Trabajo Monográfico

Perturbaciones de Sistemas Dinámicos en la Topología C^1

Por: Pablo Guarino

Orientador: Dr. Álvaro Rovella

Licenciatura en Matemática

Facultad de Ciencias

Universidad de la República

Uruguay

Resumen

En esta monografía estudiamos sistemas dinámicos discretos diferenciables, tanto el caso invertible como el no invertible. Demostramos un lema de conexión C^1 para endomorfismos (teorema 1.1) que implica de manera directa los clásicos C^1 closing lemma y C^1 connecting lemma para difeomorfismos. Deducimos de aquí el Teorema de Densidad para difeomorfismos y varias propiedades de las clases homoclínicas de mapas C^1 genéricos. Se propone finalmente un acercamiento a resultados genéricos para el caso no invertible.

Abstract

In this monograph we study discrete differentiable dynamical systems, both the invertible and non-invertible case. We prove a C^1 connecting lemma for endomorphisms (theorem 1.1) which implies directly the classical C^1 closing lemma and C^1 connecting lemma for diffeomorphisms. We deduce from here the General Density Theorem for diffeomorphisms and several properties of homoclinic classes for C^1 generic maps. Finally, we propose an approach to generic results for the non-invertible case.

A mi viejo.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Muy a grosso modo, podríamos decir que el objetivo de los sistemas dinámicos se centra en el estudio de la evolución de un sistema a través del tiempo, i.e. si se sabe cómo varía el estado de un modelo a lo largo del tiempo, se pretende ser capaz de predecir qué sucederá en el futuro con dicho sistema. Más concretamente, dada una condición inicial (un estado posible del sistema), nos preguntamos a qué estado tenderá nuestro sistema, buscando dar una descripción asintótica de su comportamiento. Esto, en general, es harto difícil dado que las leyes que gobiernan el comportamiento de nuestro sistema pueden ser demasiado complejas. ¿Será posible, en tal caso, poder estudiar un sistema más sencillo, cuyo comportamiento sea indistinguible del inicial? ¿Existirá un conjunto grande (en algún sentido a precisar) de sistemas dinámicos descriptibles?

Desde el punto de vista topológico pueden exigirse distintos niveles de dificultad: describir un conjunto denso de sistemas dinámicos (es decir, estudiar comportamientos que pueden aparecer mediante perturbaciones arbitrariamente pequeñas), un residual si trabajamos en espacios de Baire (esta es una noción bastante mas interesante que la densidad: la intersección de dos residuales es un residual), o finalmente un abierto denso (es decir, estudiar comportamientos robustos). Esta monografía se dedicará al segundo tipo de abordaje.

Los estados posibles de nuestros sistemas formarán, a lo largo de toda la monografía, una variedad Riemanniana compacta, conexa y sin borde, y la ley que gobierne la evolución de nuestro sistema será o bien un endomorfismo o bien un difeomorfismo de la variedad en sí misma de clase C^1, es decir, trabajaremos con sistemas dinámicos discretos diferenciables, tanto el caso invertible como el no invertible.

1.1. Conexión de órbitas

Supongamos que se tiene un sistema dinámico y una condición inicial tales que, a medida que pasa el tiempo, el sistema toma repetidamente estados similares a la condición inicial, ¿existirá un sistema muy parecido al nuestro y tal que la condición inicial dada es periódica para este nuevo sistema? (por periódica entendemos que exista algún intervalo de tiempo fijo tal que el sistema vuelve exactamente a la condición inicial transcurrido ese intervalo de tiempo, y así sucesivamente). Una respuesta afirmativa a este problema se ha dado en llamar closing lemma, o lema de cerrado. Daremos una demostración de este hecho para sistemas discretos, diferenciables e invertibles.

Otro problema que podríamos plantearnos es el siguiente: supongamos que un sistema dinámico admite dos condiciones iniciales x_1 y x_2 diferentes con la siguiente propiedad: con la condición x_1 el sistema tiende (hacia el futuro) al mismo estado al que tiende (hacia el pasado) con la condición inicial x_2, ¿existirá un sistema muy parecido al nuestro y tal que bajo la condición inicial x_1 existe un momento futuro en el que el estado de nuestro sistema es exactamente x_2? Este problema se ha dado en llamar connecting lemma, o lema de conexión, y también daremos una demostración de este hecho para sistemas discretos, diferenciables e invertibles.

Formalicemos estos enunciados: a lo largo de toda la monografía M^m denotará una variedad Riemanniana compacta, conexa y sin borde, $\mathrm{End}^1(M)$ denotará el conjunto de todos los mapas de clase C^1 de la variedad en sí misma y $\mathrm{Diff}^1(M)$ denotará el conjunto de todos los difeomorfismos de clase C^1 de la variedad en sí misma, ambos equipados con la topología C^1. Enunciamos ahora el C^1 closing lemma demostrado por Pugh en [Pu1] y el C^1 connecting lemma demostrado por Hayashi en [Hay], para $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ (en el apéndice se dan las definiciones del caso):

Teorema (C^1 closing lemma, Pugh, 1967)**.** *Si $z \in \Omega(f)$ existe g arbitrariamente cerca de f en la topología C^1 tal que $z \in \mathrm{Per}(g)$.*

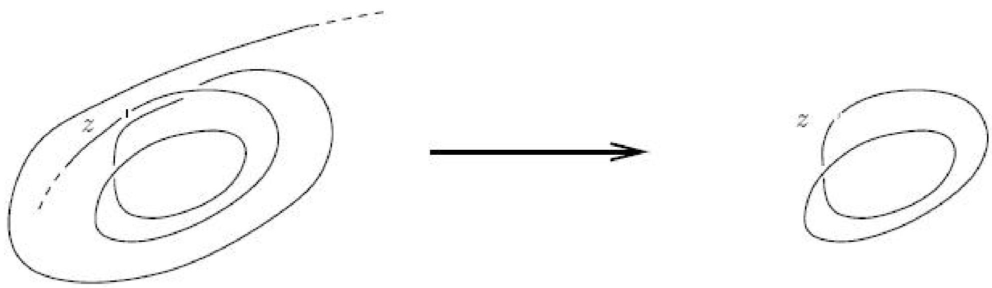


Figura 1.1: El closing lemma.

Teorema (C^1 connecting lemma, Hayashi, 1997)**.** *Sean p, q, $z \in M$ / $z \in \omega(p) \cap \alpha(q)$ y $z \notin \mathrm{Per}(f)$. Existe g arbitrariamente cerca de f en la topología C^1 tal que q está en la órbita futura de p por g.*

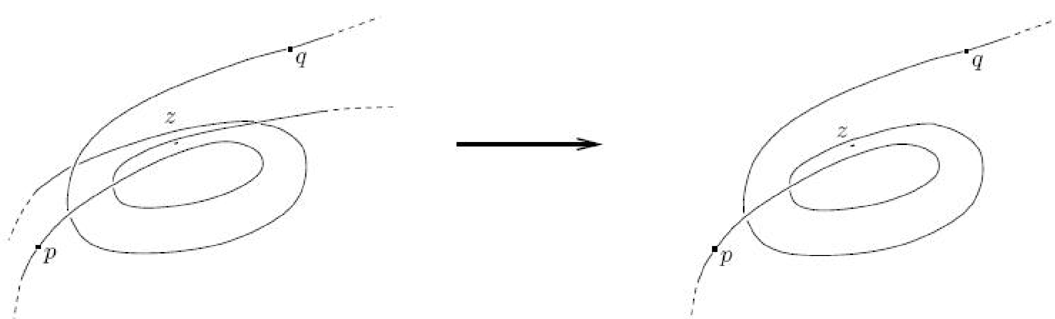
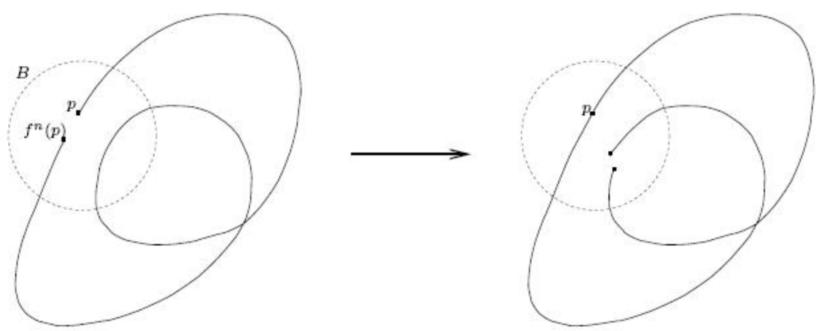


Figura 1.2: El connecting lemma.

Las demostraciones de estos teoremas están basadas en el teorema 1.1 y serán expuestas mas adelante. Es claro que el closing lemma (al igual que el connecting lemma) es trivial en la topología C^0 : dado $\varepsilon > 0$ tomamos $p \in M$, $n \geq 1$ tales que p, $f^n(p) \in B(x, \varepsilon/2)$ (aquí debemos tomar n como el primer iterado de p que visita la bola), y componemos f con una pequeña traslación (un perturbado de la identidad) que transforme a p en un punto periódico. La distancia entre esta traslación y la identidad en la topología C^0 puede tomarse igual a $d(p, f^n(p)) < \varepsilon$. Luego conjugamos f con otra pequeña traslación que hace a x el punto periódico. Esta traslación también puede tomarse de modo que su distancia a la identidad sea menor que ε. *El hecho crucial es que podemos tomar ambas perturbaciones de soporte arbitrariamente pequeño.* Esto es fundamental pues, entre los n primeros iterados del punto p, los únicos que pueden estar en el soporte de la perturbación son p y $f^n(p)$, pues de lo contrario, podríamos estar cerrando la órbita por un lugar, y tal vez abriéndola por otro.



En la topología C^1 no existen tales comodidades: Sea φ un perturbado de la identidad tal que $\varphi(f^n(p)) = p$ y $\|d\varphi - Id\| < \varepsilon \Rightarrow$

$$B\left(f^n(p), \frac{d(f^n(p), p)}{\varepsilon}\right) \subset \operatorname{sop}(\varphi)$$

pues si $z \notin \operatorname{sop}(\varphi) \Rightarrow$

$$\|f^n(p) - p\| = \|f^n(p) - p + z - z\| = \|f^n(p) - \varphi(f^n(p)) + \varphi(z) - z\| \leq \varepsilon \|f^n(p) - z\|$$

por el teorema del valor medio. Luego, *cuanto más cerca deba estar nuestra perturbación de la identidad en la topología C^1 más grande será su soporte*, y perdemos control acerca de cuántos iterados del punto p se ven afectados. Esta observación justifica el laborioso trabajo de los próximos dos capítulos, a lo largo de los mismos desarrollaremos las técnicas con las que los especialistas han enfrentado estas dificultades a lo largo de las últimas décadas.

Observar que la situación sería mucho más complicada si deseáramos trabajar en la topología C^r con $r > 1$ (pues en este caso se tendría $B(f^n(p), (\frac{d(f^n(p),p)}{\varepsilon})^{\frac{1}{r}}) \subset \mathrm{sop}(\varphi))$. Tanto el C^r closing lemma como el C^r connecting lemma permanecen abiertos para $r > 1$, y es por eso que aún no se han obtenido resultados genéricos de interés en estas topologías (exceptuando Kupka-Smale).

Tanto el closing lemma como el connecting lemma son herramientas de gran importancia y constituyen un avance de creciente interés en la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos. Algunas de sus aplicaciones y consecuencias serán detalladas en esta misma monografía. El enfoque que elegimos para la demostración del connecting lemma, que incluye como corolario el closing lemma, es el del artículo de Wen y Xia del año 2000 ([WX2]). Daremos una versión levemente modificada de su demostración, de modo de poder incluir aplicaciones a mapas no invertibles.

Un corolario fundamental del C^1 closing lemma es el teorema de densidad para difeomorfismos:

Teorema (General density theorem, Pugh, 1967). *Genéricamente en los difeomorfismos C^1 los puntos periódicos son densos en el no errante, es decir, $\exists \ \mathcal{D} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ residual / $\forall \ f \in \mathcal{D}$ se cumple que $\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$.*

Obtendremos este resultado en el capítulo 4. Comentamos brevemente algunos resultados de interés que se obtuvieron posteriormente al closing y connecting lemma: en cuanto a la compacidad de la variedad debe decirse que el C^1 closing lemma ha sido demostrado por Liao para variedades no compactas (ver [L]), pero en cuanto al C^1 connecting lemma Pugh ha construído (en [Pu3]) un contraejemplo para el caso continuo.

En el año 2004 Bonatti y Crovisier (en [BC]) obtienen, a partir del connecting lemma de Hayashi, el siguiente connecting lemma genérico para pseudo órbitas:

Teorema (C^1 connecting lemma para pseudo-órbitas, Bonatti-Crovisier, 2004). *Existe $\mathcal{D} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ residual / $\forall \ f \in \mathcal{D}$ se cumple que si x e y verifican que dado $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena que une x con y, entonces existe g arbitrariamente cerca de f en la topología C^1 tal que $g^n(x) = y$ para algún $n \geq 1$.*

No estudiaremos aquí este teorema ni sus consecuencias, referimos al lector al artículo [BC] o a la monografía [S].

1.2. Un lema de conexión para endomorfismos

Sea $f \in \text{End}^1(M)$, a lo largo de toda la monografía $\text{PrePer}(f)$ denotará el conjunto de los puntos preperiódicos de f, mientras que S_f denotará el conjunto de los puntos críticos de f, es decir, $S_f = \{x \in M \ / \ d_x f \text{ no es invertible}\}$. Uno de los objetivos centrales en esta monografía (al cual dedicaremos los capítulos 2 y 3) es demostrar el siguiente lema de conexión para endomorfismos:

Teorema 1.1. *Sea $f \in \text{End}^1(M)$ y sea $z \in M$ tal que la órbita futura de z no contiene puntos críticos ni periódicos. Dado $\mathcal{U}$ entorno de f en la topología C^1 existen $\rho > 1$, $L \in \mathbb{N}$ y $\delta_0 > 0$ con la siguiente propiedad: supongamos dados $0 < \delta \leq \delta_0$ y puntos $p, q \notin \Delta(\delta) = \bigcup_{n=1}^{n=L} f^n(B(z, \delta))$ que verifican:*

- *Una preórbita de q intersecta la bola $B(z, \delta/\rho)$ antes de q, i.e. existe $b > L$ tal que $f^{-b}(q) \cap B(z, \delta/\rho) \neq \emptyset$.*
- *La órbita futura de p intersecta la bola $B(z, \delta/\rho)$, i.e. existe $a \geq 0$ tal que $f^a(p) \in B(z, \delta/\rho)$.*
- *Dados $j \in \{1, ..., a\}$ y $n \in \{1, ..., L\}$ la condición $f^j(p) \in f^n(B(z, \delta))$ implica que $f^{j-1}(p) \in f^{n-1}(B(z, \delta))$.*

Entonces existe $g \in \mathcal{U}$ tal que q está en la órbita futura de p por g, y además, $g = f$ afuera de $\Delta(\delta)$.

La tercer condición exige cierta compatibilidad entre la órbita de p y el tubo $\Delta(\delta)$: cada vez que el arco de órbita entre p y $f^a(p)$ recorre el tubo lo hace desde el principio (si bien esto puede parecer una hipótesis muy restrictiva no lo será en nuestras aplicaciones, donde tendremos control sobre las órbitas a conectar).

Este teorema es una fuerte extensión del C^1 closing lemma y del C^1 connecting lemma enunciados puesto que se trabaja en $\text{End}^1(M)$ y puesto que, aún en el caso invertible, se resuelve un problema más general.

Debemos observar que, según los especialistas, la hipótesis de que z no sea un punto preperiódico debería poder eliminarse. A lo largo de los próximos dos capítulos veremos que ésta es una condición impuesta por las técnicas utilizadas y no por la naturaleza del problema (en el capítulo 2 desarrollamos la idea de desparramar a lo largo del tiempo el efecto de las perturbaciones: la necesidad de construir tubos de conexión imposibilita tomar puntos periódicos. En el capítulo 6 obtendremos un largo uniforme para los tubos de conexión, lejos de los puntos críticos, que nos permitirá aceptar puntos periódicos de período suficientemente grande).

En el capítulo 2 demostramos un teorema de álgebra lineal que, mediante un proceso de linealización desarrollado en el capítulo 3, implica el teorema 1.1.

En el capítulo 4 se dan dos demostraciones del Teorema de Densidad de Pugh.

En el capítulo 5 se aplica el C^1 connecting lemma para obtener propiedades de las clases homoclínicas para difeomorfismos C^1 genéricos (una introducción al tema se ofrece al inicio del capítulo).

El teorema de densidad demostrado en el capítulo 4 tiene una consecuencia fundamental que no será analizada en este trabajo; en efecto, el siguiente corolario es una consecuencia obvia:

Corolario. *Si un difeomorfismo f es C^1- Ω estable entonces $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega(f)$.*

Recordemos que un difeomorfismo f es C^1- Ω *estable* si existe $\mathcal{U}$ entorno de f en la topología C^1 tal que para toda $g \in \mathcal{U}$ se tiene que $f|_{\Omega(f)}$ y $g|_{\Omega(g)}$ son conjugadas. La demostración del corolario es obvia puesto que una conjugación de $f|_{\Omega(f)}$ y $g|_{\Omega(g)}$ lleva puntos periódicos de f en puntos periódicos de g y conjuntos densos en conjuntos densos. El teorema de densidad implica entonces el resultado afirmado. Este corolario constituye un paso ineludible en la demostración de la C^1 conjetura de estabilidad obtenida finalmente por Mañé en 1988 (ver [M2]). Esta caracterización de la estabilidad permanece abierta aún en topología C^1 para endomorfismos, más aún, no se sabe siquiera si el conjunto de endomorfismos C^1 de una variedad M para los cuales $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega(f)$ es residual en $\mathrm{End}^1(M)$. Para endomorfismos sin puntos críticos o con una cantidad finita de estos, Lan Wen demostró este resultado de densidad en [W1] y [W2]. En el capítulo 6 (y basados en nuestra versión del teorema 1.1) elaboramos una técnica diferente a la de Wen que extiende el teorema a una clase más amplia y permitiría obtener el antedicho resultado para endomorfismos arbitrarios.

Capítulo 2

Una versión lineal del C^1 connecting lemma

2.1. Perturbaciones en la topología C^1

Definición 2.1. Sea $B \subset \mathbb{R}^m$ una bola cerrada de radio r y sea $\varepsilon > 0$, denotamos por εB la bola cerrada del mismo centro y radio εr, y le llamamos *ε-núcleo* de la bola B.

Definición 2.2. Sean $B \subset \mathbb{R}^m$ una bola cerrada y $0 < \varepsilon < 1$, dados $x, y \in \varepsilon B$ sabemos que existe un difeomorfismo $t : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de clase C^∞ soportado en B (i.e. $t|_{B^c} = Id|_{B^c}$) tal que $t(x) = y$. A una tal t le llamamos *ε-traslación* que lleva x a y soportada en B.

El siguiente lema (que demostraremos por simplicidad en $\mathbb{R}^m$) ofrece un método para perturbar difeomorfismos controlando su tamaño C^1.

Lema 2.1. $\forall\ \beta > 0\ \exists\ \varepsilon > 0$ / *dada cualquier bola cerrada B en $\mathbb{R}^m$, $x, y \in \varepsilon B$, existe una ε-traslación t que lleva x a y soportada en B tal que cualquier derivada parcial de $t - Id$ tiene valor absoluto menor que β.*

Demostración. Es claro que basta demostrar el lema para el caso en que x es el centro de la bola B. Sea $\alpha : \mathbb{R}^m \to [0, 1]$ un chichón C^∞ / $\alpha = 1$ en $B(0, 1/3)$, $\alpha = 0$ en $B(0, 2/3)^c$, y todas las derivadas parciales de α tienen valor absoluto menor o igual que 4 (observar que podemos tomar la cota arbitrariamente cerca de 3). Sea r el radio de B y sea $y \in \varepsilon B$, definimos

$$t : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \ / \ t(v) = v + \alpha \left(\frac{v-x}{r} \right) (y-x) \ \forall \ v \in \mathbb{R}^m$$

Para ε suficientemente pequeño t es un difeomorfismo, $t(x) = y$, $\text{sop}(t) \subset B$, y $\forall \ i \in \{1, ..., m\}$

$$\frac{\partial t}{\partial v_i}(v) = v + \frac{\partial \alpha}{\partial v_i} \left(\frac{v-x}{r} \right) \left(\frac{y-x}{r} \right)$$

Entonces,

$$\left| \frac{\partial (t - Id)}{\partial v_i} \right| = \left| \frac{\partial \alpha}{\partial v_i} \left(\frac{v-x}{r} \right) \right| \frac{|y-x|}{r}$$

y como $|y-x| \leq \varepsilon r$, $\left| \frac{\partial (t-Id)}{\partial v_i} \right| \leq 4\varepsilon$. Luego basta tomar $\varepsilon < \beta/4$. □

Este lema indica un camino para construir perturbaciones en la topología C^1: En el caso en que el radio de la bola B (del cual nada dice el enunciado) sea suficientemente pequeño (y ε también lo sea), la perturbación t estará C^1 cerca de la identidad, y si definimos $g = t \circ f$, resultará que g está C^1 cerca de f. Así serán todas nuestras perturbaciones. A tales efectos, definimos uno de los objetos centrales de esta monografía:

Definición 2.3. Dados $\{V_n\}_{n \geq 0}$ sucesión de espacios vectoriales de igual dimensión m y con producto interno, $T_n : V_n \to V_{n-1}$ sucesión de isomorfismos lineales $\forall \ n \geq 1$, $\varepsilon > 0$, $u, v \in V_0$, $L \in \mathbb{N}$, Q, $G \subset V_0$, llamaremos *ε-transición* de $\{T_n\}_{n \geq 1}$, de u a v, de largo L, contenida en Q y que evita G a $L+1$ puntos $\{c_0, c_1, ..., c_L\}$ junto con L bolas $B_n \subset V_n$, $0 \leq n \leq L-1$ tales que se verifican las siguientes cuatro propiedades:

- $c_0 = v$ y $c_L = F_L^{-1}(u)$, donde $F_n = T_1 \circ T_2 \circ ... \circ T_n \ \ \forall \ \ 0 \leq n \leq L-1$
- $c_n, \ T_{n+1}(c_{n+1}) \in \varepsilon B_n \ \ \forall \ \ 0 \leq n \leq L-1$
- $B_n \subset F_n^{-1}(Q) \ \ \forall \ \ 0 \leq n \leq L-1$
- $B_n \cap F_n^{-1}(G) = \emptyset \ \ \forall \ \ 0 \leq n \leq L-1$

Para enfrentar las dificultades comentadas en la introducción, Pugh desarrolla (en [Pu1]) la idea de desparramar las perturbaciones en una cantidad finita de pasos. Utilizaremos esta idea mediante las ε-transiciones. A grosso modo, una ε-transición es una ε-pseudo órbita de $L+1$ puntos con L saltos. Esta ε-pseudo órbita une el punto v con un iterado pasado del punto u, en lugar de hacerlo directamente con la preimagen de u. Los conjuntos Q y G son restricciones. En nuestro caso, G se corresponderá con arcos de órbita que no podrán ser afectados por nuestras perturbaciones, mientras que Q controlará el tamaño C^0 de nuestra perturbación.

Definición 2.4. Dos ε-transiciones $c_0, c_1, ..., c_L; B_0, B_1, ..., B_{L-1}$, y $c'_0, c'_1, ..., c'_L; B'_0, B'_1, ..., B'_{L-1}$ contenidas respectivamente en Q y Q' son *disjuntas* si $B_n \cap B'_n = \emptyset \ \ \forall \ \ 0 \leq n \leq L-1$.

2.2. Una versión lineal del C^1 connecting lemma

En esta sección enunciamos un teorema de álgebra lineal que, mediante un proceso de linealización desarrollado en el próximo capítulo, implicará el teorema 1.1. El enunciado de este teorema es bastante engorroso pues indica de manera explícita el modo de conectar órbitas. La demostración será dada en la sección 2.5, luego de algunos preliminares.

Teorema 2.1. *Dados $\{V_n\}_{n\geq 0}$ sucesión de espacios vectoriales de igual dimensión m y con producto interno, $T_n : V_n \to V_{n-1}$ sucesión de isomorfismos lineales $\forall\ n \geq 1$ y $\varepsilon > 0$, existen $\sigma > 1$ y $L \in \mathbb{N}$ / dadas dos secuencias finitas $\{x_i\}_{i=1}^{i=s}$ e $\{y_i\}_{i=1}^{i=t}$ en V_0 con el siguiente orden definido en la unión $X = \{x_i\}_{i=1}^{i=s} \cup \{y_i\}_{i=1}^{i=t}$:*

$$x_1 < x_2 < ... < x_s < y_t < y_{t-1} < ... < y_2 < y_1$$

existen dos puntos $x \in \{x_i\}_{i=1}^{i=s} \cap B(x_s, \sigma \|x_s - y_t\|)$ e $y \in \{y_i\}_{i=1}^{i=t} \cap B(x_s, \sigma \|x_s - y_t\|)$ junto con k pares (para algún $k \in \mathbb{N}$) $\{p_i, q_i\} \subset X \ \cap \ B(x_s, \sigma \|x_s - y_t\|)$ con el orden

$$x_1 \leq p_1 \leq q_1 < p_2 \leq q_2 < ... < p_{k'} \leq q_{k'} < x < y < p_{k'+1} \leq q_{k'+1} < ... < p_k \leq q_k \leq y_1$$

tal que se satisfacen las siguientes cuatro condiciones:

- *Existe una ε-transición de $\{T_n\}_{n\geq 1}$, de x a y, de largo L, contenida en $B(x_s, \sigma \|x_s - y_t\|)$.*

- *$\forall\ i \in \{1,...,k\}$ existe una ε-transición de $\{T_n\}_{n\geq 1}$, de p_i a q_i, de largo L, contenida en $B(x_s, \sigma\,\|x_s - y_t\|)$.*
- *Estas $k+1$ transiciones evitan $X - [x,y] - [p_1,q_1] - ... - [p_k,q_k]$, donde $[x,y]$ refiere al orden definido en X, es decir, $[x,y]$ denota $\{z \in X\ /\ x \leq z \leq y\}$.*
- *Las $k+1$ transiciones son disjuntas dos a dos.*

Definición 2.5. Al par $\{x,y\}$ le llamaremos *par de conexión*, mientras que a los pares $\{p_i,q_i\}$ les llamaremos *pares de corte*. La diferencia sustancial es que x e y pertenecen a distintas secuencias (en particular son puntos diferentes), mientras que los p_i y q_i pertenecen a la misma secuencia, pudiendo ser el mismo punto.

Observación. De acuerdo a la tercer condición del teorema, la transición de p_i a q_i no tiene por qué evitar los puntos de X que son intermedios de los otros pares $\{p_j,q_j\}$. Solamente deben ser evitados los puntos de X que no son intermedios a ninguno de los $\{p_j,q_j\}$. Esta es la idea que Hayashi expuso en [Hay]: Una de las más serias complicaciones al intentar probar el teorema 1.1 es que la órbita futura de p y la órbita pasada de q pueden visitar muchísimas veces la bola $B(z,\delta/\rho)$, por ejemplo en el caso en que $z \in \omega(p) \cap \alpha(q)$. Sería un error entonces buscar solamente un par de conexión pues como vimos, si el entorno $\mathcal{U}$ de f en la topología C^1 es demasiado pequeño, el soporte de la perturbación será demasiado grande, pudiendo afectar iterados de las órbitas a conectar que no quieren afectarse. Hayashi propone *barrer la casa*: no buscar únicamente un par de iterados para conectar, sino buscar además arcos intermedios de órbita que permitan tomar atajos y olvidar así conjuntos de iterados. Más concretamente, supongamos que existen dos iterados $f^n(p)$ y $f^{n+l}(p)$ suficientemente cercanos entre sí, en tal caso tal vez podamos conectar directamente $f^n(p)$ con $f^{n+l}(p)$ y olvidar completamente los $l-1$ iterados intermedios, despejando así el entorno de z (ver figura 2.1). Obviamente esto introduce el problema de que las perturbaciones sean disjuntas dos a dos, pero esto se ha resuelto con éxito en [WX2].

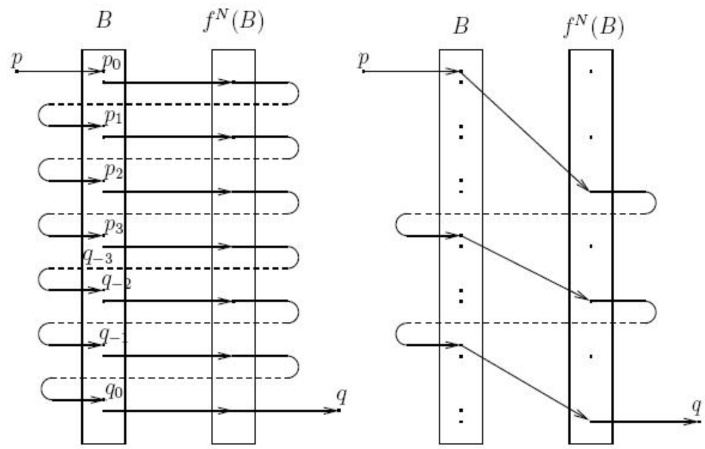


Figura 2.1: A barrer la casa.

2.3. Un resultado básico de perturbaciones C^1

Definición 2.6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita m con producto interno, y sea $e = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ una base ortonormal de V, damos algunas definiciones elementales:

- Una *e-caja* de centro $x \in V$ y tamaño $(\lambda_1, ..., \lambda_m) \in (\mathbb{R}^+)^m$ es $Q = \{y \in V \ / \ |y_i - x_i| \leq \lambda_i, 1 \leq i \leq m\}$, donde x_i e y_i son las coordenadas de x e y en la base e.

- Dado $\alpha > 0$, $\alpha Q = \{y \in V \ / \ |y_i - x_i| \leq \alpha\lambda_i, 1 \leq i \leq m\}$. Si $\alpha < 1$, decimos que αQ es el *α-núcleo* de Q.

- Decimos que una e-caja Q' es *de tipo* Q si $Q' = z + \alpha Q$ para algún $z \in V$ y algún $\alpha > 0$.

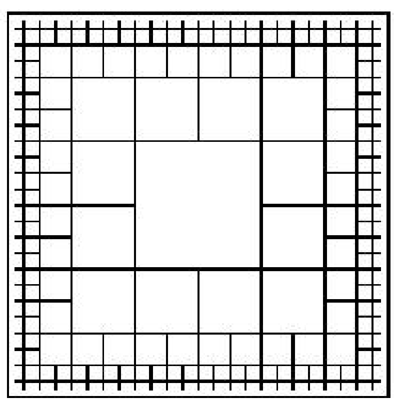
El siguiente teorema fue asumido por Wen y Xia en [WX2] y luego demostrado en [WX1]:

Teorema 2.2. *Dados $\{V_n\}_{n \geq 0}$ sucesión de espacios vectoriales de igual dimensión m y con producto interno, $T_n : V_n \to V_{n-1}$ sucesión de isomorfismos lineales $\forall \ n \geq 1$, existe $e = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ base ortonormal de V_0 / $\forall \ \varepsilon > 0$, $\alpha \in (0,1)$ existe una e-caja A y $L \in \mathbb{N}$ / $\forall$ e-caja Q de tipo A, $x, y \in \alpha Q$, existe una ε-transición*

$c_0, c_1, ..., c_L; B_0, B_1, ..., B_{L-1}$ de $\{T_n\}_{n\geq 1}$, de x a y, de largo L y contenida en Q. Más aún, el radio de B_n es menor o igual a la mitad de la distancia entre $\partial(F_n^{-1}(Q))$ y $\partial(F_n^{-1}(\alpha Q))$ $\forall\ 0 \leq n \leq L-1$.

2.4. Un ordenamiento de cajas

Sea e base ortonormal de V_0, A una e-caja, y H_0 una e-caja de tipo A (todas las cajas consideradas en esta sección serán e-cajas de tipo A). Es obvio que existe una cantidad finita ($4^m - 2^m$ de hecho) de cajas H_i, $1 \leq i \leq 4^m - 2^m$, de tipo A, de la mitad de tamaño que H_0, que rellenan $2H_0 - H_0$. Es decir, rodeamos H_0 con cajas del mismo tipo que H_0 pero de la mitad de su tamaño hasta obtener $2H_0$. Análogamente, podemos rodear $2H_0$ con cajas de un cuarto del tamaño de H_0 hasta obtener $(2+\frac{1}{2})H_0$.



Inductivamente obtenemos una sucesión $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de e-cajas de tipo A, donde una cantidad finita (llamémosle primer familia) tienen tamaño la mitad del tamaño de H_0, luego otra cantidad finita (la segunda familia) tienen tamaño un cuarto del tamaño de H_0, etc. Realicemos un par de observaciones:

- $\forall\ i \geq 1$ sea $D_i = 2H_i \Rightarrow$ cada D_i está contenido en el interior de $3H_0$ y más aún, $\bigcup_{i\geq 0} D_i = \bigcup_{i\geq 0} H_i = \text{int}(3H_0)$.
- Existe una constante universal N^* que sólo depende de m (es independiente de e, A y H_0) / cada D_i intersecta a lo sumo N^* de los demás D_j.

Para chequear lo segundo, primero hay que observar que si entre la familia de H_i y la familia de H_j hay al menos dos familias (distintas de la de H_i y de la de H_j), $D_i \cap D_j = \emptyset \Rightarrow$ cada D_i intersecta cajas de a lo sumo cinco familias. Ahora basta observar que para cada una de estas cinco familias existe una constante $N/\ D_i$ intersecta a lo sumo N cajas de esa familia. Más aún, N puede elegirse independiente de D_i, e, A y H_0 (de hecho, es fácil ver que basta tomar $N \geq 4^m - 2^m$).

2.5. Demostración de la versión lineal del C^1 connecting lemma

En esta sección demostraremos el teorema 2.1. Como dijimos en la introducción la demostración que ofrecemos fue obtenida por Wen y Xia en el artículo [WX2] del año 2000.

Demostración. Dados $\{V_n\}_{n\geq 0}$ sucesión de espacios vectoriales de igual dimensión m y con producto interno, $T_n : V_n \to V_{n-1}$ sucesión de isomorfismos lineales $\forall\ n \geq 1$ y $\varepsilon > 0$. Sea $e = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ base ortonormal de V_0 dada por el teorema 2.2 y sea N^* la constante universal obtenida en la observación anterior. Sea $\alpha \in (0,1)$ que satisface:

$$\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{2N^*+3} \leq 1$$

Tomamos la e-caja $A = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ centrada en el origen, y $L \in \mathbb{N}$ como en el teorema 2.2. Sea:

$$\sigma = 6\,\text{máx}\left\{\frac{\lambda_i}{\lambda_j} : 1 \leq i,j \leq m\right\}$$

Veamos que σ y L así definidos satisfacen las condiciones del teorema 2.1: Dadas dos secuencias finitas $\{x_i\}_{i=1}^{i=s}$ e $\{y_i\}_{i=1}^{i=t}$ en V_0, debemos elegir en X un par de conexión $\{x, y\}$ y algunos pares de corte $\{p_i, q_i\}$ en $B(x_s, \sigma\,\|x_s - y_t\|)$ que satisfagan las cuatro condiciones del teorema. Esto lo haremos en cuatro pasos.

Paso 1: Una elección preliminar

En este paso elegimos un par $\{\xi,\varsigma\}$ candidato a $\{x,y\}$ y algunos pares $\{u_i,v_i\}$ candidatos a $\{p_i,q_i\}$. La elección final se hará recién en el Paso 4.

Sea H_0 una e-caja de tipo A tal que $x_s, y_t \in H_0 \subset 3H_0 \subset B(x_s, \sigma\|x_s - y_t\|)$ (tal H_0 existe por la elección de σ, observar que $\sigma \geq 6$).

Sea $\{H_0, H_1, ...\}$ una sucesión de cajas como la construída en el ítem anterior, y sean las D_n también como en el ítem previo. Observar que como las D_n están en el interior de $3H_0$, están en $B = B(x_s, \sigma\|x_s - y_t\|)$.

Miramos primero H_0: Sean ξ y ς el menor y mayor punto de $X \cap H_0$ (respecto del orden $<$ en X). En particular, $\xi \leq x_s < y_t \leq \varsigma$ pues $x_s, y_t \in H_0$. Estos son nuestros primeros candidatos a par de conexión.

Miramos ahora H_1: Sean a y b el menor y mayor punto de $(X - [\xi,\varsigma]) \cap H_1$. Observar que a puede ser igual a b, y esto no es problema. Observar además, que la intersección $(X - [\xi,\varsigma]) \cap H_1$ podría ser vacía, en cuyo caso avanzamos a H_2. Hay dos casos a considerar:

Caso 1. a y b pertenecen a la misma secuencia, esto es, $a \leq b < \xi < \varsigma$, o bien, $\xi < \varsigma < a \leq b$. En este caso $\{a,b\}$ es candidato a par de corte, digamos $\{u,v\}$.

Caso 2. a y b pertenecen a diferentes secuencias ($a < \xi < \varsigma < b$). En este caso $\{a,b\}$ es un mejor candidato a par de conexión, y eliminamos el intervalo abierto (a,b), incluyendo los antiguos candidatos ξ y ς, de futuras consideraciones. Es decir, quitamos todo el intervalo (a,b) de nuestro conjunto X, y no volverá a ser tenido en cuenta en el futuro. Así que reetiquetamos a como ξ y b como ς (recordar que esta elección aún está sujeta a cambios).

Esto finaliza nuestro trabajo en H_1. Obtenemos un candidato a par de conexión $\{\xi,\varsigma\}$ y un, o ningún, candidato a par de corte $\{u,v\}$. Observar que los intervalos cerrados determinados por estos pares son mutuamente disjuntos.

Miramos ahora H_2: Sean a y b el menor y mayor punto de $(X - [\xi,\varsigma] - [u,v]) \cap H_2$. Hay dos casos a considerar:

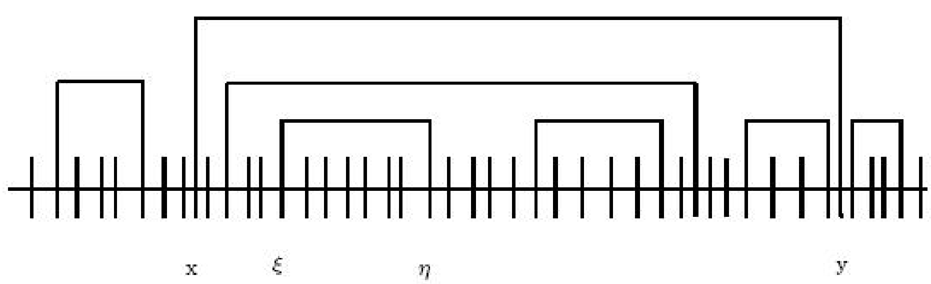
Caso 1. a y b pertenecen a la misma secuencia. En este caso seleccionamos $\{a,b\}$ como un par de corte. Se tiene que o bien $[a,b]$ es disjunto de los intervalos cerrados obtenidos en la parte anterior, o su interior (a, b) cubre cualquiera de estos intervalos que lo intersecta. En ese caso, eliminamos (a, b) de futuras consideraciones. Luego, los intervalos cerrados de los pares seleccionados son mutuamente disjuntos.

Caso 2. a y b pertenecen a diferentes secuencias. En este caso elegimos $\{a, b\}$ como un mejor candidato a par de conexión $\{\xi, \varsigma\}$ y eliminamos (a, b) de futuras consideraciones.

Esto termina nuestro trabajo en H_2, ahora miramos H_3, etc. Luego de cada paso se obtiene un único candidato a par de conexión, y eventualmente algún candidato a par de corte de tal modo que los intervalos cerrados determinados por estos pares son dos a dos disjuntos.

Observación. Podemos visualizar al conjunto ordenado X como una recta, y dibujar un puente sobre cada uno de estos intervalos cerrados, sean de corte o de conexión.

Entonces la idea puede formularse de la siguiente manera: Cada vez que un nuevo puente aparece (mientras recorremos los H_n), sus extremos no pueden pertenecer a ninguno de los puentes cerrados anteriores, y eliminamos de futuras consideraciones el intervalo abierto debajo del nuevo puente. En particular, cualquier puente anterior que hubiera quedado debajo será olvidado.



Observar que el nuevo puente puede tener ambos extremos en cierto H_i, y cubrir puntos de X que están en algún otro H_j, pues el orden de X nada tiene que ver con la numeración de los H_i. Esos puntos también deben ser eliminados. Esto es importante para mantener los puentes dos a dos disjuntos.

Este proceso termina pues X es finito. Así finaliza el *Paso 1* habiéndose obtenido un candidato a par de conexión $\{\xi, \varsigma\}$, y algunos candidatos, digamos l, a pares de corte $\{u_i, v_i\}$ ordenados así:

$$x_1 \leq u_1 \leq v_1 < ... < u_{l'} \leq v_{l'} < \xi < \varsigma < u_{l'+1} \leq v_{l'+1} < ... < u_l \leq v_l \leq y_1$$

Observar que el índice i de $\{u_i, v_i\}$ está determinado por el orden $<$ en X, y no el orden en que fueron elegidos en el proceso anterior. Sea H_i^* la e-caja de la sucesión $\{H_n\}_{n\geq 0}$ / $u_i, v_i \in H_i^*$, y sea $D_i^* = 2H_i^*$. Por cuestiones de notación, escribimos $\{u_0, v_0\} = \{\xi, \varsigma\} \Rightarrow$ se cumple que:

$$(X - [\xi, \varsigma] - [u_1, v_1] - ... - [u_l, v_l]) \cap \operatorname{int}(3H_0) = \emptyset$$

pues si la intersección no fuese vacía, el proceso continuaría y produciría nuevos pares.

Paso 2: Bolas básicas y bolas jumbo en V_0

Trabajamos primero en $V_0 : \forall\ i \in \{0, 1, ..., l\}$ sea $Q_i^* = (\frac{1}{\alpha})H_i^*$, siendo α como al inicio de la prueba (es decir, α es apenas menor que uno) $\Rightarrow u_i, v_i \in \alpha Q_i^*\ \forall\ i \in \{0, 1, ..., l\}$ (observar que la caja Q_i^* está entre D_i^* y H_i^*, pues es apenas mas grande que H_i^*).

Por como elegimos el tipo de caja A, se puede aplicar el teorema 2.2 a $Q = Q_i^*$, $\alpha Q = H_i^*$. Luego, para cada $i \in \{0, 1, ..., l\}$ $\exists$ una ε-transición $c_{i0}, c_{i1}, ..., c_{iL}; B_{i0}, B_{i1}, ..., B_{i(L-1)}$ de u_i a v_i contenida en Q_i^*, donde L es como al inicio de la prueba. Como el gap entre Q_i^* y H_i^* es angosto, las bolas B_{in} son muy pequeñas con respecto a $F_n^{-1}(D_i^*)$, y la proporción viene dada por la inecuación que define α (cuyo significado geométrico se verá pronto). Observar que las tres primeras condiciones del teorema 2.1 se cumplen (además de la condición en cuanto al orden), pero la cuarta no, pues no hay motivos para suponer que estas transiciones son disjuntas dos a dos.

Definición 2.7. A las $l+1$ bolas $B_{00}, B_{10}, ..., B_{l0}$ incluídas en $3H_0 \subset V_0$ les llamamos *bolas básicas* en V_0. Cada bola básica B_{i0} contiene a c_{i0} y a $T_1(c_{i1})$ en su ε-núcleo. A estos $l+1$ pares les llamamos *puntos básicos* en V_0 (recordar que $c_{i0} = v_i$).

Sean b_i y r_i el centro y el radio de B_{i0} $\forall\ i \in \{0, 1, ..., l\}$. Se consideran las $2N^* + 3$ bolas $B(b_i, (\frac{3}{\varepsilon})^n r_i)$, $1 \leq n \leq 2N^* + 3$ del mismo centro b_i. La mayor de ellas aún está en D_i^*, por el teorema 2.2 y la elección de α. De hecho, la inecuación que define α dice que el gap entre H_i^* y $(\frac{1}{\alpha})H_i^*$ es tan pequeño que, si tomamos una bola B, contenida en $(\frac{1}{\alpha})H_i^*$, y tan pequeña que pueda insertarse (mediante una traslación) en el gap, y la engordamos $2N^*+3$ veces por $\frac{3}{\varepsilon}$, no nos salimos de $2H_i^*$.

Observar que cada D_i^* contiene a lo sumo $2N^*+2$ puntos básicos, pues cada D_i^* intersecta a lo sumo N^* de los otros D_j^*, y tanto c_{j0} como $T_1(c_{j1})$ están en $\varepsilon B_{j0} \subset Q_j^* \subset D_j^* \Rightarrow$ Existe una de estas $2N^*+3$ bolas, llamémosle β_i, tal que $\beta_i - (\frac{\varepsilon}{3})\beta_i$ no contiene puntos básicos.

Definición 2.8. Sea $J_i = \beta_i/3$, llamamos a J_i *bola prejumbo* en V_0 asociada a B_{i0}.

Afirmación 1. *Dos bolas prejumbo son disjuntas, o el ε-núcleo de una contiene todos los puntos básicos contenidos en la otra.*

Demostración. Es directo de la definición: sean J_i, J_j dos bolas prejumbo, y supongamos que el radio de J_i es menor o igual que el radio de J_j. Si $J_i \cap J_j \neq \emptyset \Rightarrow J_i \subset \beta_j$ $\Rightarrow$ Todos los puntos básicos de J_i están en β_j, pero entonces están en $(\frac{\varepsilon}{3})\beta_j = \varepsilon J_j$. □

Definición 2.9. Una familia de bolas prejumbo se dice *regular* si $\forall\, i \in \{0,1,...,l\}\ \exists\, J(i)$ en la familia tal que el par de puntos básicos c_{i0} y $T_1(c_{i1})$ están contenidos en $\varepsilon J(i)$.

Observar que la familia de todas las bolas prejumbo $J_0, J_1, ..., J_l$ es regular, pues cada par de puntos básicos está contenido en el ε-núcleo de una bola básica, que está contenida en el ε-núcleo de una bola prejumbo.

Afirmación 2. *Existe una familia regular de bolas prejumbo $J_{i_1}, J_{i_2}, ..., J_{i_d}$ dos a dos disjuntas.*

Demostración. Si las bolas prejumbo son disjuntas dos a dos ya está. Sino, por la afirmación 1, existe una bola prejumbo, digamos J_l, tal que todos los puntos básicos contenidos en J_l están contenidos en el ε-núcleo de alguna otra bola prejumbo. En este caso, eliminamos J_l de la familia (observar que no eliminamos ninguna otra bola prejumbo, aún si sus puntos básicos están contenidos en J_l. Por ejemplo, J_l y J_{l-1} podrían cada una contener los puntos básicos de la otra, y no intersectar ninguna otra bola prejumbo. En este caso, claramente, no queremos eliminar ambas).

Ahora la familia sigue siendo regular, y razonamos inductivamente hasta que todas sean disjuntas dos a dos. □

Definición 2.10. De ahora en adelante, fijamos una familia regular de bolas prejumbo disjuntas dos a dos y les llamamos *bolas jumbo* en V_0.

Claramente, cada par de puntos básicos c_{i0} y $T_1(c_{i1})$ en V_0 está contenido en el ε-núcleo de una *única* bola jumbo en V_0. Observar además, que todas las bolas jumbo definidas en V_0 están contenidas en $\mathrm{int}(3H_0)$.

Paso 3: Un proceso combinatorio

En este paso combinamos transiciones, cuyos puntos básicos en V_0 están contenidos en la misma bola jumbo, en una sola ε-transición, y reajustamos los candidatos a par de conexión y pares de corte. Como el proceso lo haremos luego en los restantes V_n, lo describimos en general:

Sean $[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_k, b_k]$ k intervalos cerrados disjuntos en X, con el siguiente orden:

$$x_1 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq ... \leq a_k \leq b_k \leq y_1$$

siendo X el conjunto del teorema 2.1. Supongamos que para cada $i \in \{1, ..., k\}$ tenemos una ε-transición $p_{i0}, p_{i1}, ..., p_{iL}; P_{i0}, P_{i1}, ..., P_{i(L-1)}$ de a_i a b_i de largo L (aquí las bolas P_{in} son cualquier bola en V_n, ni básica ni jumbo). Sea $n \in \{0, ..., L-1\}$, y sea J una bola en V_n cuyo ε-núcleo εJ contiene los dos puntos $T_{n+1}(p_{1(n+1)})$ y p_{kn}. Combinamos estas dos transiciones en una sola de la siguiente manera: Usamos primero las ε-transiciones de índice i desde L hasta $n+1$. Cuando llegamos al punto $T_{n+1}(p_{1(n+1)})$ en V_n, en lugar de saltar a p_{1n} en P_{1n}, saltamos a p_{kn} en J. Luego seguimos con las ε-transiciones de índice $i = k$, es decir, construimos una ε-transición:

$$p_{k0}, ..., p_{k(n-1)}, p_{kn}, p_{1(n+1)}, ..., p_{1L}; P_{k0}, ..., P_{k(n-1)}, J, P_{1(n+1)}, ..., P_{1(L-1)}$$

desde a_1 hasta b_k, y eliminamos el intervalo abierto (a_1, b_k), los pares y sus transiciones. Llamamos a este proceso *combinación de transiciones y ajuste de pares vía* $\{a_1, b_k\}$.

Realicemos este proceso en V_0. Empezamos con la primer bola jumbo J_{i_1}. Su ε-núcleo εJ_{i_1} contiene algunos puntos básicos, pero $J_{i_1} - \varepsilon J_{i_1}$ ninguno. Sean s_1 y l_1 los índices del menor y mayor punto básico contenido en εJ_{i_1} respectivamente. Por la regularidad, los puntos básicos en εJ_{i_1} aparecen en pares, en particular, los puntos $T_1(c_{s_1,1})$ y $c_{l_1,0}$ están en εJ_{i_1}. Esto da una ε-traslación de $T_1(c_{s_1,1})$ a $c_{l_1,0}$ dentro de J_{i_1} en V_0, y se obtiene la nueva ε-transición:

$$c_{l_1,0}, c_{s_1,1}, c_{s_1,2}, ..., c_{s_1,L}; J_{i_1}, B_{s_1,1}, B_{s_1,2}, ..., B_{s_1,L-1}.$$

Esta nueva transición es de u_{s_1} a v_{l_1}. Utiliza las ε-traslaciones originales en $V_n, n \geq 1$, pero una nueva ε-traslación con una bola jumbo en V_0. Como dijimos, tomamos $\{u_{s_1}, v_{l_1}\}$ como un nuevo candidato, y eliminamos todos los pares de índice i, con $s_1 \leq i \leq l_1$, junto a todas sus respectivas transiciones (observar que al eliminar todos estos pares, y sus respectivas transiciones, podemos haber eliminado, al mismo tiempo, transiciones asociadas con otras bolas jumbo que no son J_{i_1}, pues la inecuación $s_1 \leq i \leq l_1$ refleja el orden en X pero no en V_0).

Ahora miramos la segunda bola jumbo en V_0, J_{i_2}. Del mismo modo, combinamos aquellas transiciones cuyos puntos básicos en V_0 están contenidos en J_{i_2} en una sola transición, y ajustamos los pares en X del mismo modo. Ahora miramos J_{i_3}, etc. Así obtenemos una colección de puentes en X disjuntos dos a dos, junto con sus ε-transiciones de largo L, cada una usando una bola jumbo en V_0 (el número de transiciones puede ser igual a d (que es la cantidad de bolas jumbo en V_0) o menor que d, pues al trabajar en J_{i_1}, como dijimos, podemos haber eliminado transiciones asociadas con otras bolas jumbo). Esto termina nuestro trabajo en V_0.

Paso 4: Los otros V_n, $n \geq 1$, la elección final de los pares

Trabajamos ahora en V_1. Por bolas básicas y puntos básicos en V_1 nos referimos a las bolas B_{i1} y a los puntos c_{i1} y $T_2(c_{i2})$. Estas bolas básicas están contenidas en el paralelepipedo $F^{-1}(3H_0)$. Del mismo modo, definimos bolas prejumbo y bolas jumbo en V_1, combinamos todas las transiciones asociadas a una bola jumbo en V_1 en una nueva y única transición (observar que cada una de estas transiciones tiene exactamente una bola jumbo en V_0), y ajustamos los pares en V_0 de acuerdo a esto (como hicimos en V_0). La única diferencia es que las cajas D_i^*, Q_i^* y H_i^* en V_0 resultan ser paralelepipedos $F_1^{-1}(D_i^*)$, $F_1^{-1}(Q_i^*)$ y $F_1^{-1}(H_i^*)$ en V_1, pero obviamente los paralelepipedos $F_1^{-1}(D_i^*)$ se siguen solapando entre sí con multiplicidad no mayor de N^*, como las D_i^* hacían en

V_0. Luego, cada $F_1^{-1}(D_i^*)$ contiene a lo sumo $2N^*+2$ puntos básicos, pues $c_{j_1}, T_2(c_{j_2}) \in F_1^{-1}(Q_i^*) \subset F_1^{-1}(D_i^*)$. Más aún, cuando consideramos las $2N^*+3$ bolas concéntricas alrededor de una bola básica B_{i1} (que está contenida en $F_1^{-1}(Q_i^*)$ y es tan pequeña que puede ser insertada en el gap entre $F_1^{-1}(Q_i^*)$ y $F_1^{-1}(H_i^*)$ por el teorema 2.2), la mayor de estas aún está contenida en $F_1^{-1}(D_i^*)$ por la elección de α. Los argumentos siguen igual, y obtenemos un único par de conexión y algunos pares de corte en V_0, junto con sus ε-transiciones de largo L, cada una de las cuales utiliza dos bolas jumbo en V_0 y V_1.

Razonando inductivamente en $V_2, V_3, ..., V_L$ obtenemos finalmente un único par de conexión x, y y algunos pares de corte p_i, q_i en V_0 tales que las bolas utilizadas para las ε-transiciones son todas bolas jumbo, todas las transiciones están contenidas en $3H_0$ y por lo tanto en $B(x_s, \sigma \|x_s - y_t\|)$. Las cuatro condiciones del teorema 2.1 se cumplen. $\square$

Capítulo 3

Demostración del teorema 1.1

3.1. Un C^1 connecting lemma para endomorfismos

Mediante un proceso de linealización utilizamos el teorema 2.1 para probar el teorema 1.1:

Teorema. *Sea $f \in \mathrm{End}^1(M)$ y sea $z \in M$ tal que la órbita futura de z no contiene puntos críticos ni periódicos. Dado $\mathcal{U}$ entorno de f en la topología C^1 existen $\rho > 1$, $L \in \mathbb{N}$ y $\delta_0 > 0$ con la siguiente propiedad: supongamos dados $0 < \delta \leq \delta_0$ y puntos $p, q \notin \Delta(\delta) = \bigcup_{n=1}^{n=L} f^n(B(z, \delta))$ que verifican:*

- *Una preórbita de q intersecta la bola $B(z, \delta/\rho)$ antes de q, i.e. existe $b > L$ tal que $f^{-b}(q) \cap B(z, \delta/\rho) \neq \emptyset$.*
- *La órbita futura de p intersecta la bola $B(z, \delta/\rho)$, i.e. existe $a \geq 0$ tal que $f^a(p) \in B(z, \delta/\rho)$.*
- *Dados $j \in \{1, ..., a\}$ y $n \in \{1, ..., L\}$ la condición $f^j(p) \in f^n(B(z, \delta))$ implica que $f^{j-1}(p) \in f^{n-1}(B(z, \delta))$.*

Entonces existe $g \in \mathcal{U}$ tal que q está en la órbita futura de p por g, y además, $g = f$ afuera de $\Delta(\delta)$.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ entorno de f en la topología C^1, tomamos $\eta > 0$ / $B(f, \eta) \subset \mathcal{U}$. Además, tomamos $r > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que si t es una ε-traslación soportada en una bola de radio r, $t \circ g \in B(g, \eta/2)$ $\forall$ $g \in B(f, 1)$, y además r debe verificar que $B(f^j(z), r)$ en M y $B(0, r)$ en $T_{f^j(z)}M$ son difeomorfas por el mapa exponencial en $f^j(z)$ $\forall$ $j \in \mathbb{N}$.

Consideramos $\forall$ $n \geq 0, V_n = T_{f^n(z)}M$, y $\forall$ $n \geq 1, T_n = (d_{f^{n-1}(z)}f)^{-1}$, y aplicamos el teorema 2.1 a la sucesión de isomorfismos $\{T_n\}_{n \geq 1}$ y al número $\varepsilon > 0$ considerado (recordar que por hipótesis no hay puntos críticos en la órbita futura de z). Se obtienen $\sigma > 1$ y $L \in \mathbb{N}$. Podemos asumir, por simplicidad, que la métrica Riemanniana de M es la inducida por un encaje en algún $\mathbb{R}^k$ (esto siempre es posible por el teorema de Nash, ver [N]). Fijamos $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeño para que se satisfagan las siguientes cinco condiciones:

1. $\{B(z, \delta_0), f(B(z, \delta_0)), ..., f^L(B(z, \delta_0))\}$ son disjuntas dos a dos (recordar que $z \notin$ PrePer(f)), y cada una está contenida en una bola de radio r centrada en $f^j(z)$.

2. La restricción de f a $f^j(B(z, \delta_0))$ es un difeomorfismo sobre $f^{j+1}(B(z, \delta_0))$ $\forall$ $j \in \{0, ..., L-1\}$. En particular, $\Delta(\delta_0) = \bigcup_{n=1}^{n=L} f^n(B(z, \delta_0))$ no contiene puntos críticos (observar que S_f es compacto pues f es de clase C^1).

3. $\left\|\exp_{f^j(z)}(v) - v\right\| < \eta/8$ si $\|v\| < \delta_0$ y $j \in \{0, ..., L\}$.

4. Si $\|v\| < \delta_0$ en T_zM y $j \in \{1, ..., L\}$ se verifica que:
$$\left\|(d_z f^j - (\exp_{f^j(z)}^{-1} \circ f^j \circ \exp_z))(v)\right\| < (\eta/8)\|v\|$$

5. Si $\|v\| < \delta_0$ en T_zM, $w \in T_zM$ y $j \in \{1, ..., L\}$ se verifica que:
$$\left\|(d_z f^j - (d_{f^j(\exp_z(v))} \exp_{f^j(z)}^{-1} \circ d_{\exp_z(v)} f^j \circ d_v \exp_z))(w)\right\| < \eta/8$$

El hecho de que podemos exigir las últimas dos condiciones surge de que $\forall$ $x \in M$, si $v \to 0$ en T_xM, entonces $d_v \exp_x \to Id_{T_xM}$ (ver [DoC], capítulo 3).

Fijamos $0 < \delta \leq \delta_0$. Queremos construir una linealización g de f / $g \in B(f, \eta/2) \subset$ End$^1(M)$, $g = f$ afuera de $\Delta(\delta)$, g coincide (módulo el mapa exponencial) con las derivadas de f en $\Delta(\delta/2)$, y además, $g^L = f^L$ en $(B(z, \delta))$. Sea $\alpha : T_zM \to [0, 1]$ un chichón C^∞ / $\alpha = 1$ en $B(0, \frac{\delta}{2})$, $\alpha = 0$ en $B(0, \delta)^c$, y además, $\forall$ $v \in T_zM$, $\|\nabla\alpha(v)\| < \frac{3}{\delta}$, es decir, el tamaño C^1 de α es menor que $\frac{3}{\delta}$ (suponiendo por supuesto $\delta \in (0, 3)$).

$\forall\ j \in \{1, ..., L\}$ sea $\widehat{F}_j : B(0,\delta) \subset T_zM \to T_{f^j(z)}M$ /

$$\widehat{F}_j(v) = \alpha(v)(d_zf^j)(v) + (1-\alpha(v))(\exp^{-1}_{f^j(z)} \circ f^j \circ \exp_z)(v)$$

Definimos además $\widehat{F}_0 = Id_{T_zM}$. $\forall\ j \in \{1, ..., L\}$ acotamos la distancia C^0 entre $\widehat{F}_j$ y $\exp^{-1}_{f^j(z)} \circ f^j \circ \exp_z$ restrictas a la bola $B(0,\delta)$:

$$\left\|\widehat{F}_j(v) - \exp^{-1}_{f^j(z)} \circ f^j \circ \exp_z(v)\right\| = \left\|\alpha(v)((d_zf^j)(v) - (\exp^{-1}_{f^j(z)} \circ f^j \circ \exp_z)(v))\right\| \leq \left\|(d_zf^j)(v) - (\exp^{-1}_{f^j(z)} \circ f^j \circ \exp_z)(v)\right\| \leq \eta/8 < \eta/2 \text{ pues } \|v\| < \delta.$$

Observar ahora que $\forall\ v \in B(0,\delta)$, $w \in T_zM$:

$$d_v(\widehat{F}_j - \exp^{-1}_{f^j(z)} \circ f^j \circ \exp_z)(w) = d_v\widehat{F}_j(w) - (d_{f^j(\exp_z(v))}\exp^{-1}_{f^j(z)} \circ d_{\exp_z(v)}f^j \circ d_v\exp_z)(w) = \langle\nabla\alpha(v), w\rangle(d_zf^j - (\exp^{-1}_{f^j(z)} \circ f^j \circ \exp_z))(v) + \alpha(v)(d_zf^j - (d_{f^j(\exp_z(v))}\exp^{-1}_{f^j(z)} \circ d_{\exp_z(v)}f^j \circ d_v\exp_z))(w)$$

Luego:

$$\left\|d_v(\widehat{F}_j - \exp^{-1}_{f^j(z)} \circ f^j \circ \exp_z)(w)\right\| \leq \|\nabla\alpha(v)\|\,\|w\|\left\|(d_zf^j - (\exp^{-1}_{f^j(z)} \circ f^j \circ \exp_z))(v)\right\| + \alpha(v)\left\|(d_zf^j - (d_{f^j(\exp_z(v))}\exp^{-1}_{f^j(z)} \circ d_{\exp_z(v)}f^j \circ d_v\exp_z))(w)\right\| < (\tfrac{3}{\delta})\delta(\tfrac{\eta}{8}) + \tfrac{\eta}{8} < \tfrac{\eta}{2}$$

Ahora $\forall\ j \in \{0, ..., L\}$ sea $F_j : M \to M$ /

$$F_j = \exp_{f^j(z)} \circ \widehat{F}_j \circ \exp^{-1}_z$$

Es decir, $F_j|_{B(z,\delta)^c} = f^j|_{B(z,\delta)^c}$ y $F_j|_{B(z,\delta/2)} = \exp_{f^j(z)} \circ d_zf^j \circ \exp^{-1}_z|_{B(z,\delta/2)}$. Por las acotaciones anteriores y la condición 3., F_j es un endomorfismo de M en M cuya distancia C^1 a f^j es menor que $\eta/2$ $\forall\ j \in \{0, ..., L\}$. Más aún, F_j es un difeomorfismo local alrededor de z. Luego está bien definido el siguiente mapa $g : M \to M$:

$$g = \begin{cases} f^L \circ F^{-1}_{L-1} & \text{en } f^{L-1}(B(z,\delta)) \\ F_{j+1} \circ F^{-1}_j & \text{en } f^j(B(z,\delta))\ \forall\ j \in \{1, ..., L-2\} \\ F_1 & \text{en } B(z,\delta) \\ f & \text{fuera de } \{B(z,\delta), f(B(z,\delta)), ..., f^{L-1}(B(z,\delta))\} \end{cases}$$

Es claro que $g = f$ afuera de $\Delta(\delta)$, que g coincide (módulo el mapa exponencial) con las derivadas de f en $\Delta(\delta/2)$, y que $g^L = f^L$ en $B(z, \delta)$. Además, como $g = f$ afuera de $\Delta(\delta)$, sólo hay que calcular la distancia C^1 en los puntos que están a menos de δ del punto z, y en sus primeros L iterados hacia el futuro. Las acotaciones anteriores demuestran que $g \in B(f, \eta/2) \subset \mathrm{End}^1(M)$.

Por simplicidad, escribimos $g = f$ (observar que la condición $g^L = f^L$ en $B(z, \delta)$ asegura que las órbitas que entran al tubo $\Delta(\delta)$ salen de él por el mismo lugar luego de la perturbación). Definimos además $\rho = 8\sigma$.

Sean p y q como en el enunciado del teorema, con $f^a(p)$ en $B(z, \delta/\rho)$, para algún $a \geq 0$ y $f^{-b}(q) \cap B(z, \delta/\rho) \neq \emptyset$ para algún $b > L$. A los iterados de p desde p hasta $f^a(p)$ que están en $B(z, \delta/2)$ les llamamos $x_1, x_2, ..., x_s$. Debemos ser más delicados con los iterados de q: sea $y \in f^{-b}(q) \cap B(z, \delta/\rho)$, observar que cada elemento de:

$$\{y, f(y), ..., f^j(y), ..., f^{b-1}(y)\} \cap f^L(B(z, \delta/2))$$

tiene exactamente una preimagen por f^L en $B(z, \delta/2)$. A estas preimagenes les llamamos $y_1, y_2, ..., y_t$, indexando en forma decreciente, es decir, se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. $\forall\ i, j \in \{1, ..., s\}$ se verifica que si $i < j$ entonces x_j está en la órbita futura de x_i según f.

2. $\forall\ i, j \in \{1, ..., t\}$ se verifica que si $i < j$ entonces $f^L(y_i)$ está en la órbita futura de y_j según f.

Observar que, por la elección de ρ, $B(x_s, \sigma \|x_s - y_t\|) \subset B(z, \delta/2)$, pues si $x_s, y_t \in B(z, \delta/\rho) \Rightarrow \|x_s - y_t\| < \frac{2\delta}{\rho} = \frac{\delta}{4\sigma} \Rightarrow B(x_s, \sigma \|x_s - y_t\|) \subset B(x_s, \delta/4)$, y como $\sigma > 1$ y $\rho = 8\sigma$, $B(z, \delta/\rho) \subset B(z, \delta/8)$. Luego $B(x_s, \delta/4) \subset B(z, \delta/2)$. Observar además que $f^L(y_t)$ aún está en la órbita pasada de q (es por esto que exigimos que la órbita pasada de q intersecte la bola $B(z, \delta/\rho)$ antes de q, y es por esto que indexamos los iterados de q desde $f^{-1}(q)$ hasta $f^{-b}(q)$ y no desde el propio q). La directa aplicación del teorema 2.1 implica el teorema 1.1. $\square$

3.2. Un C^1 closing lemma para endomorfismos

Es claro que el teorema 1.1 implica de manera directa el C^1 connecting lemma de Hayashi pues sus hipótesis son mucho más débiles (apenas se pide que las órbitas a conectar visiten cierto entorno del punto z, sin ser necesario que acumulen en el punto). Obtenemos en esta sección un C^1 closing lemma para endomorfismos que implica el C^1 closing lemma de Pugh:

Teorema 3.1. *Sean $f \in \mathrm{End}^1(M)$ y $x \in \Omega(f)$ tal que la órbita futura de x no contiene puntos críticos ni periódicos. Existe g arbitrariamente cerca de f en la topología C^1 tal que $x \in \mathrm{Per}(g)$.*

Demostración. Dado $\mathcal{U}$ entorno de f en la topología C^1 queremos hallar $g \in \mathcal{U}$ / $x \in \mathrm{Per}(g)$. Sea $\eta > 0$ / $B(f,\eta) \subset \mathcal{U}$ y sean $r > 0$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeños tales que si t es una ε-traslación soportada en una bola de radio r, $t \circ g \circ t^{-1} \in B(g,\eta/2)$ $\forall$ $g \in B(f,\eta)$. Sean $\rho > 1$, $L \in \mathbb{N}$ y $\delta_0 > 0$ según el teorema 1.1 aplicado al punto x y al abierto $B(f,\eta/2)$. Sea $\delta > 0$ / $\delta \leq \delta_0$ y $\delta < \varepsilon r$. Como $x \in \Omega(f)$ existen $y \in B(x,\delta/\rho)$ y $n \geq 1$ / $f^n(y) \in B(x,\delta/\rho)$. Aplicamos el teorema 1.1 con $p = q = f^n(y)$ y cerramos la órbita de y (es decir, $y \in \mathrm{Per}(g)$, siendo g la obtenida en el teorema). Por simplicidad escribimos $g = f$. Ahora bien, como x e y están en el ε-núcleo de una bola de radio r, $\exists$ t ε-traslación / $t(y) = x$, y además, si $g : M \to M$ es tal que $g = t \circ f \circ t^{-1} \Rightarrow g \in B(f,\eta) \subset \mathcal{U}$ y $x \in \mathrm{Per}(g)$. $\square$

Capítulo 4

El Teorema de Densidad de Pugh

En este capítulo daremos dos pruebas del Teorema de Densidad para difeomorfismos que fuera demostrado por Charles Pugh en [Pu2]:

Teorema 4.1 (General density theorem, Pugh, 1967)**.** *Genéricamente en los difeomorfismos los puntos periódicos son densos en el no errante, es decir,* $\exists\ \mathcal{D} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ *residual /* $\forall\ f \in \mathcal{D}$ *se cumple que* $\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$*.*

La primer prueba que damos es la original, y por lo tanto más laboriosa que la segunda. Su exposición se justifica pues las técnicas desarrolladas han sido útiles en otros contextos. Buscamos entender las ideas para extenderlas al caso no invertible.

4.1. Preliminares topológicos

Sea (X, d) un espacio métrico compacto, y sea $F(X)$ la familia de cerrados no vacíos de X, definimos la *distancia de Hausdorff* en $F(X)$:

Definición 4.1.

$$d_H(A, B) = \max\{d_A(B), d_B(A)\}\ \forall\ A, B \in F(X)$$

Siendo

$$d_A(B) = \max_{b\in B}\{\min_{a\in A}\{d(a, b)\}\}$$

Cabe destacar que con esta distancia $F(X)$ es compacto (una sencilla prueba de esto puede encontrarse en [Hau] o en [KH]). Observar además que si A, B y C son cerrados no vacíos en X, se cumple la desigualdad triangular: $d_A(B) \leq d_A(C) + d_C(B)$.

Definición 4.2. Sea Y un espacio métrico, decimos que $\varphi : Y \to F(X)$ es *semicontinua inferiormente* en $y \in Y$ si $y_n \to y$ en Y implica $d_{\varphi(y_n)}(\varphi(y)) \to 0$

En este capítulo y el siguiente haremos uso del siguiente resultado topológico:

Teorema 4.2. *Si φ es semicontinua inferiormente en Y es continua en un residual de Y.*

Demostración. $\forall\ k \geq 1$ definimos

$$C_k = \{y \in Y \ / \ sup\ \{\alpha \geq 0 \ / \ \exists\ \{y_n\} \subset Y \text{ con } y_n \to y \text{ y } d_{\varphi(y)}(\varphi(y_n)) \to \alpha\} \geq \tfrac{1}{k}\}$$

Basta demostrar que C_k es cerrado con interior vacío $\forall\ k \geq 1$. Veamos primero que C_k es cerrado: Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_k \ / \ \{z_n\} \to z$ en Y. Entonces $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ \{y_l^n\}_{l\in\mathbb{N}} \to z_n$ tal que $d_{\varphi(z_n)}(\varphi(y_l^n))$ tiende a un valor $\geq \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}$ cuando $l \to +\infty$. Construimos una sucesión $\{y_{l_n}^n\}$ convergente a z tomando, para cada n, un elemento de $\{y_l^n\}_{l\in\mathbb{N}}$ que verifique $d_{\varphi(z_n)}(\varphi(y_{l_n}^n)) \geq \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$ (obviamente, elegimos los $\{y_l^n\}_{l\in\mathbb{N}}$ en forma creciente: si $n > m$, $l_n > l_m$). Aplicando la desigualdad triangular de $d_A(B)$ se obtiene que:

$$d_{\varphi(z)}(\varphi(y_{l_n}^n)) \geq d_{\varphi(z_n)}(\varphi(y_{l_n}^n)) - d_{\varphi(z_n)}(\varphi(z)) \geq \tfrac{1}{k} - (\tfrac{1}{n} + d_{\varphi(z_n)}(\varphi(z))) \to \tfrac{1}{k} \text{ si } n \to +\infty$$

pues φ es semicontinua inferiormente en z. Luego $z \in C_k$, es decir, C_k es cerrado.

Supongamos ahora que $\exists\ U$ abierto en Y contenido en C_k. Fijamos $\varepsilon > 0$ y construimos inductivamente una sucesión $\{y_n\} \subset U$ que verifica $d_{\varphi(y_n)}(\varphi(y_{n-1})) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ pero $d_{\varphi(y_{n-1})}(\varphi(y_n)) > \frac{1}{k} - \varepsilon$ del siguiente modo: Tomamos $y_1 \in U$ cualquiera. Supongamos que tenemos elegido hasta y_{n-1} con $n > 1$. Por la semicontinuidad inferior de φ existe una bola B centrada en y_{n-1} y contenida en U tal que $d_{\varphi(x)}(\varphi(y_{n-1})) < \frac{\varepsilon}{2^n}\ \forall\ x \in B$. Como $y_{n-1} \in C_k\ \exists\ x \in B \ / \ d_{\varphi(y_{n-1})}(\varphi(x)) > \frac{1}{k} - \varepsilon$. Definimos $y_n = x$.

Observar que, por la primer propiedad, si $m < n$ entonces

$$d_{\varphi(y_n)}(\varphi(y_m)) < \varepsilon \sum_{l=m+1}^{l=n} \frac{1}{2^l} < \varepsilon$$

Nuevamente por la triangular,

$$d_{\varphi(y_m)}(\varphi(y_n)) \geq d_{\varphi(y_{n-1})}(\varphi(y_n)) - d_{\varphi(y_{n-1})}(\varphi(y_m)) > \frac{1}{k} - 2\varepsilon$$

Pero entonces $d_H(\varphi(y_m), \varphi(y_n)) > \frac{1}{k} - 2\varepsilon$ si $m \neq n$. Tomando $\varepsilon < \frac{1}{2k(k+1)}$ obtenemos una sucesión de puntos aislados en $F(X)$, pues $d_H(\varphi(y_m), \varphi(y_n)) > \frac{1}{k+1}$ si $m \neq n$. Esto es absurdo pues $F(X)$ es compacto. Luego C_k tiene interior vacío. □

4.2. Una prueba del Teorema de Densidad

Supongamos que se tiene un espacio métrico compacto M y un espacio $\mathcal{X}$ de funciones continuas en M (supongamos además que $\mathcal{X}$ es al menos un espacio de Baire), y se desea probar que cierta propiedad es genérica en $\mathcal{X}$. Una estrategia posible es definir un mapa Γ que asigna a cada $f \in \mathcal{X}$ cierto conjunto $\Gamma(f)$ compacto en M (que habrá que elegir convenientemente según el caso). Como acabamos de ver, si este mapa Γ es semicontinuo inferiormente (aquí dotamos a los compactos de M con la métrica de Hausdorff) es continuo en un residual de $\mathcal{X}$. Debemos probar ahora que si la propiedad no se cumple en cierta $f \in \mathcal{X}$ entonces Γ no es continua en f, para ello podemos aplicar algún lema de conexión de órbitas que permita hacer explotar la imagen de f por Γ y negar así la continuidad de Γ en f. Esta fue la estrategia utilizada por Pugh en [Pu2] para demostrar el teorema de densidad a partir del C^1 closing lemma. Veamos la prueba.

Demostración. Sea el mapa $\Gamma : \mathrm{Diff}^1(M) \to F(M)$ / $\Gamma(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$ $\forall f \in \mathrm{Diff}^1(M)$. Afirmamos que si Γ es continua en f, $\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$: Supongamos que $\exists\, x \in M$ / $x \in \Omega(f) - \overline{\mathrm{Per}(f)}$, y sea $\varepsilon > 0$ / $\varepsilon < d(x, \overline{\mathrm{Per}(f)})$. Por el C^1 closing lemma $\forall\, \delta > 0\ \exists\, g_\delta \in \mathrm{Diff}^1(M)$ / la distancia C^1 entre f y g_δ es menor que δ y $x \in \mathrm{Per}(g_\delta) \Rightarrow x \in \Gamma(g_\delta)$ $\Rightarrow d_H(\Gamma(f), \Gamma(g_\delta)) > \varepsilon \Rightarrow \Gamma$ no es continua en f. Luego $\Omega(f) - \overline{\mathrm{Per}(f)} = \emptyset$, y como $\overline{\mathrm{Per}(f)} \subset \Omega(f)$ se obtiene la afirmación.

Denotamos por $\mathcal{KS}$ al residual dado por Kupka-Smale (ver apéndice). Observar ahora que Γ es semicontinua inferiormente en $\mathcal{KS}$: si $f_n \to f$ en la topología C^1 con $f \in \mathcal{KS}$, $\mathrm{Per}(f_n)$ debe tener puntos cercanos a cada punto de $\mathrm{Per}(f)$ por la hiperbolicidad de estos últimos (no es posible asegurar la continuidad pues $\mathrm{Per}(f_n)$ puede tener además puntos distantes a $\mathrm{Per}(f)$). Obtenemos así un residual en $\mathcal{KS}$ donde Γ es continua, pero como un residual de un residual también es residual, Γ es continua en un residual de $\mathrm{Diff}^1(M)$ y se obtiene el Teorema de Densidad. $\square$

4.3. Otra prueba

En esta sección damos una prueba más sencilla del Teorema de Densidad en la cual no utilizamos ni la métrica de Hausdorff, ni la semicontinuidad inferior, ni el teorema de Kupka-Smale. Para ello veamos primero que siempre podemos transformar un punto periódico en hiperbólico con una perturbación C^1 arbitrariamente pequeña.

Lema 4.1. *Sean $f \in \mathrm{End}^1(M)$ y p un punto periódico de f. Dado $\mathcal{U}$ entorno de f en la topología C^1 $\exists\ g \in \mathcal{U}$ tal que p es un punto periódico hiperbólico de g (y de igual período que para f).*

Demostración. Sea $\varphi : V \to U$ carta local alrededor de p / $\varphi(0) = p$ (aquí V es un entorno del origen en $\mathbb{R}^m$ y U es un entorno de p en M). Sea $r > 0$ suficientemente pequeño para que $B(0,r) \subset V$, y además, $\forall\ 1 \leq i < n$, $f^i(\varphi(B(0,r))) \cap \varphi(B(0,r)) = \emptyset$, donde n es el período de p para f. Sea $\alpha : \mathbb{R}^m \to [0,1]$ un chichón C^∞ tal que $\alpha(x) = 1$ si $\|x\| \leq \frac{r}{2}$, y $\alpha(x) = 0$ si $\|x\| \geq r$.

Dado $\varepsilon > 0$ definimos $g_\varepsilon : M \to M$ del siguiente modo: si $q \notin \varphi(B(0,r))$, $g_\varepsilon(q) = f(q)$, y si $q \in \varphi(B(0,r))$, es decir $q = \varphi(x)$ para un único $x \in B(0,r)$, entonces

$$g_\varepsilon(q) = f(\varphi(x + \varepsilon\alpha(x)x))$$

Es claro que p es un punto periódico para g_ε y de igual período que para f. Observar además que en un entorno del origen en $\mathbb{R}^m$,

$$(\varphi^{-1} \circ g_\varepsilon^n \circ \varphi)(x) = (\varphi^{-1} \circ f^n \circ \varphi)(x + \varepsilon\alpha(x)x)$$

Luego,

$$d_0(\varphi^{-1} \circ g_\varepsilon^n \circ \varphi) = d_0(\varphi^{-1} \circ f^n \circ \varphi) \circ d_0(x + \varepsilon\alpha(x)x)$$

Como $\alpha(0) = 1$ y $\nabla\alpha(0) = 0$ (pues α es constante en un entorno del origen) se tiene que:

$$d_0(\varphi^{-1} \circ g_\varepsilon^n \circ \varphi) = d_0(\varphi^{-1} \circ f^n \circ \varphi) \circ (1 + \varepsilon)Id$$

Luego λ es valor propio de $d_p f^n$ si y sólo si $(1+\varepsilon)\lambda$ es valor propio de $d_p g_\varepsilon^n$. En particular, p es hiperbólico para g_ε para valores de ε suficientemente cercanos a cero, y como claramente $g_\varepsilon \to f$ C^1 cuando $\varepsilon \to 0$ se obtiene el lema. $\square$

Veamos ahora la segunda prueba del Teorema de Densidad.

Demostración. Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base numerable de M. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ consideramos:

$$A_n = \{f \in \mathrm{Diff}^1(M)\ /\ \mathrm{Per}_h(f) \cap U_n \neq \emptyset\}$$

siendo $\mathrm{Per}_h(f)$ el conjunto de los puntos periódicos hiperbólicos de f, y consideramos $B_n = \mathrm{Diff}^1(M) - \overline{A_n}$. Por la estabilidad de los puntos periódicos hiperbólicos, A_n es abierto, y entonces $A_n \cup B_n$ es abierto y denso $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Luego $\mathcal{D} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cup B_n)$ es residual en $\mathrm{Diff}^1(M)$. Veamos que si $f \in \mathcal{D}$ se tiene que $\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$:

Supongamos que $\exists\ x \in M\ /\ x \in \Omega(f) - \overline{\mathrm{Per}(f)}$, y sea $n \in \mathbb{N}\ /\ x \in U_n$ y $U_n \cap \overline{\mathrm{Per}(f)} = \emptyset$ (en particular $f \notin A_n$). Por el C^1 closing lemma $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ g_\varepsilon \in \mathrm{Diff}^1(M)$ / la distancia C^1 entre f y g_ε es menor que ε y $x \in \mathrm{Per}(g_\varepsilon)$. Del lema 4.1 surge que podemos perturbar a g_ε para transformar a x en un punto periódico hiperbólico, manteniendo su distancia C^1 a f menor que ε. Esto implica que $g_\varepsilon \in A_n$ y por lo tanto $f \notin B_n$, luego $f \notin A_n \cup B_n$ lo cual es absurdo pues $f \in \mathcal{D}$. $\square$

Capítulo 5

Clases homoclínicas

5.1. Introducción

En este capítulo M^m denotará una variedad Riemanniana, compacta, conexa y sin borde, y $\mathrm{Diff}^1(M)$ denotará el conjunto de todos los difeomorfismos de clase C^1 de la variedad en sí misma, equipado con la topología C^1. Sea p un punto periódico para f de período $\Pi_f(p)$, recordemos que p es *hiperbólico* si el espectro de $d_p f^{\Pi_f(p)}$ no intersecta el círculo unidad (es decir, $d_p f^{\Pi_f(p)}$ es un isomorfismo lineal de T_pM en sí mismo al cual le pedimos que no tenga valores propios de módulo uno). Decimos que la *variedad estable* de p es el conjunto:

$$W^s(p) = \{x \in M \ / \ d(f^n(x), f^n(p)) \to 0 \text{ si } n \to +\infty\}$$

mientras que la *variedad inestable* de p es el conjunto:

$$W^u(p) = \{x \in M \ / \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(p)) \to 0 \text{ si } n \to +\infty\}.$$

siendo d la distancia inducida en M por la métrica Riemanniana. Es bien sabido que estos conjuntos son de hecho subvariedades inmersas inyectivamente en M de clase C^1 (este es el teorema de la variedad estable (ver apéndice), es interesante observar que la definición de estos conjuntos es puramente dinámica y se tienen estas consecuencias topológicas). Los puntos de intersección transversal de $W^s(p)$ y $W^u(p)$ diferentes de p son llamados puntos *homoclínicos transversales* asociados a p, mientras que los puntos de intersección de la clausura de $W^s(p)$ y la clausura de $W^u(p)$ diferentes de p son llamados puntos *casi homoclínicos* asociados a p. Es fácil verificar, a partir de la hiperbolicidad de p y del teorema de la función implícita en espacios de Banach, que existe U entorno de p en M y $\mathcal{U}$ entorno de f en la topología C^1 tal que si $g \in \mathcal{U}$ entonces g tiene un único punto periódico $p(g)$ en U de igual período que p según f, y además este es hiperbólico. Mas aún, si $g \to f$ C^1 entonces $p(g) \to p$ en M (al punto $p(g)$ le llamamos *prolongación analítica* de p).

En 1988 Mañé (en [M1]) resolvió afirmativamente (bajo ciertas hipótesis) el siguiente problema: si f tiene un punto casi homoclínico asociado a p, ¿existe g arbitrariamente cerca de f en la topología C^1 tal que g admite un punto homoclínico asociado a $p(g)$?

En este mismo artículo Mañé planteó que si se pudiese asegurar que el punto homoclínico obtenido estaba cerca del punto casi homoclínico dado (las técnicas con las que resolvió el problema no daban ninguna noción acerca de dónde podría estar el punto obtenido), se podría deducir que, genéricamente en $\mathrm{Diff}^1(M)$, dado un punto periódico hiperbólico p, el conjunto de los puntos casi homoclínicos asociados a p es exactamente la clausura del conjunto de los puntos homoclínicos asociados a p. La herramienta de la cual no se disponia en aquel entonces era el C^1 connecting lemma demostrado en el año 1997 por Hayashi en [Hay] y refinado en el año 2000 por Wen y Xia en [WX2][1]:

Teorema (C^1 connecting lemma, Wen, Xia, 2000)**.** *Sea $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ y sea $z \notin \mathrm{Per}(f)$. Dado $\mathcal{U}$ entorno de f en la topología C^1 existen $\rho > 1$, $L \in \mathbb{N}$ y $\delta_0 > 0$ tales que: dados $0 < \delta \leq \delta_0$, $p, q \notin \Delta(\delta) = \bigcup_{n=1}^{n=L} f^{-n}(B(z,\delta))$, si la órbita futura de p intersecta la bola $B(z,\delta/\rho)$ luego de p (i.e. $\exists\ a > L \ /\ f^a(p) \in B(z,\delta/\rho)$), y la órbita pasada de q intersecta la misma bola (i.e. $\exists\ b \geq 0 \ /\ f^{-b}(q) \in B(z,\delta/\rho)$), entonces existe $g \in \mathcal{U}$ tal que q está en la órbita futura de p por g, y además, $g = f$ afuera de $\Delta(\delta)$.*

Sea $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ y sea p un punto periódico hiperbólico para f, denotamos por $H_f(p)$ a la clausura del conjunto de los puntos homoclínicos transversales asociados a p según f, y le llamamos *clase homoclínica* asociada a p según f. Observar que como

[1]observar que es la versión simétrica del teorema 1.1 para el caso invertible. Observar además que la tercer condición del teorema 1.1 es siempre cierta en el caso invertible y por eso no la enunciamos aquí.

una consecuencia del λ-lemma (ver apéndice) las clases homoclínicas son transitivas. Puede verse también (ver [PT]) que las clases homoclínicas son la clausura de sus puntos periódicos. A partir del C^1 connecting lemma Carballo, Morales y Pacifico obtienen (en [CMP] en el año 2003) varias propiedades genéricas de las clases homoclínicas (ver teorema 5.1 en la sección 5.3) que generalizan la propiedad planteada por Mañé. En este capítulo exponemos su trabajo.

Observación. De la demostración del teorema espectral de Smale (ver apéndice por el enunciado y ver [Sm] por la prueba) y del λ-lemma surge que las piezas básicas de un Axioma A son sus clases homoclínicas. De allí que para difeomorfismos Axioma A el teorema 5.1 no agrega nada. Ahora bien, como es sabido, los Axioma A no forman, en general, siquiera un conjunto denso en $\mathrm{Diff}^1(M)$ (ver [AS], en dimensión dos este asunto permanece abierto), lo cual dota de mucho interés al artículo de Carballo, Morales y Pacifico.

Finalmente, remarcamos que todas las propiedades demostradas en este capítulo para las clases homoclínicas de sistemas discretos genéricos son válidas para el caso continuo genérico y de hecho así están enunciadas en [CMP].

5.2. Estabilidad según Lyapunov

Decimos que un compacto $A \subset M$ es *estable Lyapunov* para f si dado U entorno abierto de A en M existe V entorno abierto de A en M tal que $f^n(V) \subset U$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Obviamente, todo estable Lyapunov es invariante a futuro en el sentido de que su imagen por f queda contenida en sí mismo.

Repasamos algunas propiedades elementales de los conjuntos estables Lyapunov:

Lema 5.1. *Sea Λ^+ un conjunto estable Lyapunov para f, se tiene que:*

1. *$\{x_n\} \subset M$ tal que $x_n \to x \in \Lambda^+$ y $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ tal que $f^{k_n}(x_n) \to y \in M$ implican $y \in \Lambda^+$ (observar que no se pide que $k_n \to +\infty$).*

2. *$W^u(\Lambda^+) \subset \Lambda^+$.*

3. *Si* Γ *es un conjunto transitivo para* f *(i. e.* $\exists\, x \in \Gamma$ *tal que* $\omega(x) = \Gamma$*) y* $\Gamma \cap \Lambda^+ \neq \emptyset$ *entonces* $\Gamma \subset \Lambda^+$.

Demostración.

1. Supongamos que $y \notin \Lambda^+$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B(y,\varepsilon)} \cap \Lambda^+ = \emptyset$. Definimos $U = M - \overline{B(y,\varepsilon)}$ y sea V según la definición de conjunto estable Lyapunov aplicada a Λ^+ y al abierto U. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V\ \forall\ n \geq n_0$, se tiene entonces que $f^{k_n}(x_n) \notin B(y,\varepsilon)\ \forall\ n \geq n_0$ lo cual es absurdo pues $f^{k_n}(x_n) \to y$.

2. Nuevamente por absurdo supongamos que existe $y \in W^u(\Lambda^+) - \Lambda^+$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B(y,\varepsilon)} \cap \Lambda^+ = \emptyset$. Definimos $U = M - \overline{B(y,\varepsilon)}$ y sea V según definición. Como $y \in W^u(\Lambda^+)\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-n_0}(y) \in V$, luego $f^n(y) \notin B(y,\varepsilon)\ \forall\ n \geq 0$ lo cual es absurdo cuando $n = 0$.

3. Análogo a los casos anteriores, supongamos que existe $y \in \Gamma - \Lambda^+$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B(y,\varepsilon)} \cap \Lambda^+ = \emptyset$. Definimos $U = M - \overline{B(y,\varepsilon)}$ y sea V según definición. Sea $x \in \Gamma$ tal que $\omega(x) = \Gamma$, en algún momento la órbita de x debe entrar en V, pero esto implica que luego no entrará jamás en $B(y,\varepsilon)$ lo cual viola la transitividad de Γ.

$\square$

Estamos interesados en compactos invariantes de la forma $\Lambda = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$, donde Λ^+ es estable Lyapunov para f y Λ^- es estable Lyapunov para f^{-1}. A tales compactos les llamaremos *neutrales* (observar que la condición de invariancia debe exigirse en la definición: la intersección de un estable Lyapunov para f con un estable Lyapunov para f^{-1} puede no ser invariante, basta considerar el flujo norte-sur en S^1 y tomar cualquier punto diferente de los polos).

A partir de la definición de conjunto neutral surgen inmediatamente las siguientes propiedades:

Lema 5.2. *Sea* Λ *un conjunto neutral para* f*, se tiene que:*

1. Λ *es saturado (i.e.* $W^s(\Lambda) \cap W^u(\Lambda) = \Lambda$*).*

2. *Λ es transitivo para f si y sólo si Λ es transitivo maximal para f. En particular conjuntos neutrales transitivos son iguales o disjuntos.*

Demostración.

1. Escribimos $\Lambda = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$ según la definición de conjunto neutral. Entonces:

$$W^u(\Lambda) \subset W^u(\Lambda^+) \subset \Lambda^+ \text{ por el lema 5.1.2.}$$

Análogamente:

$$W^s(\Lambda) \subset W^s(\Lambda^-) \subset \Lambda^- \text{ por el lema 5.1.2.}$$

Luego:

$$W^u(\Lambda) \cap W^s(\Lambda) \subset \Lambda^+ \cap \Lambda^- = \Lambda$$

Como Λ es invariante se obtiene la igualdad.

2. Esto es directo del lema 5.1.3 y de las definiciones.

□

Recordemos que un *cíclo* de f es un conjunto finito de compactos invariantes $\{\Lambda_0, \Lambda_1, ..., \Lambda_n\}$ tal que $\Lambda_0 = \Lambda_n$, $\Lambda_0, \Lambda_1, ..., \Lambda_{n-1}$ son disjuntos dos a dos, y $\forall\ i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ se tiene que:

$$(W^u(\Lambda_i) - \Lambda_i) \cap (W^s(\Lambda_{i+1}) - \Lambda_{i+1}) \neq \emptyset$$

Proposición 5.1. *f no admite cíclos formados por conjuntos neutrales y transitivos de f.*

Demostración. Supongamos, por absurdo, que $\{\Lambda_0, \Lambda_1, ..., \Lambda_n\}$ es un cíclo para f y cada Λ_i es neutral y transitivo. Escribimos $\Lambda_i = \Lambda_i^+ \cap \Lambda_i^-$ según definición de conjunto neutral y sea $x_i \in (W^u(\Lambda_i) - \Lambda_i) \cap (W^s(\Lambda_{i+1}) - \Lambda_{i+1})$ según definición de cíclo. Afirmamos que $\forall\ i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ se tiene que $x_i \in \Lambda_0^-$: de hecho, como $W^s(\Lambda_0) \subset \Lambda_0^-$, se tiene que $x_{n-1} \in \Lambda_0^-$. Demostramos la afirmación por inducción:

Supongamos que $x_i \in \Lambda_0^-$ para algún i. Como $x_i \in W^u(\Lambda_i)$ la invariancia hacia atrás de Λ_0^- implica que $\Lambda_0^- \cap \Lambda_i \supset \alpha(x_i) \neq \emptyset$. Por el lema 5.1.3 se tiene que $\Lambda_i \subset \Lambda_0^-$ pues Λ_i es transitivo. En particular $W^s(\Lambda_i) \subset \Lambda_0^-$ por el lema 5.1.2 aplicado a f^{-1}. Como $x_i \in W^s(\Lambda_i)$ se tiene que $x_{i-1} \in \Lambda_0^-$. Se obtiene la afirmación por inducción.

La afirmación implica entonces que $x_0 \in \Lambda_0^-$. Como $W^u(\Lambda_0) \subset \Lambda_0^+$ y $x_0 \in W^u(\Lambda_0)$ (por definición) se tiene que $x_0 \in \Lambda_0^+ \cap \Lambda_0^- = \Lambda_0$ lo cual es absurdo. □

Lema 5.3. *Sea Λ neutral para f. Dado U entorno de Λ existe V entorno de Λ tal que $V \subset U$ y además:*

$$\Omega(f) \cap V \subset \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$$

Demostración. Sea U entorno de un conjunto neutral Λ y sea U' entorno de Λ tal que $\overline{U'} \subset U$. Afirmamos que existe $V \subset U'$ entorno de Λ que satisface:

$$p \in V \text{ y } f^n(p) \in V \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \text{ implica } f^j(p) \in U' \ \forall\ 0 \leq j \leq n$$

Si esto no fuese cierto existiría un entorno U de Λ y sucesiones $p_k \to x \in \Lambda$, $n_k \in \mathbb{N}$ tales que $f^{n_k}(p_k) \to y \in \Lambda$ pero $f^j(p_k) \notin U'$ para algún $0 \leq j \leq n_k$. Escribimos $q_k = f^j(p_k)$ para el valor de j correspondiente y supongamos, tomando una subsucesión si es necesario, que $q_k \to q \notin U'$.

Escribimos $\Lambda = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$ según definición de conjunto neutral. Como Λ^+ es estable Lyapunov para f, podemos aplicar el lema 5.1.1 para obtener que $q \in \Lambda^+$. Si escribimos $q_k = f^{j-n_k}(f^{n_k}(p_k))$ y aplicamos la versión simétrica de 5.1.1 (observar que $j - n_k \leq 0$) obtenemos que $q \in \Lambda^-$. Luego $q \in \Lambda$ lo cual es una contradicción pues $q \notin U'$. Se tiene probada entonces la afirmación.

Probamos ahora que $\Omega(f) \cap V \subset \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$: supongamos que existe $q \in \Omega(f) \cap V$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $f^{n_0}(q) \notin U$ (supongamos por simplicidad que $n_0 \in \mathbb{N}$).

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(q, \varepsilon) \subset V$ y además $f^{n_0}(B(q,\varepsilon)) \cap \overline{U'} = \emptyset$. Como q es no errante existe $p \in B(q, \varepsilon)$ tal que $f^{n_1}(p) \in B(q, \varepsilon)$ para algún $n_1 > n_0$, por la afirmación se tiene que $f^j(p) \in U'\ \forall\ 0 \leq j \leq n_1$ pues $B(q, \varepsilon) \subset V$, pero esto contradice que $f^{n_0}(p) \in f^{n_0}(B(q, \varepsilon))$ y $f^{n_0}(B(q,\varepsilon)) \cap \overline{U'} = \emptyset$. □

Definimos una convergencia entre compactos de M un poco mas débil que la dada por la métrica de Hausdorff: decimos que la sucesión de compactos Λ_n *acumula* en Λ

si dado U entorno de Λ existe n_0 tal que $\Lambda_n \subset U$ para todo $n \geq n_0$. Dados $A, B \subset M$ compactos definimos además:

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

siendo d la distancia inducida en M por la métrica Riemanniana.

Corolario 5.1. *Si Λ es neutral para f y Λ_n es una sucesión de conjuntos transitivos de f tales que* $\operatorname{dist}(\Lambda_n, \Lambda) \to 0$*, Λ_n acumula en Λ.*

Demostración. Por el lema anterior (lema 5.3) dado U entorno de Λ existe V entorno de Λ tal que $V \subset U$ y además:

$$\Omega(f) \cap V \subset \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$$

Es decir, todo punto no errante de V no se sale nunca (ni a pasado ni a futuro) de U. Como $\operatorname{dist}(\Lambda_n, \Lambda) \to 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$ se cumple que $\Lambda_n \cap U \neq \emptyset$, y como Λ_n es transitivo $\forall\ n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\Lambda_n \subset \Omega(f)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Luego $\forall\ n \geq n_0$ se tiene que Λ_n intersecta a V en puntos que nunca se salen (ni a pasado ni a futuro) de U. Como Λ_n es transitivo, $\Lambda_n \subset U\ \forall\ n \geq n_0$. □

Proposición 5.2. *Un conjunto neutral es aislado si y sólo si es Ω-aislado.*

Demostración. Observar primero que el lema 5.3 resuelve el caso de que un conjunto Λ neutral y aislado es Ω-aislado. Veamos ahora que un conjunto Λ neutral y Ω-aislado es aislado: como Λ es Ω-aislado existe U entorno abierto de Λ tal que $\overline{U} \cap \Omega(f) = \Lambda$. Veamos que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U) = \Lambda$: sea $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$, sabemos que $\omega(x) \cup \alpha(x) \subset \overline{U} \cap \Omega(f) = \Lambda$, entonces $x \in W^s(\Lambda) \cap W^u(\Lambda)$. Ahora bien, como Λ es neutral es saturado por el lema 5.2.1, luego $x \in \Lambda$, es decir, Λ es aislado (la otra inclusión surge de que Λ es invariante). □

Proposición 5.3. *Conjuntos neutrales, hiperbólicos y transitivos son aislados.*

Demostración. Sea Λ neutral, hiperbólico y transitivo para f. Por la proposición anterior (la proposición 5.2) basta demostrar que Λ es Ω-aislado. Si no lo fuera existiría una sucesión $\{p_n\} \subset \Omega(f) - \Lambda$ tal que $\{p_n\} \to p \in \Lambda$.

Fijamos U entorno de Λ dado por el shadowing lemma (ver apéndice), y sea V dado por el lema anterior (el lema 5.3) aplicado a U. Podemos suponer que $p_n \in V\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Como $p_n \in \Omega(f)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existen sucesiones $\{q_i^n\}_{i\in\mathbb{N}} \subset V$ y $\{l_i^n\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tales que:

$$\{f^{l_i^n}(q_i^n)\} \subset V,\ q_i^n \to p_n,\ l_i^n \to +\infty \text{ y } f^{l_i^n}(q_i^n) \to p_n$$

Por el lema 5.3 sabemos que $f^j(q_i^n) \in U\ \forall\ 0 \leq j \leq l_i^n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Se obtiene así una pseudo-órbita periódica arbitrariamente cerca de p_n contenida en U, podemos entonces aplicar el shadowing lemma y sombrear la pseudo-órbita periódica con una órbita periódica. Es decir, dado el abierto U hemos construido una pseudo-órbita periódica totalmente contenida en U, y luego una órbita periódica totalmente contenida en U. Haciendo U cada vez mas pequeño obtenemos que $p_n \in \overline{\mathrm{Per}(f)}$. Podemos asumir entonces que $p_n \in \mathrm{Per}(f)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ y mas aún, podemos asumir que los p_n son hiperbólicos pues el abierto U es arbitrariamente pequeño (los p_n heredan la hiperbolicidad de Λ).

Ahora bien, como Λ es transitivo las dimensiones de los fibrados estable e inestable son constantes en Λ, digamos $\dim(E_x^s) = s$ y $\dim(E_x^u) = u$ para todo $x \in \Lambda$. Además, como estamos suponiendo que Λ no es Ω-aislado, $s \neq 0$ y $u \neq 0$.

Observar que, por el corolario 5.1, $\mathcal{O}(p_n)$ acumulan en Λ, luego las variedades estable e inestable de los p_n tienen dimensión s y u respectivamente. Mas aún, estas variedades tienen tamaño uniforme. Luego:

$$W^u(p_n) \cap W^s(p) \neq \emptyset \text{ y } W^s(p_n) \cap W^u(p) \neq \emptyset \text{ para } n \text{ grande.}$$

Por el λ-lemma $p_n \in \overline{W^s(\Lambda) \cap W^u(\Lambda)}$, y como Λ es cerrado y saturado se obtiene que $p_n \in \Lambda$ lo cual contradice lo supuesto. □

Observación. En la última demostración, al probar que los p_n eran acumulados por puntos periódicos, se utilizó el lema 5.3 para poder asegurar que las pseudo-órbitas construidas estaban contenidas en el abierto dado por el shadowing lemma. Esto es fundamental pues como es bien sabido, la hiperbolicidad del conjunto no errante *no* asegura que este sea la clausura de los puntos periódicos: si M es una superficie Newhouse y Palis han demostrado que sí (ver [NP]), pero si $\dim(M) \geq 3$ Alan Dankner ha demostrado (en [D]) que en cada clase de isotopía de $\mathrm{Diff}^1(M)$ existe un mapa cuyo conjunto no errante es hiperbólico pero es mayor que la clausura de sus puntos periódicos.

Denotamos por $\mathcal{F}$ a la familia de todos los conjuntos neutrales, transitivos y aislados de f.

Proposición 5.4. *Una subfamilia $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ es finita si y sólo si $\bigcup_{\Lambda \in \mathcal{F}'} \Lambda$ es cerrada.*

Demostración. Obviamente sólo hay que mostrar el recíproco: sea $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ tal que $\bigcup_{\Lambda \in \mathcal{F}'} \Lambda$ es cerrada. Si $\mathcal{F}'$ fuese infinita existiría una sucesión $\Lambda_n \in \mathcal{F}'$ de conjuntos diferentes acumulando en algún $\Lambda \in \mathcal{F}'$. Como Λ es transitivo existe U entorno compacto de Λ tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U) = \Lambda$. Por el corolario 5.1 se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Lambda_n \subset U$ para todo $n \geq n_0$. Esto implica $\Lambda_n = \Lambda$ para todo $n \geq n_0$ lo cual es una contradicción. $\square$

5.3. Clases homoclínicas para difeomorfismos C^1 genéricos

El objetivo de este capítulo es demostrar el siguiente teorema:

Teorema 5.1. *Existe $\mathcal{R} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ residual tal que $\forall\ f \in \mathcal{R}$ se cumple que:*

1. *Las clases homoclínicas de f son conjuntos transitivos maximales de f. En particular, dos clases homoclínicas son iguales o disjuntas.*
2. *Las clases homoclínicas de f son conjuntos saturados.*
3. *Las clases homoclínicas de f dependen continuamente de las órbitas periódicas de f en la topología de Hausdorff.*
4. *Una clase homoclínica de f es aislada si y solamente si es Ω-aislada.*
5. *Las clases homoclínicas hiperbólicas de f son aisladas.*
6. *f no admite cíclos formados por clases homoclínicas de f.*

7. *f tiene finitas clases homoclínicas si y solamente si la unión de las clases homoclínicas de f es cerrada y toda clase homoclínica de f es aislada.*

Para demostrar el teorema 5.1 bastará probar los siguientes dos lemas (observar que el segundo es la solución al problema planteado por Mañé en [M1]) en los cuales se obtiene que, genéricamente en $\mathrm{Diff}^1(M)$, las clases homoclínicas son neutrales:

Lema 5.4. *Existe $\mathcal{R} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ residual tal que $\forall\ f \in \mathcal{R}$ se cumple que, para todo $x \in \mathrm{Per}(f)$, $\overline{W^u(x)}$ es estable Lyapunov para f y $\overline{W^s(x)}$ es estable Lyapunov para f^{-1}.*

Lema 5.5. *Existe $\mathcal{R} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ residual tal que $\forall\ f \in \mathcal{R}$ se cumple que, para todo $x \in \mathrm{Per}(f)$, $H_f(x) = \overline{W^u(x)} \cap \overline{W^s(x)}$.*

Probamos primero las versiones locales correspondientes a los lemas 5.4 y 5.5 (recordar que denotamos por $\mathcal{KS}$ al residual dado por Kupka-Smale, ver apéndice):

Lema 5.6. *Sea $f \in \mathcal{KS}$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Existe $\mathcal{U}(f,n)$ entorno de f en la topología C^1 y $\mathcal{R}(f,n) \subset \mathcal{U}(f,n)$ residual tal que si $g \in \mathcal{R}(f,n)$ y $x \in \mathrm{Per}_n(g)$ entonces $\overline{W_g^u(x)}$ es estable Lyapunov para g y $\overline{W_g^s(x)}$ es estable Lyapunov para g^{-1}.*

Demostración. Como $f \in \mathcal{KS}$ se tiene que $\#\,\mathrm{Per}_n(f) = k < \infty$, digamos $\mathrm{Per}_n(f) = \{p_1, ..., p_k\}$. Luego existe $\mathcal{U}(f,n)$ entorno de f en la topología C^1 tal que $\#\,\mathrm{Per}_n(g) = k\ \forall\ g \in \mathcal{U}(f,n)$. $\forall\ i \in \{1, ..., k\}$ definimos:

$$\Phi_i(g) = \overline{W_g^u(p_i(g))}$$

siendo $p_i(g)$ la prolongación analítica de p_i.

Por la dependencia continua en partes compactas de las variedades inestables tenemos que Φ_i es semicontinua inferiormente en $\mathcal{U}(f,n)$, luego existe $\mathcal{R}_i$ residual en $\mathcal{U}(f,n)$ tal que Φ_i es continua en $\mathcal{R}_i$. Sea:

$$\mathcal{R}(f,n) = \mathcal{KS} \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{i=k} \mathcal{R}_i \right)$$

Veamos que $\mathcal{R}(f,n)$ es el residual buscado: sea $\hat{p} \in \mathrm{Per}_n(g)$ para algún $g \in \mathcal{R}(f,n)$, entonces $\hat{p} = p_i(g)$ para algún $i \in \{1, ..., k\}$ y entonces $\Phi_i(g) = \overline{W_g^u(\hat{p})}$. Supongamos, por absurdo, que $\overline{W_g^u(\hat{p})}$ no es estable Lyapunov para g. Entonces existe un abierto U conteniendo $\overline{W_g^u(\hat{p})}$ y dos sucesiones $x_k \to x \in \overline{W_g^u(\hat{p})}$ y $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ tales que $g^{n_k}(x_k) \notin U \; \forall \; k \in \mathbb{N}$.

Supongamos primero que x no es periódico para g. Como $\overline{W_g^u(\hat{p})} \subset U$ y Φ_i es continua en g existe $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}(f,n)$ entorno de g en la topología C^1 tal que si $h \in \mathcal{U}$ se tiene que $\overline{W_h^u(p_i(h))} \subset U$. Sean $\rho > 1$, $L \in \mathbb{N}$ y $\delta_0 > 0$ según el C^1 connecting lemma aplicado a g, x y al abierto $\mathcal{U}$. Como $x \in \overline{W_g^u(\hat{p})}$ se tiene que $g^{-j}(x) \in \overline{W_g^u(\hat{p})} \; \forall \; j \in \{0, ..., L\}$, en particular, $g^{-j}(x) \in U \; \forall \; j \in \{0, ..., L\}$. Recordar además que estamos en el caso en que x no es periódico para g, luego $x \notin \mathcal{O}_g(\hat{p})$. Sea entonces $0 < \delta \leq \delta_0$ tal que:

$$B(g^{-j}(x), \delta) \subset U \; \forall \; j \in \{0, ..., L\} \text{ y además } B(g^{-j}(x), \delta) \cap \mathcal{O}_g(\hat{p}) = \emptyset \; \forall \; j \in \{0, ..., L\}$$

Sea V abierto que contiene $\mathcal{O}_g(\hat{p})$ tal que:

$$\overline{V} \subset U \text{ y además } B(g^{-j}(x), \delta) \cap V = \emptyset \; \forall \; j \in \{0, ..., L\}$$

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in B(x, \delta/\rho)$ y sea $q = g^{n_k}(x_k) \notin U$. Como $x \in \overline{W_g^u(\hat{p})}$ existe $p \in (W_g^u(\hat{p}) - \{\hat{p}\}) \cap V$ tal que $\mathcal{O}_g^+(g^L(p)) \cap B(x, \delta/\rho) \neq \emptyset$ y $\mathcal{O}_g^-(p) \subset V$. Por el C^1 connecting lemma existe $h \in \mathcal{U}$ tal que $h = g$ afuera de $\Delta(\delta)$, y $q \in \mathcal{O}_h^+(p)$. Como $V \cap \Delta(\delta) = \emptyset$ y $\mathcal{O}_g^-(p) \subset V$ se tiene que $\mathcal{O}_g^-(p) \cap \Delta(\delta) = \emptyset$. Luego $p_i(h) = \hat{p}$ y $p \in W_h^u(\hat{p})$. Como $q \notin U$ y $q \in W_h^u(\hat{p})$ se contradice que $W_h^u(\hat{p}) \subset U$.

El caso $x \in \text{Per}(g)$ se reduce al caso anterior del siguiente modo: como $g \in \mathcal{KS}$ sabemos que x es hiperbólico. Observar que x no puede ser un pozo pues si lo fuera no podría existir una sucesión como x_k, y observar además que x tampoco puede ser una fuente pues está acumulado por puntos de $W_g^u(\hat{p})$. Luego $W_g^s(x) - \mathcal{O}_g(x) \neq \emptyset$ y $W_g^u(x) - \mathcal{O}_g(x) \neq \emptyset$.

Sea $V \subset U$ entorno de x dado por Hartman-Grobmann (ver apéndice). Como $x_k \to x$ podemos asumir que $x_k \in V \; \forall \; k \in \mathbb{N}$.

Sea $0 \leq m_k < n_k$ tal que $g^{m_k}(x_k) \in V$ pero $g^{m_k+1}(x_k) \notin V$. Tomando una subsucesión si es necesario podemos asumir que $g^{m_k}(x_k) \to x' \in W_g^u(x) - \mathcal{O}_g(x)$ (en particular $x' \notin \text{Per}(g)$). Afirmamos que $x' \in \overline{W_g^u(\hat{p})}$: como $x \in \overline{W_g^u(\hat{p})}$ podemos utilizar el C^1 connecting lemma para obtener h C^1 cerca de g tal que $W_h^u(\hat{p}(h)) \cap W_h^s(x(h)) \neq \emptyset$. Por el λ-lemma se tiene que $W_h^u(\hat{p}(h))$ acumula en x' y como Φ_i es continua en g se obtiene la afirmación.

Volviendo al lema, basta sustituir x por x', x_k por $g^{m_k}(x_k)$ y n_k por $n_k - m_k$. $\square$

La versión local del lema 5.5 se resuelve con las mismas técnicas. Aún así exponemos su prueba:

Lema 5.7. *Sea $f \in \mathcal{KS}$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Existe $\mathcal{U}(f,n)$ entorno de f en la topología C^1 y $\mathcal{R}(f,n) \subset \mathcal{U}(f,n)$ residual tal que si $g \in \mathcal{R}(f,n)$ y $x \in \mathrm{Per}_n(g)$ entonces*

$$H_g(x) = \overline{W_g^u(x)} \cap \overline{W_g^s(x)}$$

Demostración. Como $f \in \mathcal{KS}$ se tiene que $\#\,\mathrm{Per}_n(f) = k < \infty$, digamos $\mathrm{Per}_n(f) = \{p_1, ..., p_k\}$. Luego existe $\mathcal{U}(f,n)$ entorno de f en la topología C^1 tal que $\#\,\mathrm{Per}_n(g) = k \ \forall\ g \in \mathcal{U}(f,n)$. $\forall\ i \in \{1, ..., k\}$ definimos:

$$\Phi_i(g) = H_g(p_i(g))$$

siendo $p_i(g)$ la prolongación analítica de p_i. Observar ahora que Φ_i es semicontinua inferiormente en $\mathcal{U}(f,n)$: sea $h_k \to h$ en la topología C^1 y sea p punto periódico hiperbólico para h. Por la hiperbolicidad existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$ entonces h_k presenta un punto periódico hiperbólico p_k y se tiene que $p_k \to p$ en M. Además, dado z intersección transversal de $W_h^s(p)$ y $W_h^u(p)$, por la transversalidad existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_1$ y $k \geq k_0$ entonces las variedades asociadas a p_k según h_k se intersectan transversalmente en un punto z_k y se tiene que $z_k \to z$. Luego existe $\mathcal{R}_i$ residual en $\mathcal{U}(f,n)$ tal que Φ_i es continua en $\mathcal{R}_i$. Sea:

$$\mathcal{R}(f,n) = \mathcal{KS} \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{i=k} \mathcal{R}_i \right) \bigcap \mathcal{R}$$

siendo $\mathcal{R}$ el residual dado por el lema anterior (el lema 5.6) aplicado a f y a n. Veamos que $\mathcal{R}(f,n)$ es el residual buscado: sea $\hat{p} \in \mathrm{Per}_n(g)$ para algún $g \in \mathcal{R}(f,n)$, entonces $\hat{p} = p_i(g)$ para algún $i \in \{1, ..., k\}$ y entonces $\Phi_i(g) = H_g(\hat{p})$.

Supongamos que existe $x \in \overline{W_g^u(\hat{p})} \cap \overline{W_g^s(\hat{p})} - H_g(\hat{p})$ y supongamos primero que x no es periódico para g. Sea K entorno compacto de x tal que $K \cap H_g(\hat{p}) = \emptyset$. Como Φ_i es continua en g existe $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}(f,n)$ entorno de g en la topología C^1 tal que si $h \in \mathcal{U}$ se tiene que $K \cap H_h(p_i(h)) = \emptyset$. Sean $\rho > 1$, $L \in \mathbb{N}$ y $\delta_0 > 0$ según el C^1 connecting lemma aplicado a g, x y al abierto $\mathcal{U}$. Recordar que estamos en el caso en que x no es periódico para g, luego $x \notin \mathcal{O}_g(\hat{p})$. Sea $0 < \delta \leq \delta_0$ tal que:

$$B(x,\delta) \subset K \text{ y además } B(g^{-j}(x),\delta) \cap \mathcal{O}_g(\hat{p}) = \emptyset \ \forall \ j \in \{0,...,L\}$$

Sea V abierto que contiene $\mathcal{O}_g(\hat{p})$ tal que:

$$B(g^{-j}(x),\delta) \cap V = \emptyset \ \forall \ j \in \{0,...,L\}$$

Como $x \in \overline{W^u_g(\hat{p})}$ existe $p \in (W^u_g(\hat{p}) - \{\hat{p}\}) \cap V$ tal que $\mathcal{O}^+_g(g^L(p)) \cap B(x,\delta/\rho) \neq \emptyset$, y como $x \in \overline{W^s_g(\hat{p})}$ existe $q \in (W^s_g(\hat{p}) - \{\hat{p}\}) \cap V$ tal que $\mathcal{O}^-_g(q) \cap B(x,\delta/\rho) \neq \emptyset$. Podemos asumir además que:

$$\mathcal{O}^-_g(p) \subset V \text{ y que } \mathcal{O}^+_g(q) \subset V$$

Luego $B(g^{-j}(x),\delta) \cap (\mathcal{O}^-_g(p) \cup \mathcal{O}^+_g(q)) = \emptyset \ \forall \ j \in \{0,...,L\}$. Además observar que $q \notin \mathcal{O}^+_g(p)$ pues de lo contrario p sería un punto homoclínico de g asociado a $\hat{p}$ en K lo cual es absurdo. Luego, por el C^1 connecting lemma existe $h \in \mathcal{U}$ tal que $h = g$ afuera de $\Delta(\delta)$, y $q \in \mathcal{O}^+_h(p)$. Entonces $p_i(h) = \hat{p}$, $p \in W^u_h(\hat{p})$ y $q \in W^s_h(\hat{p})$, es decir, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_h(p) = \mathcal{O}_h(q)$ es una órbita homoclínica asociada a $\hat{p}$ según h. Como $q \notin \mathcal{O}^+_g(p)$ se tiene que $\mathcal{O} \cap B(x,\delta) \neq \emptyset$. Perturbando h podemos asumir que $\mathcal{O}$ es transversal, es decir, $\mathcal{O} \subset H_h(\hat{p})$ y entonces $K \cap H_h(p_i(h)) \neq \emptyset$ lo cual es absurdo. El caso $x \in \text{Per}(g)$ se reduce al caso anterior de un modo análogo al lema anterior (lema 5.6). $\square$

El modo en que el lema 5.6 implica el lema 5.4 es el mismo en que el lema 5.7 implica el lema 5.5. Veamos la primer implicancia a modo de ejemplo:

Demostración. Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y tomamos una sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{KS}$ tal que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es denso en $\text{Diff}^1(M)$ (recordar que $\text{Diff}^1(M)$ es un espacio métrico separable). Denotamos $\mathcal{U}(k,n) = \mathcal{U}(f_k,n)$ y $\mathcal{R}(k,n) = \mathcal{R}(f_k,n)$ según lema 5.6 y definimos:

$$\mathcal{O}_n = \bigcup_k \mathcal{U}(k,n) \text{ y } \mathcal{R}_n = \bigcup_k \mathcal{R}(k,n)$$

Claramente $\mathcal{O}_n$ es abierto y denso en $\text{Diff}^1(M)$. Afirmamos que $\mathcal{R}_n$ es residual en $\mathcal{O}_n$: en efecto, dado $k \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $\{\mathcal{D}(k,n)_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ de abiertos densos en $\mathcal{U}(k,n)$ tal que:

$$\mathcal{R}(k,n) = \bigcap_l \mathcal{D}(k,n)_l$$

Como:

$$\mathcal{R}_n = \bigcup_k \mathcal{R}(k,n) = \bigcup_k \left(\bigcap_l \mathcal{D}(k,n)_l\right) = \bigcap_l \left(\bigcup_k \mathcal{D}(k,n)_l\right)$$

y $\bigcup_k \mathcal{D}(k,n)_l$ es abierto y denso en $\bigcup_k \mathcal{U}(k,n) = \mathcal{O}_n$, se obtiene que $\mathcal{R}_n$ es residual en $\mathcal{O}_n$ como habíamos afirmado. En particular $\mathcal{R}_n$ es residual en $\mathrm{Diff}^1(M)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Luego $\mathcal{R} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_n$ es residual en $\mathrm{Diff}^1(M)$. Veamos que $\mathcal{R}$ es el residual buscado: sea $f \in \mathcal{R}$ y $p \in \mathrm{Per}(f)$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ mayor que $\Pi_f(p) + 1$. Por definición $f \in \mathcal{R}_{n_0}$ y entonces $f \in \mathcal{R}(f_k, n_0)$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Como $n_0 > \Pi_f(p)$ tenemos que $p \in \mathrm{Per}_{n_0}(f)$. Aplicamos el lema 5.6 a f_k y a n_0 y obtenemos que $H_f(p) = \overline{W^u(p)} \cap \overline{W^s(p)}$. $\square$

Capítulo 6

Aportes para el caso no invertible

6.1. Uniformidad de L

Del enunciado del teorema 1.1 se desprende que, fijado el entorno $\mathcal{U}$, el parámetro L depende del punto z. El siguiente teorema nos dice que podemos tomar L uniforme si estamos lejos de los puntos críticos:

Teorema 6.1. *Dado $\mathcal{U}$ entorno de f en la topología C^1 y dado W abierto en M tal que $S_f \subset W$ existe $L \in \mathbb{N}$ tal que si $\{z, f(z), ..., f^L(z)\} \cap \overline{W} = \emptyset$, entonces cualquier bola centrada en z disjunta de sus L primeros iterados contiene un tubo de conexión, es decir, existen $\rho > 1$ y $\delta_0 > 0$ con la siguiente propiedad: supongamos dados $0 < \delta \leq \delta_0$ y puntos $p, q \notin \Delta(\delta) = \bigcup_{n=1}^{n=L} f^n(B(z, \delta))$ que verifican:*

- *Una preórbita de q intersecta la bola $B(z, \delta/\rho)$ antes de q, i.e. existe $b > L$ tal que $f^{-b}(q) \cap B(z, \delta/\rho) \neq \emptyset$.*
- *La órbita futura de p intersecta la bola $B(z, \delta/\rho)$, i.e. existe $a \geq 0$ tal que $f^a(p) \in B(z, \delta/\rho)$.*
- *Dados $j \in \{1, ..., a\}$ y $n \in \{1, ..., L\}$ la condición $f^j(p) \in f^n(B(z, \delta))$ implica que $f^{j-1}(p) \in f^{n-1}(B(z, \delta))$.*

Entonces existe $g \in \mathcal{U}$ tal que q está en la órbita futura de p por g, y además, $g = f$ afuera de $\Delta(\delta)$.

Demostración. La idea es que se puede imitar el proceso de linealización desarrollado en el capítulo 3, para ello tomamos η, r y ε positivos como en el capítulo 3. Sea $GL(m, \mathbb{R})$ con la norma habitual y $GL(m, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ con la topología producto. A cada $T = \{T_n\}_{n\geq 1}$ en $GL(m, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ le asociamos $L(T)$ según el teorema 2.2 aplicado a la sucesión T y al número $\varepsilon > 0$ fijado.

Observar que $L(T)$ puede elegirse localmente constante en $GL(m, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$: supongamos que los $L + 1$ puntos $\{c_0, c_1, ..., c_L\}$ y las L bolas $\{B_0, B_1, ..., B_{L-1}\}$ forman una ε-transición para $T = \{T_n\}_{n\geq 1}$ (de cierto u a cierto v, contenida en cierto Q y que evita cierto G), es claro que existe $\mathcal{V}$ entorno de T en $GL(m, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tal que los mismos puntos y las mismas bolas forman una ε-transición para toda sucesión de isomorfismos en $\mathcal{V}$ (basta tomar $\mathcal{V}$ tal que los primeros L términos de todo elemento de $\mathcal{V}$ estén cerca de los de $\{T_n\}_{n\geq 1}$ y dejar libres los demás términos). Es decir, dado T en $GL(m, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ existe $\mathcal{V}$ entorno de T en $GL(m, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tal que $L(T') = L(T)$ para todo $T' \in \mathcal{V}$.

Ahora bien, para simplificar identificamos los espacios tangentes a M con $\mathbb{R}^m$, es decir, $\forall\ x \in M$ fijamos Ψ_x isometría lineal de $\mathbb{R}^m$ en T_xM. Sea $M' = M - W$ y sea $\varphi : M' \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\varphi(x) = (\|d_xf\|, \|d_xf^{-1}\|) = (\|\Psi_{f(x)}^{-1} \circ d_xf \circ \Psi_x\|, \|\Psi_x^{-1} \circ d_xf^{-1} \circ \Psi_{f(x)}\|)$$

Como f es de clase C^1 φ es continua y como M' es compacta existe $K > 0$ tal que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset [0, K] \times [0, K]$. Por el teorema de Tichonov:

$$X(K) = \{\{T_n\}_{n\geq 1} \in GL(m, \mathbb{R})^{\mathbb{N}} : \|T_n\| \leq K,\ \|T_n^{-1}\| \leq K\ \forall\ n \geq 1\}$$

es compacto en $GL(m, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Veamos que basta tomar $L = \max\{L(T) : T \in X(K)\}$. Dado z tal que $\{z, f(z), ..., f^L(z)\} \cap \overline{W} = \emptyset$, consideramos $T = \{T_n\}_{n\geq 1} \in GL(m, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tal que:

$$T_n = \Psi_{f^{n-1}(z)}^{-1} \circ (d_{f^{n-1}(z)}f)^{-1} \circ \Psi_{f^n(z)} \quad \forall\ 1 \leq n \leq L$$

$$T_n = K Id_{\mathbb{R}^m} \quad \forall\ n > L$$

y copiamos la prueba del teorema 1.1. $\square$

6.2. Un acercamiento a un teorema de densidad para endomorfismos

A diferencia del caso invertible, un punto errante de un endomorfismo puede tener por imagen un punto no errante del mismo (por ejemplo, dado un punto fijo atractor p, basta tomar una preimagen diferente de p). Veamos al menos que si un punto no errante no es imagen de un punto crítico, podemos elegir alguna preimagen del mismo en el conjunto no errante:

Lema 6.1. *Sea $x \in \Omega(f)$ tal que $f^{-1}(x) \cap S_f = \emptyset$, entonces $f^{-1}(x) \cap \Omega(f) \neq \emptyset$*

Demostración. Puesto que no hay puntos críticos en la preimagen de x y M es compacta, $\#f^{-1}(x) < \infty$. Sea $f^{-1}(x) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ y sean $\{U_1, U_2, ..., U_k\}$ tales que U_i es un entorno de x_i que se mapea difeomorficamente por f en un entorno de x $\forall\ i \in \{1, 2, ..., k\}$. Sea $V = \bigcap_{i=1}^{i=k} f(U_i)$, sabemos que $\exists\ p \in V$ tal que $f^n(p) \in V$ para algún $n \geq 1 \Rightarrow \exists\ i \in \{1, 2, ..., k\}$ tal que $f^{n-1}(p) \in U_i$, es decir, un iterado futuro de U_i intersecta U_i. Ahora bien, $\forall\ i \in \{1, 2, ..., k\}$ consideramos la sucesión $U_{i,m} = B(x_i, \frac{1}{m})$. Por lo visto $\forall\ m \geq 1\ \exists\ i(m) \in \{1, 2, ..., k\}$ tal que un iterado futuro de $U_{i(m),m}$ intersecta $U_{i(m),m} \Rightarrow \exists\ i \in \{1, 2, ..., k\}$ tal que $i = i(m)$ para infinitos valores de m, luego $x_i \in \Omega(f)$. □

Definición 6.1. Sea $\mathcal{R} \subset \mathrm{End}^1(M)$ el conjunto de los endomorfismos f que verifican las siguientes condiciones:

$$\forall\ z \in M\ \exists\ n_z \in \mathbb{N} \text{ tal que } \mathcal{O}^+(f^{n_z}(z)) \cap S_f = \emptyset$$

$$S_f \cap \mathrm{PrePer}(f) = \emptyset$$

Es decir, $\mathcal{R}$ es el conjunto de los mapas C^1 de M tales que ninguna órbita visita infinitas veces en el futuro a los puntos críticos, y además, ningún punto crítico se hace periódico. Veamos que los elementos de $\mathcal{R}$ admiten un C^1 closing lemma:

Teorema 6.2. *Dada $f \in \mathcal{R}$ se cumple que si $x \in \Omega(f)$ existe g arbitrariamente cerca de f en la topología C^1 tal que $x \in \mathrm{Per}(g)$.*

Demostración. Sean $f \in \mathcal{R}$ y $x \in \Omega(f)$. Dado $\mathcal{U}$ entorno de f en la topología C^1 queremos hallar $g \in \mathcal{U}$ / $x \in \mathrm{Per}(g)$. Sea $\eta > 0$ / $B(f,\eta) \subset \mathcal{U}$, y sean $r > 0$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeños tales que si t es una ε-traslación soportada en una bola de radio r, $t \circ g \circ t^{-1} \in B(g, \eta/2)$ $\forall$ $g \in B(f,\eta)$.

Supongamos primero que x no es preperiódico, sabemos que $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que la órbita futura de $f^{n_0}(x)$ no contiene puntos críticos. Sean $\rho > 1$, $L \in \mathbb{N}$ y $\delta_0 > 0$ según el teorema 1.1 aplicado al punto $f^{n_0}(x)$ y al abierto $B(f, \eta/2)$ (observar que $f^{n_0}(x) \notin \mathrm{PrePer}(f)$). Sea $0 < \delta \leq \delta_0$ tal que:

$$\{x, f(x), ..., f^{n_0-1}(x)\} \cap B(f^{n_0}(x), \delta) = \emptyset$$

y sea V entorno abierto de x tal que $V \subset B(x, \varepsilon r)$, $f^{n_0}(V) \subset B(f^{n_0}(x), \delta/\rho)$, y además, $\{V, f(V), ..., f^{n_0-1}(V), B(f^{n_0}(x), \delta)\}$ son disjuntos dos a dos. Como $x \in \Omega(f)$ existe $y \in V$ tal que $f^m(y) \in V$ para algún $m > n_0$. Aplicamos el teorema 1.1 con $p = q = f^m(y)$, $a = n_0$ y cerramos la órbita de q (es decir, $q \in \mathrm{Per}(g)$, siendo g la obtenida en el teorema). Por simplicidad escribimos $g = f$. Ahora bien, como x y q están en el ε-núcleo de una bola de radio r, $\exists$ t ε-traslación / $t(q) = x$, y además, si $g : M \to M$ es tal que $g = t \circ f \circ t^{-1} \Rightarrow g \in B(f,\eta) \subset \mathcal{U}$ y $x \in \mathrm{Per}(g)$.

Supongamos ahora que x es preperiódico y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ una preórbita de x, es decir, $x_0 = x$ y $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $f(x_{n+1}) = x_n$. Como $f \in \mathcal{R}$ sabemos que $x \notin \mathcal{O}^+(S_f)$, luego, por el lema 6.1, podemos asumir que $\{x_n\} \subset \Omega(f)$. Sea y un punto de acumulación de $\{x_n\}$, hay dos casos a estudiar:

1. $y \in \mathrm{PrePer}(f)$

   Supongamos, para simplificar, que y muere en un punto fijo z. Sea W abierto en M tal que $S_f \subset W$ y además $z \notin \overline{W}$ (sabemos, puesto que $f \in \mathcal{R}$, que z no es un punto crítico, y además, como f es de clase C^1, S_f es compacto). Sea $L \in \mathbb{N}$ dado por el teorema 6.1 aplicado al abierto W, y sea U entorno abierto de z en M tal que $f^i(U) \cap \overline{W} = \emptyset$ $\forall$ $i \in \{0, 1, ..., L\}$. Como una subsucesión de $\{x_n\}$ converge a y, una subsucesión de $\{x_n\}$ converge a z. Sea $m > L$ tal que $x_m \in U$, y sea $\lambda > 0$ tal que $\{B(x_m, \lambda), f(B(x_m, \lambda)), ..., f^L(B(x_m, \lambda)), \overline{W}\}$ son disjuntos dos a dos y además $\forall$ $g \in B(f,\eta)$ se tiene que $g^m(B(x_m, \lambda)) \subset B(x, \varepsilon r)$. Como $x_m \in \Omega(f)$ $\exists$ $z \in B(x_m, \lambda)$ tal que $f^l(z) \in B(x_m, \lambda)$ para algún $l > m$.

Aplicamos el teorema 1.1 con $p = q = f^l(z)$, $a = 0$ y obtenemos un punto periódico en $B(x, \varepsilon r)$, luego conjugamos para hacer a x el punto periódico.

2. $y \notin \mathrm{PrePer}(f)$

   Como $f \in \mathcal{R}$ sabemos que $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que la órbita futura de $f^{n_0}(y)$ no contiene puntos críticos. Aplicamos el teorema 1.1 al punto $f^{n_0}(y)$ y al abierto $B(f, \eta/2)$, y obtenemos $\rho > 1$, $L \in \mathbb{N}$ y $\delta_0 > 0$. Como una subsucesión de $\{x_n\}$ converge a y, una subsucesión de $\{x_n\}$ converge a $f^{n_0}(y)$. Sea $m > L$ tal que $x_m \in B(f^{n_0}(y), \delta_0/\rho)$, y sea $\lambda > 0$ tal que $B(x_m, \lambda) \subset B(f^{n_0}(y), \delta_0/\rho)$ y además $\forall\ g \in B(f, \eta)$ se tiene que $g^m(B(x_m, \lambda)) \subset B(x, \varepsilon r)$. Como $x_m \in \Omega(f)$ $\exists\ z \in B(x_m, \lambda)$ tal que $f^l(z) \in B(x_m, \lambda)$ para algún $l > m$. Análogamente al caso anterior aplicamos el teorema 1.1 con $p = q = f^l(z)$, $a = 0$ y obtenemos un punto periódico en $B(x, \varepsilon r)$, luego conjugamos para hacer a x el punto periódico.

$\square$

Como corolario obtenemos un acercamiento al teorema de densidad para endomorfismos:

Teorema 6.3. *Existe* $\mathcal{D} \subset \mathrm{End}^1(M)$ *residual /* $\forall\ f \in \mathcal{D} \cap \mathcal{R}$ *se cumple que* $\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$.

Demostración. Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base numerable de M. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ consideramos:

$$A_n = \{f \in \mathrm{End}^1(M)\ /\ \mathrm{Per}_h(f) \cap U_n \neq \emptyset\}$$

siendo $\mathrm{Per}_h(f)$ el conjunto de los puntos periódicos hiperbólicos de f, y consideramos $B_n = \mathrm{End}^1(M) - \overline{A_n}$. Por la estabilidad de los puntos periódicos hiperbólicos, A_n es abierto y entonces $A_n \cup B_n$ es abierto y denso $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Luego $\mathcal{D} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cup B_n)$ es residual en $\mathrm{End}^1(M)$. Veamos que si $f \in \mathcal{D} \cap \mathcal{R}$ se tiene que $\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$:

Supongamos que $\exists\ x \in M\ /\ x \in \Omega(f) - \overline{\mathrm{Per}(f)}$, y sea $n \in \mathbb{N}\ /\ x \in U_n$ y $U_n \cap \overline{\mathrm{Per}(f)} = \emptyset$ (en particular $f \notin A_n$). Por el C^1 closing lemma en $\mathcal{R}$ (teorema 6.2) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ g_\varepsilon \in \mathrm{End}^1(M)$ / la distancia C^1 entre f y g_ε es menor que ε y $x \in \mathrm{Per}(g_\varepsilon)$. Del lema 4.1 surge que podemos perturbar a g_ε para transformar a x en un punto periódico hiperbólico, manteniendo su distancia C^1 a f menor que ε. Esto implica que $g_\varepsilon \in A_n$ y por lo tanto $f \notin B_n$, luego $f \notin A_n \cup B_n$ lo cual es absurdo pues $f \in \mathcal{D}$. $\square$

En conclusión, para obtener el teorema de densidad para endomorfismos sólo resta probar la siguiente:

Conjetura. $\mathcal{R}$ *es residual en* $\mathrm{End}^1(M)$.

Apéndice A

Preliminares

A.1. La topología C^1

Sea M^m una variedad Riemanniana compacta, conexa y sin borde, y sea $C^1(M, \mathbb{R}^k)$ el conjunto de los mapas de clase C^1 de M en $\mathbb{R}^k$. $C^1(M, \mathbb{R}^k)$ es un espacio vectorial con las operaciones habituales, al cual dotamos de la norma C^1:

$$\|f\|_1 = \max_{x \in M} \{\|f(x)\|, \|d_x f\|\} \quad \forall\, f \in C^1(M, \mathbb{R}^k)$$

Es decir, $f_n \to f$ si converge uniformemente, y también sus derivadas.

Proposición A.1. *$C^1(M, \mathbb{R}^k)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de Cauchy en $C^1(M, \mathbb{R}^k) \Rightarrow \forall\, x \in M$ $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^k$, luego convergente. Sea $f : M \to \mathbb{R}^k$ / $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, tenemos entonces que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f. Además, $\forall\, x \in M$ y $\forall\, v \in T_x M$, $\{d_x f_n(v)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}^k$, luego convergente. Sea $g_x : T_x M \to \mathbb{R}^k$ / $g_x(v) = \lim_{n\to\infty}\{d_x f_n(v)\} \Rightarrow g_x$ es lineal, por ser límite de transformaciones lineales, y además la convergencia es uniforme. Luego f es de clase C^1, y $d_x f = g_x$ $\forall\, x \in M$. $\square$

Por el teorema de Whitney, toda variedad de dimensión m admite un encaje en $\mathbb{R}^{2m+1}$. Podemos entonces considerar $\mathrm{End}^1(M)$ como un subconjunto de $C^1(M, \mathbb{R}^{2m+1})$

y definir la topología C^1 de $\mathrm{End}^1(M)$ como su topología relativa. Como M es compacta, $\mathrm{End}^1(M)$ es cerrado en $C^1(M, \mathbb{R}^{2m+1})$, es decir, $\mathrm{End}^1(M)$ es un espacio métrico completo. Hay que observar que la topología no depende del encaje: sean $M_1 \subset \mathbb{R}^k$ y $M_2 \subset \mathbb{R}^l$, y sea $\Psi : M_1 \to M_2$ difeomorfismo de clase C^1. Basta observar que $\Psi_* : C^1(M, M_1) \to C^1(M, M_2)$ / $\Psi_*(f) = \Psi \circ f$ es un homeomorfismo, pues tanto Ψ como $d\Psi$ son uniformemente continuas en M_1. Como una consecuencia del teorema de la función inversa, surge la siguiente proposición:

Proposición A.2. $\mathrm{Diff}^1(M)$ *es abierto en* $\mathrm{End}^1(M)$.

Demostración. Sea $f : M \to M$ difeomorfismo de clase $C^1 \Rightarrow \forall\ x \in M\ d_x f : T_x M \to T_{f(x)} M$ es un isomorfismo lineal. Por el teorema de la función inversa $\forall\ x \in M\ \exists\ U_x$ entorno de x en M y $\mathcal{U}_x$ entorno de f en $\mathrm{End}^1(M)$ tal que si $g \in \mathcal{U}_x$, $g|_{U_x}$ es un difeomorfismo sobre su imagen. Sea $\{U_{x_1}, ..., U_{x_k}\}$ un cubrimiento finito de M, y sea $\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{U}_{x_i} \Rightarrow$ si $g \in \mathcal{U}$, $g|_{U_{x_i}}$ es un difeomorfismo sobre su imagen $\forall\ i \in \{1, ..., k\}$. Sea δ el número de Lebesgue del cubrimiento $\{U_{x_1}, ..., U_{x_k}\} \Rightarrow$ si $x, y \in M$ están a distancia menor o igual que δ, $g(x) \neq g(y)$.

Ahora sea $\lambda = \inf\{d(f(p), f(q)) : p, q \in M, d(p, q) > \delta\} \Rightarrow \lambda > 0$ pues M es compacta. Tomamos $\mathcal{U}$ tal que si $g \in \mathcal{U}$, la distancia C^0 entre f y g es menor que $\lambda/3$. Así, si $d(x, y) > \delta$, $g(x) \neq g(y)$. Luego g es un difeomorfismo local globalmente inyectivo, es decir, $g \in \mathrm{Diff}^1(M)$. □

Definición A.1. Dado un espacio métrico, decimos que un conjunto es *residual* si contiene una intersección numerable de abiertos densos, y decimos que el espacio es de *Baire* si todo conjunto residual es denso. Una propiedad es *genérica* si se verifica en un conjunto residual.

Corolario A.1. $\mathrm{End}^1(M)$ *es un espacio métrico completo y* $\mathrm{Diff}^1(M)$ *es un espacio métrico de Baire.*

Comentarios. Por una definición análoga para la topología C^r con $r > 1$ ver [PDM], y por una prueba del teorema de Whitney ver [GP]. A nuestros efectos, basta ver que podemos encajar M en algún $\mathbb{R}^k$ con k grande. Sea $\{(U_1, \Phi_1), ..., (U_n, \Phi_n)\}$ un cubrimiento finito por cartas locales de M, y sea $\{\rho_1, ..., \rho_n\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento, definimos el encaje $\Gamma : M \to \mathbb{R}^{nm+n}$ / $\Gamma(x) = (\rho_1(x)\Phi_1(x), ..., \rho_n(x)\Phi_n(x), \rho_1(x), ..., \rho_n(x))$ $\forall\ x \in M$.

A.2. Algunas definiciones

En esta sección recordamos (a efectos de fijar notación) algunas definiciones y resultados básicos en el estudio de sistemas dinámicos. Por más detalles referimos al lector a [KH] o bien [PDM].

Definición. Sea $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, y sea $p \in M$ punto fijo de f. Decimos que p es *punto fijo hiperbólico* para f si todos los valores propios de d_pf tienen módulo distinto de 1. Si $p \in M$ es un punto periódico de f de período k, decimos que p es *punto periódico hiperbólico* para f si es punto fijo hiperbólico para f^k.

Valen los siguientes resultados (de ambos pueden encontrarse demostraciones en [PDM]):

Teorema (Hartman-Grobmann)**.** *Sean $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ y $p \in M$ punto fijo hiperbólico de f, entonces f y d_pf son localmente conjugadas, es decir, existen U entorno de p en M, V entorno del origen en T_pM y $h : U \to V$ homeomorfismo tal que:*

$$h \circ f = d_pf \circ h$$

Un corolario inmediato del teorema de Hartman-Grobmann es que los puntos fijos hiperbólicos de un difeomorfismo son aislados, en particular, los puntos fijos hiperbólicos de un difeomorfismo de una variedad compacta forman un conjunto finito. Luego, si denotamos por $\mathrm{Per}_n(f)$ al conjunto de los puntos periódicos de f de período menor o igual que n, y sabemos que todos estos son hiperbólicos, resulta que $\mathrm{Per}_n(f)$ es un conjunto finito. Recordemos ahora el famoso teorema de Kupka-Smale:

Teorema (Kupka-Smale, 1963)**.** *Existe $\mathcal{KS} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ residual / $\forall\ f \in \mathcal{KS}$ se cumple que:*

- *Todos los puntos periódicos de f son hiperbólicos.*
- $\forall\ p, q \in \mathrm{Per}(f)$ *se cumple que $W^s(p)$ y $W^u(q)$ son transversales.*

Definición. Sea $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, y sea $p \in M$ punto fijo hiperbólico de f. La *variedad estable* de p es $W^s(p) = \{x \in M \ / \ d(f^n(x), p) \to 0 \text{ si } n \to +\infty\}$, mientras que la *variedad inestable* de p es $W^u(p) = \{x \in M \ / \ d(f^{-n}(x), p) \to 0 \text{ si } n \to +\infty\}$. Si $p \in M$ es un punto periódico de f de período k, definimos su variedad estable como la variedad estable para f^k.

Vale el siguiente teorema, del cual puede encontrarse una demostración en [Sh]:

Teorema (Teorema de la variedad estable)**.** *Sean $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $p \in M$ punto fijo hiperbólico de f, $T_pM = E^s \oplus E^u$ la descomposición de T_pM según d_pf. Entonces $W^s(p)$ y $W^u(p)$ son subvariedades inmersas de clase C^1 tangentes en p a E^s y E^u respectivamente.*

Definición. Sea $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ y sea $\Lambda \subset M$ cerrado e invariante por f. Decimos que Λ es *hiperbólico* para f si $\forall\, x \in \Lambda$ el espacio tangente a M en x se descompone en una suma directa:

$$T_xM = E^s_x \oplus E^u_x$$

continua e invariante por df:

$$d_xf(E^s_x) = E^s_{f(x)} \text{ y } d_xf(E^u_x) = E^u_{f(x)} \ \forall\, x \in \Lambda$$

tal que existen $\lambda \in (0,1)$ y $c > 0$ tales que:

$$\|d_xf(v)\| \leq c\lambda\|v\| \ \forall\, x \in \Lambda, \ \forall\, v \in E^s_x$$

$$\|d_xf^{-1}(w)\| \leq c\lambda\|w\| \ \forall\, x \in \Lambda, \ \forall\, w \in E^u_x$$

Observar que un punto periódico p es hiperbólico si y sólo si $\mathcal{O}(p)$ es hiperbólico. Ejemplos mas interesantes de conjuntos hiperbólicos como la herradura de Smale, el solenoide, o el toro bajo el difeomorfismo inducido por la transformación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pueden encontrarse desarrollados en [Sh] o en [PDM].

Definición. Decimos que un conjunto invariante Λ es *aislado* si existe U entorno compacto de Λ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U) = \Lambda$.

El hecho de que un conjunto hiperbólico sea aislado es equivalente a que posea estructura de producto local:

Definición. Sea Λ un conjunto hiperbólico, sabemos que para ε suficientemente pequeño existe δ tal que dados $x, y \in \Lambda$ tales que $d(x,y) < \delta$ se cumple que $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ es un único punto. Decimos que Λ tiene *estructura de producto local* si para ε y δ pequeños este único punto pertenece a Λ.

Definición. Decimos que un difeomorfismo es *Axioma A* cuando el conjunto no errante es hiperbólico y es la clausura de los puntos periódicos.

A continuación enunciamos algunos resultados clásicos en la teoría:

Teorema (Descomposición espectral, Smale, 1967)**.** *Sea $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ Axioma A. Existe una cantidad finita de conjuntos compactos, invariantes según f, dos a dos disjuntos $\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_n$ tales que:*

1. $\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup ... \cup \Lambda_n$
2. Λ_i *es transitivo* $\forall\ i \in \{1, 2, ..., n\}$
3. *Cada Λ_i se descompone en una unión disjunta de compactos:*

$$\Lambda_i = \Lambda_{i,1} \cup \Lambda_{i,2} \cup ... \cup \Lambda_{i,n(i)}$$

permutados cíclicamente por f, es decir:

$$f(\Lambda_{i,j}) = \Lambda_{i,j+1}\ \forall\ j \in \{1, ..., n(i) - 1\}\ y\ f(\Lambda_{i,n(i)}) = \Lambda_{i,1}$$

Mas aún, f^{n_i} restricto a $\Lambda_{i,j}$ es topológicamente mixing[1] $\forall\ j \in \{1, ..., n(i)\}$

Definición. A los compactos Λ_i del teorema espectral les llamamos *piezas básicas* de f.

[1]Esto es, dados U,V abiertos en $\Lambda_{i,j}$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ k \geq k_0\ f^{kn_i}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Teorema (shadowing lemma)**.** *Sean $f \in \text{Diff}^1(M)$ y Λ hiperbólico para f. Existe U entorno de Λ y constantes $\alpha > 0$ y $K > 0$ tales que si*

$$\{x = x_0, x_1, ..., x_n = x\}$$

es una α_1-pseudo órbita de f contenida en U con $\alpha_1 < \alpha$, existe una órbita periódica de período n, $K\alpha_1$-cerca de la pseudo órbita dada, es decir,

$$\exists\ x' \in M\ /\ f^n(x') = x' \text{ y } d(f^i(x'), x_i) \leq K\alpha_1\ \forall\ 0 \leq i \leq n-1$$

Teorema (λ-lemma, Palis, 1969)**.** *Sean $f \in \text{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$, p punto fijo hiperbólico de f y $W \subset M$ subvariedad C^r tal que:*

- $\dim(W) = \dim(W^s(p))$.
- *W se intersecta transversalmente con $W^u(p)$ en un punto q.*

Entonces $f^{-n}(W)$ converge a $W^s(p)$ en el siguiente sentido: dados D entorno de p en $W^s(p)$ y $n \in \mathbb{N}$ existe un disco $D_n \subset f^{-n}(W)$ que es un entorno de $f^{-n}(q)$ en $f^{-n}(W)$ y tal que se cumple que para un n grande D_n y D son C^r cercanos.

El teorema espectral fue demostrado por Smale en [Sm] en 1967. Una prueba del lema de sombreado puede encontrarse en [Sh]. La prueba original del λ-lemma (o lema de inclinación) se encuentra en [P], aunque una demostración más sencilla puede encontrarse en [PDM].

Definición. Sean $f \in \text{Diff}^1(M)$, Λ un conjunto hiperbólico para f y $\varepsilon > 0$, la *variedad estable local* de tamaño ε de Λ es $W^s_\varepsilon(\Lambda) = \bigcup_{p\in\Lambda} W^s_\varepsilon(p)$, mientras que la *variedad inestable local* de tamaño ε de Λ es $W^u_\varepsilon(\Lambda) = \bigcup_{p\in\Lambda} W^u_\varepsilon(p)$. Análogamente, la *variedad estable* de Λ es $W^s(\Lambda) = \bigcup_{p\in\Lambda} W^s(p)$, mientras que la *variedad inestable* de Λ es $W^u(\Lambda) = \bigcup_{p\in\Lambda} W^u(p)$.

También para conjuntos hiperbólicos se tiene un teorema de la variedad estable:

Teorema (Teorema de la variedad estable para conjuntos hiperbólicos)**.** *Sean $f \in \text{Diff}^1(M)$ y Λ un conjunto hiperbólico para f, entonces para cualquier $x \in \Lambda$ se verifica que $W^s(x)$ y $W^u(x)$ son subvariedades inmersas en M de clase C^1, tangentes a E^s_x y E^u_x respectivamente.*

Definición. Sean $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ y Λ un conjunto hiperbólico para f, decimos que f presenta un *punto homoclínico* asociado a Λ si $\exists\, p \in W^s(\Lambda) \cap W^u(\Lambda) - \Lambda$.

A.3. Recurrencia

Hemos dicho en la introducción de esta monografía que el objetivo de los sistemas dinámicos es, dado un punto x en M y dado f difeomorfismo de M, estudiar la historia de x, es decir, el conjunto $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Para ello, comenzamos definiendo aquellos puntos con historia mas sencilla: decimos que x es un *punto fijo* de f si $f(x) = x$, y decimos que x es un *punto periódico* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Al menor n que cumpla la igualdad le llamamos *período* de x. Aprovechando la topología de la variedad podemos definir nociones más amplias de recurrencia: definimos primero el *α-límite* y el *ω-límite* de un punto x del siguiente modo:

$$\alpha(x) = \{y \in M : f^{-n_k}(x) \to y \text{ para alguna sucesión } n_k \subset \mathbb{N} \text{ tal que } n_k \to +\infty\}$$

$$\omega(x) = \{y \in M : f^{n_k}(x) \to y \text{ para alguna sucesión } n_k \subset \mathbb{N} \text{ tal que } n_k \to +\infty\}$$

Es decir, el ω-límite de una condición inicial describe a qué estado(s) tenderá nuestro sistema en el futuro, mientras que el α-límite describe lo mismo pero hacia el pasado. Aparentemente, aquellos puntos que están lejos del α-límite y del ω-límite de todo punto no contienen información muy interesante de la dinámica. Definimos el *conjunto límite* de un sistema dinámico:

$$L(f) = \overline{\bigcup_{x\in M} \alpha(x)} \bigcup \overline{\bigcup_{x\in M} \omega(x)}$$

Es fácil verificar que $L(f)$ es compacto e invariante para f. Si denotamos por $\mathrm{Per}(f)$ al conjunto de los puntos periódicos de f, es claro que $\overline{\mathrm{Per}(f)}$ es también compacto e invariante, y que se verifica la inclusión $\overline{\mathrm{Per}(f)} \subset L(f)$.

Decimos que un punto x es *recurrente hacia el futuro* si $x \in \omega(x)$, y que es *recurrente hacia el pasado* si $x \in \alpha(x)$. Finalmente, decimos que un punto es *recurrente* si lo es a pasado y a futuro. Aún cuando $L(f)$ parece contener toda la información de la dinámica, hay tipos de recurrencia más débiles que han resultado fundamentales en la teoría: decimos que un punto x es *errante* si existe U entorno de x en M tal que $f^n(U) \cap U = \emptyset$ para todo $n \geq 1$. Es decir, x es errante si puntos arbitrariamente cercanos a x no vuelven nunca a estar cerca de x. Definimos el conjunto *no errante* (y lo denotamos $\Omega(f)$) como el conjunto de puntos que no son errantes, es decir, x es no errante si dado U entorno de x existe $n \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Nuevamente es fácil verificar que $\Omega(f)$ es compacto e invariante para f, y que además, $\overline{\mathrm{Per}(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f)$.

Finalmente, definimos el importante concepto de recurrencia por cadenas: dado $\varepsilon > 0$ decimos que el conjunto $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una *ε-cadena* (o *ε-pseudo órbita*) si:

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \;\; \forall\, i \in \{0, 1, ..., n-1\}$$

Es decir, suponiendo que puntos que están a distancia menor que ε son indistinguibles para nosotros, no sabríamos distinguir entre una ε-cadena y un verdadero arco de órbita. Decimos que un punto x es *recurrente por cadenas* si dado $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena que comienza y termina en x, es decir, existe $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ ε-cadena tal que $x_0 = x_n = x$. Al conjunto de los puntos recurrentes por cadenas lo denotamos por $R(f)$. Es fácil ver que $R(f)$ es compacto e invariante para f, y que se cumple la cadena de inclusiones:

$$\overline{\mathrm{Per}(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset R(f)$$

Para cada una de estas inclusiones existen ejemplos en los cuales la inclusión es estricta. Para ilustrar las definiciones damos un ejemplo donde se obtienen puntos que no son recurrentes ni errantes. Para ello definimos el siguiente campo en el plano:

$$X(x, y) = (-y(x^2 + (y-1)^2), x(x^2 + (y-1)^2))$$

Es decir, a una rotación positiva de ángulo $\frac{\pi}{2}$ centrada en el origen la multiplicamos por un mapa escalar de clase C^∞ que se anula en el punto $(0, 1)$ y es estrictamente positivo en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 1)\}$. Si consideramos el flujo asociado al campo X se obtienen dos puntos fijos, el origen y el $(0, 1)$. Observar que, en el círculo unidad, el α-límite y el ω-límite de todo punto son exactamente el $(0, 1)$, en particular, ningún punto de $S^1 - \{(0,1)\}$ es recurrente ni a pasado ni a futuro. Sin embargo estos puntos son no errantes, pues cualquier disco centrado en un punto de $S^1 - \{(0,1)\}$ intersecta círculos centrados en el origen de radios mayores y menores que uno, y como estos círculos son invariantes y no contienen puntos fijos del flujo, la imagen del disco dado empieza a estirarse por adentro y por afuera de S^1 hasta cortarse a sí mismo desde un momento en adelante. Se tiene entonces un flujo en el plano que presenta puntos que no son recurrentes ni errantes (si se quiere adaptar el ejemplo a nuestro contexto basta multiplicar al campo X por un chichón C^∞ $\alpha : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ / $\alpha = 1$ en $B(0,2)$ y $\alpha = 0$ en $B(0,3)^c$. Levantamos a la esfera el tiempo uno del flujo inducido por el nuevo campo y obtenemos un difeomorfismo de una variedad compacta que presenta puntos que no son recurrentes ni errantes).

En conclusión, dado un sistema dinámico tenemos asociada una cadena creciente (según la inclusión) de cuatro compactos invariantes que representan diferentes tipos de recurrencia y que en general pueden ser diferentes unos de otros. Una pregunta natural sería: ¿Estos conjuntos son iguales en la mayoría de los sistemas dinámicos? Desde el punto de vista topológico, se ha obtenido una respuesta afirmativa a esta cuestión: genéricamente en los difeomorfismos de clase C^1 (equipados con la topología C^1) de una variedad Riemanniana compacta, conexa y sin borde se cumple que:

$$\overline{\mathrm{Per}(f)} = L(f) = \Omega(f) = R(f)$$

En estas igualdades se resumen cuarenta años de teoría, y el trabajo de muchos especialistas: Charles Pugh obtuvo la igualdad genérica $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega(f)$ a fines de la década del 60 en [Pu2] y recién en el 2004, Christian Bonatti y Sylvain Crovisier obtuvieron la igualdad genérica $\overline{\mathrm{Per}(f)} = R(f)$ en [BC]. Ambos resultados están basados integramente en lemas de conexión de órbitas mediante perturbaciones C^1 arbitrariamente pequeñas: el Teorema de Densidad de Pugh (del cual vimos dos demostraciones diferentes en el capítulo 4) es una consecuencia del C^1 closing lemma (que también hemos probado aquí), mientras que el resultado de Bonatti y Crovisier es una consecuencia del connecting lemma genérico para pseudo órbitas enunciado en la introducción.

Bibliografía

[AS] Ralph Abraham, Stephen Smale, Nongenericity of Ω-stability, *Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math. A.M.S.*, **14**, 5-8, 1970.

[BC] Christian Bonatti, Sylvain Crovisier, Récurrénce et génericité, *Invent. Math.*, **158**, 33-104, 2004.

[CMP] Carlos Maria Carballo, Carlos Arnoldo Morales, Maria Jose Pacifico, Homoclinic classes for generic C^1 vector fields, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **23**, 403-415, 2003.

[D] Alan Dankner, On Smale's Axiom A dynamical systems, *Annals of Math.*, **107**, 517-553, 1978.

[DoC] Manfredo Do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA, Projeto Euclides, 1979.

[GP] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[Hau] Felix Hausdorff, *Set Theory*, Chelsea Publishing Company, 1962.

[Hay] Shuhei Hayashi, Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1-stability and Ω-stability conjectures for flows, *Annals of Math.*, **145**, 81-137, 1997, y *Annals of Math.*, **150**, 353-356, 1999.

[KH] Anatole Katok y Boris Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995.

[L] Shantao Liao, An extension of the C^1 closing lemma, *Acta Sci. Natur. Univ. Pekinensis*, **81m**, 1-41, 1979.

[M1] Ricardo Mañé, On the creation of homoclinic points, *Publ. Math. IHES*, **66**, 139-159, 1988.

[M2] Ricardo Mañé, A proof of the C^1 stability conjecture, *Publ. Math. IHES*, **66**, 161-210, 1988.

[N] John Nash, The imbedding problem for Riemannian manifolds, *Annals of Math.*, **63**, 20-63, 1956.

[NP] Sheldon Newhouse, Jacob Palis, Hyperbolic nonwandering sets on two-dimensional manifolds, *Proc. Salvador Symp. on Dynamical Systems*, Academic Press, New York, 293-301, 1973.

[P] Jacob Palis, On Morse-Smale dynamical systems, *Topology*, **8**, 385-405, 1969.

[PDM] Jacob Palis y Welington de Melo, *Introdução aos sistemas dinâmicos*, IMPA, Projeto Euclides, 1978.

[PT] Jacob Palis y Floris Takens, *Hyperbolicity and Sensitive-Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Pu1] Charles Pugh, The closing lemma, *Amer. J. of Math.*, **89**, 956-1009, 1967.

[Pu2] Charles Pugh, An improved closing lemma and a general density theorem, *Amer. J. of Math.*, **89**, 1010-1021, 1967.

[Pu3] Charles Pugh, The C^1 connecting lemma, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **4**, 545-553, 1992.

[S] Andrés Sambarino, *Piezas elementales de la dinámica genérica*, Monografía de Licenciatura, CMAT, 2007.

[Sh] Michael Shub, *Global Stability of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1987.

[Sm] Stephen Smale, Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math Soc.*, **73**, 747-817, 1967.

[W1] Lan Wen, The C^1 closing lemma for non-singular endomorphisms, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **11**, 393-412, 1991.

[W2] Lan Wen, The C^1 closing lemma for endomorphisms with finitely many singularities, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **114**, 217-223, 1992.

[WX1] Lan Wen y Zhihong Xia, A basic C^1 perturbation theorem, *Journal of differential equations*, **154**, 267-283, 1999.

[WX2] Lan Wen y Zhihong Xia, C^1 connecting lemmas, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**, 5213-5230, 2000.