alpha] = [f_1]$

- $F$  homomorfismo:

$$F[f \cdot g] = F[f \cdot \alpha \cdot \bar{\alpha} \cdot g] = [\bar{\alpha} \cdot f \cdot \alpha \cdot \bar{\alpha} \cdot g \cdot \alpha] = [\bar{\alpha} \cdot f \cdot \alpha] \cdot [\bar{\alpha} \cdot g \cdot \alpha].$$

Concluimos que  $F$  es un isomorfismo. □

A continuación, veremos una proposición muy útil para decir cuándo dos grupos fundamentales  $\pi_1(X, x_0)$ ,  $\pi_1(Y, y_0)$  son isomorfos. Primero, debemos ver cómo las funciones continuas  $c : Y \rightarrow X$  inducen homomorfismos de grupos fundamentales, y ver qué relación hay entre dos funciones  $c, c' : Y \rightarrow X$  homotópicas, y sus homomorfismos inducidos.

**Lema 9.** *Si  $c : Y \rightarrow X$  es una función continua, tal que  $c(y_0) = x_0$ , entonces induce un homomorfismo de grupos  $c_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ .*

*Demostración.* Definiremos  $c_*([f]) := [cf]$ . Observemos primero que  $cf(0) = cf(1) = c(y_0) = x_0$ , por lo cual  $[cf] \in \pi_1(X, x_0)$ .

Para ver que  $c_*$  está bien definida, observamos que si  $h$  es una homotopía entre  $f_0$  y  $f_1$ , tendremos que  $ch$  es una homotopía entre  $cf_0$  y  $cf_1$ . Como  $h(0, t) = h(1, t) = y_0$ , tenemos que  $ch(0, t) = ch(1, t) = x_0$ .

Además,  $c_*([f_0 \cdot f_1]) = [c(f_0 \cdot f_1)] = [cf_0 \cdot cf_1] = c_*([f_0]) \cdot c_*([f_1])$ .  $\square$

**Lema 10.** Sean  $c, c' : Y \rightarrow X$  dos funciones continuas, tal que  $c(x_0) = c'(x_0) = y_0$ , y una homotopía  $H : Y \times I \rightarrow X$ , tal que  $H(y, 0) = c(y)$ ,  $H(y, 1) = c'(y) \forall y \in Y$ , y  $H(y_0, t) = x_0 \forall t \in I$ . Entonces  $c_* = c'_*$ .

*Demostración.* Sea  $f \in \mathfrak{F}_{Y, y_0}$ , y consideremos  $cf$  y  $c'f$ . Sea  $h : I \times I \rightarrow X$ , tal que  $h(x, t) = H(f(x), t)$ : tenemos que  $h$  es una homotopía entre  $cf$  y  $c'f$ , o sea,  $[cf] = [c'f]$   $\square$

**Definición 30.** A una homotopía  $H : Y \times I \rightarrow X$  como la del enunciado anterior, la llamaremos ‘homotopía puntual’ entre  $c$  y  $c'$ .

Estamos en condiciones de enunciar la proposición antes mencionada. También enunciaremos una definición relacionada.

**Definición 31.** Si  $c : Y \rightarrow X$  es una función continua, decimos que es una ‘equivalencia homotópica’ si existe  $d : X \rightarrow Y$  continua, tal que existen homotopías puntuales entre  $cd$  y  $id_Y$ , y entre  $dc$  y  $id_X$ . Diremos, además, que  $d$  es la ‘inversa homotópica’ de  $c$ .

**Proposición 10.** Si  $c : Y \rightarrow X$  es una equivalencia homotópica, entonces  $c_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  es un isomorfismo.

*Demostración.* Sabemos que  $c_*$  y  $d_*$  son homomorfismos bien definidos. Tenemos que  $d_*(c_*([f])) = d_*([cf]) = [dcf] = (dc)_*([f]) = [f]$  (por el lema anterior). Concluimos que  $d_*c_* = (id_Y)_*$ . Análogamente, probamos que  $c_*d_* = (id_X)_*$ , y tenemos que  $c_*$  y  $d_*$  son isomorfismos.  $\square$

Como caso particular, si tenemos un subconjunto  $A \subset X$ , e  $\iota : A \hookrightarrow X$  la inclusión, y  $x_0 \in A$  llamaremos una ‘retracción por deformación’ a una homotopía  $r : X \times I \rightarrow X$  tal que  $r(a, 0) = id_X$ ,  $r(X, 1) = A$ , y  $r(a, t) = a \forall a \in A$ . De existir una  $r$  como la anterior, deducimos de la proposición anterior que  $\pi_1(X, x_0)$  y  $\pi_1(A, x_0)$  son isomorfos.

Otro caso particular es cuando  $c : Y \rightarrow X$  es un homeomorfismo: si tomamos  $d = c^{-1}$ , estamos trivialmente en las hipótesis de la proposición anterior, y tendríamos que  $\pi_1(X, x_0)$  y  $\pi_1(Y, y_0)$  son isomorfos.

Consideremos, entonces, dos nudos  $K, K' \subset \mathbb{R}^3$  isotópicos; tendremos que sus complementos serán homeomorfos. Concluimos que el grupo fundamental del complemento de un nudo es invariante bajo isotopías, y lo mismo podemos decir de los enlaces.

**Definición 32.** *El grupo de un enlace  $L$  es  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L, x_0)$ , donde  $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus L$ .*

*Observación.* Sea  $L$  un enlace en  $\mathbb{R}^3$ , y  $[f] \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L, x_0)$ ; a través de una proyección estereográfica  $p_{(0,0,0,1)} : S^3 \setminus \{(0,0,0,1)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuyo polo sea  $(0,0,0,1)$ , obtenemos  $[p_{(0,0,0,1)}^{-1} \circ f] \in \pi_1(S^3 \setminus L, p_{(0,0,0,1)}^{-1}(x_0))$ .

Si tenemos ahora  $g \in \mathfrak{F}_{S^3, p_{(0,0,0,1)}^{-1}(x_0)}$ , como  $g$  no es sobreyectiva, podemos encontrar un representante de  $[g] \in \pi_1(S^3 \setminus L, p_{(0,0,0,1)}(x_0))$ , tal que el punto  $(0,0,0,1)$  no está en su imagen (suponemos que es  $g$ ). Obtenemos así, a través de  $p_{(0,0,0,1)}$ , que  $[p_{(0,0,0,1)} \circ g] \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L, x_0)$ .

Tenemos entonces que  $p_{(0,0,0,1)*}$  es un isomorfismo; por lo tanto,  $\pi_1(\mathbb{R}^3, x_0)$  es isomorfo a  $\pi_1(S^3, y_0)$ .

Calcularemos ahora los grupos fundamentales de algunos conjuntos importantes.

**Proposición 11.** *Si  $X$  tiene forma de estrella, entonces  $\pi_1(X, x_0)$  es trivial.*

*Demostración.* Sea  $p \mid \forall x \in X, t \in I, pt + (1-t)x \in X$ .

Sea  $[f] \in \pi_1(X, p)$ . Defino  $h : I \times I \rightarrow X, h(x, t) := pt + (1-t)f(x)$ . Tengo entonces que  $h$  es una homotopía entre  $f$  y el camino constante  $p$ , y  $h(0, t) = h(1, t) = p \forall t \in I$ .

Entonces  $\pi_1(X, p)$  es trivial, y como  $\pi_1(X, x_0)$  es isomorfo a  $\pi_1(X, p)$ , entonces también es trivial.  $\square$

Calcularemos a continuación el grupo fundamental de  $S^1$ .

*Observación.* Recordamos que  $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1, x \mapsto x(\text{mod } 1)$  es un espacio de cubrimiento de  $S^1$ .

**Proposición 12.** *El grupo fundamental de  $S^1$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , y es generado por la clase de homotopía de  $\psi : I \rightarrow S^1, x \mapsto x(\text{mod } 1)$*

*Demostración.* Consideremos el espacio de cubrimiento mencionado en la observación anterior. Si  $\omega$  es un camino cerrado en  $S^1$  tal que  $[\omega] \in \pi_1(S^1, 0)$ , entonces existe  $\widehat{\omega} : I \rightarrow \mathbb{R}$  un camino en  $\mathbb{R}$  tal que  $\Pi \circ \widehat{\omega} = \omega, \widehat{\omega}(0) = 0$ .

Definimos entonces  $\phi : \pi_1(S^1, 0) \rightarrow \mathbb{Z}, \phi(\omega) := \widehat{\omega}(1)$ .

Queremos ver que está bien definida, y que es un isomorfismo.

1. Sean  $\alpha, \beta$  caminos cerrados en  $S^1$ , tal que  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(S^1, 0)$ , y  $[\alpha] = [\beta]$ . Por el lema de levantado de homotopías, tenemos que existe  $\widehat{h} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\Pi \circ \widehat{h} = h$ , y  $\widehat{h}(0, t) = 0 \forall t \in I$ . Esto implica que  $\widehat{\alpha}(1) = \widehat{\beta}(1)$  (ya que, de lo contrario,  $\widehat{h}$  no sería continua), y tenemos que  $\phi$  está bien definida como función.

2. Veamos que  $\phi$  es un homomorfismo.

Sean  $\alpha, \beta$  caminos cerrados en  $S^1$  tal que  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(S^1, 0)$ , y sean  $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$  sus levantados. Definimos  $\widehat{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\widehat{\gamma}(x) = \begin{cases} \widehat{\alpha}(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ \beta(2x - 1) + \widehat{\alpha}(1) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.6)$$

Tenemos que  $\Pi \circ \gamma = \alpha \cdot \beta$ , y  $\widehat{\gamma}(0) = \widehat{\alpha}(0) = 0$ . Por la unicidad del levantado de caminos, tenemos que  $\widehat{\gamma} = \widehat{\alpha \cdot \beta}$ , y por lo tanto,  $\widehat{\alpha \cdot \beta}(1) = \widehat{\gamma}(1) = \widehat{\alpha}(1) + \widehat{\beta}(1)$ . Concluimos que  $\phi(\alpha \cdot \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$ .

3.  $\phi$  es sobreyectiva.

Sea  $n \in \mathbb{Z}$ . Definamos  $\alpha_n : I \rightarrow S^1$ ,  $\alpha_n(x) := nx \pmod{1}$ .

Sea  $\widehat{\alpha}_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\widehat{\alpha}_n(x) = nx$ . Claramente,  $\Pi \circ \widehat{\alpha}_n = \alpha_n$ , y  $\widehat{\alpha}_n(1) = n$ , entonces  $\phi$  es sobreyectiva.

4.  $\phi$  es inyectiva.

Si  $\phi(\alpha) = 0$ , entonces  $\widehat{\alpha}(1) = 0$ . Tenemos entonces que  $\widehat{\alpha}$  es un camino cerrado en  $\mathbb{R}$ , y por lo tanto existe una homotopía  $H$  entre  $\widehat{\alpha}$  y el camino constante  $\widehat{\alpha}_0(t) = 0 \forall t$ . Entonces  $\Pi \circ H$  es una homotopía entre  $\alpha$  y el camino constante  $\alpha_0$ , lo cual demuestra lo deseado

Además, si  $\psi : I \rightarrow S^1$ ,  $\psi(x) = x \pmod{1}$ , entonces  $\widehat{\psi}(x) = x \forall x \in I$ , y tenemos que  $\widehat{\psi}(1) = 1$ , que genera  $\mathbb{Z}$ . Concluimos que  $[\psi]$  genera  $\pi_1(S^1, 0)$ .  $\square$

**Proposición 13.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos con  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$ . Entonces  $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$  es isomorfo al producto directo  $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ .

*Demostración.* Sea  $\alpha : I \rightarrow X \times Y$  un camino cerrado,  $\alpha(0) = \alpha(1) = (x_0, y_0)$ .

Sean  $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ ,  $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$  las proyecciones; podemos definir  $\Phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ ,  $\Phi([\alpha]) = ([p_1\alpha], [p_2\alpha])$ .



1.  $\Phi$  está bien definida.

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos caminos homotópicos en  $X \times Y$ , entonces existe una homotopía  $h$  entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Tenemos entonces que  $p_1 h$  es una homotopía entre  $p_1 \alpha$  y  $p_1 \beta$  (análogamente con  $p_2$ ). Concluimos que  $\Phi$  está bien definida.

2.  $\Phi$  es un homomorfismo.

Sean  $\alpha, \beta \in \mathfrak{F}_{X \times Y, (x_0, y_0)}$ , y consideremos  $\alpha \cdot \beta$ . Tenemos que

$$p_1(\alpha \cdot \beta)(x) = \begin{cases} p_1(\alpha(2x)) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ p_1(\beta(2x - 1)) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.7)$$

Entonces  $p_1(\alpha \cdot \beta) = p_1(\alpha) \cdot p_1(\beta)$ ; así obtenemos lo deseado.

3.  $\Phi$  es inyectiva.

Sean  $\alpha_{x_0} : I \rightarrow X$  el camino constante en  $X$ , y  $\alpha_{y_0} : I \rightarrow Y$  el camino constante en  $Y$ . Sea  $\alpha : I \rightarrow X \times Y$ , tal que  $\Phi([\alpha]) = ([\alpha_{x_0}], [\alpha_{y_0}])$ , o sea, el neutro de  $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ . Esto quiere decir que  $p_1 \alpha$  es homotópico al camino constante  $\alpha_{x_0}$ ; sea  $h_1$  dicha homotopía. Análogamente, definimos la homotopía  $h_2$  entre  $p_2 \alpha$  y  $\alpha_{y_0}$ . Definimos entonces  $h : I \times I \rightarrow X \times Y$ ,  $h(s, t) := (h_1(s, t), h_2(s, t))$ .

Tenemos que  $h$  es una homotopía por construcción,  $h(x, 1) = (h_1(x, 1), h_2(x, 1)) = (p_1 \alpha, p_2 \alpha) = \Phi(\alpha)(x)$ ,  $h(x, 0) = (h_1(x, 0), h_2(x, 0)) = (\alpha_{x_0}(x), \alpha_{y_0}(x))$ , entonces  $[\alpha] = [\alpha_{x_0}, \alpha_{y_0}]$ . Concluimos que  $\Phi$  es inyectiva.

4.  $\Phi$  es sobreyectiva.

Sea  $([\alpha], [\beta]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ . Entonces  $(\alpha, \beta)(x) = (\alpha(x), \beta(x)) \in \mathfrak{F}_{X \times Y, (x_0, y_0)}$ , y  $\Phi([\alpha], [\beta]) = ([\alpha], [\beta])$ .

□

Estudiaremos a continuación el teorema de Van Kampen; con él, podremos estudiar el grupo fundamental de un conjunto  $X$  arcoconexo, a partir de subconjuntos abiertos de éste. Con dicho teorema, seremos capaces de hallar los grupos fundamentales de otros conjuntos (por ejemplo, un  $g$ -toro  $\mathbb{T}_g$ ) con más facilidad que hasta ahora.

*Observación.* Dado un grupo  $G$ , y  $A \subset G$  un generador, podemos representar a  $G$  como un grupo libre, con palabras formadas por elementos de  $A$ , al cual le imponemos relaciones a los generadores.

*Notación.*  $G = \langle A \mid \{f_i = e\} \rangle$ , donde  $f_i = e$  representan las relaciones que imponemos (igualaremos ciertas palabras al neutro de  $G$ )

*Notación.* Sea  $\{G_\alpha\}$  una colección de grupos.  $*_\alpha G_\alpha$  denota el producto libre de grupos.

*Notación.* Sean  $A \subset B \subset X$  y  $x_0 \in A$ , llamaremos  $\iota_{A,B} : A \hookrightarrow B$  a la inclusión, y  $j_{A,B} : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(B, x_0)$  al homomorfismo de grupos inducido por la inclusión. Como caso particular, en la demostración del teorema de Van Kampen, notaremos  $\iota_{\alpha,\beta} : A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$

**Teorema 11.** *Van Kampen: Si  $X$  es la unión de conjuntos abiertos y arcoconexos  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ , tal que  $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ , y  $A_\alpha \cap A_\beta$  es arcoconexo, entonces el homomorfismo  $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  es sobreyectivo. Si además  $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$  es arcoconexo, entonces el kernel de  $\Phi$  es un subgrupo normal  $N$ , generado por todos los elementos de la forma  $\iota_{\alpha,\beta}(\omega) \iota_{\beta,\alpha}(\omega)^{-1}$ , con lo cual  $\Phi$  induce un isomorfismo  $\pi_1(X, x_0) \simeq *_\alpha \pi_1(A_\alpha) / N$*

*Demostración.* Sea  $X = \bigcup_\alpha A_\alpha$ , con  $A_\alpha \cap A_\beta$  arcoconexo, y  $x_0 \in \bigcap_\alpha A_\alpha$ ; debemos ver que el homomorfismo  $\Phi$  es sobreyectivo. Para ello, sea  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ , con  $f_I \rightarrow X$ . Para todo  $t \in I$ , existe  $\beta$  tal que  $f(t) \in A_\beta$ , y por ende existe un entorno de  $t$ ,  $V_t$ , tal que  $f(\overline{V_t}) \subset A_\beta$ . Como  $I$  es compacto, existen finitos  $V_{t_i}$  tal que  $\bigcup_{i=1}^n V_{t_i} = I$ . Con dicho subcobrimiento, podemos crear una partición de  $I$ ,  $0 = a_0 < \dots < a_n = 1$ , tal que  $[a_i, a_{i+1}] \subset V_{t_i}$ ,  $f([a_i, a_{i+1}]) \subset A_{\beta_i}$ . Sea  $f_i := f|_{[a_i, a_{i+1}]}$ , entonces  $f_0 \cdot \dots \cdot f_{n-1} = f$ . Como  $f(a_{i+1}) \in A_{\beta_i} \cap A_{\beta_{i+1}}$ , y como  $A_{\beta_i} \cap A_{\beta_{i+1}}$  es arcoconexo, existe  $\omega_{i+1} : I \rightarrow A_{\beta_i} \cap A_{\beta_{i+1}}$ ,  $\omega_{i+1}(0) = f(a_{i+1})$ ,  $\omega_{i+1}(1) = x_0 \forall i = 0, \dots, n-2$ .

Tenemos entonces que  $(f_0 \cdot \omega_1) \cdot (\overline{\omega_1} \cdot f_2 \cdot \omega_2) \cdot \dots \cdot (\overline{\omega_{n-1}} \cdot f_n)$  es homotópica a  $f$ , y cada  $(\overline{\omega_i} \cdot f_{i+1} \cdot \omega_{i+1}) \subset A_{\beta_i}$ . Concluimos que  $[f]$  está en la imagen de  $\Phi$ .

A continuación demostraremos la segunda parte del teorema. Para facilitar la comprensión, introduciremos cierta notación.

*Notación.* Por factorización de  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$  nos referimos a un producto formal  $[f_1] \dots [f_k]$ , donde

- Cada  $f_i$  es una curva en cierto  $A_\alpha$  con punto base  $x_0$ , y  $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha, x_0)$  es la clase de homotopía de  $f_i$ .
- La curva  $f$  es homotópica a  $f_1 \cdot \dots \cdot f_k$  en  $X$ .

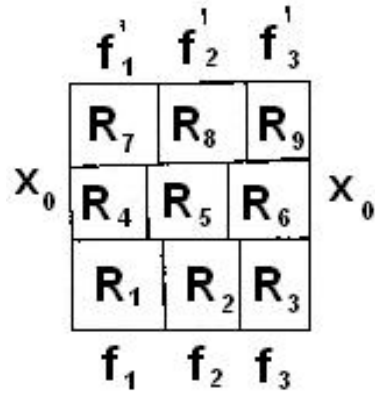
*Notación.* Dos factorizaciones de  $[f]$  son equivalentes si están relacionadas a través de los siguientes movimientos (y sus inversos)

1. Combinar términos adyacentes  $[f_i][f_{i+1}]$  y generar  $[f_i \cdot f_{i+1}]$  si  $[f_i], [f_{i+1}] \in \pi_1(A_\alpha, x_0)$  para algún  $\alpha \in \Lambda$ .
2. Pensar el término  $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha, x_0)$  como elemento de  $\pi_1(A_\beta, x_0)$  si  $f_i$  es una curva en  $A_\alpha \cap A_\beta$

Observamos entonces que una factorización de  $[f]$  es una palabra en  $*_\alpha\pi_1(A_\alpha, x_0)$ , tal que su imagen por  $\Phi$  es  $[f]$ . Por la primera parte de la demostración, sabemos que toda  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$  admite una factorización; debemos probar ahora que todas las factorizaciones de  $[f]$  son equivalentes.

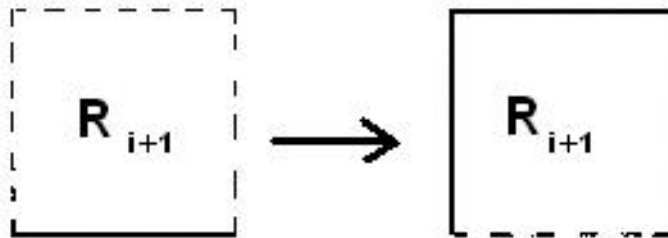
El primer movimiento no cambia el elemento de  $*_\alpha\pi_1(A_\alpha, x_0)$  definido por la factorización. El segundo movimiento no cambia la imagen de la factorización en  $Q = *_\alpha\pi_1(A_\alpha, x_0)/N$ , por lo cual dos factorizaciones equivalentes corresponden al mismo elemento en  $Q$ . Por lo anterior, si llegamos a probar que todas las factorizaciones de  $[f]$  son equivalentes, tendremos que el mapa  $Q \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  es inyectivo, y tendríamos que el kernel de  $\Phi$  es  $N$ .

Sean  $[f_1] \dots [f_k]$  y  $[f'_1] \dots [f'_l]$  dos factorizaciones de  $[f]$ . Como  $f_1 \cdot \dots \cdot f_k$  y  $f'_1 \cdot \dots \cdot f'_l$  son homotópicos, existe una homotopía  $F : I \times I \rightarrow X$  tal que  $F(s, 0) = (f_1 \cdot \dots \cdot f_k)(s)$ ,  $F(s, 1) = (f'_1 \cdot \dots \cdot f'_l)(s) \forall t \in I$ . Para cada  $(s, t) \in I \times I$ , consideremos un rectángulo  $D_i = [c_i, d_i] \times [a_i, b_i] \subset I \times I$  tal que  $(s, t) \in \overset{\circ}{D}_i$  ( $\overset{\circ}{D}_i$  con la topología inducida en  $I \times I$ ), y  $F(D_i) \subset A_\alpha$  para algún  $\alpha$ . Tomemos entonces un subcubrimiento finito, y luego particionemos  $I \times I$  con la unión de todas las líneas horizontales y verticales que contengan a un lado de algún  $D_i$ . Obtenemos que existen dos particiones de  $I$ ,  $0 = s_0, \dots, s_m = 1$  y  $0 = t_0, \dots, t_n = 1$  tal que cada  $R_{i,j} = [s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$  cumple  $F(R_{i,j}) \subset A_\alpha$  para algún  $\alpha$ . Usando el movimiento 1 (y su inverso) en ambas factorizaciones, podemos suponer que la partición de los  $s_i$  determina los productos  $f_1 \cdot \dots \cdot f_k$  y  $f'_1 \cdot \dots \cdot f'_l$  (o sea, podemos suponer que  $k = l$ ).



Como  $F$  manda un entorno de  $R_{i,j}$  en  $A_\alpha$ , podemos perturbar las líneas verticales de la partición de tal manera que ningún punto de  $I \times I$  se encuentre en más de 3 rectángulos, por ejemplo, como en la figura. Además, renombraremos los nuevos rectángulos como  $R_1, \dots, R_{mn}$  como se muestra en la figura.

Sea  $\gamma$  un camino en  $I \times I$  que empiece en el lado izquierdo del cuadrado, y termine en el lado derecho; tendremos que  $F|_\gamma$  es una curva en el punto base  $x_0$ , ya que  $F(0,t) = F(1,t) = x_0 \forall s \in I$ . Sea  $\gamma_r$  la curva que separa los primeros  $r$  rectángulos  $R_1, \dots, R_r$  del resto. Podemos pasar de  $\gamma_r$  a  $\gamma_{r+1}$  atravesando  $R_{r+1}$ .



Llamaremos ‘vértices’ a las esquinas de los rectángulos  $R_i$ . Para cada vértice  $\nu$  con  $F(\nu) \neq x_0$  contenido en (a lo sumo 3)  $A_{\alpha_i}$ , agregamos los caminos  $g_\nu, \bar{g}_\nu$  (contenidos en los mismos  $A_{\alpha_i}$ ) de manera similar a la que lo hicimos en la primera parte de la demostración, obtenemos que  $F|_{\gamma_r}$  es el producto de varias curvas, cada una con base  $x_0$ , contenida en por lo menos un  $A_{\alpha_i}$ . Tenemos así una factorización de  $F|_{\gamma_r}$ . Algunos elementos de la factorización pueden ser pensados en distintos  $A_\alpha$ , y así lo haremos,

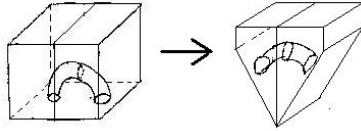
según nuestra conveniencia Todas las factorizaciones de  $F|_{\gamma_i}$  y  $F|_{\gamma_{i+1}}$  son equivalentes, ya que todas las curvas de las factorizaciones son iguales, salvo una cruva (la que cambiamos al pasar de  $\gamma_r$  a  $\gamma_{r+1}$ ), pero como la cambiamos vía una homotopía contenida en el  $A_\alpha$  que contiene a  $R_{r+1}$ , tenemos que las curvas distintas pueden ser pensadas en el mismo  $A_\alpha$ , así que sus clases de homotopía serán iguales.

Tendremos entonces que la factorización de  $\gamma_r$  es equivalente a la factorización de  $\gamma_{r+1}$ . Además, la factorización de  $\gamma_0$  es equivalente a  $[f_1] \dots [f_k]$ , y  $\gamma_{mn}$  es equivalente a  $[f'_1] \dots [f'_l]$ , lo cual demuestra lo deseado.  $\square$

Veamos algunos ejemplos de cómo aplicar el teorema de Van Kampen, que serán útiles luego.

*Ejemplo 12.*

1. Sea  $X = I^3 \setminus A$ , donde  $A$  es un asa rellena como se muestra en la figura



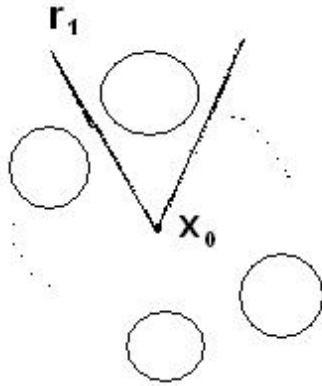
Para calcular  $\pi_1(X, x_0)$ , usaremos una retracción por deformación  $f$  sobre  $p = I \times \{1/2\} \times I$ , como se muestra en la figura anterior.

Concluimos que  $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(p \setminus \mathbb{D}^2, x_0)$ , con lo cual tenemos (eventualmente usando otra retracción por deformación sobre  $\partial\mathbb{D}^2$ ) que  $\pi_1(X, x_0) \simeq \mathbb{Z}$

2. Si ahora nuestro conjunto fuese  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\} \cup_i A_i$ , donde los  $A_i$  son asas como en el ejemplo anterior, con  $A_i \subset (a_i, b_i) \times (c_i, d_i) \times (0, 1 - \epsilon) \subset (a_i, b_i) \times (c_i, d_i) \times (0, 1) = B_i$ ,  $B_i \cap B_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Sea  $C_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 1 - \epsilon/2\} \cup B_i$ ,  $C' = X \setminus \cup_i B_i$ , y  $C$  un entorno pequeño de  $C'$ .

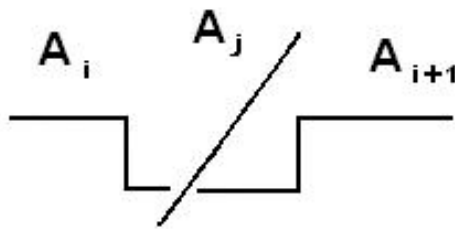
Tenemos que  $X = C \cup \cup_i C_i$ , las intersecciones de a dos contienen a  $\{z > 1 - \epsilon/2\}$  y tal vez a un entorno de  $\partial B_i$  para algún  $i$  (en el caso  $C \cap C_i$ ), y las intersecciones de a 3 son iguales a  $\{z > 1 - \epsilon/2\}$ . Usando una retracción por deformación en las intersecciones de a 2, tenemos que  $\pi_1(C \cap C_i, x_0) \simeq \pi_1(\{z > 1 - \epsilon/2\}, x_0)$ , y por ende triviales. Usando Van Kampen y el ejemplo anterior, tenemos que  $\pi_1(X, x_0) \simeq *_{i=1}^n \mathbb{Z}$ .

3. Supongamos que  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \cup_{i=1}^n \mathbb{D}_i^2$ , donde  $\mathbb{D}_i^2$  son discos disjuntos. Luego de un homeomorfismo, podemos suponer que se distribuyen así:



Sea  $r_{i-1}$  una semirrecta que empieza en  $x_0$  y separa (como en la figura) a  $\mathbb{D}_i^2$  y  $\mathbb{D}_{i-1}^2$ . Así, dividimos  $X$  en varios triángulos. Sea  $C_i$  un entorno de uno de estos triángulos. Así,  $C_i \cap C_j$  será un entorno (con forma de estrella) de  $x_0$  (si  $|i - j| > 1$ ) o un entorno pequeño de una  $r_i$  (si  $|i - j| = 1$ ). Las intersecciones de a 3 dan un entorno (con forma de estrella) de  $x_0$ . Así, como  $\pi_1(C_i, x_0) \simeq \pi_1(S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z}$ , tenemos que  $\pi_1(X, x_0) \simeq *_{i=1}^n \mathbb{Z}$

Usando lo anterior, veremos cómo representar el grupo de un nudo a partir del diagrama. Sea entonces  $D$  el diagrama de un nudo  $K$ , y etiquetemos a cada arco del diagrama como  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Pensemos a  $K$  (en el espacio) de la siguiente manera: lejos de los cruces, haremos que los puntos de  $K$  tengan coordenada en  $\vec{z} = 1$ .



Para representar los cruces, haremos que la rama del cruce inferior baje hasta  $\vec{z} = 0$ , y luego de generar el cruce suba de vuelta a  $\vec{z} = 1$  (ver figura). Tomaremos luego un entorno tubular de  $K$ ,  $\mathcal{N}_\epsilon(K)$  (el cual supondremos que es prismático); tendremos que el grupo de  $K$  es  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{N}_\epsilon(K), x_0)$ . Usaremos el teorema de Van Kampen; para ello, consideraremos los abiertos

$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{N}_\epsilon(K) \mid z > 0\}$ , y  $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{N}_\epsilon(K) \mid z < \epsilon/2\}$ . Observemos primero que  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{N}_\epsilon(K) = V_1 \cup V_2$ .

$V_1$  se va a ver como el espacio  $\{z > 0\}$  al cual le faltan algunas asas (donde cada asa está representando a uno de los arcos del diagrama). Como ya vimos antes, tendremos que  $\pi_1(V_1, x_0) \simeq *_{i=1}^n \mathbb{Z}$ , donde  $n$  es la cantidad de arcos. También lo podemos ver como las palabras formadas por  $\{\alpha_i, i = 1, \dots, n\}$  donde  $\alpha_i$  representa dar una vuelta en el asa del arco  $A_i$ , sin relaciones entre los generadores (podemos escribirlo como  $\langle \{\alpha_i\}_{i=1}^n \mid \emptyset \rangle$ )

$V_2$  puede ser visto como el espacio  $\{z < \epsilon/2\}$  al cual le faltan varios prismas de la forma  $[a_i, b_i] \times [c_i, d_i] \times [-\epsilon, \epsilon/2)$ , por lo cual está claro que  $\pi_1(V_2, x_0)$  es trivial. Del teorema de Van Kampen, tenemos que  $\Phi : \pi_1(V_1, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{N}_\epsilon(K), x_0)$  es sobreyectivo. Para hallar el kernel de  $\Phi$  (o sea, las relaciones que debemos imponerle a los  $\alpha_i$ ), debemos estudiar  $\pi_1(V_1 \cap V_2, x_0)$ .

$V_1 \cap V_2$  puede ser visto como el espacio  $\{0 < z < \epsilon/2\}$  al cual le faltan prismas de la forma  $[a_i, b_i] \times [c_i, d_i] \times (0, \epsilon/2)$  (situados en los mismos lugares que en  $V_2$ , también representando los cruces). Usando una retracción por deformación, observamos que podemos pensar a  $V_1 \cap V_2$  como un plano al cual le faltan  $c$  discos, con lo cual  $\pi_1(V_1 \cap V_2, x_0) \simeq *_{i=1}^c \mathbb{Z}$ , donde  $c$  es la cantidad de cruces del diagrama. De igual manera que antes, podemos representar dicho grupo como  $\langle \{\beta_i\}_{i=1}^c \mid \emptyset \rangle$ , donde  $\beta_i$  representa una vuelta alrededor de uno de los prismas faltantes.

Sean  $\iota_{1,2} : \pi_1(V_1 \cap V_2, x_0) \rightarrow \pi_1(V_1, x_0)$  y  $\iota_{2,1} : \pi_1(V_1 \cap V_2, x_0) \rightarrow \pi_1(V_2, x_0)$ . Por el teorema de Van Kampen, y como  $\pi_1(V_2, x_0)$  es trivial, tenemos que el kernel de  $\Phi$  es la imagen de  $\iota_{1,2}$ , y cada  $\beta_k$  se ve en  $V_1$  como  $\alpha_j^{-1} \alpha_{i+1} \alpha_j \alpha_i^{-1}$  o como  $\alpha_j \alpha_{i+1}^{-1} \alpha_j^{-1} \alpha_i$ .

Concluimos que podemos representar al grupo de  $K$  como  $\langle \{\alpha_i\}_{i=1}^n \mid \{r_j = e\}_{j=1}^c \rangle$ , donde  $r_j$  es una relación como la anterior para cada cruce, y  $e$  es la palabra vacía.

A esta representación del grupo del nudo la llamamos “representación de Wirtinger”.

*Ejemplo 13.* Veremos cómo aplicar lo anterior para el caso de los nudos toroidales. Consideremos el nudo  $K(p, q)$  encajado en  $\mathbb{T}_1 \subset \mathbb{R}^3$ , y sea  $x_0 \in \mathbb{T}_1 \setminus K(p, q)$ . Sea  $N$  un entorno tubular de  $K(p, q)$ . Para hallar  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K(p, q), x_0)$ , veremos a  $\mathbb{R}^3$  como la unión de dos abiertos  $V_1$  y  $V_2$ . Llamaremos  $V_1$  al toro interior relleno sin  $N$ , y  $V_2$  al toro exterior relleno sin  $N$  (tomando abiertos de estos conjuntos, podemos suponer a  $V_1$  y a  $V_2$  abiertos).

Usando retracciones por deformación, vemos primero que el grupo fundamental de  $V_i$  es isomorfo al grupo fundamental de  $\mathbb{T}_1$  relleno, y luego

que el grupo fundamental del toro relleno es isomorfo al grupo fundamental de  $S^1$ . Así, tenemos que el grupo fundamental de  $K(p, q)$  constará de dos generadores.

Para hallar las relaciones entre los generadores, observamos que  $V_1 \cap V_2$  puede ser visto (vía una retracción por deformación) como  $\mathbb{T}_1 \setminus K(p, q)$ , el cual se ve como una cinta, isomorfa a  $S^1 \times I$ . Por ende, el grupo fundamental de  $V_1 \cap V_2$  es isomorfo al grupo fundamental de  $S^1$ , y constará de un generador. Dicho elemento generador (paralelo a  $K(p, q)$ ) se ve en  $V_1$  (luego de homotopías) como  $q$  vueltas del generador del grupo fundamental de  $V_1$ ; en  $V_2$  se ve como  $p$  vueltas del generador del grupo fundamental de  $V_2$ .

Concluimos, pues, por el teorema de Van Kampen, que  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K(p, q), x_0)$  es isomorfo a  $\langle \{a, b\} \mid a^q = b^p \rangle$

*Observación.* Dado que un nudo  $K(p, q)$  puede llegar a tener muchos arcos si  $p$  y  $q$  son grandes, nos conviene usar la construcción anterior para nudos toroidales, y no la representación de Wirtinger.



## Capítulo 8

# Representación de 3-variedades orientables combinatorias

La idea de este capítulo es ver qué 3-variedades compactas y conexas pueden obtenerse removiendo de  $S^3$  una cantidad finita de toros poliédricos  $T_1, T_2, \dots, T_n$  disjuntos (posiblemente enlazados), y luego pegándolos de vuelta, en su lugar, de manera distinta.

En este capítulo, probaremos que toda 3-variedad cerrada, conexa y orientable puede ser obtenida de esa manera, estableciendo una relación entre dichas 3-variedades y los enlaces de  $S^3$ .

Además, en el correr de la prueba, estudiaremos un tipo de homeomorfismo de 2-variedades que es interesante de por sí.

### 8.1. Isotopías y homeomorfismos en complejos simpliciales

**Definición 33.** Sea  $K$  un complejo simplicial finito, y sea  $I = [0, 1]$ . Si  $F_0$  y  $F_1$  son dos homeomorfismos lineales a trozos de  $K$  en  $K$ , decimos que  $F_0$  es ‘isotópico’ a  $F_1$  si existe un homeomorfismo lineal a trozos  $h : I \times K \rightarrow I \times K$  tal que

1.  $h(t, K) = \{t\} \times K \ \forall t \in I$  (o sea,  $\forall t, \exists h_t : K \rightarrow K$  homeomorfismo lineal a trozos, tal que  $(t, h_t(k)) = h(t, k) \ \forall k \in K$ ).
2.  $h_0 = F_0, h_1 = F_1$ .

*Notación.*  $G_K = \{F \mid F : K \rightarrow K \text{ homeomorfismo lineal a trozos}\}$

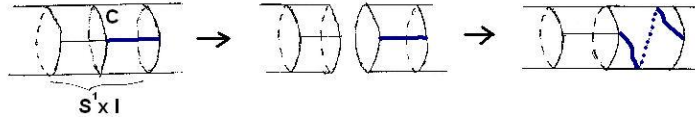
Claramente,  $G_K$  es un grupo. Si  $N_K \subset G_K$  son los elementos de  $G_K$  isotópicos a la identidad, tenemos que  $N_K$  es un subgrupo normal de  $G_K$  (si  $h : I \times K \rightarrow I \times K$  isotopía entre  $N$  y  $id$ , entonces  $H : I \times K \rightarrow I \times K$ ,  $H_t(k) = (F \circ h_t \circ F^{-1})(k)$  es una isotopía entre  $id$  y  $F \circ N \circ F^{-1}$ ). Dos elementos  $F, F'$  están en la misma clase de  $G_K/N_K$  si y sólo si son isotópicos.

## 8.2. Homeomorfismos en 2-variedades

Sea  $X$  una 2-variedad combinatoria, orientable. Definiremos a continuación ciertos tipos de homeomorfismos en  $X$ .

Sea  $C$  una curva cerrada simple, poligonal de  $X$ , y consideremos un entorno de  $C$  en  $X$ , el cual se verá como un cilindro  $S^1 \times I$ .

Cortamos  $X$  a lo largo de  $C$ , giramos uno de los extremos del cilindro un ángulo de  $2\pi$ , y volvemos a pegar.



La línea marcada gruesa correrá casi paralela a la curva  $C$  en el extremo donde giremos.

**Definición 34.** Llamaremos un ‘ $C$ -homeomorfismo’ a un homeomorfismo lineal a trozos como el que acabamos de construir, para la curva  $C$ .

**Definición 35.** Si  $p_1$  y  $p_2$  son dos curvas en  $X$ , diremos que están ‘ $C$ -relacionadas’ si existen finitos  $C$ -homeomorfismos  $h_1, \dots, h_m$  y  $n \in N_X$  tal que  $nh_1 \dots h_m p_1 = p_2$ .

*Notación.*  $p_1 \sim_C p_2$

**Proposición 14.**  $\sim_C$  es una relación de equivalencia.

*Demostración.*

$p \sim_C p$  se cumple trivialmente.

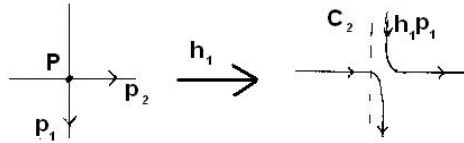
- Si  $p \sim_C q$ , entonces, por definición,  $\exists n \in N_X, h_1, \dots, h_m$   $C$ -homeomorfismos tal que  $nh_1 \dots h_m p = q$ . Si llamamos  $H = h_1 \dots h_m$ , tenemos que  $p = H^{-1} n^{-1} q$ , entonces  $p = H^{-1} n^{-1} H H^{-1} q = n' H^{-1} q$ .

Como  $h_i^{-1}$  es un  $C$ -homeomorfismo, y como  $n' \in N_X$ , tenemos que  $q \sim_C p$ .

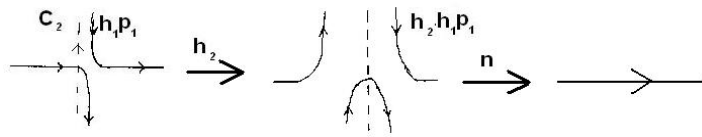
- Si  $p \sim_C q$  y  $q \sim_C r$ , tenemos que  $n_1 h_1 \dots h_{m_1} p = q$  y  $n_2 k_1 \dots k_{m_2} q = r$ ,  $h_i, k_j$  son  $C$ -homeomorfismos,  $n_1, n_2 \in N_X$ . Entonces, si  $H = h_1 \dots h_{m_1}$  y  $K = k_1 \dots k_{m_2}$ , tenemos  $n_2 K n_1 H p = r$ . Entonces  $n_2 K n_1 K^{-1} K H p = r$ . Como  $K n_1 K^{-1} \in N_X$ , y  $KH$  es una secuencia de finitos  $C$ -homeomorfismos, tenemos que  $p \sim_C r$ . □

**Lema 11.** Si  $p_1$  y  $p_2$  son curvas cerradas simples poligonales tal que se intersectan sólo en un punto, entonces  $p_1 \sim_C p_2$ .

*Demostración.* Sea  $h_1$  un  $C$ -homeomorfismo, usando  $p_2$  como  $C$ . Si  $P = p_1 \cap p_2$ , podemos ver a  $h_1 p_1$  como  $p_1$  cortada en  $P$ , y en dicho quiebre la curva empezará a correr paralela a  $p_2$ . Luego de correr paralela a  $p_2$ , la curva volverá a un entorno de  $P$ , y continuará su recorrido a través de  $p_1$ .



Sea  $h_2$  otro  $C$ -homeomorfismo, usando a  $C_2$  como  $C$ , donde  $C_2$  es una curva poligonal que corre paralela a  $p_1$  en un entorno pequeño de  $p_1$  (como en la figura anterior).



Luego de aplicar  $h_2$ , vemos que podemos encontrar un homeomorfismo  $n \in N_X$  que retraiga el camino cerca de  $p_1$ , que lleve  $h_2 h_1 p_1$  en  $p_2$ . Dicho  $n$  será la identidad fuera de un entorno pequeño  $U$  de  $p_1$ , y en dicho entorno contraerá a lo largo de  $p_1$  hasta que  $h_2 h_1 p_1 \cap U$  esté contenido en un entorno de  $P$ , como se muestra en la figura anterior. □

**Corolario 1.** Si  $p_1, \dots, p_r$  son curvas cerradas simples poligonales tal que  $p_i \cap p_{i+1}$  consiste en un solo punto, entonces  $p_1 \sim_C p_r$ .

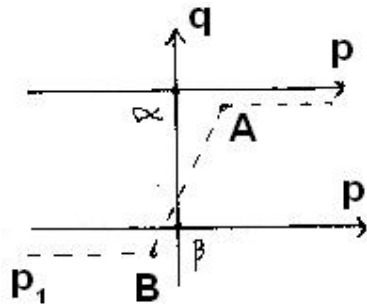
**Lema 12.** Sean  $p$  y  $q$  dos curvas cerradas simples poligonales en  $X$ . Sea  $Y$  un entorno de  $q$  cualquiera. Entonces existe una curva  $p_*$  tal que  $p \sim_C p_*$ ,  $p_* \cap (X \setminus Y) \subset p \cap (X \setminus Y)$ , y se cumple que  $p_* \cap q = \emptyset$ , o que  $p_*$  corta a  $q$  en dos puntos con intersección algebraica cero (o sea, en los puntos de intersección, la orientación de  $p_*$  es distinta con respecto a la orientación de  $q$ ).

*Demostración.* La prueba es por inducción en la cantidad  $r$  de puntos de intersección. Si  $r = 1$ , sabemos que  $p \sim_C q$ , y existe  $n \in N_X$  tal que  $nq \subset Y$ , donde  $nq$  no intersecciona a  $q$ . Tomaremos entonces  $p_* = nq$ .

Si  $r = 2$ , y además  $p$  y  $q$  pueden ser orientados tal que la intersección algebraica sea cero, el lema se cumple trivialmente.

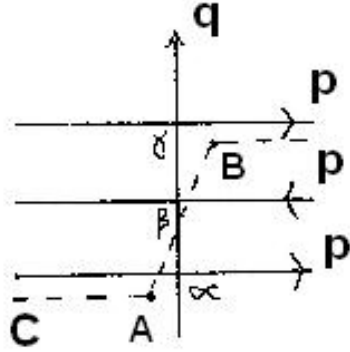
Así, tomaremos estos casos como nuestra base inductiva, y supondremos que el lema se cumple para  $r < k$ . Consideremos, entonces, que tenemos dos caminos  $p$ ,  $q$  orientados, que se cortan  $k$  veces.

Caso 1:



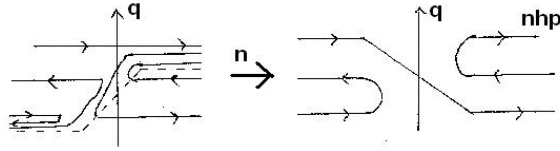
Supongamos que  $\alpha, \beta \in p \cap q$  consecutivos según la orientación de  $q$ , tal que  $p$  tiene la misma orientación en  $\alpha$  y  $\beta$  respecto a  $q$  (como se muestra en la figura). Consideremos  $A \in Y$  cerca de  $\alpha$ . Tomemos un camino poligonal  $p_1$  que comience en  $A$  y corra paralelo a  $p$  (sin intersectarse) hasta llegar a un punto  $B \in Y$  cerca de  $\beta$ , y luego unamos  $A$  con  $B$ , tal que  $\overline{BA} \subset Y$  interseccione a  $p$  y  $q$  una vez cada uno. Así, tenemos que  $p_1$  y  $p$  se cortan sólo una vez, entonces  $p_1 \sim_C p$ . Por como tomamos  $p_1$ , existe  $n \in N_X$  tal que  $np_1 \cap (X \setminus Y) \subset p \cap (X \setminus Y)$  (o sea, superponemos  $p_1$  y  $p$  en los lugares donde corren paralelas), y tal que  $np_1$  corta a  $q$  en menos de  $k$  puntos. Aplicando la hipótesis inductiva a  $np_1$  y a  $q$ , tenemos que existe  $p_* \sim_C np_1 \sim_C p$  que cumple lo deseado.

Caso 2:



Supongamos  $\alpha, \beta, \gamma \in p \cap q$  consecutivos en  $q$ , tal que  $p$  tiene orientaciones alternadas en  $\alpha, \beta, \gamma$  respecto de  $q$  (misma orientación en  $\alpha$  y  $\gamma$ , distinta orientación en  $\beta$ ). En  $p$ , tenemos que el segmento  $\overline{\alpha\gamma}$  contiene a  $\beta$ , o sino,  $\overline{\gamma\alpha}$  (supondremos lo primero). Consideremos  $B \in Y$  cerca de  $\gamma$ . Tomemos un camino poligonal  $C$  que comience en  $B$ , y corra paralelo a  $p$  (sin intersectarse) hasta llegar a un punto  $A \in Y$  cerca de  $\alpha$ , y luego unamos  $A$  con  $B$ , tal que  $\overline{AB} \subset Y$  corte una vez a  $q$  y dos a  $p$ .

Sea  $h$  un  $C$ -homeomorfismo usando la curva  $C$ . Tendremos que  $hp$  se verá así



Una vez que vemos cómo es  $hp$ , sabemos que existe  $n \in N_X$  tal que  $nhp$  queda como en la figura anterior. Así, observamos que  $nhp$  intersecta  $k - 2$  veces a  $q$ ; y por construcción,  $p \sim_C nhp$ .

Concluimos que existe  $p_* \sim_C nhp \sim_C p$  que cumple lo deseado.  $\square$

**Corolario 2.** Si  $p, q_1, \dots, q_r$  son curvas cerradas simples poligonales tal que  $q_i \cap q_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ , entonces existe un camino  $p_*$  tal que  $p_* \sim_C p$ , y  $\forall i = 1, \dots, r, p_* \cap q_i = \emptyset$  o  $p_*$  intersecta a  $q_i$  exactamente dos veces, con multiplicidad cero.

*Demostración.* Tomemos entornos  $Y_i$  de  $q_i$  tal que  $Y_i \cap Y_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Apliquemos el lema anterior a  $p$  y  $q_1$  con  $Y_1$ , para obtener  $p_1 \sim_C p$  tal que  $p_1 \cap q = \emptyset$  o  $p_1$  intersecta dos veces a  $q_1$  con multiplicidad algebraica cero.

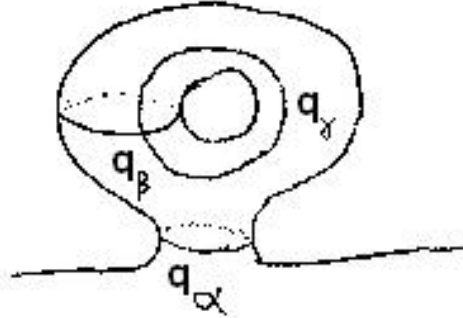
Ahora apliquemos el lema anterior a  $p_1$  y  $q_2$  con  $Y_2$  para obtener  $p_2 \sim_C p_1 \sim_C p$  tal que  $p_2 \cap q_2 = \emptyset$  o  $p_2$  interseca dos veces a  $q_2$  con multiplicidad algebraica cero. Como  $p_2 \cap (X \setminus Y_2) \subset p_1 \cap (X \setminus Y_2)$ , y  $q_1 \subset (X \setminus Y_2)$ , tenemos que  $p_2 \cap q_1 \subset p_1 \cap q_1$ . Así, si  $p_1$  interseca dos veces a  $q_1$ , podría pasar que ahora  $p_2$  interseca a  $q_1$  sólo una vez.

Razonando análogamente, obtenemos  $p_r \sim_C p$  tal que, para todo  $i$ ,  $p_r \cap q_i = \emptyset$ , o bien  $p_r$  interseca a  $q_i$  dos veces con multiplicidad cero, o  $p_r$  interseca a  $q_i$  sólo una vez.

Si esto último no sucede para ningún  $i$ , entonces  $p_r = p_*$ .

De lo contrario,  $\exists j \mid p_r \cap q_j = \{\alpha\}$ . De ser así, tomo  $\tilde{q}_j \subset Y_j$  paralelo a  $q_j$ , o sea,  $\tilde{q}_j \cap q_j = \emptyset$ . Se cumplirá entonces que  $\tilde{q}_j \cap q_i = \emptyset \forall i = 1, \dots, r$ . Por el lema 1,  $p_r \sim_C q_j$ . Como  $\exists n \in \mathbb{N}_X$  tal que  $\tilde{q}_j = nq_j$ , entonces  $p \sim_C p_r \sim_C \tilde{q}_j = p_*$   $\square$

Sea ahora  $X$  una 2-variedad cerrada, conexa, combinatoria, orientable, la cual representaremos sin pérdida de generalidad como una esfera con asas.



Consideremos un asa como la de la figura con las curvas poligonales  $q_\alpha$ ,  $q_\beta$ ,  $q_\gamma$ . Diremos que una curva no “empalma con el asa” si no interseca a  $q_\beta$ , y que una curva que no empalma al asa “pasa a través del asa” si corta a  $q_\gamma$  una cantidad impar de veces.

**Lema 13.** Si  $p$  es una curva simple poligonal en  $X$  ( $X$  como antes), entonces  $p \sim_C p_*$ , donde  $p_*$  no empalma ninguna de las asas de  $X$ .

*Demostración.* Supongamos que  $X$  tiene  $r$  asas. Tomemos entonces, para cada asa de  $X$ , dos curvas:  $q_1^i$  y  $q_2^i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , donde  $q_1^i$  pasa a través del asa como  $q_\beta$ , y  $q_2^i$  va alrededor de la base del asa  $i$ , como  $q_\alpha$ . El corolario del lema anterior implica que existe  $p_1 \sim_C p$  tal que  $p_1 \cap q_j^i = \emptyset$  o  $p_1$  interseca dos veces a  $p_j^i$  con multiplicidad algebraica cero,  $\forall i = 1, \dots, r$ ;  $j = 1, 2$ .

Supongamos que  $p_1$  empalma el asa  $i$ . Observando la figura anterior, vemos que  $p_1$  debe cortar a  $q_\alpha$ , girar en el asa cortando  $q_\beta$  dos veces, y vuelve a cortar a  $q_\alpha$  para alejarse del asa. Entonces existe  $n_i \in N_X$  tal que  $n_i p_1 \cap q_1^i = \emptyset$ , y  $n_i$  es la identidad fuera del asa.

Aplicando este razonamiento a cada asa, obtengo una secuencia  $n_1, \dots, n_r \in N_X$  tal que  $n_r \dots n_1 p_1 = p_* \sim_C p$  no está en ningún asa.  $\square$

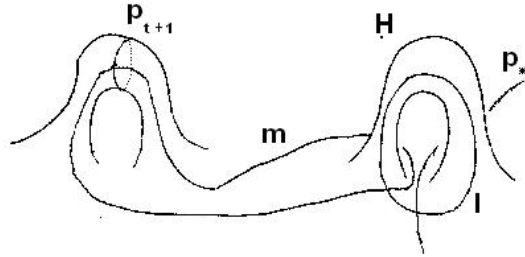
**Teorema 12.** *Sea  $h : X \rightarrow X$  un homeomorfismo lineal a trozos, que preserve la orientación, donde  $X$  es una 2-variedad cerrada, conexa y orientable, de género mayor a cero. Entonces  $h$  es isotópico al producto de una cantidad finita de  $C$ -homeomorfismos.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  tiene género  $r > 0$ , o sea,  $X$  tiene  $r$  asas. Sean  $p_1, \dots, p_r$  curvas poligonales cerradas simples, cada una alrededor de un asa de  $X$  al igual que  $q_\beta$  en la figura.

Hipótesis inductiva  $\chi(t)$ : Existen finitos  $C$ -homeomorfismos, cuyo producto es  $s$ , y  $n \in N_X$ , tal que  $nshp_i = p_i$ ,  $i \leq t \leq r$ .

$\chi(0)$  es verdadero siempre. Asumiendo que  $\chi(t)$  es verdadero, deseamos probar que  $\chi(t+1)$  es verdadero.

Por el lema anterior,  $nshp_{t+1} \sim_C p_*$ , donde  $p_*$  no empalma ninguna de las asas. Por definición, existe un producto de  $C$ -homeomorfismos  $s_1$ , y  $n_1 \in N_X$  tal que  $n_1 s_1 nshp_{t+1} = p_*$ . Como nuestra hipótesis inductiva indica que  $nshp_i = p_i \forall 1 \leq i \leq t$ , podemos tomar  $s_1$  y  $n_1$  tal que  $n_1 s_1 nshp_i = p_i \forall 1 \leq i \leq t$ .  $n_1 s_1 nsh$  es un homeomorfismo en  $X$ , y como  $p_{t+1}$  no es homotópico a un camino constante, tampoco lo es  $p_*$ . Pero  $p_*$  no empalma ningún asa (o sea, se encuentra en la esfera), así que algún asa debe conectar las dos componentes de la esfera que son divididas por  $p_*$ .



Como  $p_{t+1}$  no puede ser pensado como un producto de las curvas  $p_i$  con  $i \leq t$  (con la operación entre caminos usada cuando estudiamos el grupo

fundamental), tampoco lo será  $p_*$ , por lo cual  $p_*$  pasa a través de un asa  $H$  que no contiene a  $p_i$ , con  $i \leq t$ .

Aplicando el corolario del lema 1 a las curvas  $p_{t+1}$ ,  $m$ ,  $l$ ,  $p_*$  (las cuales se muestran en la figura anterior), tenemos que  $p_* \sim_C p_{t+1}$ . Concluimos que existe un producto de finitos  $C$ -homeomorfismos  $s_2$ , y  $n_2 \in N_X$  tal que  $n_2 s_2 p_* = p_{t+1}$ , y los tomamos de tal manera que  $n_2 s_2 p_i = p_i$  para  $i \leq t$ . Entonces  $n_2 s_2 n_1 s_1 n s h p_i = p_i \forall i \leq t + 1$ , y  $n_2 s_2 n_1 s_1 n s = n_3 s_2 s_1 s$  para algún  $n_3 \in N_X$ . Podemos concluir que  $\chi(r)$  es verdadero.

Tenemos entonces que  $nsh$  es un homeomorfismo lineal a trozos, que preserva la orientación, tal que  $p_i$  es fijo para  $nsh$ ,  $\forall i \leq r$ . Cortemos  $X$  a través de todos los  $p_i$ , y obtendremos un disco  $\mathbb{D}^2$  al cual le faltan discos (abiertos) en su interior. Para obtener el resultado que deseamos, hay que probar lo siguiente.

Hipótesis inductiva  $\psi(u)$ : Sea  $Y$  un disco combinatorio de cuyo interior removimos  $u$  discos combinatorios, y sea  $f$  un homeomorfismo lineal a trozos en  $Y$ , tal que  $f$  restringido al borde de  $Y$  es la identidad. Entonces existen finitos  $C$ -homeomorfismos cuyo producto es  $s$ , y  $n \in N_X$  que es la identidad en el borde de  $Y$ , tal que  $nsf$  es la identidad en  $Y$ .

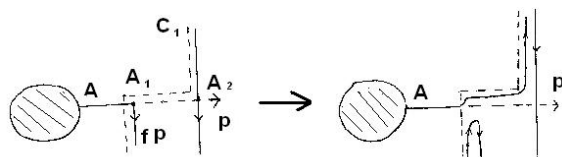
El hecho que  $\psi(0)$  es verdadero se desprende de que todo homeomorfismo lineal a trozos  $f$  definido en un disco, tal que es la identidad en el borde, es isotópico a la identidad, y tal que el borde permanece fijo en todo el proceso. La isotopía, llamada “truco de Alexander”, es la siguiente

$$J(t, x) = \begin{cases} tf(x/t) & \text{si } 0 \leq \|x\| \leq t \\ x & \text{si } t \leq \|x\| \leq 1 \end{cases} \quad (8.1)$$

Podemos suponer entonces que  $\psi(u)$  es verdadero, y deseamos probar  $\psi(u + 1)$ . Tenemos un disco  $Y$  del cual removimos  $u + 1$  discos, y un homeomorfismo  $f$  como el de la hipótesis. Sea  $p$  un camino poligonal simple, que empieza en un punto  $A$  de una componente del borde de  $Y$ , y termina en un punto  $B$  que se encuentra en otra componente del borde de  $Y$ . Podemos asumir que  $f|_p = id$  en un entorno de  $A$  y en un entorno de  $B$  (de lo contrario, tomamos un homeomorfismo isotópico a  $f$  que sí cumpla eso). Entonces  $f|_p = id$  desde  $A$  hasta  $A_1$ , y desde  $A_k$  hasta  $B$ , donde  $A_1, \dots, A_k$  son los puntos de intersección de  $p$  con  $fp$  en ese orden ( $p$  orientado desde  $A$  hasta  $B$ , y  $fp$  con la orientación inducida).

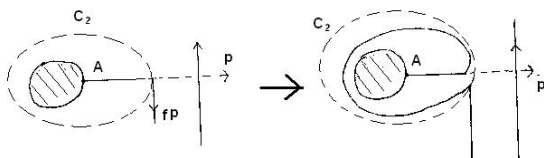
Caso 1: Supongamos que  $fp$  está orientado en la misma dirección en  $A_1$  y  $A_2$  con respecto a la orientación de  $p$ .





Consideremos la curva lineal a trozos  $C_1$  cerrada, que comienza cerca de  $A_1$ , corre paralela a  $fp$  (según la orientación) hasta llegar cerca de  $A_2$ , y luego regresa, corriendo cerca de  $p$ , hasta el lugar de salida (ver figura). Si  $g$  es un  $C$ -homeomorfismo que usa la curva  $C_1$ , entonces  $gfp$  se verá como en la figura, por lo cual existe  $n \in N_Y$  tal que  $ngf$  es la identidad en el intervalo  $A_1A_2$ . Tenemos entonces que  $ngfp$  corta a  $p$  menos veces que  $fp$ .

Caso 2: Supongamos que  $fp$  está orientado en distinta dirección en  $A_1$  y  $A_2$  respecto a la orientación de  $p$ .



Sea  $C_2$  una curva lineal a trozos, cerrada, que pasa por  $A_1$ , que encierra la componente del borde de  $Y$  que contiene a  $A$ , tal como se muestra en la figura. Si  $g'$  es un  $C$ -homeomorfismo que usa la curva  $C_2$  como en la figura, observamos que entramos en el caso 1.

Entonces podemos encontrar una cantidad finita de  $C$ -homeomorfismos cuyo producto es  $s$ , y  $n \in N_Y$  tal que  $nsf$  es la identidad en el borde de  $Y$  y en  $p$  (notemos que el borde de  $Y$  permanece invariante durante la isotopía). Si cortamos  $Y$  a través de  $p$  obtenemos un disco del cual sólo hemos removido  $u$  discos. Podemos concluir, a través de la hipótesis inductiva, que  $\psi(u+1)$  es verdadero.  $\square$

El caso cuando el género de  $X$  es cero (o sea, cuando  $X = S^2$ ) está contemplado en el siguiente teorema.

**Teorema 13.** *Sea  $h : S^n \rightarrow S^n$  homeomorfismo lineal, que preserva la orientación, con  $n \leq 2$ . Entonces  $h$  es isotópico a la identidad.*

**Lema 14.** *Toda 3-variedad cerrada, conexa, orientable, combinatoria  $M$  puede expresarse como la unión de dos  $n$ -toros sólidos  $T_1, T_2$ , cuyos bordes*

están identificados vía un homeomorfismo lineal a trozos  $f : X_1 = \partial T_1 \rightarrow X_2 = \partial T_2$

Llamaremos a la descomposición del lema anterior ‘descomposición de Heegaard’. Una idea de la demostración del lema es que, dada una triangulación de  $M$ , podemos tomar un entorno tubular de las aristas de dicha triangulación; se demuestra que este entorno tubular puede ser visto como un  $n$ -toro relleno.

Se ve, además, que el complemento de este toro relleno es otro  $n$ -toro relleno. Obviamente, ambos toros tienen la misma frontera, y de esto se sabe que podemos encontrar la función  $f$  antes mencionada.

*Notación.*  $M = T_1 \cup_f T_2$ .

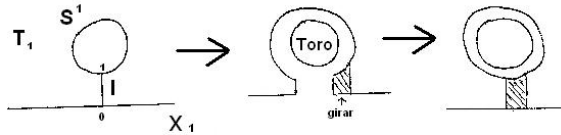
Estamos en condiciones de demostrar el teorema deseado.

**Teorema 14.** *Toda 3-variedad cerrada, conexa, orientable, combinatoria  $M$ , es homeomorfa a  $S^3$  después de haber removido una cantidad finita de toros disjuntos, y haberlos vuelto a pegar de una manera diferente. Además, el homeomorfismo es lineal a trozos.*

*Demostración.* Pensemos a  $M = T_1 \cup_f T_2$  para ciertos  $n$ -toros  $T_1$  y  $T_2$ , y cierta  $f$  como en el lema anterior. Como la orientación en  $M$  induce una orientación en  $X_1$  y  $X_2$ . Además, sabemos que existe un homeomorfismo lineal a trozos  $\iota : X_1 \rightarrow X_2$  tal que  $S^3 = T_1 \cup_\iota T_2$ . Elegiremos  $\iota$  de tal manera que  $f^{-1}\iota$  sea orientable.

Del lema anterior, sabemos que existen finitos  $C$ -homeomorfismos cuyo producto es  $g$ , y  $n \in N_{X_1}$  tal que  $ng = f^{-1}\iota$ , o sea,  $fng = \iota$ .

Para realizar los  $C$ -homeomorfismos en  $X_1$ , debemos extender cada  $C$ -homeomorfismo a  $T_1$ ; y para ello debemos realizar la siguiente construcción.



Sea  $S^1 \vee I$  el bouquet de  $S^1$  e  $I = [0, 1]$ , donde 1 es el único punto perteneciente a  $S^1 \cap I$ , como en  $D_1$  en la figura anterior. Tomemos una inmersión de  $(S^1 \vee I) \times S^1$  en  $T_1$ , tal que  $\{0\} \times S^1$  sea la curva del  $C$ -homeomorfismo a realizar, y  $(S^1 \vee (0, 1]) \times S^1$  se encuentre en el interior de  $T_1$ .

Cortemos  $T_1$  a lo largo de  $(S^1 \vee I) \times S^1$ . Obtendremos así una nueva componente conexa, que es un toro. Giremos ahora la parte marcada en la figura anterior, en  $D_2$ , de tal manera que la restricción de dicho giro a  $X_1$  sea el  $C$ -homeomorfismo deseado.

Al final, pegamos de vuelta como en  $D_3$ ; o sea, dejamos al toro sólido disconexo del resto de  $T_1$  (por ahora).

Para cada  $C$ -homeomorfismo, podemos realizar la construcción anterior de tal manera que los toros sólidos mencionados sean disjuntos.

Tomemos un entorno de  $X_1$  en  $T_1$  que sea homeomorfo (lineal a trozos) a  $X_1 \times I$ , y con él extendamos  $n^{-1}$  a  $T_1$ . Llamemos  $h$  a dicho homeomorfismo lineal a trozos.

Luego apliquemos el procedimiento anterior a  $hT$  para cada  $C$ -homeomorfismo que deseemos realizar. Por último, peguemos cada uno de los toros sólidos sueltos en su lugar. Una vez que deformamos  $T_1$  para modificar su borde, lo pegamos con  $T_2$  para obtener  $M$ .  $\square$

# Bibliografía

- [1] N. D. Gilbert and T. Porter. *Knots and surfaces*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994.
- [2] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [3] W. B. R. Lickorish. A representation of orientable combinatorial 3-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 76:531–540, 1962.
- [4] W. B. Raymond Lickorish. *An introduction to knot theory*, volume 175 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [5] Vassily Manturov. *Knot theory*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.