



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO MONOGRÁFICO

Introducción a las Wavelets

Autor:
Mario González Olmedo

Orientador:
Fernando Abadie

6 de setiembre de 2013

Resumen

En el presente trabajo daremos una introducción general a la teoría de los wavelets (en castellano, *ondículas* u *onditas*). Observaremos algunas carencias que tiene la herramienta básica de la teoría clásica de Fourier, a saber, la Transformada de Fourier, en aplicaciones del procesamiento de señales, y con esta motivación nos introducimos a esta nueva teoría.

En particular, haremos un estudio de la transformada wavelet continua, una versión de la identidad de Parseval y su fórmula de inversión. Luego pasaremos a la transformada wavelet discreta y su relación con la teoría de los marcos en espacios de Hilbert. Repasaremos el concepto de análisis multiresolución de Meyer-Mallat y su utilidad para la construcción de wavelets ortonormales (bases de $L^2(\mathbb{R})$). Por último veremos cómo construir wavelets con soporte compacto y sus ventajas, y daremos alguna idea de sus múltiples aplicaciones, en particular en el análisis de imágenes digitales para la compresión y transmisión progresiva de las mismas.

Índice general

1. Introducción	2
1.1. Motivación	2
1.2. Estructura de la monografía	7
1.3. Notas históricas	8
2. Transformada y series wavelet	11
2.1. Transformada wavelet continua	11
2.2. Discretizando la transformada wavelet	17
2.3. Marcos en espacios de Hilbert	19
2.4. Marcos de wavelets	26
3. Wavelets ortonormales y análisis multiresolución	29
3.1. Definiciones	29
3.2. Conjuntos ortonormales y de Riesz	31
3.3. Ecuación de escala y constantes de estructura	36
3.4. De la función de escala a un AMR	38
3.5. De la función de escala a una wavelet ortonormal	41
3.6. Wavelets con soporte compacto	47
3.7. Implementación	53
3.8. Wavelets en \mathbb{R}^n	58
4. Aplicaciones	61
A. Apéndice	67

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

El área del **procesamiento de señales** se encarga de estudiar operaciones y algoritmos que permitan “analizar” señales, es decir, descomponer la señal, estudiar sus componentes, deducir propiedades, reconstruir la señal original (o aproximarla) a partir de sus componentes o algunos de ellos, etc. Podemos pensar una señal unidimensional (analógica, por ejemplo una señal acústica) como una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o una señal bidimensional (por ejemplo, una imagen en escala de grises) como una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, etc. En las aplicaciones, estamos interesados en estudiar señales con “energía” finita, es decir, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ con la norma usual:

$$\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty$$

El análisis de Fourier es muy utilizado en diversas ramas de la ciencia. A través de la Transformada de Fourier podemos definir el concepto de “**frecuencia**” presente en una función, y con ella podemos descomponer una función periódica, o más en general, de $L^2(\mathbb{R})$, en su contenido espectral (frecuencias), e incluso reconstruir la función original a través de él.

El concepto de frecuencia se puede asociar a la dilatación de las funciones 2π -periódicas $\cos(t)$ y $\sin(t)$, o sea, $\cos(nt)$ y $\sin(nt)$, o equivalentemente, a las funciones e^{int} . Si consideramos

$$L^2[0, 2\pi] = \left\{ f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} / \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

tomando en $L^2[0, 2\pi]$ el producto interno usual

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

entonces $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ constituye una base ortonormal de dicho espacio. Luego, para cada $f \in L^2[0, 2\pi]$ (o si f es una función 2π -periódica definida en \mathbb{R}), se define su **transformada de Fourier discreta** $\widehat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ como:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Cada coeficiente $\widehat{f}(n)$ representa la cantidad de “frecuencia n ” presente en la función (asociada a e^{int}).

Por ejemplo, si consideramos la función

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = 10 \operatorname{sen}(3t) + 2 \operatorname{cos}(20t)$$

la cual podemos pensar como la superposición de una onda con frecuencia 3 y amplitud 10, con otra de frecuencia 20 y amplitud 2, y analizamos los valores que arroja su transformada de Fourier, obtenemos

$$|\widehat{f}(n)| = \begin{cases} 5 & \text{si } |n| = 3 \\ 1 & \text{si } |n| = 20 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y entonces, si consideramos n y $-n$ como la misma frecuencia (son la misma onda en el caso de $\operatorname{cos}(nt)$ u opuestas en el caso de $\operatorname{sen}(nt)$) vemos que

$$|\widehat{f}(n)| + |\widehat{f}(-n)| = \begin{cases} 10 & \text{si } n = 3 \\ 2 & \text{si } n = 20 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para $n \geq 0$, lo cual dice que la función f contiene sólo dos frecuencias: $n = 3$ con amplitud 10, y $n = 20$ con amplitud 2.

A partir de estos coeficientes, se puede reconstruir la función f a través de:

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int}$$

Para funciones de $L^2(\mathbb{R})$ se define la **transformada de Fourier continua**

$$Tf(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt \quad (1.1)$$

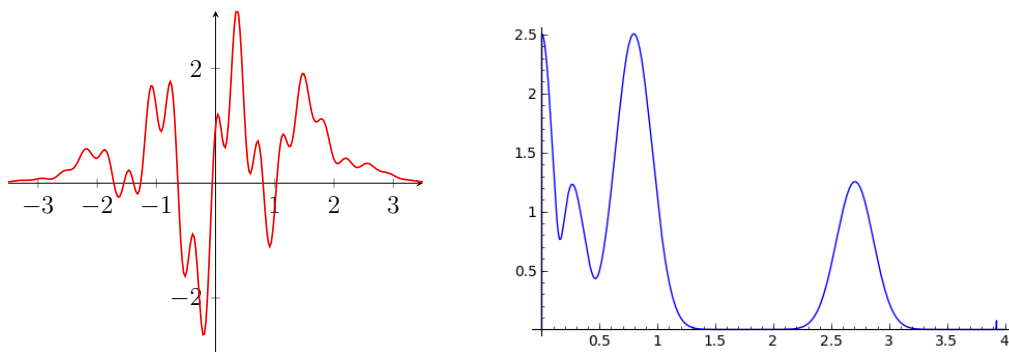


Figura 1.1: Una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ y su transformada de Fourier $|\widehat{f}(\xi)|$

En este caso, consideramos frecuencias $\xi \in \mathbb{R}$.

De la misma forma, podemos reconstruir la función f mediante:

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi t} d\xi$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{R})$, puntual si f es continua en t , entre otras.

En el apéndice se encuentran definiciones y propiedades básicas del Análisis de Fourier, en el caso discreto y continuo.

Sin embargo, la transformada de Fourier no sirve por sí sola para estudiar el contenido espectral de una función en un momento específico. Es decir, si quisiéramos conocer las frecuencias que están presentes en una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ en un entorno de $t_0 \in \mathbb{R}$, la transformada (1.1) no es adecuada, ya que la modificación de f en un intervalo abierto arbitrario altera todo el contenido espectral de f . Además, para conocer el valor de \widehat{f} en una sola frecuencia ξ , es necesario conocer completamente f tanto en el pasado como en el futuro. Es como si el análisis de Fourier nos revelara qué notas musicales están presentes en una canción, ¡pero no nos dijera en qué momentos se encuentran!

Esto muestra que la transformada (1.1) no es muy práctica si quisiéramos estudiar funciones que presenten frecuencias que evolucionan con el tiempo, como lo es el caso de señales acústicas, imágenes, etc.

Un intento de remediar esta situación es introducir una “ventana” que, al trasladarla a lo largo de la recta, permita localizar el análisis en el tiempo. Formalmente, si introducimos $g \in L^2(\mathbb{R})$ como ventana (con la regularidad

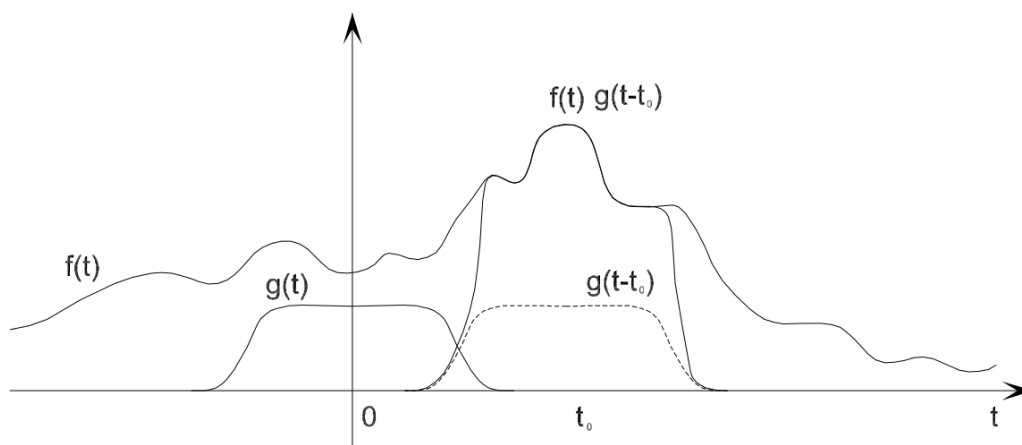


Figura 1.2: Transformada de Gabor

necesaria), podemos definir la siguiente **transformada de Gabor**:

$$T_g f(\xi, t_0) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t - t_0)e^{-2\pi i \xi t} dt \quad (1.2)$$

que puede verse como la transformada de Fourier de la función $t \mapsto f(t)g(t - t_0)$, la cual consiste en aplicar la “ventana” a la función f en t_0 . Una elección clásica para g es la Gaussiana $g(t) = e^{-t^2}$.

Otra forma de interpretar a la transformada (1.2) es la siguiente: en vez de analizar la función f en términos de las exponenciales $t \mapsto e^{2\pi i \xi t}$ (cuya frecuencia es ξ a lo largo de \mathbb{R}) lo hacemos en términos de las funciones $t \mapsto g(t - t_0)e^{2\pi i \xi t}$ (cuya frecuencia es ξ localizada en el instante t_0).

Es decir, estamos utilizando la siguiente transformada:

$$T_g f(\xi, t_0) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g^{\xi, t_0}(t)} dt \quad (1.3)$$

donde $g^{\xi, t_0}(t) = g(t - t_0)e^{2\pi i \xi t}$. En el caso discreto, consideramos el conjunto $\{g_{m,n} = g(\cdot - n)e^{2\pi i m \cdot}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$, el cual, bajo cierta regularidad de la ventana g , es una base de $L^2(\mathbb{R})$, llamada **base de Gabor**. (Cabe aclarar que en esta monografía se utilizará libremente un punto “.” para denotar el espacio que ocupa una variable en una función, en los momentos en que sea conveniente. Por ejemplo, $f(2^j \cdot - k)$ se usará para representar a la función $t \mapsto f(2^j t - k)$, etc.)

Esto soluciona algunos de los problemas mencionados anteriormente, pero aún presenta defectos: el tamaño Δ_g de la ventana g , que puede ser definido,

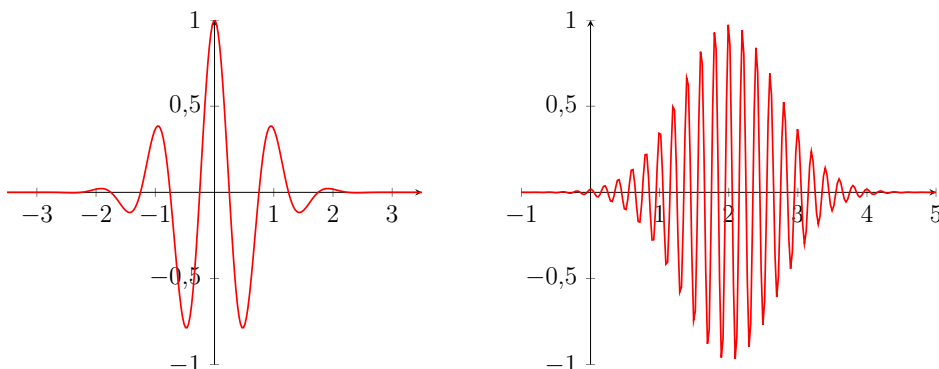


Figura 1.3: $\text{Re}(g^{\xi, t_0}(t))$ para $\xi = 1, t_0 = 0$ y $\xi = 5, t_0 = 2$ donde $g(t) = e^{-t^2}$

por ejemplo, como (asumiendo $t \mapsto tg(t) \in L^2(\mathbb{R})$):

$$t_g^* := \|g\|^{-2} \int_{\mathbb{R}} t |g(t)|^2 dt \quad (\text{centro de la ventana})$$

$$\Delta_g := \|g\|^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} (t - t_g^*)^2 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

es fijo. Debido a que la longitud de una onda periódica (es decir, el mínimo $T > 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo t) es inversamente proporcional a la frecuencia, para que altas frecuencias puedan ser detectadas con mayor precisión es necesario que el tamaño de la ventana sea pequeño; en cambio, tamaños grandes de la ventana se necesitan para detectar con precisión bajas frecuencias. Por lo tanto, esta nueva transformada no sería del todo eficaz para analizar funciones que presenten un amplio espectro de frecuencias.

Además, el siguiente teorema nos advierte que no podremos obtener bases de Gabor ortonormales y bien localizadas en tiempo y frecuencia a la vez:

Teorema 1.1.1 (Balian-Low). Si $g \in L^2(\mathbb{R})$ es tal que $\{g_{m,n}\}$ es base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}} t^2 |g(t)|^2 dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right) = +\infty$$

Parte del estudio de la teoría de las Wavelets consiste en encontrar funciones $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ que estén bien localizadas en tiempo y frecuencia, y que generen funciones ψ^{ξ, t_0} que formen bases de $L^2(\mathbb{R})$ y tales que la transformada

$$T_\psi f(\xi, t_0) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi^{\xi, t_0}(t)} dt$$

colme nuestras necesidades.

1.2. Estructura de la monografía

Luego de realizados estos comentarios sobre la motivación de buscar nuevas estructuras (y sus correspondientes transformadas) que nos sean útiles para analizar funciones de $L^2(\mathbb{R})$, en la siguiente sección repasaremos algunos detalles históricos que han acompañado al desarrollo de la teoría de las wavelets y sus protagonistas.

El cuerpo principal de esta monografía se divide en dos partes. En el Capítulo 2, comenzaremos definiendo el concepto más general de *wavelet* y de *transformada wavelet continua*. En la Sección 2.1 probaremos sus propiedades fundamentales, a saber, la *Identidad de Parseval* y la *Fórmula de Inversión*, en analogía con la transformada de Fourier continua. En la Sección 2.2 nos concentraremos en la *transformada wavelet discreta* y plantearemos los objetivos que queremos alcanzar con la misma, principalmente el de obtener un buen sistema de análisis-síntesis de funciones de $L^2(\mathbb{R})$, los cuales resolveremos en las secciones siguientes. La Sección 2.3 estará dedicada al estudio de los *marcos* en espacios de Hilbert, y en la Sección 2.4 aplicamos este estudio en el contexto de las wavelets en $L^2(\mathbb{R})$.

En el Capítulo 3 veremos cómo obtener bases ortonormales de $L^2(\mathbb{R})$ que sean generadas a partir de dilataciones y traslaciones de una función (llamada *wavelet madre*). En la Sección 3.1 analizaremos el ejemplo más simple: la *wavelet de Haar*, y a partir del mismo definiremos el concepto de *análisis multiresolución (AMR)*. En las Secciones 3.2 a 3.5 estudiaremos las propiedades fundamentales de los AMR que nos permiten obtener otros ejemplos de bases ortonormales de $L^2(\mathbb{R})$ con más regularidad que la de Haar. La Sección 3.6 está dedicada a la construcción de wavelets con soporte compacto, muy importantes en las aplicaciones numéricas, y la Sección 3.7 estará dedicada a dar una idea de cómo puede generalizarse el estudio de los AMR a $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Para finalizar, en el Capítulo 4 se mencionarán brevemente algunas aplicaciones de la teoría de las wavelets (en particular, de los AMR) en el *procesamiento de imágenes digitales*.

Por completitud, se incluye un Apéndice con los resultados más importantes del análisis de Fourier y otros resultados utilizados en esta monografía.

1.3. Notas históricas

Si bien la teoría de las wavelets es relativamente reciente (unos 25 años), sus ideas principales se encuentran en diversas investigaciones anteriores. Su formalización proviene de la unificación de técnicas comunes utilizadas en campos como la física cuántica, procesamiento de señales, visión por computadora, entre otros.

En 1982, Jean Morlet, ingeniero francés, se encontraba trabajando en la empresa petrolífera *Elf Aquitaine*, en el siguiente problema: generando señales acústicas en la superficie de la Tierra y registrando las ondas reflejadas, a través de las frecuencias de las mismas se puede intentar clasificar las distintas capas subterráneas (ya que cada capa refleja algunas frecuencias y atrapa otras). Utilizó la transformada de Gabor (1.2), pero se dio cuenta que presentaba algunas dificultades de oscilación en altas y bajas frecuencias, que derivan en inestabilidad en la reconstrucción numérica. Morlet decidió trabajar con la función ψ definida como $\widehat{\psi}(\xi) = \xi^2 e^{-\xi^2/2}$, y filtrar la señal $f(t)$ de esta manera:

$$f(t) \rightarrow f_m(t) = \int f(t-s) a_0^{-m} \overline{\psi}(-a_0^{-m}s) ds$$

Además, la observación clave de Morlet fue que, para a_0 suficientemente pequeño, la cantidad $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(a_0^m \xi)|^2$ es casi constante. Este valor permite una reconstrucción estable y rápida de f a partir de f_m , incluso para $a_0 = 2$. La segunda idea de Morlet fue muestrear de modo de obtener una buena representación de f_m . Como $\widehat{\psi}(2^m \cdot)$ puede ser visto como un filtro de paso-banda (es decir, un tipo de filtro que deja pasar un determinado rango de frecuencias de una señal y atenúa el paso del resto) de ancho proporcional a 2^{-m} , siguiendo la regla de Shannon para muestrear señales de banda limitadas (es decir, $\text{sop}(f) \subset [-\gamma, \gamma]$), Morlet decidió muestrear f_m en una secuencia de puntos a distancia proporcional a 2^m . Encontró experimentalmente que de esta forma se obtiene una buena reconstrucción de la señal original, y por tanto utilizó los coeficientes

$$C(m, n) = f_m(n2^m) = 2^{-m} \int f(t) \overline{\psi}(2^{-m}t - n) dt$$

Más adelante, Morlet comenzó a trabajar con Alex Grossmann, físico teórico del *Centre de Physique Theorique* (CPT) en la extensión de su transformada. Grossmann y algunos colegas (incluyendo Thierry Paul e Ingrid Daubechies) relacionaron la transformada wavelet de Morlet con la teoría de estados coherentes en física cuántica (ver [9],[10]). En vez de mirar dilataciones discretas, utilizaron la *Transformada Wavelet Continua*, en la cual las

dilataciones son reales:

$$f \rightarrow C(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(t) \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad a > 0, b \in \mathbb{R}$$

Otro aporte importante de Grossmann fue que el problema de reconstruir de forma estable la señal f a partir de sus coeficientes discretos estaba relacionado con la teoría de los *marcos*. La noción de *marco* (también *estructura oblicua*, o en inglés, *frame*) fue introducida en 1952 por Duffin y Schaeffer (ver [7]). El problema era reconstruir funciones de banda limitada a partir de muestras no uniformes $(f(\lambda_n))_{n \in \mathbb{Z}}$. Probaron que dicho problema es equivalente a la existencia de constantes $A, B > 0$ tales que para toda $f \in L^2[-\gamma, \gamma]$ se cumpla

$$A \int_{-\gamma}^{\gamma} |f(t)|^2 dt \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\gamma}^{\gamma} f(t) e^{i\lambda_n t} dt \right|^2 \leq B \int_{-\gamma}^{\gamma} |f(t)|^2 dt$$

y entonces definieron un marco en un espacio de Hilbert \mathcal{H} como una familia $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que, para ciertos $A, B > 0$ y toda $f \in \mathcal{H}$ se cumple $A\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$. En el contexto de las wavelets, fue Daubechies (ver [5], págs. 67-69) quien fue capaz de estimar las constantes A, B para una gran variedad de wavelets ψ .

En 1985, el análisis a través de wavelets entra en el terreno matemático. Yves Meyer era profesor de la *Ecole Polytechnique*, y sus estudios se centraban en la teoría de los operadores de Calderón-Zygmund, de los años 50 (ver [14]). Al enterarse de la transformada de Grossmann, Meyer entendió la conexión que había entre esta teoría y lo hecho por Morlet. La primera contribución de Meyer, junto a Daubechies y Grossmann, fue la construcción de una descomposición wavelet más sencilla: construyó una wavelet ψ para la cual se cumple:

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

donde $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ y $\hat{\psi} \in C_c^\infty$. Desde entonces, Yves Meyer y Ronald Coifman (Yale University) se han ocupado del desarrollo de la teoría de las wavelets y sus aplicaciones en toda dirección, y su invitación a científicos de varias áreas y países a discutir con ellos tópicos de sus campos relacionados, ayudó a que la teoría de las wavelets tuviera una gran difusión a nivel científico.

En 1986, Stéphane Mallat estaba preparando su doctorado en ingeniería eléctrica en Philadelphia, e introdujo la transformada wavelet rápida. Aplicaciones naturales de esta nueva herramienta fueron la compresión de datos en procesamiento de señales o imágenes, y detección de bordes o texturas en visión por computador. Desarrolló junto a Meyer lo que hoy llamamos Análisis Multiresolución, que permite un análisis de las señales a diferentes escalas de resolución.

Resumiendo, entre 1982 y 1988, la teoría de las wavelets ha tenido un constante desarrollo, que se vio enriquecido por diversos campos de la ciencia y, por ende, por desarrollos que partieron de puntos de vista y aplicaciones distintos, pero que en conjunto aportaron a formar una teoría que constituye un lenguaje común para varias áreas de la ciencia. A partir de allí, y hasta el día de hoy, este campo ha tenido diversas aplicaciones, en muchos casos sustituyendo la utilización de la transformada de Fourier. Por mencionar algunas, tenemos dinámica molecular, astrofísica, óptica, mecánica cuántica, gráficos por computador, reconocimiento de voz, etc.

En 1992, el FBI elige un método de wavelets desarrollado por Tom Hopper, de la división de Servicios de información criminal del FBI, y Jonathan Bradley y Chris Brislawn, del Laboratorio Nacional de Los Alamos, para comprimir su enorme base de datos de huellas dactilares. En 1995, Pixar Studios presenta la película Toy Story, la primera película de dibujos animados realizada completamente por computadora. En Toy Story 2, algunas formas se realizan mediante superficies de subdivisión, una técnica relacionada con las wavelets.

Quizás, la aplicación más popular sea en el área de compresión de imágenes, en la cual se obtuvieron, mediante el análisis con wavelets, los formatos de JPEG 2000 (alternativa a JPEG estándar) y DjVu (alternativa a PDF para documentos escaneados). Sobre el final de esta monografía, analizaremos brevemente la conexión que tiene la descomposición multiresolución posible utilizando wavelets, con técnicas de compresión de imágenes digitales.

Para una reseña histórica más completa, pueden consultarse [6] y [12].

Capítulo 2

Transformada y series wavelet

En el presente capítulo nos introduciremos en el concepto de *wavelet* y sus correspondientes *transformadas wavelet* continua y discreta. En la Sección 2.1 definiremos el concepto de wavelet, la transformada wavelet continua, y obtendremos fórmulas de Parseval y de inversión análogas a las de la transformada de Fourier. En la Sección 2.2 estudiaremos cómo se puede “discretizar” esta transformada y veremos cómo se relacionan los problemas de reconstrucción de una función a partir de sus coeficientes (discretos) con la teoría de los *marcos*. La Sección 2.3 estará dedicada al estudio de los marcos en espacios de Hilbert, y en la Sección 2.4 aplicamos este estudio en el contexto de las wavelets en $L^2(\mathbb{R})$.

2.1. Transformada wavelet continua

Definición 2.1.1. Sean $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\psi \neq 0$ y $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Utilizaremos la siguiente notación:

$$\psi^{a,b}(t) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Observar que $\psi^{a,b}$ consiste en una dilatación de ψ con factor a y una traslación de valor b , y que $\|\psi^{a,b}\| = \|\psi\|$.

Si se verifica la **condición de admisibilidad**:

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty \tag{2.1}$$

decimos que ψ es una **wavelet** (u *ondícula*). En este caso, definimos la **Transformada Wavelet** de $f \in L^2(\mathbb{R})$ asociada a ψ como:

$$W_\psi f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad W_\psi f(a, b) := \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi^{a,b}(t)} dt$$

Observación 2.1.2. Si V es un espacio vectorial, sea $\text{Aut}(V)$ su grupo de automorfismos. Una *representación* de un grupo G en V es un homomorfismo de grupos $u : G \rightarrow \text{Aut}(V)$. Utilizamos la notación $u_g = u(g)$ para $g \in G$. Si V es un espacio de Hilbert, decimos que u es una *representación unitaria* si $\langle u_g v, u_g w \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo $g \in G$, $v, w \in V$ y u es débilmente continua, es decir, el mapa $g \mapsto \langle u_g v, w \rangle$ con $g \in G$ es continuo para todo $v, w \in V$.

El *grupo afín* es el subgrupo G de $GL_2(\mathbb{R})$ cuyos elementos son de la forma $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Fijados $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ y $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, definamos

$$u_g \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad u_g \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \psi^{a,b}(t)$$

Entonces se tiene que u_g es un operador unitario en $L^2(\mathbb{R})$, y además $u_g u_h = u_{gh}$ y $u_{g^{-1}} = u_g^* \forall g, h \in G$. Luego, si $f, h \in L^2(\mathbb{R})$ y $g \in G$ se tiene que

$$\langle u_g f, u_g h \rangle = \langle f, u_{g^{-1}} u_g h \rangle = \langle f, h \rangle$$

Es decir, $u : G \rightarrow \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}))$ es una representación unitaria de G en $L^2(\mathbb{R})$, donde $\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}))$ es el grupo de automorfismos unitarios de $L^2(\mathbb{R})$.

Por lo tanto, identificando (a, b) con $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la transformada wavelet que acabamos de definir se puede expresar en términos de la representación unitaria u de la siguiente manera: $W_\psi f(a, b) = \langle f, u_{(a,b)} \psi \rangle$. Este tipo de construcción permite definir transformadas wavelet en otros espacios (ver también, relacionada con este enfoque, la Observación 2.1.5).

Intuitivamente, así como $\widehat{f}(\xi)$ representa la “cantidad de frecuencia ξ ” presente en la función f , el valor $W_\psi f(a, b)$ es la “cantidad de la onda ψ a escala a ” presente en f en el instante b . A mayor valor de a más ancha es la onda $\psi^{a,b}$ y, por lo tanto, menor es la “frecuencia” asociada.

Más adelante justificaremos la necesidad de imponer esta condición de admisibilidad (2.1).

Observación 2.1.3. Calculemos el “tamaño de la ventana” $\psi \neq 0$ a escala a . Si asumimos que $t \mapsto t\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, el centro y el tamaño de la ventana se definen como

$$t_\psi^* := \|\psi\|^{-2} \int_{\mathbb{R}} t |\psi(t)|^2 dt$$

$$\Delta_\psi := \|\psi\|^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} (t - t_\psi^*)^2 |\psi(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

y es fácil ver que $\Delta_{\psi^{a,b}} = |a|\Delta_\psi$. En efecto:

$$\begin{aligned}
t_{\psi^{a,b}}^* &= \|\psi^{a,b}\|^{-2} \int_{\mathbb{R}} t \left| \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \right|^2 dt = \|\psi\|^{-2} \int_{\mathbb{R}} (ax+b) |\psi(x)|^2 dx \\
&= \|\psi\|^{-2} \left(a \int_{\mathbb{R}} x |\psi(x)|^2 dx + b \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx \right) = at_\psi^* + b \\
\Delta_{\psi^{a,b}} &= \|\psi^{a,b}\|^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} (t - t_{\psi^{a,b}}^*)^2 \left| \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \right|^2 dt \right)^{1/2} \\
&= \|\psi\|^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} (ax+b - (at_\psi^* + b))^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&= |a| \|\psi\|^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} (x - t_\psi^*)^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} = |a|\Delta_\psi
\end{aligned}$$

Luego, a mayor frecuencia (la cual es inversamente proporcional a a) menor es el valor de a y, por lo tanto, menor es el tamaño de la ventana $\psi^{a,b}$. Es decir, el tamaño de la ventana se adapta a cada frecuencia que queramos estudiar, tal como debería ser, por lo comentado en la sección anterior.

La siguiente proposición es una versión de la identidad de Parseval para wavelets (ver Apéndice por propiedades de la transformada de Fourier):

Proposición 2.1.4. Supongamos que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es una wavelet. Entonces, para todo par $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ se cumple:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt = C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} \frac{da db}{a^2} \quad (2.2)$$

Demostración. Si usamos la notación $\psi^r(t) = \overline{\psi(-t)}$, entonces

$$W_\psi f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi \left(\frac{t-b}{a} \right)} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{a,0}^r(b-t) dt = f * \psi_{a,0}^r(b)$$

(ver definición y propiedades de la convolución $f * g$ en $L^2(\mathbb{R})$ en el Apéndice). Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi_{a,0}^r}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(-t/a)} e^{-2\pi i t \xi} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} |a| \overline{\psi(x)} e^{-2\pi i a x \xi} dx \\
&= \sqrt{|a|} \overline{\psi^r(a\xi)}
\end{aligned}$$

Luego,

$$W_\psi \widehat{f(a, \cdot)}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{\psi}_{a,0}(\xi) = \sqrt{|a|} \widehat{f}(\xi) \widehat{\psi}(a\xi)$$

Por la identidad de Parseval para la transformada de Fourier

$$\int_{\mathbb{R}} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} db = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} |a| |\widehat{\psi}(a\xi)|^2 d\xi$$

Integrando con respecto a da/a^2 , aplicando Fubini y luego Parseval, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} \frac{da db}{a^2} &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(a\xi)|^2}{|a|} da \right) d\xi \\ &= C_\psi \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi = C_\psi \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt \end{aligned}$$

Esta última sustitución es válida porque

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(a\xi)|^2}{|a|} da = \int_{\mathbb{R}} |\xi| \frac{|\widehat{\psi}(a\xi)|^2}{|a\xi|} da = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(x)|^2}{|x|} dx = C_\psi$$

□

Observación 2.1.5. Como $\frac{da db}{a^2}$ es la medida de Haar en el grupo afín G , la fórmula (2.2) se puede escribir así:

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{C_\psi} \langle u_{(a,b)} f, u_{(a,b)} g \rangle_{L^2(G)}$$

donde el producto interno en el segundo espacio se define como

$$\langle F, G \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} F(a, b) \overline{G(a, b)} \frac{da db}{a^2}$$

De esta proposición se deduce, normalizando $C_\psi = 1$, que $f \mapsto W_\psi f$ es una isometría de $L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(G)$.

A continuación veremos la fórmula de inversión.

Proposición 2.1.6. Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una wavelet. Para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ y casi todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0, A, B \rightarrow \infty} \left\| f(t) - C_\psi^{-1} \iint_{\epsilon < |a| < A, |b| < B} W_\psi f(a, b) \psi^{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \right\| = 0$$

es decir, en $L^2(\mathbb{R})$ tenemos la **fórmula de inversión**:

$$f(t) = C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} W_\psi f(a, b) \psi^{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \quad (2.3)$$

Si además ψ es continua, entonces la convergencia de (2.3) es puntual en cada punto de continuidad de f .

Demostración. Utilicemos la notación

$$S_{\epsilon, A, B} f(t) = C_\psi^{-1} \iint_{\epsilon < |a| < A, |b| < B} W_\psi f(a, b) \psi^{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}$$

Veamos primero que esta integral converge en casi todo punto $t \in \mathbb{R}$.

Si D es el dominio de integración de $S_{\epsilon, A, B} f(t)$, por Tonelli es claro que

$$\int_D |W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)}| \frac{da db}{a^2} = \int_{D \times \mathbb{R}} |W_\psi f(a, b) \psi^{a,b}(t) \overline{g(t)}| \frac{da db}{a^2} dt < \infty$$

para toda $g \in L^2(\mathbb{R})$, en particular para $g = \chi_D$ y por lo tanto

$$\int_{D \times \mathbb{R}} |W_\psi f(a, b) \psi^{a,b}(t)| \frac{da db}{a^2} dt < \infty$$

Esto implica que en casi todo punto $t \in \mathbb{R}$ se cumple

$$|S_{\epsilon, A, B} f(t)| \leq C_\psi^{-1} \int_D |W_\psi f(a, b) \psi^{a,b}(t)| \frac{da db}{a^2} < \infty$$

Observamos que $\|f - S_{\epsilon, A, B} f\| = \sup_{\|g\|=1} |\langle f - S_{\epsilon, A, B} f, g \rangle|$.

Primero, usando Fubini:

$$\begin{aligned} \langle S_{\epsilon, A, B} f, g \rangle &= C_\psi^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\epsilon < |a| < A, |b| < B} W_\psi f(a, b) \psi^{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \right) \overline{g(t)} dt \\ &= C_\psi^{-1} \int_{\epsilon < |a| < A, |b| < B} W_\psi f(a, b) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{g(t)} \psi^{a,b}(t) dt \right) \frac{da db}{a^2} \\ &= C_\psi^{-1} \int_{\epsilon < |a| < A, |b| < B} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} \frac{da db}{a^2} \end{aligned}$$

Si $\|g\| = 1$, recordando (2.2), tenemos que

$$\begin{aligned} |\langle f - S_{\epsilon, A, B} f, g \rangle| &= |\langle f, g \rangle - \langle S_{\epsilon, A, B} f, g \rangle| \\ &= \left| \int_{\{\epsilon < |a| < A, |b| < B\}^c} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} \frac{da db}{a^2} \right| \\ &\leq \left(\int_{\{\epsilon < |a| < A, |b| < B\}^c} |W_\psi f(a, b)|^2 \frac{da db}{a^2} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |W_\psi g(a, b)|^2 \frac{da db}{a^2} \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\{\epsilon < |a| < A, |b| < B\}^c} |W_\psi f(a, b)|^2 \frac{da db}{a^2} \right)^{1/2} \sqrt{C_\psi} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $\epsilon \rightarrow 0$, $A, B \rightarrow \infty$, porque el dominio de integración tiende al conjunto vacío y por el Teorema de Convergencia Dominada.

Por lo tanto $\|f - S_{\epsilon, A, B} f\| \rightarrow 0$.

Si ψ es continua y f es continua en t , y definimos $g_\alpha(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-s^2/4\alpha}$, entonces $\{g_\alpha\}$ es una unidad aproximada (de la convolución) cuando $\alpha \rightarrow 0^+$ (ver Definición A.7 en Apéndice), y si tomamos $g_t^\alpha(s) = g_\alpha(t-s)$ y $h \in L^2(\mathbb{R})$ continua en t , tenemos que

$$\langle h, g_t^\alpha \rangle = h * g_\alpha(t) \rightarrow h(t) \text{ cuando } \alpha \rightarrow 0^+$$

y entonces

$$W_\psi g_t^\alpha(a, b) = \int_{\mathbb{R}} g_t^\alpha(s) \overline{\psi^{a,b}(s)} ds = \overline{\langle \psi^{a,b}, g_t^\alpha \rangle} \rightarrow \overline{\psi^{a,b}(t)} \text{ cuando } \alpha \rightarrow 0^+$$

Luego, por (2.2):

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \langle f, g_t^\alpha \rangle = C_\psi^{-1} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \iint_{\mathbb{R}^2} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g_t^\alpha(a, b)} \frac{da db}{a^2} \\ &= C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} W_\psi f(a, b) \psi^{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.1.7. La wavelet “sombbrero mexicano” se define como

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1 - t^2) e^{-t^2}$$

Es la segunda derivada de la gaussiana $e^{-t^2/2}$, normalizada para que tenga norma 1 en $L^2(\mathbb{R})$. Es fácil ver que se cumple la condición de admisibilidad $C_\psi < \infty$.

Observación 2.1.8. En lo que resta (y en la mayoría de las aplicaciones de las wavelets) nos restringimos a valores $a > 0$, con lo cual la condición de admisibilidad es más restrictiva y se necesita que

$$C_\psi := \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi = \int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty.$$

Si, por ejemplo, ψ es una función real, la igualdad de las integrales se satisface trivialmente, ya que $\widehat{\psi}(-\xi) = \widehat{\psi}(\xi)$. Se puede probar que, bajo esta condición, las fórmulas (2.2) y (2.3) se convierten en

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g}(t) dt = C_\psi^{-1} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} db \right) \frac{da}{a^2}$$

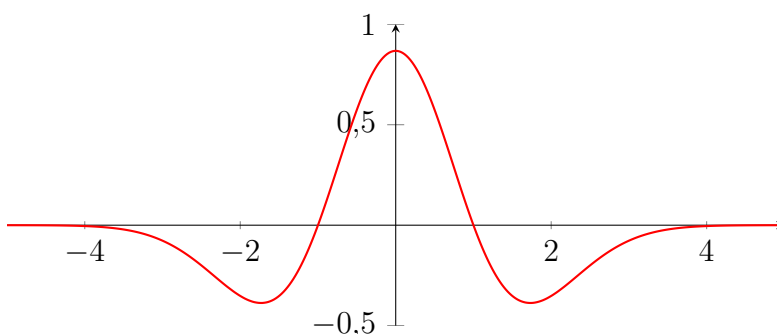


Figura 2.1: Wavelet “sombrero mexicano”

$$f(t) = C_{\psi}^{-1} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi} f(a, b) \psi^{a,b}(t) db \right) \frac{da}{a^2}$$

La demostración es análoga a la de (2.2) y (2.3).

2.2. Discretizando la transformada wavelet

Hasta ahora hemos considerado la familia de funciones

$$\psi^{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Nos interesa “discretizar” nuestra transformada, considerando sólo $a > 0$. Si $m, n \in \mathbb{Z}$, para el parámetro de escala, escogemos $a = a_0^m$, potencias de $a_0 < 1$ fijo. Esta elección es arbitraria: podemos elegir también $a_0 > 1$, ya que también consideramos exponentes negativos. Pero elegimos $a_0 < 1$ para ser coherentes con el capítulo posterior, en el cual se toma $a_0 = 1/2$, siguiendo la bibliografía existente, ya que en la mayoría de las aplicaciones se eligen potencias de 2 por sus ventajas computacionales. La única diferencia de elegir $a_0 < 1$ es que, a medida que m aumenta, la “frecuencia” de la onda resultante también aumenta.

Si $m = 0$ (es decir, $a = 1$) también elegimos $b = nb_0$ con $b_0 > 0$ fijo. Luego comentaremos cómo escoger a_0 y b_0 apropiadamente, que dependen de la wavelet ψ .

Ahora, a medida que la escala a varía, la idea intuitiva es que debemos corregir la traslación de nuestra wavelet para que se comporte como a escala $a = 1$. Por ejemplo, si la wavelet “estira” su forma en un factor de a_0 , debemos alargar también la traslación en el mismo factor. Es natural entonces elegir, a escala $a = a_0^m$, parámetro de traslación $b = nb_0 a_0^m$ (recordar

que a mayor valor de a , mayor es el factor por el cual se “estira” la wavelet ψ).

Entonces, introducimos una nueva notación:

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi\left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} t - nb_0) \quad (2.4)$$

Nos concentraremos en los dos siguientes problemas:

1. ¿Caracterizan los coeficientes $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$ a la función f ? Más aún: ¿podemos reconstruir numéricamente f a partir de los coeficientes $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$?
2. ¿Podemos escribir f como superposición de las funciones $\psi_{m,n}$? ¿Cómo obtenemos los coeficientes de dicha superposición?

Veremos que estos dos problemas son duales, en el sentido de que existen funciones $\widetilde{\psi}_{m,n}$ tales que

$$f(t) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \widetilde{\psi}_{m,n} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\psi}_{m,n} \rangle \psi_{m,n}$$

En general, las funciones $\{\widetilde{\psi}_{m,n}\}$ no son generadas a partir de una función $\widetilde{\psi}$ como en (2.4). En algunos casos, por ejemplo si la wavelet ψ es ortonormal (es decir, $\{\psi_{m,n}\}$ es base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$), entonces es claro que podemos tomar $\widetilde{\psi}_{m,n} = \psi_{m,n}$.

Formalicemos el problema 1.:

- “Caracterizar” una función f a partir de sus coeficientes wavelets $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$ significa que si $\langle f_1, \psi_{m,n} \rangle = \langle f_2, \psi_{m,n} \rangle$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces $f_1 = f_2$, o lo que es lo mismo, si $\langle f, \psi_{m,n} \rangle = 0$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces $f = 0$.
- Poder reconstruir f numéricamente a partir de sus coeficientes wavelets significa que si $\{\langle f_1, \psi_{m,n} \rangle\}$ está “cerca” de $\{\langle f_2, \psi_{m,n} \rangle\}$, entonces f_1 debería estar “cerca” de f_2 . Para ello, necesitamos métricas en cada espacio correspondiente.

En $L^2(\mathbb{R})$ usamos la métrica inducida por el producto interno usual. En la práctica, bajo hipótesis generales sobre ψ (que tenga decrecimiento rápido en tiempo y frecuencia, y que $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$) los coeficientes wavelets están en $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$, y en dicho espacio tomamos también la métrica cuadrática usual:

$$\|x\| = \left(\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |x_{m,n}|^2 \right)^{1/2} \quad \forall x \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$$

Más aún, en ese caso se satisface:

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (2.5)$$

(ver [5], Cap. 3).

Por lo descrito anteriormente, requerimos que si $\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2$ es pequeño, entonces $\|f\|^2$ debe ser pequeño. Es decir, debe existir $\alpha < \infty$ tal que, si $\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq 1$ entonces $\|f\|^2 \leq \alpha$. Para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f \neq 0$ definimos $\tilde{f} = \left(\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \right)^{-1/2} f$. Luego, es claro que $\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle \tilde{f}, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq 1$ y por tanto $\|\tilde{f}\|^2 \leq \alpha$. Esto implica que

$$\left(\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \right)^{-1} \|f\|^2 \leq \alpha$$

y luego

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \quad (2.6)$$

donde $A = \alpha^{-1} > 0$. Combinando (2.5) y (2.6) resulta que deben existir $0 < A \leq B < \infty$ tales que

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2$$

Es decir, el conjunto $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ debe constituir un *marco*. El estudio de los marcos se realiza en general en espacios de Hilbert, y a continuación presentamos algunas propiedades de los mismos que nos serán útiles.

2.3. Marcos en espacios de Hilbert

El concepto de *marco* en un espacio de Hilbert fue introducido por Duffin y Schaeffer en 1952 (ver [7]) para tratar algunos problemas de series de Fourier en análisis no armónico. La idea principal fue la de considerar una versión más débil de la identidad de Parseval. Esta teoría no tuvo gran desarrollo hasta los años 80, en los cuales la aparición de las wavelets ha motivado su estudio.

Definición 2.3.1. Una familia de elementos $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ (para algún conjunto de índices J numerable) de un espacio de Hilbert \mathcal{H} es un **marco** (en inglés,

frame) si existen constantes $0 < A \leq B < \infty$ tales que, para cada $f \in \mathcal{H}$ se cumple

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

Si $A = B$, decimos que el marco es **estrecho** o **ajustado**.

Observación 2.3.2. Claramente, si $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ es una base ortonormal de \mathcal{H} , entonces es un marco estrecho con $A = B = 1$. Pero el recíproco en general no es cierto, ya que un marco puede no ser un conjunto linealmente independiente, incluso si es estrecho.

Ejemplo 2.3.3. Sea $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $e_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$. Se cumple que $\{e_1, e_2, e_3\}$ no es linealmente independiente, pero para cualquier $v = (v_1, v_2) \in \mathcal{H}$ se cumple

$$\sum_{j=1}^3 |\langle v, e_j \rangle|^2 = |v_2|^2 + \left| -\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 = \frac{3}{2}(|v_1|^2 + |v_2|^2)$$

Luego, \mathcal{H} es un marco estrecho, con $A = B = 3/2$.

Definición 2.3.4. Sea $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ un marco en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Definimos el **operador de análisis** como

$$F: \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(J), \quad (Ff)_j = \langle f, \varphi_j \rangle$$

Por la definición de marco, se tiene que F es un operador acotado, ya que $\|Ff\|^2 \leq B\|f\|^2$. Además, la otra desigualdad implica que F es inyectivo y de rango cerrado (ver demostración del Lema 2.3.6), es decir, F es una *inyección topológica*. El operador adjunto F^* puede calcularse fácilmente:

$$\langle F^*c, f \rangle = \langle c, Ff \rangle = \sum_{j \in J} c_j \overline{\langle f, \varphi_j \rangle} = \sum_{j \in J} c_j \langle \varphi_j, f \rangle$$

para todo $f \in \mathcal{H}$, $c \in \ell^2(J)$, por lo tanto

$$F^*c = \sum_{j \in J} c_j \varphi_j$$

en el sentido débil. Más aún, esta convergencia puede probarse en norma:

Lema 2.3.5. Si $F: \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(J)$, $(Ff)_j = \langle f, \varphi_j \rangle$ es el operador del marco $\{\varphi_j\}_{j \in J}$, entonces su operador adjunto es $F^*c = \sum_{j \in J} c_j \varphi_j \quad \forall c = (c_j)_{j \in J}$, con convergencia en $\ell^2(J)$.

Demostración. Si (J_n) es una sucesión de subconjuntos finitos de J tal que $J_n \subset J_m$ si $n \leq m$, $\cup_{n \in \mathbb{N}} J_n = J$, entonces

1. Si $n_0 \leq n \leq m$, entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \in J_m} c_j \varphi_j - \sum_{j \in J_n} c_j \varphi_j \right\| &= \sup_{\|f\|=1} \left| \left\langle \sum_{j \in J_m \setminus J_n} c_j \varphi_j, f \right\rangle \right| \\ &\leq \sup_{\|f\|=1} \left(\sum_{j \in J_m \setminus J_n} |c_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j \in J_m \setminus J_n} |\langle \varphi_j, f \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq B^{1/2} \left(\sum_{j \in J \setminus J_{n_0}} |c_j|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n_0 \rightarrow +\infty$. Luego $h_n = \sum_{j \in J_n} c_j \varphi_j$ es una sucesión de Cauchy en \mathcal{H} , con límite $h \in \mathcal{H}$.

2. Si $f \in \mathcal{H}$, entonces

$$\langle h, f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle h_n, f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_n} c_j \langle \varphi_j, f \rangle = \sum_{j \in J} c_j \langle \varphi_j, f \rangle = \langle c, Ff \rangle$$

Luego, $h = F^*c$.

□

Al operador F^* se le llama **operador de síntesis**, y a F^*F se le llama **operador del marco**.

La definición de F implica que

$$\sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 = \|Ff\|^2 = \langle F^*Ff, f \rangle$$

Luego, dar un marco equivale a dar una inyección topológica, lo cual equivale a dar un operador $F : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(J)$ tal que

$$A \text{ Id} \leq F^*F \leq B \text{ Id} \quad (2.7)$$

(recordar que $S \leq T$ significa $\langle Sh, h \rangle \leq \langle Th, h \rangle \forall h \in \mathcal{H}$).

Lema 2.3.6. Si un operador acotado positivo S de un espacio de Hilbert \mathcal{H} verifica $\alpha \text{ Id} \leq S$ para $\alpha > 0$, entonces S es invertible y su inversa S^{-1} tiene norma acotada por α^{-1} .

Demostración. Primero probaremos que $\text{Im}(S)$ (la imagen de S) es un subespacio cerrado de \mathcal{H} :

Sea $\{f_n\} \subset \text{Im}(S)$ tal que $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$ si $n, m \rightarrow \infty$. Entonces $\exists \{g_n\} \subset \mathcal{H}$ tal que $f_n = Sg_n$ que verifica

$$\begin{aligned} \alpha \|g_n - g_m\|^2 &\leq \langle S(g_n - g_m), g_n - g_m \rangle \leq \|S(g_n - g_m)\| \cdot \|g_n - g_m\| \\ &\Rightarrow \|g_n - g_m\| \leq \alpha^{-1} \|S(g_n - g_m)\| = \alpha^{-1} \|f_n - f_m\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n, m \rightarrow \infty$.

Luego $\{g_n\}$ es sucesión de Cauchy con límite $g \in \mathcal{H}$, y como S es continua, se cumple $\lim f_n = \lim Sg_n = Sg \in \text{Im}(S)$ y por lo tanto $\text{Im}(S)$ es cerrado.

En segundo lugar, probaremos que $\text{Im}(S)^\perp = \{0\}$:

Si $\langle Sg, f \rangle = 0 \forall g \in \mathcal{H}$, en particular $\langle Sf, f \rangle = 0$ y entonces $\|f\|^2 \leq \alpha^{-1} \langle Sf, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ y $\text{Im}(S)^\perp = \{0\}$.

Como $\text{Im}(S)$ es cerrado, $\text{Im}(S) = \text{Im}(S)^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$ y S es sobreyectiva.

Claramente S es inyectiva: si $Sf = 0 \Rightarrow \|f\|^2 \leq \alpha^{-1} \langle Sf, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$.

Luego, S es invertible, y para todo $f \in \mathcal{H}$ se verifica

$$\begin{aligned} \alpha \|S^{-1}f\|^2 &\leq \langle SS^{-1}f, S^{-1}f \rangle \leq \langle f, S^{-1}f \rangle \leq \|f\| \cdot \|S^{-1}f\| \\ &\Rightarrow \|S^{-1}f\| \leq \alpha^{-1} \|f\| \Rightarrow \|S^{-1}\| \leq \alpha^{-1} \end{aligned}$$

□

Este lema implica que F^*F es invertible y que $\|(F^*F)^{-1}\| \leq A^{-1}$. De hecho, se puede probar que se cumple

$$B^{-1} \text{Id} \leq (F^*F)^{-1} \leq A^{-1} \text{Id} \quad (2.8)$$

En efecto:

La segunda desigualdad se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la proposición anterior:

$$\langle (F^*F)^{-1}f, f \rangle \leq \|(F^*F)^{-1}\| \|f\|^2 \leq A^{-1} \|f\|^2$$

Para probar la primera desigualdad, observar que, como $F^*F \leq B \text{Id}$, entonces para todo $T \in B(\mathcal{H})$ se cumple

$$\langle T^*F^*FTx, x \rangle = \langle F^*FTx, Tx \rangle \leq B \|Tx\|^2 = \langle BT^*Tx, x \rangle$$

y por lo tanto $T^*F^*FT \leq BT^*T$. Como F^*F es positivo e invertible, entonces $(F^*F)^{-1}$ también es positivo, y si tomamos $T = \sqrt{(F^*F)^{-1}}$, que es autoadjunto y conmuta con F^*F , tenemos que

$$\text{Id} \leq T^*F^*FT \leq BT^*T = B(F^*F)^{-1} \Rightarrow B^{-1} \text{Id} \leq (F^*F)^{-1}$$

Aplicando el operador $(F^*F)^{-1}$ a los vectores φ_j obtenemos una nueva familia de vectores $\tilde{\varphi}_j$ definidos por:

$$\tilde{\varphi}_j = (F^*F)^{-1}\varphi_j \quad (2.9)$$

La siguiente proposición justifica la incursión que hemos hecho en los marcos, y nos proporcionará las respuestas que estábamos buscando:

Proposición 2.3.7. La familia $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j \in J}$ forma un marco con constantes B^{-1} y A^{-1} :

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle|^2 \leq A^{-1}\|f\|^2 \quad (2.10)$$

El operador de análisis $\tilde{F}: \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(J)$, $(\tilde{F}f)_j = \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle$ asociado a esta familia verifica

1. $\tilde{F} = F(F^*F)^{-1}$
2. $\tilde{F}^*\tilde{F} = (F^*F)^{-1}$
3. $\tilde{F}^*F = \text{Id} = F^*\tilde{F}$
4. $\tilde{F}F^* = F\tilde{F}^*$ es la proyección ortogonal sobre $\text{Im}(F) = \text{Im}(\tilde{F}) \subset \ell^2(J)$.

Demostración. Primero observamos que si S es un operador acotado invertible (con inversa acotada) y autoadjunto, tomando $g = S^{-1}f$:

$$\langle S^{-1}f, f \rangle = \langle g, Sg \rangle = \langle Sg, g \rangle = \langle f, S^{-1}f \rangle$$

de modo que S^{-1} es autoadjunto.

Entonces $\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle = \langle f, (F^*F)^{-1}\varphi_j \rangle = \langle (F^*F)^{-1}f, \varphi_j \rangle$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} |\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle|^2 &= \sum_{j \in J} |\langle (F^*F)^{-1}f, \varphi_j \rangle|^2 = \|F(F^*F)^{-1}f\|^2 \\ &= \langle (F^*F)^{-1}f, F^*F(F^*F)^{-1}f \rangle = \langle (F^*F)^{-1}f, f \rangle \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por (2.8), esto último implica (2.10) y entonces $\{\tilde{\varphi}_j\}$ es un marco.

1. $(F(F^*F)^{-1}f)_j = \langle (F^*F)^{-1}f, \varphi_j \rangle = \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle = (\tilde{F}f)_j \forall j \in J, \forall f \in \mathcal{H}$
 $\Rightarrow \tilde{F} = F(F^*F)^{-1}$, ya que ambos son operadores autoadjuntos.
2. De (2.11) se deduce que $\langle \tilde{F}^*\tilde{F}f, f \rangle = \langle \tilde{F}f, \tilde{F}f \rangle = \|\tilde{F}f\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle|^2$
 $= \langle (F^*F)^{-1}f, f \rangle \forall f \in \mathcal{H} \Rightarrow \tilde{F}^*\tilde{F} = (F^*F)^{-1}$
3. $\tilde{F}^*F = [F(F^*F)^{-1}]^*F = (F^*F)^{-1}F^*F = \text{Id} = F^*F(F^*F)^{-1} = F^*\tilde{F}$

$$4. F\tilde{F}^* = F[F(F^*F)^{-1}]^* = F(F^*F)^{-1}F^* = \tilde{F}F^*$$

Como $\tilde{F} = F(F^*F)^{-1}$, entonces $\text{Ran}(\tilde{F}) \subset \text{Ran}(F)$. También tenemos que $F = \tilde{F}(F^*F)$, luego $\text{Ran}(F) \subset \text{Ran}(\tilde{F})$. Entonces $\text{Ran}(F) = \text{Ran}(\tilde{F})$.

Para ver que $\tilde{F}F^*$ es la proyección ortogonal sobre $\text{Ran}(F)$, veremos que $\tilde{F}F^* = \text{Id}$ en $\text{Ran}(F)$ y $\tilde{F}F^* = 0$ en $\text{Ran}(F)^\perp$.

$\tilde{F}F^*Ff = F(F^*F)^{-1}F^*Ff = Ff$ y si $c \in \text{Ran}(F)^\perp$, entonces

$$\langle F^*c, f \rangle = \langle c, Ff \rangle = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H} \Rightarrow F^*c = 0 \Rightarrow \tilde{F}F^*c = 0.$$

□

Definición 2.3.8. Decimos que $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j \in J}$ es el **marco dual** de $\{\varphi_j\}_{j \in J}$, donde los $\tilde{\varphi}_j$ se definen en (2.9). Es fácil ver que el marco dual de $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j \in J}$ es $\{\varphi_j\}_{j \in J}$, ya que por el item 2 de la proposición anterior, se tiene:

$$(\tilde{F}^*\tilde{F})^{-1} = F^*F \Rightarrow \tilde{\varphi}_j = (\tilde{F}^*\tilde{F})^{-1}\tilde{\varphi}_j = F^*F(F^*F)^{-1}\varphi_j = \varphi_j$$

Observación 2.3.9. La igualdad $\tilde{F}^*F = \text{Id} = F^*\tilde{F}$ significa que

$$\sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j = f = \sum_{j \in J} \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \varphi_j \quad (2.12)$$

Por un lado, esto constituye una fórmula de reconstrucción de f a partir de los coeficientes $\langle f, \varphi_j \rangle$, y por otro lado permite obtener f como superposición de la familia $\{\varphi_j\}_{j \in J}$.

Observación 2.3.10. Para poder reconstruir f a partir de los coeficientes $\langle f, \varphi_j \rangle$, por la observación anterior, debemos hallar el marco dual $\tilde{\varphi}_j = (F^*F)^{-1}\varphi_j$, aunque esto implica invertir F^*F . Si A y B están “cerca” ($r = B/A - 1 \ll 1$), entonces (2.7) significa que F^*F está “cerca” de $\frac{A+B}{2} \text{Id}$, luego $\tilde{\varphi}_j$ está “cerca” de $\frac{2}{A+B}\varphi_j$. Entonces:

$$f = \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j + Rf \quad (2.13)$$

donde $R = \text{Id} - \frac{2}{A+B}F^*F$, y por lo tanto $-\frac{B-A}{B+A} \text{Id} \leq R \leq \frac{B-A}{B+A} \text{Id}$. Luego, $\|R\| \leq \frac{B-A}{B+A} = \frac{r}{2+r}$. Si r es pequeño, podemos despreciar el resto Rf en (2.13) y obtener una reconstrucción de f con error de $\frac{r}{2+r}\|f\|$. En particular, observamos que si $\{\varphi_j\}$ es base ortonormal de \mathcal{H} , entonces $A = B = 1$ ($r = 0$) y $f = \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j$ con error nulo, como ya se sabe.

Si r no es pequeño, de todas formas podemos obtener un algoritmo para reconstruir f que converge exponencialmente: con la misma definición de R

tenemos que $F^*F = \frac{A+B}{2}(\text{Id} - R)$, y entonces $(F^*F)^{-1} = \frac{2}{A+B}(\text{Id} - R)^{-1}$. Como $\|R\| \leq \frac{B-A}{B+A} < 1$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} R^k$ converge en norma a $(\text{Id} - R)^{-1}$ (serie de Neumann) y entonces

$$\tilde{\varphi}_j = (F^*F)^{-1}\varphi_j = \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^{\infty} R^k \varphi_j$$

Observar que tomando apenas el término de la serie para $k = 0$ obtenemos la aproximación (2.13) donde se ha despreciado el resto Rf . La aproximación es mejor si elegimos los primeros N términos:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_j^N &= \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^N R^k \varphi_j = \tilde{\varphi}_j - \frac{2}{A+B} \sum_{k=N+1}^{\infty} R^k \varphi_j \\ &= \tilde{\varphi}_j - R^{N+1} \left(\frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^{\infty} R^k \varphi_j \right) = (\text{Id} - R^{N+1})\tilde{\varphi}_j \end{aligned}$$

porque, recordando que $f = \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j^N \right\| &= \sup_{\|g\|=1} \left| \left\langle f - \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j^N, g \right\rangle \right| \\ &= \sup_{\|g\|=1} \left| \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \langle \tilde{\varphi}_j - \tilde{\varphi}_j^N, g \rangle \right| \\ &= \sup_{\|g\|=1} \left| \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \langle R^{N+1} \tilde{\varphi}_j, g \rangle \right| \\ &\stackrel{R^* = R}{=} \sup_{\|g\|=1} \left| \left\langle \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j, R^{N+1} g \right\rangle \right| \\ &= \sup_{\|g\|=1} |\langle f, R^{N+1} g \rangle| \leq \|R\|^{N+1} \|f\| \leq \left(\frac{r}{2+r} \right)^{N+1} \|f\| \end{aligned}$$

que tiende a 0 cuando $N \rightarrow \infty$.

Se prueba fácilmente por inducción que las funciones $\tilde{\varphi}_j^N$ pueden ser halladas mediante el siguiente algoritmo iterativo:

$$\tilde{\varphi}_j^N = \frac{2}{A+B} \varphi_j + R \tilde{\varphi}_j^{N-1} = \sum_{l \in J} \alpha_{jl}^N \varphi_l$$

con

$$\alpha_{jl}^0 = \frac{2}{A+B} \delta_{jl}, \quad \alpha_{jl}^N = \frac{2}{A+B} \delta_{jl} + \alpha_{jl}^{N-1} - \frac{2}{A+B} \sum_{m \in J} \alpha_{jm}^{N-1} \langle \varphi_m, \varphi_l \rangle$$

Los coeficientes $\langle \varphi_m, \varphi_l \rangle$ son despreciables en muchos ejemplos prácticos, muchos de ellos en algunos casos (por ejemplo, si φ_m es la traslación de una función de $L^2(\mathbb{R})$ con soporte compacto); por lo tanto el algoritmo es eficiente.

2.4. Marcos de wavelets

Luego de estudiar algunas propiedades útiles de los marcos, volvemos sobre las wavelets. Vimos anteriormente que, para poder reconstruir f numéricamente a partir de los coeficientes $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$, la familia $\{\psi_{m,n}\}$ debe formar un marco. En la sección anterior vimos un algoritmo para dicha reconstrucción en este caso. Ahora veremos que la condición de marco implica la condición de admisibilidad (2.1). La prueba la omitiremos por ser muy técnica. Los detalles pueden encontrarse en [5], págs. 63-66.

Teorema 2.4.1. Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Si la familia $\psi_{m,n}(t) = a_0^{-1/2} \psi(a_0^{-m}t - nb_0)$, $m, n \in \mathbb{Z}$ constituye un marco en $L^2(\mathbb{R})$ con constantes $0 < A \leq B < \infty$, entonces

$$\frac{b_0 \log a_0}{2\pi} A \leq \int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{-\xi} d\xi = \int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi \leq \frac{b_0 \log a_0}{2\pi} B$$

También es posible estimar (bajo ciertas hipótesis sobre ψ , a_0 y b_0 para que sea marco) las constantes A y B (ver [5], págs. 67-69).

Sea ψ una wavelet tal que $\{\psi_{m,n}\}$ es un marco. Su marco dual, definido en (2.3.8), es

$$\widetilde{\psi}_{m,n} = (F^*F)^{-1} \psi_{m,n}, \quad \text{donde} \quad F^*F f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}$$

y por lo visto en la sección anterior, verifica

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \widetilde{\psi}_{m,n} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\psi}_{m,n} \rangle \psi_{m,n} \quad (2.14)$$

En la sección anterior vimos un algoritmo para aproximar $(F^*F)^{-1}$ que converge rápidamente como $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$ con $\alpha = \frac{B-A}{B+A} < 1$. Por lo tanto, es conveniente utilizar wavelets en las cuales A, B son cercanos. La fórmula de reconstrucción (2.14) necesita, a priori, una cantidad infinita de $\widetilde{\psi}_{m,n}$, pero veremos que esto puede evitarse. Utilizamos la siguiente notación:

$$(D^m f)(t) = a_0^{-m/2} f(a_0^{-m}t), \quad (T^n f)(t) = f(t - nb_0)$$

Es fácil verificar que $(F^*F)^{-1}$ y D^m conmutan. Como $\psi_{m,n} = D^m T^n \psi$, en particular se tiene que

$$\widetilde{\psi}_{m,n} = (F^*F)^{-1} D^m T^n \psi = D^m (F^*F)^{-1} T^n \psi$$

es decir

$$\widetilde{\psi}_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \widetilde{\psi}_{0,n}(a_0^{-m}t)$$

Lamentablemente, $(F^*F)^{-1}$ y T^n no conmutan. En la práctica, muchas veces estamos interesados en funciones que tengan sólo “frecuencias” dentro de un intervalo finito (es decir, que cumplan que $\langle f, \psi_{m,n} \rangle = 0$ excepto para una cantidad finita de $m, n \in \mathbb{Z}$), y por lo tanto podemos aproximar F^*F por $\sum_{m=m_0}^{m_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \cdot, \psi_{m,n} \rangle$. Si $N = a_0^{m_1 - m_0}$ es entero, es fácil ver que esta versión truncada de F^*F conmuta con T^N , y por lo tanto sólo es necesario calcular $\widetilde{\psi}_{0,n}$ para $0 \leq n \leq N - 1$. Sin embargo, en muchos ejemplos de interés, este número N es muy grande.

Podríamos despreocuparnos del marco dual si pudiéramos conseguir un marco que sea casi estrecho, es decir, $r = \frac{B}{A} - 1 \ll 1$, y lograr una buena reconstrucción de f , por lo visto en la Observación 2.3.10. Por otro lado, es posible elegir $\widetilde{\psi}, a_0$ y b_0 tales que, aunque $\{\psi_{m,n}\}$ sea un marco lejos de ser estrecho, los $\widetilde{\psi}_{m,n}$ sean generados por una función $\widetilde{\psi}$:

$$\widetilde{\psi}_{m,n}(t) = a_0^{-1/2} \widetilde{\psi}(a_0^{-m}t - nb_0)$$

(ver [5], Cap. 8).

Ejemplo 2.4.2. La wavelet “sombrero mexicano” (ver Ejemplo 2.1.7), definida como

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1 - t^2) e^{-t^2}$$

tiene la regularidad necesaria para constituir un marco. Una estimación de las constantes A y B para $a_0 = 2$ son las siguientes (ver [5], págs. 75-77):

b_0	A	B	$B/A - 1$
0,25	13,091	14,183	0,083
0,50	6,546	7,092	0,083
0,75	4,364	4,728	0,083
1,00	3,223	3,596	0,116
1,25	2,001	3,454	0,726
1,50	0,325	4,221	11,986

Para concluir esta sección, informamos que $\psi_{m,n}$ y $\widetilde{\psi}_{m,n}$ pueden tener diferentes regularidades. Por ejemplo, existen marcos donde $\psi \in C^\infty$ y decaimiento rápido pero $\widetilde{\psi}_{m,n}$ decrece muy lentamente. Un tal ejemplo, debido a P.G. Lemarié, puede verse en [4]. De la misma forma, si $\widetilde{\psi}_{m,n}$ son generadas por $\widetilde{\psi}$, existen ejemplos en donde $\psi \in C^k$ para k arbitrariamente grande, pero donde $\widetilde{\psi}$ no es continua. El primer ejemplo fue construido por Tchamitchian (ver [17]). Estas irregularidades pueden evitarse si se imponen condiciones extra en ψ, a_0, b_0 (ver [4]).

Capítulo 3

Wavelets ortonormales y análisis multiresolución

La idea principal en este capítulo es la de construir bases ortonormales de $L^2(\mathbb{R})$, cuyos elementos se obtengan como dilataciones y traslaciones de una función madre $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Esta búsqueda está inspirada en la base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ obtenida a partir de la función de Haar. A mediados de la década de los 80, Mallat y Meyer (ver [13]) introdujeron el estudio de las wavelets al campo matemático, y definieron los detalles de lo que hoy conocemos como *análisis multiresolución*, concepto clave para obtener otros ejemplos de dichas bases, con mayor regularidad que la de Haar. Además, a través de este concepto pueden desarrollarse algoritmos simples y eficientes para descomponer funciones de $L^2(\mathbb{R})$ en varios niveles de detalles, lo cual es muy útil en diversas aplicaciones (ver Sección 3.7 y Capítulo 4).

3.1. Definiciones

Comenzamos con la siguiente

Definición 3.1.1. Decimos que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es una **wavelet ortonormal** si el conjunto $\{\psi_{j,k}\}$ es base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, donde

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k) \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}$$

Observar que estamos considerando $a_0 = 1/2$ y $b_0 = 1$ en la definición (2.4).

Ejemplo 3.1.2. La *función de Haar* es la definida por

$$\psi(t) = \chi_{[0,1/2)}(t) - \chi_{[1/2,1)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

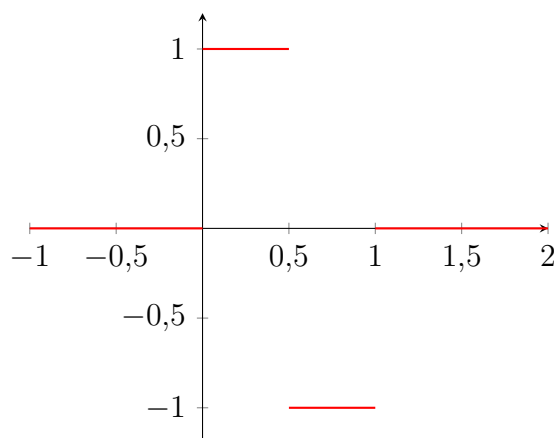


Figura 3.1: Wavelet de Haar

Esta función fue propuesta en 1909 (mucho antes del estudio de las wavelets) por Alfred Haar, el cual la utilizó para dar un ejemplo de un base ortonormal numerable. Podría probarse directamente que la función de Haar es una wavelet ortonormal, pero deduciremos este hecho luego de obtener un método general para comprobar esta propiedad.

Para ello, necesitamos introducir la siguiente

Definición 3.1.3. Un **análisis multiresolución (AMR)** es una familia $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespacios de $L^2(\mathbb{R})$, junto con $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ tales que:

1. $V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$
2. $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}), \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
3. $f \in V_j$ si y sólo si $f(2^{-j}\cdot) \in V_0$.
4. $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es base ortonormal de V_0 .

A la función ϕ se le llama **función de escala** del AMR.

Ejemplo 3.1.4. Es fácil verificar que, si definimos V_j como el espacio de funciones $f \in L^2(\mathbb{R})$ constantes en $I_{j,k}$ (siendo $I_{j,k} = [(k-1)/2^j, k/2^j)$ los intervalos diádicos) y $\phi = \chi_{[0,1)}$ (la *función de escala de Haar*), entonces $\{V_j\}$ y ϕ constituyen un AMR.

En breve demostraremos la existencia de otros AMR, y más adelante veremos cómo obtener una wavelet ortonormal a partir de un AMR (ver la Proposición 3.5.2).

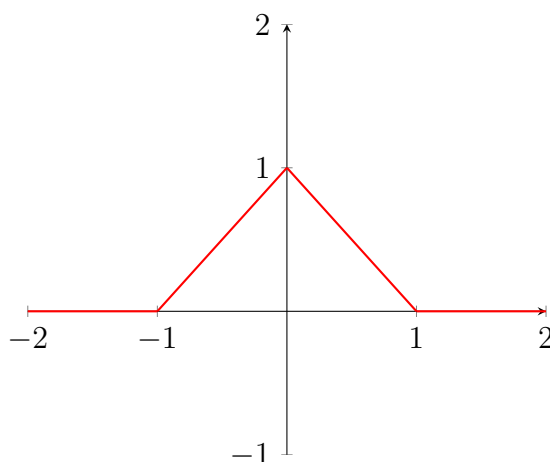


Figura 3.2: Función cuña

3.2. Conjuntos ortonormales y de Riesz

Utilizaremos una condición más débil a la de conjunto ortonormal, que es suficiente en el contexto de los AMR.

Definición 3.2.1. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Un subconjunto $X \subset \mathcal{H}$ es un **conjunto de Riesz** si existen constantes $0 < c \leq C < \infty$ tales que para cualquier par de conjuntos finitos $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{C}$ y $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ se cumple

$$c \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|^2 \leq C \sum_{i=1}^n |a_i|^2$$

Observación 3.2.2. Un conjunto ortonormal es un conjunto de Riesz, con constantes $c = C = 1$, y un conjunto de Riesz es linealmente independiente: si $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, por la primera desigualdad se tiene que $\sum_{i=1}^n |a_i|^2 = 0$ y por lo tanto $a_i = 0 \forall i$.

Ejemplo 3.2.3. Sean $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ y $x_n(t) = \Lambda(t - n)$, donde Λ es la *función cuña*:

$$\Lambda(t) = (1 - |t|)\chi_{[-1,1]}$$

Es claro que $\{x_n\}$ no es un conjunto ortonormal, ya que $\langle x_n, x_{n+1} \rangle \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Si $A(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \Lambda(t - n)$, entonces A es una función lineal en cada intervalo

$[n, n + 1]$ con $A(n) = a_n$. Luego, es fácil verificar que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |A(t)|^2 dt &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |(n+1-t)a_n + (t-n)a_{n+1}|^2 dt \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (|a_n|^2 + |a_{n+1}|^2 + \operatorname{Re}(a_n \overline{a_{n+1}})) \end{aligned}$$

Usando las desigualdades $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ y $|2ab| \leq |a|^2 + |b|^2$ obtenemos $|\operatorname{Re}(a_n \overline{a_{n+1}})| \leq \frac{1}{2}(|a_n|^2 + |a_{n+1}|^2)$ y entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |A(t)|^2 dt \leq \frac{1}{3} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{3}{2} (|a_n|^2 + |a_{n+1}|^2) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + |a_{n+1}|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2$$

y también

$$\int_{\mathbb{R}} |A(t)|^2 dt \geq \frac{1}{3} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} (|a_n|^2 + |a_{n+1}|^2) = \frac{1}{6} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + |a_{n+1}|^2 = \frac{1}{3} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2$$

Por lo tanto, $\{x_n\}$ es un conjunto de Riesz con constantes $c = 1/3$, $C = 1$.

La siguiente es una caracterización útil de conjuntos de Riesz, en términos de su transformada de Fourier, y como corolario de conjuntos ortonormales:

Proposición 3.2.4. Sean $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ y $0 < c \leq C < \infty$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es conjunto de Riesz con constantes c, C .
2. La periodización de la transformada de Fourier de ϕ satisface:

$$c \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + l)|^2 \leq C, \text{ c.t.p. } \xi \in \mathbb{R}$$

Demostración. La transformada de Fourier (continua) de $\phi(\cdot - k)$ es $\xi \mapsto e^{-2\pi i k \xi} \widehat{\phi}(\xi)$ (ver (3.6) con $j = 0$). Por lo tanto, la transformada de $\sum_{k=1}^n a_k \phi(\cdot - k)$ es $\xi \mapsto A(\xi) \widehat{\phi}(\xi)$ donde A es el polinomio trigonométrico 1-periódico $A(\xi) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-2\pi i k \xi}$. Notar que los coeficientes de Fourier de A son los a_k , y por la identidad de Parseval: $\int_0^1 |A(\xi)|^2 d\xi = \sum_{k=1}^n |a_k|^2$. Por la identidad de Parseval para la transformada de Fourier continua, se

cumple que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^n a_k \phi(t-k) \right\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |A(\xi)|^2 |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_l^{l+1} |A(\xi)|^2 |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |A(\xi)|^2 |\widehat{\phi}(\xi+l)|^2 d\xi \\
&= \int_0^1 |A(\xi)|^2 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi+l)|^2 \right) d\xi
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Si se cumple (2.), entonces

$$\begin{aligned}
c \sum_{k=1}^n |a_k|^2 &= c \int_0^1 |A(\xi)|^2 d\xi \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k \phi(t-k) \right\|^2 \\
&\leq C \int_0^1 |A(\xi)|^2 d\xi = C \sum_{k=1}^n |a_k|^2
\end{aligned}$$

y $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un conjunto de Riesz.

Ahora supongamos que se cumple (1.). Para todo polinomio trigonométrico $A(\xi) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-2\pi i k \xi}$, por (3.1) se verifica

$$c \leq \frac{\int_0^1 |A(\xi)|^2 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi+l)|^2 \right) d\xi}{\int_0^1 |A(\xi)|^2 d\xi} \leq C \tag{3.2}$$

Si $[a, b] \subset (0, 1)$ y tomamos $\{A_N\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de $\chi_{[a,b]}$ (que converge a $\chi_{[a,b]}$ c.t.p. y en $L^2(\mathbb{R})$), si elegimos $A = A_N$ en (3.2) y tomamos límite en N , se cumple

$$c \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi+l)|^2 d\xi \leq C$$

Esto es válido en todo intervalo $[a, b] \subset (0, 1)$, y si tomamos $a, b \rightarrow \xi_0$, por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue (ver Teorema A.13 en Apéndice) obtenemos

$$c \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi_0+l)|^2 \leq C \quad \forall \xi_0 \in (0, 1)$$

y se cumple (1.) $\forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. □

Corolario 3.2.5. Si $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal si y sólo si $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi+l)|^2 = 1$ c.t.p. $\xi \in \mathbb{R}$.

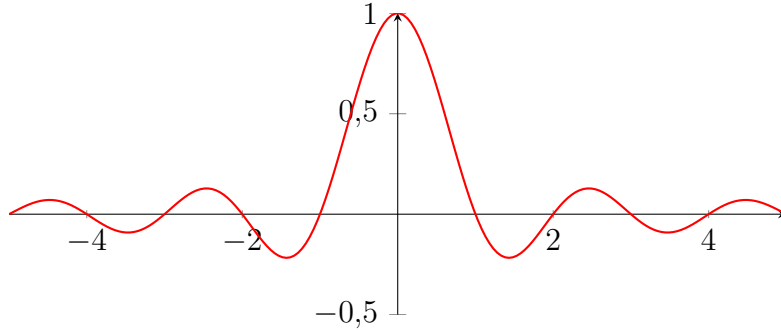


Figura 3.3: Función de escala de Shannon

Ejemplo 3.2.6. La *función de escala de Shannon* se define a través de su transformada de Fourier como

$$\widehat{\phi}(\xi) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\xi)$$

La función ϕ es

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\xi) e^{2\pi i t \xi} d\xi = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i t \xi} d\xi = \frac{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}{2\pi i t} = \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}$$

y $\phi(0) = 1$.

Luego, $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + l)|^2 = 1 \forall \xi \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ y entonces $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

La siguiente proposición afirma que es posible ortogonalizar un conjunto de Riesz y obtener así una base del mismo subespacio generado:

Proposición 3.2.7. Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un conjunto de Riesz. Entonces existe una sucesión de números complejos $\{b_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que $\{\phi_1(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal, con $\phi_1(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \phi(t - n)$. Además, $\overline{\text{span}}\{\phi_1(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\} = \overline{\text{span}}\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$.

Demostración. En cuanto a la primera afirmación, es suficiente encontrar $\{b_n\}$ tal que $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}_1(\xi + l)|^2 = 1$ c.t.p. $\xi \in \mathbb{R}$. Por la definición de ϕ_1 y realizando operaciones análogas a las hechas en la prueba de la proposición anterior, tenemos que

$$\widehat{\phi}_1(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{-2\pi i k \xi} \widehat{\phi}(\xi) =: B(\xi) \widehat{\phi}(\xi) \quad (3.3)$$

donde $B(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{-2\pi i k \xi}$ es una función de período 1. Luego

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}_1(\xi + l)|^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |B(\xi + l)|^2 |\widehat{\phi}(\xi + l)|^2 = |B(\xi)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + l)|^2$$

Entonces debemos elegir $\{b_k\}$ tal que $|B(\xi)|^2 = \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + l)|^2\right)^{-1}$. Podemos elegir $b_k = c_{-k}$ donde c_k son los coeficientes de Fourier de la función $\left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + l)|^2\right)^{-1/2}$ (función 1-periódica y acotada porque el denominador está acotado por debajo por constante positiva por la condición de Riesz), de forma que $B(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k \xi} = \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + l)|^2\right)^{-1/2}$ y por lo tanto $\widehat{\phi}_1(\xi) = \widehat{\phi}(\xi) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + l)|^2\right)^{-1/2}$ define una función en $L^2(\mathbb{R})$ con $\{\phi_1(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ortogonal por el corolario anterior. Para la última afirmación, dada la ecuación

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(t - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_1(t - k)$$

hay que probar que podemos hallar $\{c_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ a partir de $\{a_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ y viceversa. Esta ecuación, en términos de la transformada de Fourier, queda:

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi i k \xi}\right) \widehat{\phi}(\xi) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i k \xi}\right) \widehat{\phi}_1(\xi)$$

Suponiendo dados los $\{a_k\}$, y recordando (3.3), esto se cumplirá si podemos hallar $\{c_k\}$ tal que

$$A(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi i k \xi} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{-2\pi i k \xi}\right) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i k \xi}\right) =: B(\xi)C(\xi) \quad (3.4)$$

Dado que $0 < C^{-1} \leq |B(\xi)|$ por la condición de Riesz, podemos elegir los c_k como los coeficientes de Fourier de la función 1-periódica $\xi \mapsto A(-\xi)/B(-\xi)$. Recíprocamente, dado $\{c_k\}$ podemos tomar a_k como los coeficientes de Fourier de $\xi \mapsto B(-\xi)C(-\xi)$ en (3.4). \square

Ejemplo 3.2.8. Si elegimos $\phi = \Lambda$ (la función cuña) y $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(t - k)$ entonces f es lineal en $I_{0,k}$ con $f(k) = a_k$; luego $\overline{\text{span}}\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es el subespacio de $L^2(\mathbb{R})$ formado por las funciones continuas lineales en los intervalos $I_{0,k} = [k - 1, k)$, y como $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un conjunto de Riesz, se tiene que $V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ es continua y lineal en } I_{j,k}\}$ y ϕ_1 (definida como en la proposición anterior) forman un AMR.

3.3. Ecuación de escala y constantes de estructura

La siguiente proposición se deduce fácilmente de la definición de un AMR; sin embargo, es muy importante en nuestra búsqueda de wavelets ortonormales:

Proposición 3.3.1. Supongamos que $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ y $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ definen un AMR. Entonces para cada $j \in \mathbb{Z}$, $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{2^{j/2}\phi(2^j \cdot -k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_j .

Demostración. $\langle \phi_{j,k}, \phi_{j,k'} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi_{j,k}(t) \overline{\phi_{j,k'}(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} 2^j \phi(2^j t - k) \overline{\phi(2^j t - k')} dt = \int_{\mathbb{R}} \phi(x - k) \overline{\phi(x - k')} dx = \delta_{k,k'}$
 Si $f \in V_j \Rightarrow f(2^{-j} \cdot) \in V_0 \Rightarrow \exists \{a_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que $f(2^{-j}t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(t - k) \Rightarrow f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{-j/2} a_k) 2^{j/2} \phi(2^j t - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{-j/2} a_k) \phi_{j,k}(t) \Rightarrow f \in \overline{\text{span}}\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. \square

Esto nos conduce a la siguiente definición (recordar que $\phi \in V_0 \subset V_1$).

Definición 3.3.2. Sea $\{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ la única sucesión tal que, según la Proposición 3.3.1 para V_1 , satisface

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2t - k) \quad (3.5)$$

en la cual la convergencia es en $L^2(\mathbb{R})$.

Las constantes a_k se llaman **constantes de estructura** asociadas al AMR. A la ecuación (3.5) se le llama **ecuación de escala**.

Ejemplo 3.3.3. En el caso de la función de escala de Haar $\phi = \chi_{[0,1]}$, la ecuación de escala es

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t - 1)$$

Luego, las constantes de estructura son $a_0 = a_1 = 1$ y $a_k = 0$ en otro caso.

Observación 3.3.4. Veamos cómo se expresa la ecuación de escala a través de la transformada de Fourier. Calculando la transformada de Fourier de $\phi_{j,k}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{j,k}(\xi) &= 2^{j/2} \int_{\mathbb{R}} \phi(2^j t - k) e^{-2\pi i t \xi} dt \\ &= 2^{-j/2} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{-2\pi i \left(\frac{x+k}{2^j}\right) \xi} dx \\ &= 2^{-j/2} e^{-2\pi i k 2^{-j} \xi} \widehat{\phi}(2^{-j} \xi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

y en particular, la transformada de $\phi(2 \cdot -k) = 2^{-1/2}\phi_{1,k}$ es

$$2^{-1/2}\widehat{\phi}_{1,k}(\xi) = \frac{1}{2}e^{-\pi ik\xi}\widehat{\phi}(\xi/2)$$

Sustituyendo en (3.5) obtenemos:

$$\widehat{\phi}(\xi) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-\pi ik\xi} \right) \widehat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} \right)$$

Esto motiva la siguiente definición. Denotamos por $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ a las funciones periódicas cuadrado-integrables en $[0, 1]$ de período 1.

Definición 3.3.5. Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ una función que satisface la ecuación de escala (3.5). Definimos el **filtro de escala** $m_0 \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ como:

$$m_0(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi ik\xi} \quad (3.7)$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Por la observación anterior, el mismo cumple:

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0(\xi/2)\widehat{\phi}(\xi/2) \quad (3.8)$$

La siguiente proposición muestra que la validez de (3.8) para algún $m_0 \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ es equivalente a satisfacer la ecuación de escala, y en la Sección 3.5 veremos que dicho filtro es útil para la obtención de wavelets ortonormales a partir de un AMR:

Proposición 3.3.6. Una función $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ satisface la ecuación de escala (3.5) si y sólo si existe $m_0 \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ que verifica (3.8). En ese caso, m_0 verifica (3.7), y $a_k = 2 \int_{-1/2}^{1/2} m_0(\xi) e^{2\pi ik\xi} d\xi$.

Demostración. El directo ya fue probado. Para el recíproco, si se verifica (3.8), definimos $a_k = 2 \int_{-1/2}^{1/2} m_0(\xi) e^{2\pi ik\xi} d\xi = 2 \int_{-1/2}^{1/2} m_0(-\xi) e^{-2\pi ik\xi} d\xi$ (los coeficientes de Fourier de $\xi \mapsto 2m_0(-\xi)$) y entonces

$$2m_0(-\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi ik\xi} \Rightarrow m_0(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi ik\xi}$$

y se verifica (3.7).

Como el miembro derecho de (3.8) es la transformada de Fourier de la función $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2 \cdot -k)$ y $\phi \mapsto \widehat{\phi}$ es biyectiva en $L^2(\mathbb{R})$ (ver Teorema A.9 en Apéndice) entonces se verifica $\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2t - k)$. \square

Ejemplo 3.3.7. Para la función de Shannon $\widehat{\phi} = \chi_{[-1/2, 1/2]}$, la ecuación de escala se puede obtener a través de (3.8):

$$\chi_{[-1/2, 1/2]}(\xi) = m_0(\xi/2)\chi_{[-1/2, 1/2]}(\xi/2)$$

Luego, debemos elegir $m_0(\xi) = 1$ si $|\xi| < 1/4$ y $m_0(\xi) = 0$ si $1/4 \leq |\xi| \leq 1/2$. Por lo tanto

$$a_k = 2 \int_{-1/2}^{1/2} m_0(\xi) e^{2\pi i k \xi} d\xi = 2 \int_{-1/4}^{1/4} e^{2\pi i k \xi} d\xi$$

y entonces $a_0 = 2 \int_{-1/4}^{1/4} d\xi = 1$ y

$$a_k = 2 \int_{-1/4}^{1/4} e^{2\pi i k \xi} d\xi = \frac{1}{\pi i k} \left(e^{\frac{\pi i k}{2}} - e^{-\frac{\pi i k}{2}} \right) = \frac{2 \operatorname{sen}(\pi k / 2)}{\pi k}$$

para $k \neq 0$.

3.4. De la función de escala a un AMR

Dada una función $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, podemos definir $V_j = \overline{\operatorname{span}}\{\phi(2^j \cdot -k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. A continuación daremos condiciones suficientes para que $(\{V_j\}, \phi)$ defina un AMR.

Teorema 3.4.1. Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ que verifica:

1. $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal.
2. ϕ satisface la ecuación de escala (3.5) con $\{a_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$.
3. $\widehat{\phi}$ es continua en 0 con $|\widehat{\phi}(0)| = 1$.

Si definimos $V_j = \overline{\operatorname{span}}\{\phi(2^j \cdot -k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, entonces $(\{V_j\}, \phi)$ define un AMR.

Llamémosle P_j a la proyección ortogonal sobre V_j . Como ϕ satisface 1., se tiene que $\phi_{j,k}$ es base ortonormal de V_j (ver demostración de la Proposición 3.3.1) y por lo tanto podemos escribir $P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}$.

Para la demostración, necesitamos los siguientes lemas (se mantienen las hipótesis del teorema):

Lema 3.4.2. Para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ se cumple $\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = 0$.

Demostración. Observar que $\langle P_j g, \phi_{j,k} \rangle = \langle P_j g - g, \phi_{j,k} \rangle + \langle g, \phi_{j,k} \rangle = \langle g, \phi_{j,k} \rangle$ ya que $(P_j g - g) \perp \phi_{j,k}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Primero lo probamos para un subconjunto denso en $L^2(\mathbb{R})$, en este caso, el formado por las funciones continuas de soporte compacto.

Si $\text{sop}(g) \subset [-R, R]$, entonces

$$\begin{aligned} \|P_j g\|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle P_j g, \phi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle g, \phi_{j,k} \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-R}^R |g(t)|^2 dt \right) \left(\int_{-R}^R |\phi_{j,k}(t)|^2 dt \right) \\ &= \|g\|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^j \int_{-R}^R |\phi(2^j t - k)|^2 dt \\ &= \|g\|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-k-2^j R}^{-k+2^j R} |\phi(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Si $2^j R < 1/2$, las integrales se calculan sobre intervalos disjuntos cuya unión escribimos $U_j = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-k - 2^j R, -k + 2^j R)$. Luego $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} U_j = \mathbb{Z}$, que tiene medida cero, y entonces $\|P_j f\|^2 \leq \|g\|^2 \int_{U_j} |\phi(x)|^2 dx \rightarrow 0$ (si $j \rightarrow -\infty$) por el Teorema de Convergencia Dominada.

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\epsilon > 0$, sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua y con soporte compacto, tal que $\|f - g\| < \epsilon/2$. Entonces

$$\|P_j f\| \leq \|P_j\| \|f - g\| + \|P_j g\| \stackrel{\|P_j\|=1}{<} \frac{\epsilon}{2} + \|P_j g\| < \epsilon$$

si $-j$ es grande. Luego, $P_j \rightarrow 0$ si $j \rightarrow -\infty$. \square

Lema 3.4.3. Sea $h \in L^2(\mathbb{R})$ tal que \widehat{h} está acotada y con soporte en $[-R, R]$ con $R > 0$. Entonces, para cada j tal que $2^{j-1} > R$ se cumple:

$$\|P_j h\|^2 = \int_{-R}^R |\widehat{h}(\xi)|^2 |\widehat{\phi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi$$

Demostración. Por la identidad de Parseval:

$$\begin{aligned} \|P_j h\|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle P_j h, \phi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle h, \phi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-R}^R \widehat{h}(\xi) \overline{\widehat{\phi}_{j,k}}(\xi) d\xi \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-R}^R \widehat{h}(\xi) 2^{-j/2} e^{-2\pi i k \xi 2^{-j/2}} \overline{\widehat{\phi}(2^{-j}\xi)} d\xi \right|^2 \end{aligned}$$

(recordar (3.6)). Si $2^{j-1} > R$, la última integral es igual a integrar en $[-2^{j-1}, 2^{j-1}]$ (porque $\text{sop}(\widehat{h}) \subset [-R, R]$), en donde $\{2^{-j/2}e^{-2\pi ik\xi 2^{-j}}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es base ortonormal de $L^2[-2^{j-1}, 2^{j-1}]$. Además, se tiene que $\xi \mapsto \widehat{h}(\xi)\widehat{\phi}(2^{-j}\xi) \in L^2[-2^{j-1}, 2^{j-1}]$; entonces, aplicando Parseval a este último término obtenemos

$$\|P_j h\|^2 = \int_{-2^{j-1}}^{2^{j-1}} |\widehat{h}(\xi)|^2 |\widehat{\phi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi = \int_{-R}^R |\widehat{h}(\xi)|^2 |\widehat{\phi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi$$

válida si $2^{j-1} > R$. \square

Lema 3.4.4. Se tiene $\|P_j f - f\| \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow +\infty$, para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Por el teorema de Pitágoras se cumple que $\|P_j f - f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_j f\|^2$, y por lo tanto basta probar que $\|P_j f\| \rightarrow \|f\|$ (si $j \rightarrow +\infty$). El subconjunto $C_c(\mathbb{R})^\vee = \{h \in L^2(\mathbb{R}) : \widehat{h} \in C_c(\mathbb{R})\}$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$: si $f \in L^2(\mathbb{R})$, dado $\epsilon > 0$ sea \widehat{h} una función continua con soporte compacto tal que $\|\widehat{f} - \widehat{h}\| < \epsilon$, y como la transformada de Fourier es isometría, la función h que define \widehat{h} cumple $h \in C_c(\mathbb{R})^\vee$ y $\|f - h\| = \|\widehat{f} - \widehat{h}\| < \epsilon$.

Si $\widehat{\phi}$ es continua en 0 con $|\widehat{\phi}(0)| = 1$, dado $\epsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que $|\widehat{\phi}(\xi) - 1| < \epsilon$ si $|\xi| < \delta$. Si $R > 0$, sea $j \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{-j}R < \delta$ y entonces $|\widehat{\phi}(2^{-j}\xi) - 1| < \epsilon$ si $|\xi| < R$. Luego, $|\widehat{\phi}(2^{-j}\xi)|$ converge uniformemente a 1 en $[-R, R] \forall R > 0$. Ahora, si $h \in C_c(\mathbb{R})^\vee$ y $2^{j-1} > R$, por el lema anterior se cumple

$$\|P_j h\|^2 = \int_{-R}^R |\widehat{h}(\xi)|^2 |\widehat{\phi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \rightarrow \int_{-R}^R |\widehat{h}(\xi)|^2 d\xi = \|h\|^2$$

por Parseval.

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, dado $\epsilon > 0$ sea $h \in C_c(\mathbb{R})^\vee$ tal que $\|f - h\| < \epsilon/3$ y por lo tanto $\|P_j f - f\| \leq \|P_j(f - h)\| + \|P_j h - h\| + \|h - f\| < \epsilon$ si j es grande. \square

Demostración del Teorema 3.4.1. Observamos que la hipótesis (2) implica

$$\begin{aligned} \phi_{j,k}(t) &= 2^{j/2} \phi(2^j t - k) = 2^{j/2} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} a_{k'} \phi(2(2^j t - k) - k') \\ &= \sum_{k' \in \mathbb{Z}} (2^{j/2} a_{k'}) \phi(2^{j+1} t - (2k + k')) = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} (2^{j/2} a_{k'}) \phi_{j+1, 2k+k'}(t) \end{aligned}$$

y entonces $V_j \subset V_{j+1}$.

Si $f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$, entonces $f = P_j f \forall j$ y luego $f = \lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = 0$ por el Lema 3.4.2. Por el Lema 3.4.4 $\lim_{j \rightarrow +\infty} P_j f = f$ para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R})$, esto implica $L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$. La propiedad $f \in V_j \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0$ es evidente por la definición de los V_j , y $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es base ortonormal de V_0 por la hipótesis (1) y la definición de V_0 . \square

3.5. De la función de escala a una wavelet ortonormal

A continuación veremos cómo, a partir de una función $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ que cumple con las hipótesis del Teorema 3.4.1 (y por lo tanto genera un AMR), podemos obtener una wavelet ortonormal.

Definición 3.5.1. Consideremos un AMR formado por $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ y $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, y supongamos que existe una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ que verifica que $\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es base ortonormal de $W_0 = V_1 \ominus V_0$ (el complemento ortogonal de V_0 en V_1). En este caso decimos que ψ es una **wavelet asociada al AMR**. Observar que, por la propiedad $f \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}\cdot) \in V_0$, se tiene que $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $W_j = V_{j+1} \ominus V_j$ para cada $j \in \mathbb{Z}$, y como $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$, entonces ψ es una wavelet ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Como $\{\sqrt{2}\phi(2\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base V_1 , existe una única sucesión $\{b_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \phi(2t - k) \quad (3.9)$$

Análogamente a lo hecho en la Observación 3.3.4, obtenemos

$$\widehat{\psi}(\xi) = m_1(\xi/2)\widehat{\phi}(\xi/2) \quad (3.10)$$

donde $m_1 \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ es el **filtro wavelet**

$$m_1(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{-2\pi i k \xi} \quad (3.11)$$

Teorema 3.5.2. Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ la función de escala de un AMR con filtro de escala m_0 definido por (3.7).

1. m_0 satisface

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2 = 1 \text{ c.t.p.} \quad (3.12)$$

2. Si $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es una wavelet asociada al AMR con filtro wavelet m_1 , entonces se verifica

$$|m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi + 1/2)|^2 = 1 \text{ c.t.p.} \quad (3.13)$$

$$m_0(\xi)\overline{m_1}(\xi) + m_0(\xi + 1/2)\overline{m_1}(\xi + 1/2) = 0 \text{ c.t.p.} \quad (3.14)$$

3. Recíprocamente, dado $m_1 \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ que verifica (3.13) y (3.14), si definimos ψ a través de (3.10), entonces ψ es una wavelet ortonormal asociada al AMR.

Demostración. Aplicando el Corolario 3.2.5 y la ecuación (3.8) nos queda

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + l)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2k)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2k + 1)|^2 \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left(\frac{\xi + 2k}{2} \right) \right|^2 \left| \widehat{\phi} \left(\frac{\xi + 2k}{2} \right) \right|^2 \\
&\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left(\frac{\xi + 2k + 1}{2} \right) \right|^2 \left| \widehat{\phi} \left(\frac{\xi + 2k + 1}{2} \right) \right|^2 \\
&= \left| m_0 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} + k \right) \right|^2 + \left| m_0 \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} + k \right) \right|^2 \\
&= \left| m_0 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right|^2 + \left| m_0 \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \quad \text{c.t.p.}
\end{aligned}$$

y queda probada (3.12).

Análogamente, como el Corolario 3.2.5 también se aplica a ψ , y usando (3.10), las mismas cuentas hechas anteriormente (sustituyendo ϕ por ψ y m_0 por m_1) nos permiten obtener (3.13).

Ahora, como $\psi \in V_0^\perp$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ se cumple $\int_{\mathbb{R}} \phi(t - k) \overline{\psi(t)} dt = 0$ de modo que, por Parseval y (3.6):

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} e^{-2\pi i k \xi} d\xi \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_l^{l+1} \widehat{\phi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} e^{-2\pi i k \xi} d\xi \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \widehat{\phi}(\xi + l) \overline{\widehat{\psi}(\xi + l)} e^{-2\pi i k \xi} d\xi \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}(\xi + l) \overline{\widehat{\psi}(\xi + l)} \right) e^{-2\pi i k \xi} d\xi
\end{aligned} \tag{3.15}$$

La última igualdad es válida porque

$$\begin{aligned}
\sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \left| \widehat{\phi}(\xi + l) \overline{\widehat{\psi}(\xi + l)} e^{-2\pi i k \xi} \right| d\xi &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_l^{l+1} \left| \widehat{\phi}(\xi) \right| \left| \overline{\widehat{\psi}(\xi)} \right| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\phi}(\xi) \right| \left| \overline{\widehat{\psi}(\xi)} \right| d\xi < \infty
\end{aligned}$$

ya que $|\widehat{\phi}|, |\overline{\widehat{\psi}}| \in L^2(\mathbb{R})$ (ver Teorema A.12 en el Apéndice).

Entonces los coeficientes de Fourier de la función 1-periódica entre paréntesis

en (3.15) son nulos, por lo tanto

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}(\xi + l) \overline{\widehat{\psi}(\xi + l)} = 0 \quad (3.16)$$

Ahora podemos utilizar el mismo procedimiento utilizado para probar (3.12):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}(\xi + l) \overline{\widehat{\psi}(\xi + l)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}(\xi + 2k) \overline{\widehat{\psi}(\xi + 2k)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}(\xi + 2k + 1) \overline{\widehat{\psi}(\xi + 2k + 1)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_0 \left(\frac{\xi}{2} + k \right) \overline{m_1 \left(\frac{\xi}{2} + k \right)} \left| \widehat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} + k \right) \right|^2 \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_0 \left(\frac{\xi}{2} + k + \frac{1}{2} \right) \overline{m_1 \left(\frac{\xi}{2} + k + \frac{1}{2} \right)} \left| \widehat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} + k + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \quad (3.17) \\ &= m_0 \left(\frac{\xi}{2} \right) \overline{m_1 \left(\frac{\xi}{2} \right)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} + k \right) \right|^2 \\ &\quad + m_0 \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right) \overline{m_1 \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} + k \right) \right|^2 \\ &= m_0 \left(\frac{\xi}{2} \right) \overline{m_1 \left(\frac{\xi}{2} \right)} + m_0 \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right) \overline{m_1 \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right)} \end{aligned}$$

lo cual prueba (3.14).

Recíprocamente, si se cumple (3.13) podemos probar que $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\xi + l)|^2 = 1$ c.t.p. (y por lo tanto que $\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal) siguiendo la prueba anterior de (3.13), pero en el orden inverso. De la misma forma, si se cumple (3.14), siguiendo (3.17) y (3.15) podemos probar

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} e^{-2\pi i k \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \phi(t - k) \overline{\psi(t)} dt = 0$$

y por lo tanto que $\overline{\text{span}}\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset W_0$.

La demostración de que $\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ genera W_0 se da más adelante en el Lema 3.5.5, lo que concluye la prueba del Teorema 3.5.2. \square

Los items 1 y 2 de esta proposición se resumen diciendo que la matriz

$$M = \begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_0(\xi + \frac{1}{2}) \\ m_1(\xi) & m_1(\xi + \frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

es unitaria.

Ejemplo 3.5.3. En el Ejemplo 3.1.4 definimos el AMR de Haar con la función de escala $\phi = \chi_{[0,1]}$. Veremos que una wavelet asociada a este AMR es la wavelet de Haar del Ejemplo 3.1.2: $\psi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1]}$. Tenemos que $\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t - 1) \Rightarrow a_0 = a_1 = 1$ y $a_k = 0 \forall k \neq 0, 1$. Además debe ser $\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t - 1) \Rightarrow b_0 = 1, b_1 = -1$ y $b_k = 0 \forall k \neq 0, 1$. Según (3.7) y (3.11), los filtros son

$$m_0(\xi) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\pi i \xi}), \quad m_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi i \xi})$$

Verifiquemos que m_0 y m_1 cumplen (3.13) y (3.14):

$$\begin{aligned} |m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi + 1/2)|^2 &= \frac{1}{4}(|1 - e^{-2\pi i \xi}|^2 + |1 - e^{-2\pi i(\xi+1/2)}|^2) \\ &= \frac{1}{4}(4 - 2\operatorname{Re}(e^{-2\pi i \xi}) - 2\operatorname{Re}(e^{-2\pi i(\xi+1/2)})) \\ &= \frac{1}{4}(4 - 2\operatorname{Re}(\underbrace{e^{-2\pi i \xi} + e^{-2\pi i \xi - \pi i}}_{=0})) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_0(\xi)\overline{m_1(\xi)} + m_0(\xi + 1/2)\overline{m_1(\xi + 1/2)} \\ &= \frac{1}{4}[(1 + e^{-2\pi i \xi})(1 - e^{2\pi i \xi}) + (1 + e^{-2\pi i(\xi+1/2)})(1 - e^{2\pi i(\xi+1/2)})] \\ &= \frac{1}{4}[e^{-2\pi i \xi} - e^{2\pi i \xi} + e^{-2\pi i(\xi+1/2)} - e^{2\pi i(\xi+1/2)}] = 0 \end{aligned}$$

Con esto, luego de demostrado el Teorema 3.5.2, deduciremos que la wavelet de Haar es una wavelet ortonormal, es decir, $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, y además que la misma forma bases ortonormales para los espacios W_j . Pero como la idea es generalizar esta propiedad multiresolución, analizaremos primero algunos detalles de la wavelet de Haar antes de completar la demostración.

Observación 3.5.4. Para poder encontrar una wavelet ortonormal a partir de un AMR, debemos encontrar un filtro $m_1 \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ que satisfaga las condiciones antes mencionadas. Por (3.14) se tiene que debe existir una función α de período 1 que cumpla

$$(m_1(\xi), m_1(\xi + 1/2)) = \alpha(\xi)(\overline{m_0(\xi + 1/2)}, -\overline{m_0(\xi)})$$

De la normalización (3.12) y (3.13) obtenemos $|\alpha(\xi)| = 1$, y sustituyendo ξ por $\xi + \frac{1}{2}$ llegamos a que α debe satisfacer $\alpha(\xi + \frac{1}{2}) = -\alpha(\xi)$. Luego, definiendo

$$m_1(\xi) = \alpha(\xi)\overline{m_0(\xi + 1/2)}, \text{ donde } |\alpha(\xi)| = 1, \alpha(\xi + 1/2) = -\alpha(\xi)$$

entonces m_1 satisface las condiciones (3.13) y (3.14), y por lo tanto podemos obtener una wavelet ortonormal asociada al AMR mediante

$$\widehat{\psi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \alpha\left(\frac{\xi}{2}\right)\overline{m_0}\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (3.18)$$

En general, hay infinitas soluciones para la función α . Hallemos α para que a través de la función de escala de Haar ϕ obtengamos la wavelet de Haar ψ . Calculando (usando (3.8) y (3.10)):

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(\xi) &= \int_0^1 e^{-2\pi i t \xi} dt = \frac{1 - e^{-2\pi i \xi}}{2\pi i \xi} = e^{-\pi i \xi} \frac{e^{\pi i \xi} - e^{-\pi i \xi}}{2\pi i \xi} = e^{-\pi i \xi} \frac{\text{sen}(\pi \xi)}{\pi \xi} \\ \widehat{\psi}(\xi) &= \left(\int_0^{1/2} - \int_{1/2}^1 \right) e^{-2\pi i t \xi} dt = \frac{1 - 2e^{-\pi i \xi} + e^{-2\pi i \xi}}{2\pi i \xi} \\ &= \frac{(1 - e^{-\pi i \xi})^2}{2\pi i \xi} = e^{-\pi i \xi} \frac{(e^{\pi i \xi/2} - e^{-\pi i \xi/2})^2}{2\pi i \xi} = ie^{-\pi i \xi} \frac{\text{sen}^2(\pi \xi/2)}{\pi \xi/2} \\ m_0(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + e^{-2\pi i \xi}) = \frac{1}{2}e^{-\pi i \xi}(e^{\pi i \xi} + e^{-\pi i \xi}) = e^{-\pi i \xi} \cos(\pi \xi) \\ m_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi i \xi}) = \frac{1}{2}e^{-\pi i \xi}(e^{\pi i \xi} - e^{-\pi i \xi}) = ie^{-\pi i \xi} \text{sen}(\pi \xi) \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) &= \frac{\widehat{\psi}(2\xi)}{\overline{m_0}(\xi + \frac{1}{2})\widehat{\psi}(\xi)} = ie^{-2\pi i \xi} \frac{\text{sen}^2(\pi \xi)}{\pi \xi} \frac{1}{e^{\pi i(\xi + \frac{1}{2})} \cos(\pi(\xi + \frac{1}{2}))} \frac{\pi \xi}{e^{-\pi \xi} \text{sen}(\pi \xi)} \\ &= -ie^{-2\pi i \xi} e^{\frac{-\pi \xi}{2}} = -e^{-2\pi i \xi} \end{aligned}$$

Por tanto, tomamos $\alpha(\xi) = -e^{-2\pi i \xi}$. Sustituyendo en (3.18):

$$\begin{aligned} m_1(\xi) &= -e^{-2\pi i \xi} \overline{m_0}(\xi + 1/2) = -\frac{1}{2}e^{-2\pi i \xi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{a_k} e^{2\pi i k(\xi + 1/2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{a_k} (-1)^{k+1} e^{2\pi i(k-1)\xi} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{a_{1-k}} (-1)^k e^{-2\pi i k \xi} \end{aligned}$$

Entonces, los coeficientes en (3.11) son $b_k = (-1)^k \overline{a_{1-k}}$ y la relación (3.9) se convierte en

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{a_{1-k}} \phi(2t - k) \quad (3.19)$$

Observar que, en el caso de la función de escala y wavelet de Haar, esta ecuación da $\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t - 1)$, tal como esperábamos.

La ecuación (3.18) queda

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-\pi i \xi} \overline{m_0} \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right) \widehat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} \right) \quad (3.20)$$

Ahora sí completamos la demostración del Teorema 3.5.2 con el siguiente lema:

Lema 3.5.5. Para toda $f \in W_0$ existen coeficientes $\{c_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tales que

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi(t - k)$$

Es decir, $\overline{\text{span}}\{\psi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} = W_0$.

Demostración. Primero probaremos que toda $f \in W_0$ se puede escribir como

$$\widehat{f}(\xi) = \nu \left(\frac{\xi}{2} \right) \overline{m_0} \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right) \widehat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} \right) \quad (3.21)$$

donde $\nu \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ satisface $\nu(\xi + \frac{1}{2}) = -\nu(\xi)$.

Como $f \in V_1$, entonces $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \phi(2t - k)$ con $\{d_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Luego, por (3.6)

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{-\pi i k \xi} \widehat{\phi}(\xi/2) =: D(\xi/2) \widehat{\phi}(\xi/2) \quad (3.22)$$

Además, como $f \perp V_0$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t - k) \overline{f}(t) dt = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\xi) \overline{\widehat{f}}(\xi) e^{-2\pi i k \xi} d\xi = 0$$

Con esto último, siguiendo los cálculos de (3.15), (3.16) y (3.17) (reemplazando ψ por f) queda

$$m_0(\xi) \overline{D}(\xi) + m_0(\xi + 1/2) \overline{D}(\xi + 1/2) = 0$$

Al igual que en la Observación 3.5.4, esto puede resolverse como

$$D(\xi) = \nu(\xi/2) \overline{m_0}(\xi + 1/2) \text{ con } \nu(\xi + 1/2) = -\nu(\xi)$$

y sustituyendo en (3.22) obtenemos (3.21).

Por último, utilizando (3.20) tenemos que

$$\widehat{f}(\xi) = \nu \left(\frac{\xi}{2} \right) \overline{m_0} \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right) \widehat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} \right) = \nu \left(\frac{\xi}{2} \right) e^{\pi i \xi} \widehat{\psi}(\xi) =: C(\xi) \widehat{\psi}(\xi)$$

Si tomamos $\{c_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, los coeficientes de Fourier de $C(-\xi)$, entonces la transformada de Fourier de $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi(\cdot - k)$ es $\xi \mapsto (\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i k \xi}) \widehat{\psi}(\xi) = C(\xi) \widehat{\psi}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$; luego $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi(t - k)$. \square

3.6. Wavelets con soporte compacto

Las wavelets con soporte compacto son valiosas para ciertas aplicaciones (ver Capítulo 4). En esta sección veremos cómo obtener algunas de ellas. Veamos una caracterización en términos de las constantes de estructura.

Proposición 3.6.1. Sea ϕ la función de escala de un AMR tal que $\widehat{\phi}$ es continua en 0 con $\widehat{\phi}(0) = 1$.

1. Si $\phi(t) = 0$ para $|t| \geq M$, entonces las constantes de estructura satisfacen $a_k = 0$ para $|k| \geq 3M$.

En particular, el filtro de escala es un polinomio trigonométrico:

$$m_0(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{|k| < 3M} a_k e^{-2\pi i k \xi} \quad (3.23)$$

2. Recíprocamente, supongamos que el filtro de escala m_0 es un polinomio trigonométrico como en (3.23). Entonces la función de escala se obtiene

$$\widehat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j)$$

y tiene soporte compacto.

Demostración. De la definición de las constantes de estructura en (3.5) ($\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2t - k)$), y la ortonormalidad de $\{\phi(2 \cdot -k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tenemos $a_k = 2 \int_{-M}^M \phi(t) \overline{\phi(2t - k)} dt$. Si $|k| \geq 3M$ entonces el soporte de $\phi(2 \cdot -k)$ es disjunto con $[-M, M]$, luego esta integral da cero y $a_k = 0 \forall |k| \geq 3M$. Esto prueba 1.

Antes de probar el recíproco, obsérvese que por (3.8) se tiene

$$\widehat{\phi}(\xi) = \left(\prod_{j=1}^n m_0(\xi/2^j) \right) \widehat{\phi}(\xi/2^n), \quad \forall n \geq 1.$$

Por otro lado, como suponemos $\widehat{\phi}(0) = 1$, y $\widehat{\phi}$ continua en 0, entonces:

$$\widehat{\phi}(\xi) = \lim_n \left(\prod_{j=1}^n m_0(\xi/2^j) \right) \widehat{\phi}(\xi/2^n) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j) \right) \widehat{\phi}(0)$$

es decir que $\widehat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j) \forall \xi$.

Veamos ahora que ϕ tiene soporte compacto si m_0 es un polinomio trigonométrico.

Sea $q_n(\xi) = \prod_{j=1}^n m_0(\xi/2^j)$, y supongamos que $m_0(\xi) = \sum_{|k|<N} \alpha_k e^{2\pi i k \xi}$. Entonces $m_0(\xi/2^j) = \sum_{|k|<N} \alpha_k e^{2\pi i \frac{k}{2^j} \xi}$, y por lo tanto $q_n(\xi)$ es combinación lineal de elementos $e^{2\pi i \xi \sum_{j=1}^n k_j/2^j}$, donde $|k_j| \leq N \forall j = 1, \dots, n$ y por lo tanto $\sum_{j=1}^n k_j/2^j \in \sum_{j=1}^n [-N/2^j, N/2^j] \subset [-N, N]$.

Por otro lado: $e^{2\pi i x \xi} = \widehat{\delta}_{-x}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i t \xi} d\delta_{-x}(t)$, de donde se deduce que $q_n = \widehat{\mu}_n$, donde μ_n es una combinación lineal de medidas de Dirac concentradas en puntos de $[-N, N]$, y en particular el soporte de μ_n está incluido en $[-N, N] \forall n$.

Nótese también que $|q_{n+1}(\xi)| = |q_n(\xi)| |m_0(\xi/2^{n+1})| \leq |q_n(\xi)|$, pues $|m_0| \leq 1$. Luego $|q_n(\xi)| \leq |m_0(\xi/2)| \leq 1, \forall \xi, \forall n$.

Sea f una función de Schwartz (ver Definición A.10 en el Apéndice). En particular $f \in L^2(\mathbb{R})$, así que por la identidad de Parseval se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \overline{f(t)} dt &= \langle \phi, f \rangle = \langle \widehat{\phi}, \widehat{f} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\xi) \widehat{f}(-\xi) d\xi \stackrel{\text{TCD}}{=} \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} q_n(\xi) \widehat{f}(-\xi) d\xi \\ &= \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mu}_n(\xi) \widehat{f}(-\xi) d\xi \\ &= \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i t \xi} d\mu_n(t) \right) \widehat{\phi}(\xi) \widehat{f}(-\xi) d\xi \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i t \xi} \widehat{\phi}(\xi) \widehat{f}(-\xi) d\xi d\mu_n(t) \\ &\stackrel{\text{inversión}}{=} \lim_n \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} d\mu_n(t) \end{aligned}$$

Si $\text{sop}(f) \cap [-N, N] = \emptyset$, entonces $\int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} d\mu_n(t) = 0 \forall n$, y por lo tanto $\int_{\mathbb{R}} \phi(t) \overline{f(t)} dt = 0$, de donde se concluye que $\text{sop}(\phi) \subset [-N, N]$. \square

Observación 3.6.2. Si ϕ tiene soporte compacto, entonces las constantes de estructura son cero excepto una cantidad finita, y luego, por (3.19) tenemos que ψ tiene soporte compacto, por ser combinación lineal finita de funciones con soporte compacto.

A partir de ahora veremos cómo obtener un AMR cuya función de escala ϕ tenga soporte compacto utilizando esta proposición, es decir, primero obteniendo una función m_0 , que será nuestro filtro de escala, y luego hallando ϕ . Condiciones suficientes para que esto sea posible se dan en el siguiente teorema. Observar que no suponemos que m_0 es un polinomio trigonométrico.

Teorema 3.6.3. Sea m_0 una función continua 1-periódica que satisface las siguientes condiciones:

1. $m_0(0) = 1$, $|m_0(\xi)| > 0$ para $|\xi| \leq 1/4$
2. $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2 = 1$
3. $|1 - m_0(\xi)| \leq \frac{C}{\log^2(1/|\xi|)}$, $|\xi| \leq 1/2$

Entonces el producto $\prod_{k=1}^{\infty} m_0(\xi/2^k)$ converge y define una función $\widehat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$ para la cual $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal y ϕ es la función de escala de un AMR.

Demostración. Dividimos la prueba en 4 partes. Primero definimos

$$\mathcal{M} := \{\phi \in L^2(\mathbb{R}) : \{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ es ortonormal}\}.$$

1. \mathcal{M} es cerrado en $L^2(\mathbb{R})$:

Sea $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ con $\phi_j \rightarrow \phi \in L^2(\mathbb{R})$. Usando la notación $L_k \phi(t) = \phi(t - k)$ (operador que preserva la norma) tenemos que $\langle \phi_j, L_k \phi_j \rangle = \delta_{k,0} \forall j$. Luego

$$\begin{aligned} |\langle \phi, L_k \phi \rangle - \delta_{k,0}| &= |\langle \phi, L_k \phi \rangle - \langle \phi_j, L_k \phi_j \rangle| \\ &= |\langle \phi - \phi_j, L_k \phi \rangle + \langle \phi_j, L_k \phi - L_k \phi_j \rangle| \\ &\leq \|\phi - \phi_j\| \|L_k \phi\| + \|\phi_j\| \|L_k(\phi - \phi_j)\| \\ &= \|\phi - \phi_j\| \|\phi\| + \|\phi_j\| \|\phi - \phi_j\| \rightarrow 0 \quad \text{si } j \rightarrow \infty \\ &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \bar{\phi}(t - k) dt = \langle \phi, L_k \phi \rangle = \delta_{k,0} \Rightarrow \phi \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

2. Sea $\phi_0(t) = \text{sen}(\pi t)/\pi t$ (la wavelet de Shannon) con $\widehat{\phi}_0 = \chi_{[-1/2, 1/2]}$ y para $j \geq 1$ definamos

$$\widehat{\phi}_j(\xi) = \widehat{\phi}_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \dots m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = \chi_{[-2^{j-1}, 2^{j-1}]}(\xi) \left(\prod_{i=1}^j m_0(\xi/2^i)\right)$$

Probaremos por inducción que $\phi_j \in \mathcal{M} \forall j \geq 0$.

Para $j = 0$, ya sabemos que $\{\phi_0(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal (Ejemplo 3.2.6).

Si $\phi_{j-1} \in \mathcal{M}$, como $\widehat{\phi}_j(\xi) = m_0(\xi/2)\widehat{\phi}_{j-1}(\xi/2)$ entonces

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}_j(\xi + l)|^2 &= \left(\sum_{l \text{ par}} + \sum_{l \text{ impar}} \right) \left| m_0 \left(\frac{\xi + l}{2} \right) \widehat{\phi}_{j-1} \left(\frac{\xi + l}{2} \right) \right|^2 \\ &= \left| m_0 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right|^2 \sum_{l \text{ par}} \left| \widehat{\phi}_{j-1} \left(\frac{\xi + l}{2} \right) \right|^2 \\ &\quad + \left| m_0 \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \sum_{l \text{ impar}} \left| \widehat{\phi}_{j-1} \left(\frac{\xi}{2} + l \right) \right|^2 \end{aligned}$$

La primera sumatoria se puede escribir como $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}_{j-1}(\frac{\xi}{2} + l)|^2 = 1$ c.t.p. y la segunda se escribe como $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}_{j-1}(\frac{\xi+1}{2} + l)|^2 = 1$ c.t.p., ambas por la hipótesis de inducción y Corolario 3.2.5. De esto y de la hipótesis (2) se concluye que $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}_j(\xi + l)|^2 = 1$ y por lo tanto $\phi_j \in \mathcal{M} \forall j \geq 0$ por el Corolario 3.2.5.

3. Veremos que $\prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j)$ converge uniformemente en compactos a una función continua $\tilde{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$ con $\|\tilde{\phi}\| \leq 1$ y $\lim_{\xi \rightarrow 0} \tilde{\phi}(\xi) = 1$:
Si $|\xi| \leq M$, con $M > 1$, y $2^{j-1} \geq M$, entonces $|\xi/2^j| \leq M/2^j \leq 1/2$ y $\log^2(|\xi|/2^j) \geq \log^2(M/2^j)$, y por la hipótesis (3) se cumple

$$\begin{aligned} |m_0(\xi/2^j) - 1| &\leq \frac{C}{\log^2(2^j/|\xi|)} = \frac{C}{\log^2(|\xi|/2^j)} \leq \frac{C}{\log^2(M/2^j)} \\ &= \frac{C}{(\log(M) - j \log(2))^2} \leq \frac{C}{(j \log(2))^2} \end{aligned}$$

que es el término general de una serie convergente. Esto implica que $\sum_{j=1}^{\infty} |m_0(\xi/2^j) - 1|$ converge uniformemente en $[-M, M]$, y por lo tanto $\prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j)$ converge uniformemente en $[-M, M]$ a una función continua $\tilde{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$.

Observar que $\lim_j \widehat{\phi}_j(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j) = \tilde{\phi}(\xi)$ y por el Lema de Fatou $\|\tilde{\phi}\| = \|\lim_j \widehat{\phi}_j\| \leq \lim_j \|\widehat{\phi}_j\| = 1$; como $m_0(0) = 1$ y $\tilde{\phi}$ es continua, entonces $\lim_{\xi \rightarrow 0} \tilde{\phi}(\xi) = 1$.

Definimos $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{\phi} = \tilde{\phi}$.

4. Probaremos que $\|\phi_j - \phi\| \rightarrow 0$ si $j \rightarrow +\infty$.

Primero veamos que existe $C_1 > 0$ tal que $|\widehat{\phi}_j(\xi)| \leq C_1 |\widehat{\phi}(\xi)|$. Como el producto infinito del paso 3 converge uniformemente en $[-1/2, 1/2]$,

existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{j>j_0} |m_0(\xi/2^j)| \geq 1/2$ si $|\xi| \leq 1/2$. Entonces $\prod_{j=1}^{j_0} |m_0(\xi/2^j)| \leq 2\widehat{\phi}(\xi)$, de donde $|\widehat{\phi}(\xi)| \geq \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{j_0} |m_0(\xi/2^j)| \geq \frac{1}{2} c^{j_0}$ si $|\xi| \leq 1/2$, donde $c := \min_{|\xi| \leq 1/4} |m_0(\xi)| > 0$ por hipótesis (1), y luego $C := \inf_{|\xi| \leq 1/2} |\widehat{\phi}(\xi)| > 0$.
Además

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(\xi) &= \prod_{i=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^i}\right) = \prod_{i=1}^j m_0\left(\frac{\xi}{2^i}\right) \prod_{i=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi/2^j}{2^i}\right) \\ &= \widehat{\phi}_j(\xi) \widehat{\phi}(\xi/2^j) \quad \text{si } |\xi| \leq 2^{j-1} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Entonces, $\forall \xi \in \mathbb{R}$:

$$|\widehat{\phi}_j(\xi)| = \left| \frac{\widehat{\phi}(\xi)}{\widehat{\phi}(\xi/2^j)} \right| \chi_{[-2^{j-1}, 2^{j-1}]} \leq C^{-1} |\widehat{\phi}(\xi)|$$

porque $\inf_{|\xi| \leq 2^{j-1}} |\widehat{\phi}(\xi/2^j)| = \inf_{|\xi| \leq 1/2} |\widehat{\phi}(\xi)| = C > 0$. Como $\widehat{\phi}(\xi/2^j) \rightarrow 1$ (si $j \rightarrow +\infty$), de (3.24) se deduce que $|\widehat{\phi}_j(\xi) - \widehat{\phi}(\xi)| \rightarrow 0$ y además

$$|\widehat{\phi}_j(\xi) - \widehat{\phi}(\xi)| \leq |\widehat{\phi}_j(\xi)| + |\widehat{\phi}(\xi)| \leq (1 + C^{-1}) |\widehat{\phi}(\xi)|$$

Como $\xi \mapsto (1 + C^{-1}) |\widehat{\phi}(\xi)|$ está en $L^2(\mathbb{R})$, por el Teorema de Convergencia Dominada se deduce que $\|\widehat{\phi}_j - \widehat{\phi}\| \rightarrow 0$ y por la identidad de Parseval, $\|\phi_j - \phi\| \rightarrow 0$ si $j \rightarrow +\infty$.

Para concluir, como $\phi_j \in \mathcal{M}$, $\phi_j \rightarrow \phi$ y \mathcal{M} es cerrado, entonces $\phi \in \mathcal{M} \Rightarrow \{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal. Además, del paso 3 deducimos que $\widehat{\phi}$ es continua en 0 con $\widehat{\phi}(0) = 1$ y $\widehat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j) = m_0(\xi/2) \widehat{\phi}(\xi/2)$. Aplicando la Proposición 3.3.6 y el Teorema 3.4.1, se llega a lo buscado. \square

Observación 3.6.4. Para poder obtener una wavelet con soporte compacto, debemos encontrar un polinomio trigonométrico que cumpla las hipótesis de la proposición anterior. Es suficiente encontrar un polinomio trigonométrico $C(\xi)$ que verifique:

$$C(\xi) \geq 0, \quad C(\xi) > 0 \text{ para } |\xi| \leq 1/4, \quad C(0) = 1, \quad C(\xi) + C(\xi + 1/2) = 1 \quad (3.25)$$

y luego una función m_0 que verifique $|m_0(\xi)|^2 = C(\xi)$. La existencia de dicha función m_0 la asegura el siguiente lema.

Lema 3.6.5 (Fejér y Riesz). Si $t(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}$ es un polinomio trigonométrico no negativo (con $x \in \mathbb{R}$), entonces existe un polinomio trigonométrico $q(x)$ tal que $t(x) = |q(x)|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que $t(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = t(x) = \bar{t}(x) = \sum_{k=-n}^n \bar{c}_k e^{-ikx} = \sum_{k=-n}^n \bar{c}_{-k} e^{ikx} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

por lo tanto $c_{-k} = \bar{c}_k \forall k$. Definimos $P(z) = c_{-n} + c_{-n+1}z + \dots + c_n z^{2n} = \bar{c}_n + \bar{c}_{n-1}z + \dots + \bar{c}_{-n}z^{2n}$. Luego

$$\begin{aligned} t(x) &= e^{-inx} \sum_{k=-n}^n c_k e^{i(n+k)x} = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} e^{ikx} = e^{-inx} P(e^{ix}) \\ \bar{P}(\bar{z}) &= \bar{c}_{-n} + \bar{c}_{-n+1}z + \dots + \bar{c}_n z^{2n} = z^{2n} (c_n z^{-2n} + c_{n-1} z^{-(2n-1)} + \dots + c_{-n}) \\ &= z^{2n} P(1/z) \end{aligned}$$

Como $t(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, la primera igualdad implica que $P(z)$ no tiene raíces en el círculo unidad, y la segunda que si α es raíz de P , entonces $1/\bar{\alpha}$ también lo es, y con la misma multiplicidad. Factorizando, obtenemos

$$\begin{aligned} P(z) &= Cz^m \prod_{k=1}^N (z - \alpha_k) \left(z - \frac{1}{\bar{\alpha}_k} \right) \\ \Rightarrow t(x) &= e^{-inx} P(e^{ix}) = e^{-inx} \left(C e^{imx} \prod_{k=1}^N (e^{ix} - \alpha_k) \left(e^{ix} - \frac{1}{\bar{\alpha}_k} \right) \right) \\ &= D e^{ipx} \prod_{k=1}^N \left(\frac{(e^{ix} - \alpha_k)(e^{-ix} - \bar{\alpha}_k)}{\bar{\alpha}_k} \right) = \left(\frac{D}{\prod \bar{\alpha}_k} \right) e^{ipx} \prod_{k=1}^N |e^{ix} - \alpha_k| \end{aligned}$$

Como $t(x) > 0$ y $\prod_{k=1}^N |e^{ix} - \alpha_k| > 0$, tiene que ser $p = 0$ y $\frac{D}{\prod \bar{\alpha}_k} > 0$.

Tomamos $q(x) = \left(\sqrt{\frac{D}{\prod \bar{\alpha}_k}} \right) \prod_{k=1}^N (e^{ix} - \alpha_k)$, que cumple la tesis en el caso $t(x) > 0$.

En general, si $t(x) \geq 0$, aplicamos lo realizado a $t(x) + \epsilon > 0$ y obtenemos $q_\epsilon(x)$, el cual depende continuamente de ϵ (porque así dependen los coeficientes de P y por lo tanto sus raíces).

Luego, $q_0(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_\epsilon(x)$ cumple lo pedido. \square

Veamos un ejemplo de wavelet ortonormal utilizando la observación anterior:

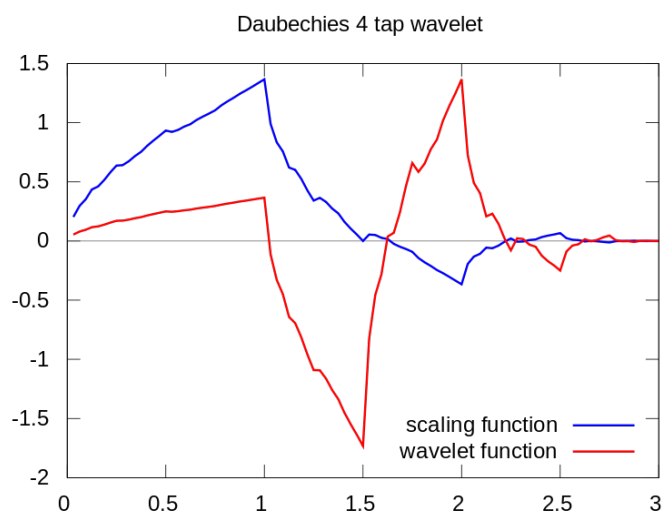


Figura 3.4: Wavelet ortonormal de Daubechies

Ejemplo 3.6.6. Esta construcción se debe a Daubechies (ver [5], pág. 194-202). Partimos de la ecuación $\cos^2 \pi\xi + \sin^2 \pi\xi = 1$, de la cual obtenemos:

$$1 = (\cos^2 \pi\xi + \sin^2 \pi\xi = 1)^{2N+1} = \sum_{k=0}^{2N+1} \sin^{2k}(\pi\xi) \cos^{4N+2-2k}(\pi\xi)$$

Tomamos la primera mitad de estos términos y definimos

$$C(\xi) := \sum_{k=0}^N \sin^{2k}(\pi\xi) \cos^{4N+2-2k}(\pi\xi)$$

Reemplazando ξ por $\xi + \frac{1}{2}$, los senos se transforman en cosenos y viceversa, y obtenemos los restantes términos de la ecuación anterior. Luego, se verifica $C(\xi) + C(\xi + 1/2) = 1$. Las condiciones $C(0) = 1$ y $C(\xi) > 0$ son obvias.

Por lo tanto, C verifica las condiciones (3.25) y define una wavelet ortonormal con soporte compacto.

Por más detalles acerca de su construcción, ver [5], págs. 194-202.

3.7. Implementación

En esta sección deduciremos un algoritmo para descomponer una función $f_N \in V_N$ de un AMR en una aproximación en un espacio con menor resolución V_{N-M} más los detalles. En el Capítulo 4 estudiaremos cómo se aplica en

el contexto de las imágenes.

Supongamos que $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es un AMR con función de escala $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ y wavelet asociada $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

Recordamos que existen constantes únicas $\{a_k\}, \{b_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tales que

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2t - k) \\ \psi(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \psi(2t - k)\end{aligned}\tag{3.26}$$

Por otro lado, como $\phi(2t), \phi(2t - 1) \in V_1 = V_0 \oplus W_0$, existen cuatro sucesiones $\{p_{-2k}\}, \{q_{-2k}\}, \{p_{1-2k}\}, \{q_{1-2k}\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tales que

$$\begin{aligned}\phi(2t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{-2k} \phi(t - k) + q_{-2k} \psi(t - k) \\ \phi(2t - 1) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{1-2k} \phi(t - k) + q_{1-2k} \psi(t - k)\end{aligned}$$

Para cada $l \in \mathbb{Z}$, si l es par:

$$\begin{aligned}\phi(2t - l) &= \phi(2(t - l/2)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{-2k} \phi((t - l/2) - k) + q_{-2k} \psi((t - l/2) - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{l-2(l/2+k)} \phi(t - (l/2 + k)) + q_{l-2(l/2+k)} \psi(t - (l/2 + k)) \\ &= \sum_{k' \in \mathbb{Z}} p_{l-2k'} \phi(t - k') + q_{l-2k'} \psi(t - k')\end{aligned}$$

y se obtiene una fórmula análoga si l es impar. Luego, existen sucesiones $\{p_k\}, \{q_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tales que $\forall l \in \mathbb{Z}$:

$$\phi(2t - l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (p_{l-2k} \phi(t - k) + q_{l-2k} \psi(t - k))\tag{3.27}$$

Las sucesiones $\{a_k\}, \{b_k\}, \{p_k\}, \{q_k\}$ son únicas.

Como $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$, sabemos que toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede ser aproximada por $f_N \in V_N$ para algún $N \in \mathbb{Z}$. Además, $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, así que podemos descomponer de forma única

$$f_N = f_{N-1} + g_{N-1}$$

con $f_{N-1} \in V_{N-1}$ y $g_{N-1} \in W_{N-1}$. Repitiendo este proceso M veces, logramos la descomposición

$$f_N = g_{N-1} + g_{N-2} + \cdots + g_{N-M} + f_{N-M}$$

con $f_j \in V_j$ y $g_j \in W_j$ para cada j . Como la suma es directa, esta descomposición es única. Además, tenemos que

$$\begin{aligned} f_j(t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l^j \phi(2^j t - l) \quad \text{con } c^j = \{c_l^j\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \\ g_j(t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_l^j \phi(2^j t - l) \quad \text{con } d^j = \{d_l^j\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde hemos suprimido los coeficientes de normalización $2^{j/2}$ de $\phi_{j,l}$ para simplificar el algoritmo. Podemos identificar las funciones f, g con las sucesiones $\{c^j\}, \{d^j\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ respectivamente.

Aplicando (3.29) y (3.28) obtenemos

$$\begin{aligned} f_j(t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l^j \phi(2^j t - l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l^j \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{l-2k} \phi(2^{j-1} t - k) + q_{l-2k} \psi(2^{j-1} t - k) \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{l-2k} c_l^j \right) \phi(2^{j-1} t - k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} q_{l-2k} c_l^j \right) \psi(2^{j-1} t - k) \end{aligned}$$

pero aplicando (3.26) también tenemos que

$$\begin{aligned} f_j(t) &= f_{j-1}(t) + g_{j-1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{j-1} \phi(2^{j-1} t - k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^{j-1} \psi(2^{j-1} t - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{j-1} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \phi(2^j t - 2k - l) \right) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^{j-1} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \phi(2^j t - 2k - l) \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{j-1} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} a_{l-2k} \phi(2^j t - l) \right) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^{j-1} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} b_{l-2k} \phi(2^j t - l) \right) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{l-2k} c_k^{j-1} + b_{l-2k} d_k^{j-1} \right) \phi(2^j t - l) \end{aligned}$$

Como los coeficientes de f_j son únicos en V_j y en $V_{j-1} \oplus W_{j-1}$, se tiene el siguiente esquema:

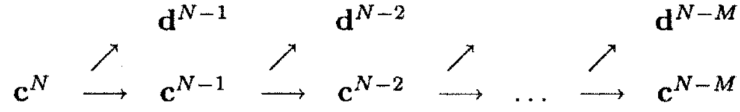


Figura 3.5: Esquema de descomposición

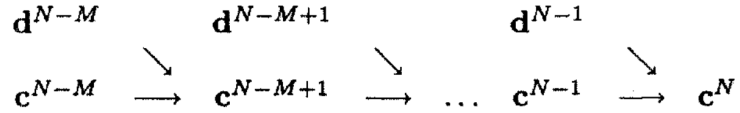


Figura 3.6: Esquema de composición

1. Descomposición:

$$\begin{cases} c_k^{j-1} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{l-2k} c_l^j \\ d_k^{j-1} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} q_{l-2k} c_l^j \end{cases} \quad (3.29)$$

2. Composición:

$$c_l^j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{l-2k} c_k^{j-1} + b_{l-2k} d_k^{j-1} \quad (3.30)$$

Hemos obtenido un algoritmo eficiente para descomponer una función $f_N \in V_N$ en una aproximación f_{N-M} más niveles progresivos de detalles g_{N-M}, \dots, g_{N-1} con los cuales podemos reconstruir la función original fácilmente.

Observamos que si los coeficientes $\{a_k\}, \{b_k\}, \{p_k\}, \{q_k\}$ son finitos (por ejemplo, si ϕ y ψ tienen soporte compacto), el algoritmo visto puede ser fácilmente implementado en una computadora.

A continuación, veremos cómo quedan estos esquemas en el AMR de Haar, por ser el ejemplo más sencillo de AMR con función de escala y wavelet de soporte compacto, aunque puede ser aplicado en otros AMR.

Consideremos el AMR de Haar:

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ constante en } [k/2^j, (k+1)/2^j) \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\phi = \chi_{[0,1)}$$

$$\psi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$$

En este caso, se cumple

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t-1)$$

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t-1)$$

y por tanto $a_0 = a_1 = 1$, $b_0 = 1, b_1 = -1$ y $a_k = b_k = 0 \forall k \neq 0, 1$. Además

$$\begin{aligned}\phi(2t) &= \frac{1}{2}\phi(t) + \frac{1}{2}\psi(t) \\ \phi(2t-1) &= \frac{1}{2}\phi(t) - \frac{1}{2}\psi(t)\end{aligned}$$

y entonces $p_0 = p_1 = 1/2$, $q_0 = 1/2, q_1 = -1/2$ y $p_k = q_k = 0 \forall k \neq 0, 1$.

Supongamos que tenemos una función $f_0 \in V_0$ (constante en los intervalos $[k, k+1)$) con soporte en $[0, n]$ donde $n = 2^M$. Puede escribirse

$$f_0(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^0 \phi(t-k) = \begin{cases} c_k^0 & \text{si } t \in [k, k+1) \subset [0, n) \\ 0 & \text{si } t \notin [0, n) \end{cases}$$

Identificamos esta función con la n -upla $(c_0^0, \dots, c_{n-1}^0)$. Aplicando el esquema (3.29) obtenemos

$$\begin{cases} c_k^{-1} = p_0 c_{2k}^0 + p_1 c_{2k+1}^0 = \frac{1}{2}(c_{2k}^0 + c_{2k+1}^0) \\ d_k^{-1} = q_0 c_{2k}^0 + q_1 c_{2k+1}^0 = \frac{1}{2}(c_{2k}^0 - c_{2k+1}^0) \end{cases}$$

Tenemos entonces $n/2 = 2^{M-1}$ coeficientes c_k^{-1} y la misma cantidad de d_k^{-1} , que corresponden a la descomposición $f_0 = f_{-1} + g_{-1} \in V_{-1} + W_{-1}$:

$$\begin{aligned}f_{-1} &\sim (c_0^{-1}, \dots, c_{n/2-1}^{-1}) \\ g_{-1} &\sim (d_0^{-1}, \dots, d_{n/2-1}^{-1})\end{aligned}$$

Si queremos reconstruir la secuencia original, utilizamos el esquema (3.30) y queda

$$\begin{cases} c_{2k}^0 = a_0 c_k^{-1} + b_0 d_k^{-1} = c_k^{-1} + d_k^{-1} \\ c_{2k+1}^0 = a_1 c_k^{-1} + b_1 d_k^{-1} = c_k^{-1} - d_k^{-1} \end{cases}$$

Repitiendo la descomposición M veces a los c_k^0 llegamos a

$$\begin{aligned}f_0 &\sim (c_0^{-1}, \dots, c_{n/2-1}^{-1}, d_0^{-1}, \dots, d_{n/2-1}^{-1}) \\ &\dots \\ &\sim (c_0^{-M}, d_0^{-M}, d_0^{-M+1}, d_1^{-M+1}, \dots, d_0^{-1}, \dots, d_{n/2-1}^{-1})\end{aligned}$$

Por ejemplo, si tenemos la secuencia $(c_0^0, \dots, c_3^0) = (3, 7, 13, 5)$, entonces

$$\begin{aligned}c_0^{-1} &= \frac{c_0^0 + c_1^0}{2} = 5, & d_0^{-1} &= \frac{c_0^0 - c_1^0}{2} = -2 \\ c_1^{-1} &= \frac{c_2^0 + c_3^0}{2} = 9, & d_1^{-1} &= \frac{c_2^0 - c_3^0}{2} = 4\end{aligned}$$

y la descomposición queda $(c_0^{-1}, c_1^{-1}, d_0^{-1}, d_1^{-1}) = (5, 9, -2, 4)$, que consiste en los promedios de las dos parejas del vector original, más las diferencias necesarias para la reconstrucción. Si aplicamos una vez más el esquema (esta vez a las dos primeras coordenadas), obtenemos

$$(c_0^{-2}, d_0^{-2}, d_0^{-1}, d_1^{-1}) = (7, -2, -2, 4)$$

Con c_0^{-2}, d_0^{-2} reconstruimos c_0^{-1}, c_1^{-1} , y con estos más d_0^{-1}, d_1^{-1} , la señal original.

3.8. Wavelets en \mathbb{R}^n

Brevemente, comentaremos cómo pueden definirse las nociones de AMR y wavelet en \mathbb{R}^n . Por más detalles, puede verse [2].

Definición 3.8.1. Decimos que una transformación lineal A de \mathbb{R}^n es una **dilatación aceptable** para \mathbb{Z}^n si cumple:

1. \mathbb{Z}^n es invariante por A , es decir, $A\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Z}^n$.
2. Todos los valores propios λ_i de A cumplen $|\lambda_i| > 1$.

Estas propiedades implican que $|\det A|$ es un entero $q \geq 2$.

Ejemplo 3.8.2. 1. $A = mI$ con $m \geq 2$ entero, es una dilatación aceptable.

2. Si A_0 es una matriz ortogonal, y $A = \rho A_0$ con $\rho \in \mathbb{R}$, si elegimos ρ tal que las entradas de A sean enteras y $|\det A| = |\rho|^n \geq 2$, entonces A es una dilatación aceptable. En \mathbb{R}^2 , estas matrices son todas de la forma

$$\begin{pmatrix} m & -p \\ p & m \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} m & p \\ p & -m \end{pmatrix}$$

con $m, p \in \mathbb{Z}$ tales que $m^2 + p^2 \geq 2$.

Una dilatación aceptable A induce un operador unitario

$$U_A : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad U_A f(x) = |\det A|^{-1/2} f(A^{-1}x)$$

Definición 3.8.3. Un **análisis multiresolución (AMR)** asociado a A es una familia $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R}^n)$, junto a una función $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ que verifican

1. $V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$
2. $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}), \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
3. $f \in V_j$ si y sólo si $f(A^{-n}\cdot) \in V_0$
4. $\{\phi(\cdot - \gamma)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^n}$ es base ortonormal de V_0 .

A la función ϕ se le llama **función de escala** del AMR.

El caso $A = 2I$ es el más estudiado en la literatura existente, y es llamado *AMR diádico*.

Observación 3.8.4. Al igual que para los AMR de $L^2(\mathbb{R})$, se verifican propiedades similares:

1. $\{\phi(\cdot - \gamma)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^n}$ es ortonormal si y sólo si $\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} |\widehat{\phi}(\xi - \gamma)|^2 = 1$ c.t.p. $\xi \in \mathbb{R}^n$.
2. La condición (4) de la definición de AMR puede ser debilitada a:
Existe una función $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\{\phi(x - \gamma)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^n}$ es una base de Riesz de V_0 , es decir, existen $0 < c \leq C < \infty$ tales que

$$c \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} |a_\gamma|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |a_\gamma \phi(x - \gamma)|^2 dx \leq C \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} |a_\gamma|^2$$

la cual es equivalente a

$$c \leq \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} |\phi(x - \gamma)|^2 \leq C$$

La ventaja de esta condición es que, en algunos casos, es más fácil de verificar que la de ortonormalidad.

3. Por las propiedades (1) y (4), la función de escala ϕ cumple la **ecuación de escala**:

$$\phi(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} a_\gamma \phi(Ax - \gamma)$$

Las constantes $\{a_\gamma\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ son las **constantes de estructura** del AMR.

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación de escala, obtenemos

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0(B^{-1}\xi) \widehat{\phi}(B^{-1}\xi)$$

donde $B = A^*$ y m_0 es la función 1-periódica,

$$m_0(\xi) = \frac{1}{|\det A|} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} a_\gamma e^{-2\pi i \langle \gamma, \xi \rangle}$$

llamada **filtro de escala**.

Definición 3.8.5. Una **base de wavelets** asociada a A es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n)$ cuyos elementos son \mathbb{Z}^n -traslaciones de A -dilataciones de un conjunto ortonormal finito $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$. Es decir, los elementos de la base son de la forma

$$|\det A|^{j/2} \psi_k(A^j x - \gamma), \quad \gamma \in \mathbb{Z}^n, j \in \mathbb{Z}, k = 1, \dots, m.$$

Las *wavelets* son los elementos de esta base, y a las ψ_k les llamamos *wavelets básicas*. La cantidad de wavelets básicas necesarias para formar una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n)$ es $m = |\det A| - 1$. La relación entre las ψ_k y ϕ es

$$\psi_k(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} b_{k,\gamma} \phi(Ax - \gamma), \quad k = 1, \dots, m.$$

con $\{b_{k,\gamma}\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$.

En conjunto, las constantes $\{a_\gamma\}$ y $\{b_{k,\gamma}\}$ son esenciales en la obtención de algoritmos rápidos de descomposición y reconstrucción usados en procesamiento de señales e imágenes (ver Sección 3.7 y Capítulo 4).

Al igual que en $L^2(\mathbb{R})$, las wavelets son la razón por la que se estudian los AMR, y se puede desarrollar un estudio similar al presentado en esta monografía en $L^2(\mathbb{R}^n)$, en particular la construcción de bases de $L^2(\mathbb{R}^n)$ a partir de los AMR. Por más información, consultar [2].

Capítulo 4

Aplicaciones

Veremos una aplicación del análisis multiresolución en la compresión y transmisión progresiva de imágenes digitales.

Una imagen digital a escala de grises puede representarse como una matriz M^0 de 2^N filas y 2^M columnas. En cada entrada aparece la intensidad de gris del pixel correspondiente.

En este contexto, podemos aplicar la descomposición en cada fila de la matriz (en cada una quedan los coeficientes c_k^{-1} y d_k^{-1}) y luego en cada columna, y obtener así una nueva matriz

$$M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} M_0^{-1} & M_1^{-1} \\ \hline M_2^{-1} & M_3^{-1} \end{array} \right)$$

en las cuales M_0^{-1} contiene la aproximación, y las restantes contienen los detalles.

Si el proceso se repite a M_0^{-1} , obtenemos aproximaciones más pequeñas M_0^{-k} de la imagen original M^0 .

La ventaja de esta descomposición es que, en regiones uniformes, los detalles d_k^{-1} son casi nulos. Sólo son “significativos” los detalles cerca de los bordes de los objetos de la imagen y, por lo tanto, podríamos anular los detalles cuyo valores absolutos se encuentren por debajo de un umbral ϵ y obtener así una matriz dispersa (con muchos coeficientes nulos, en inglés: *sparse matrix*).

En la Figura 4.4 se muestra el resultado de aplicar la descomposición dos veces. Notar que cuanto más veces aplicamos la descomposición, más coeficientes se acercan a 0, aunque las modificaciones de los mismos influyen más en las reconstrucciones sucesivas (se van acumulando en cada paso de la

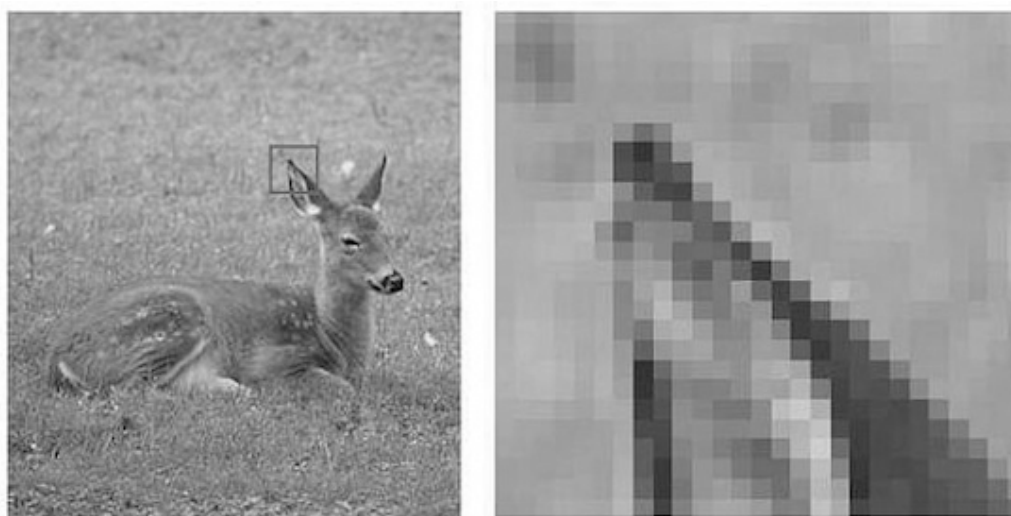


Figura 4.1: Imagen digital a escala de grises

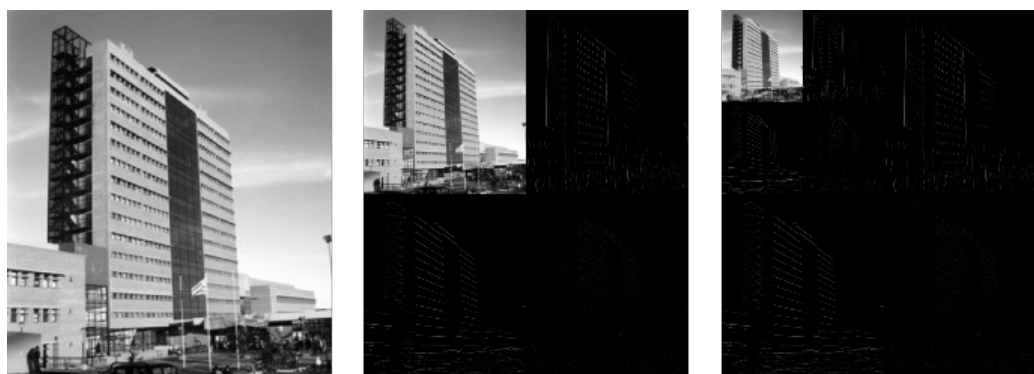


Figura 4.2: Descomposición wavelet de una imagen digital

reconstrucción). En la Figura 4.5 se muestra el efecto que produce anular coeficientes de la descomposición para varios valores del umbral ϵ , quedándonos con un porcentaje de los coeficientes originales sin anular. Para la misma, se utilizó dos veces la descomposición, se anularon algunos coeficientes y se aplicó la reconstrucción dos veces para obtener las imágenes.

Estas matrices dispersas pueden ser comprimidas con alto radio de compresión (por ejemplo, con el algoritmo de Huffman, ver [11]).

Otra aplicación posible es la de transmisión progresiva de imágenes a través de internet. En vez de enviar la imagen por partes (y por lo tanto,

no poder ver la imagen completa hasta que finalice el envío), teniendo la descomposición de la imagen, podemos enviar primero la aproximación M_0^{-k} (así el receptor ya posee una idea de cómo es la imagen original completa, aunque con poco detalle) y luego ir enviando los detalles para refinar la aproximación hasta obtener la imagen completa. En la Figura 4.6 se muestra cómo se vería la transmisión progresiva de la imagen.

A continuación, se incluye el código de los algoritmos de descomposición y composición implementados en Octave, utilizado para generar estas imágenes:

```

% Las imagenes pueden cargarse como matrices con:
u=double(imread("imagen.png"));

% Luego de tratadas, se guardan como imagenes en disco con:
imwrite(uint8(u),"resultado.png")

function d=DescompImagen(u,n)
    % Descompone la imagen u, n veces
    d=u;
    [nf,nc]=size(u);
    for i=1:n
        for j=1:nf
            d(j,1:nc)=DecomponerVector(d(j,1:nc));
        end
        for j=1:nc
            d(1:nf,j)=DecomponerVector(d(1:nf,j));
        end
        nf/=2;
        nc/=2;
    end
endfunction

function d=DecomponerVector(v)
    d=zeros(size(v));
    n=max(size(v));
    for j=1:n/2
        d(j)=(v(2*(j-1)+1)+v(2*(j-1)+2))/2;
        d(n/2+j)=(v(2*(j-1)+1)-v(2*(j-1)+2))/2;
    end
endfunction

function d=CompImagen(u,n)
    % Compone la imagen u, n veces
    [nf,nc]=size(u);
    nf/=2**(n-1); nc/=2**(n-1);
    d=u;
    for i=1:n
        for j=1:nc

```

```
        d(1:nf,j)=ComponerVector(d(1:nf,j));
    end
    for j=1:nf
        d(j,1:nc)=ComponerVector(d(j,1:nc));
    end
    nf*=2;
    nc*=2;
end
endfunction

function d=ComponerVector(v)
    d=zeros(size(v));
    k=max(size(v))/2;
    for j=1:k
        d(2*j-1:2*j)=[v(j)+v(k+j),v(j)-v(k+j)];
    end
endfunction
```

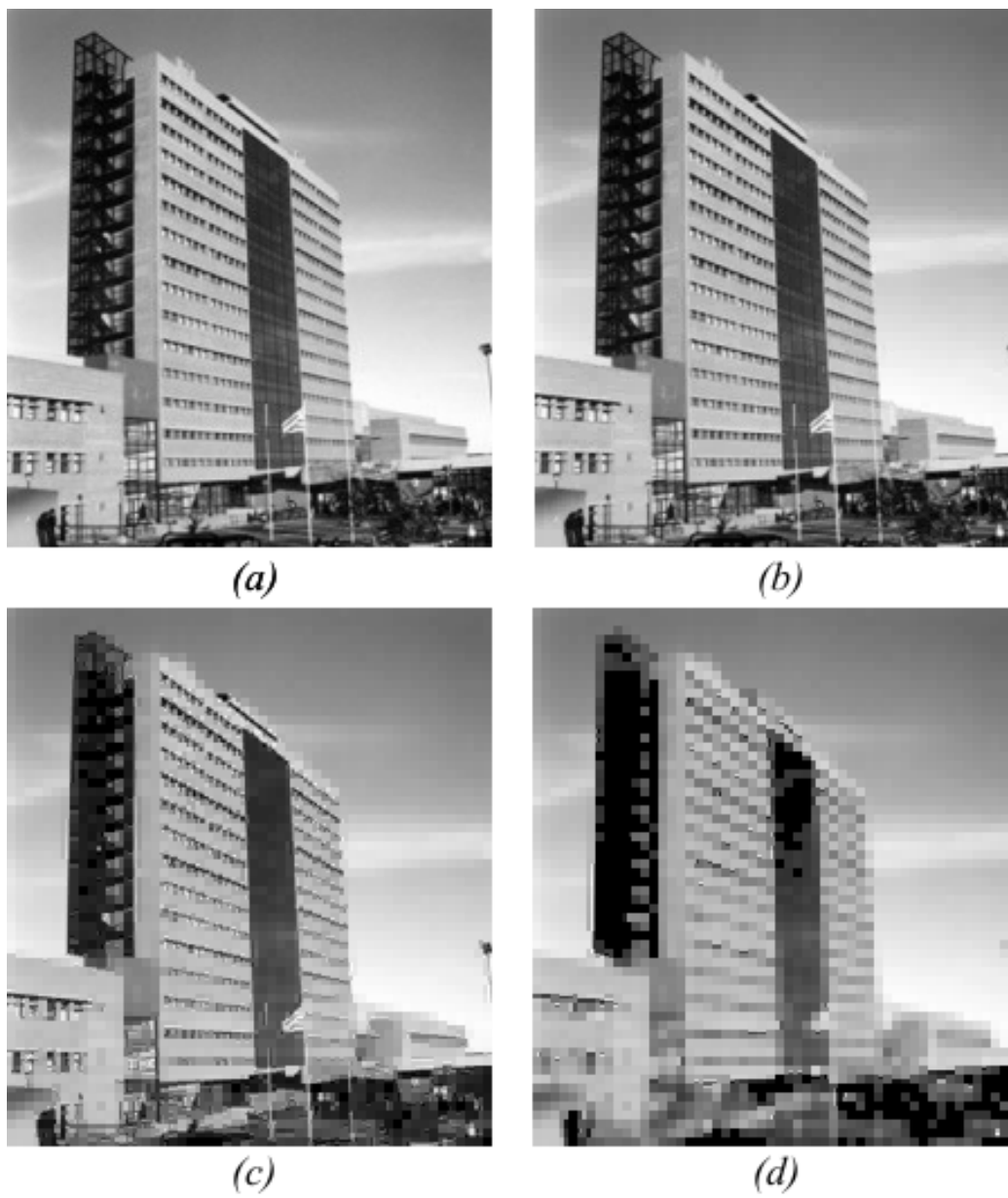


Figura 4.3: Compresión: (a) Imagen original, (b) 35 % de los coeficientes, (c) 11 % de los coeficientes, (d) 6 % de los coeficientes

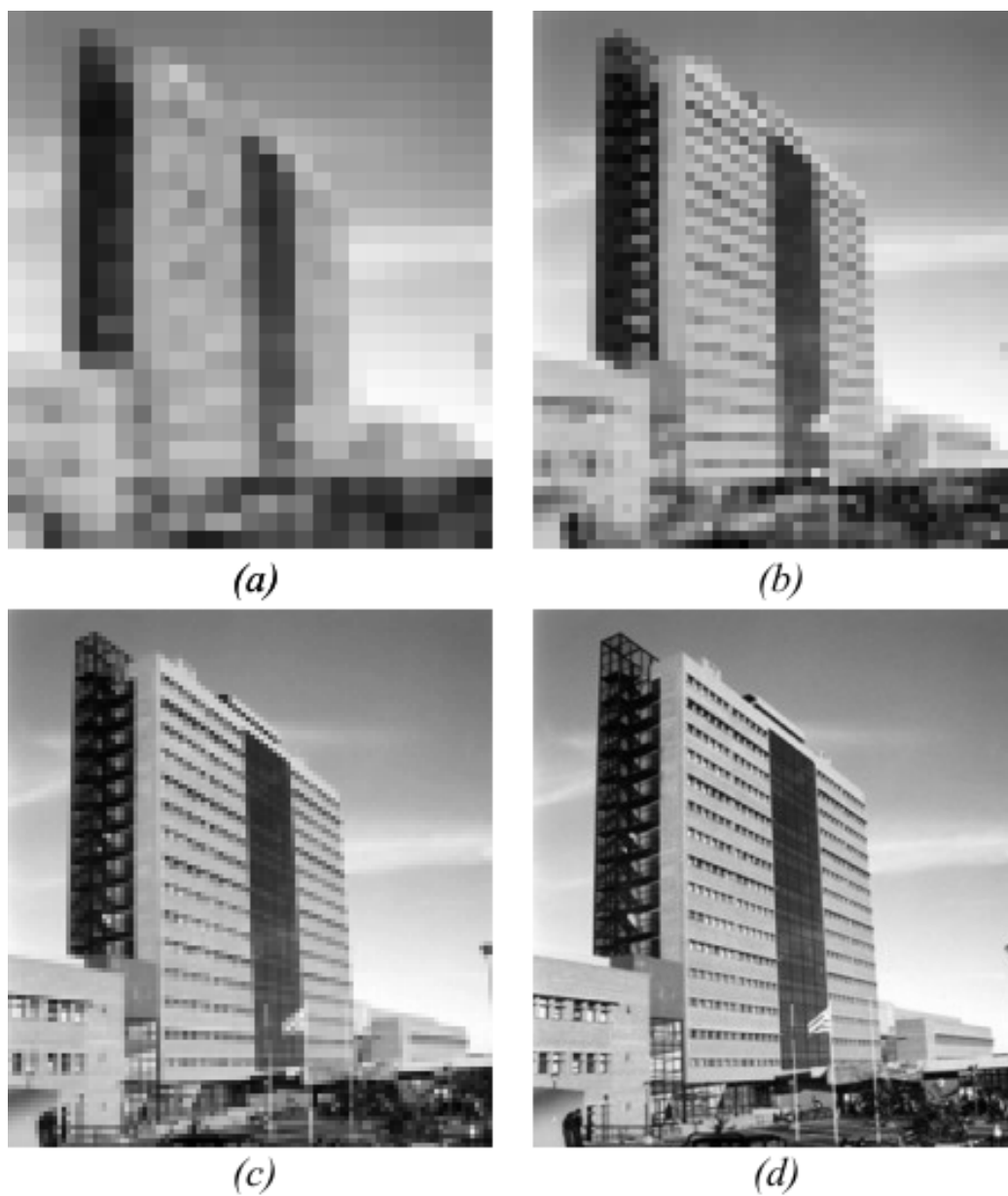


Figura 4.4: Transmisión progresiva: (a) $1/64$ de los coeficientes, (b) $1/16$ de los coeficientes, (c) $1/4$ de los coeficientes, (d) Total de los coeficientes

Apéndice A

Resumimos definiciones y propiedades básicas de la teoría de Fourier utilizadas en esta monografía, más algunos comentarios sobre unidades aproximadas y resultados de teoría de la medida. Por detalles, se puede consultar [1], [8] y [16].

Definición A.1. Si $f \in L^2[0, 2\pi]$, definimos su **transformada de Fourier discreta** como

$$\widehat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

En este caso, asociamos a f su **serie de Fourier**:

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikt}$$

Puede definirse la transformada de Fourier más en general, para funciones T -periódicas $f \in L^2[0, T]$ como

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi}{T}ikt} dt$$

pero por simplicidad trabajaremos con funciones 2π -periódicas, aunque los resultados se extienden al caso general con los cambios obvios.

Proposición A.2. Sea f una función 2π -periódica de variación acotada, y definamos

$$\begin{cases} f(x^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x + h) \\ f(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x - h) \end{cases}$$

Entonces la serie de Fourier de f converge a $(f(x^+) + f(x^-))/2 \forall x \in \mathbb{R}$. Además, si f también es continua en un compacto $[a, b]$, entonces la serie de Fourier converge uniformemente a f en $[a, b]$.

Proposición A.3. La transformada de Fourier discreta

$$\mathcal{F} : L^2[0, 2\pi] \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad \mathcal{F}(f) = (\widehat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$$

es un isomorfismo isométrico de $L^2[0, 2\pi]$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

En particular, se cumple la Identidad de Parseval:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

para toda $f \in L^2[0, 2\pi]$, donde c_k es el k -ésimo coeficiente de Fourier de f .

Definición A.4. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ se define la **transformada de Fourier continua** como

$$\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt \quad (\text{A.1})$$

Definición A.5. Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, definimos la **convolución** entre f y g como

$$f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s) g(t - s) ds$$

Proposición A.6. Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Se cumple:

1. $f * g = g * f$
2. $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$
3. Identidad de Parseval:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi$$

En particular, $\|f\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\widehat{f}\|$.

4. $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \widehat{g}(t) dt$

Definición A.7. Una familia de funciones $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}^+} \subset L^1(\mathbb{R})$ es una **unidad aproximada** cuando $\alpha \rightarrow 0^+$ si:

1. $\int_{\mathbb{R}} g_\alpha(t) dt = 1 \quad \forall \alpha > 0$
2. $\int_{\mathbb{R}} |g_\alpha(t)| dt \leq M \quad \forall \alpha > 0$
3. $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{|t| > T} |g_\alpha(t)| dt \rightarrow 0 \quad \forall T > 0$

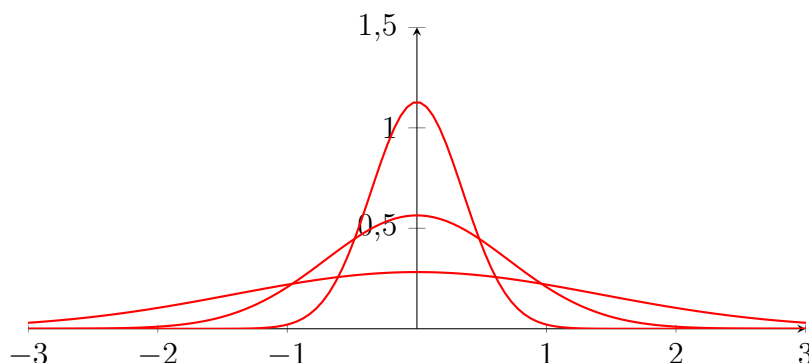


Figura A.1: g_α para $\alpha = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$

Es fácil ver que $g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$ forma una unidad aproximada cuando $\alpha \rightarrow 0^+$.

Teorema A.8. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}^+}$ es una unidad aproximada, entonces

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (f * g_\alpha)(t) = f(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ punto de continuidad de f .

Como $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$ (tomando $f_n = f\chi_{[-n,n]}$), este resultado se extiende para funciones $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Teorema A.9. La transformada de Fourier

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}(f) = \widehat{f}$$

es biyectiva, es decir, para toda $g \in L^2(\mathbb{R})$ existe una única $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = g$.

Utilizamos también en esta monografía a las funciones de Schwartz, las cuales definimos a continuación.

Definición A.10. El **espacio de Schwartz** \mathcal{S} es el conjunto de todas las funciones $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tales que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^k |f^{(\ell)}(t)| < \infty \quad \forall k, \ell \geq 0.$$

La transformada de Fourier en este espacio se define de la misma forma que en la ecuación (A.1).

Teorema A.11. Se cumple:

1. Si $f \in \mathcal{S}$, entonces $\widehat{f} \in \mathcal{S}$.
2. **Fórmula de Inversión:** Si $f \in \mathcal{S}$, entonces

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi t} d\xi \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Mencionamos dos resultados de teoría de la medida. La prueba del siguiente puede encontrarse en [8], pág. 55.

Teorema A.12. Supongamos que $\{f_j\}$ es una sucesión en $L^1(\mathbb{R})$ tal que $\sum_{j=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_j| < \infty$. Entonces $\sum_{j=1}^{+\infty} f_j$ converge c.t.p. a una función de $L^1(\mathbb{R})$ y $\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{+\infty} f_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_j$.

El siguiente es una versión del Teorema de Diferenciación de Lebesgue. La prueba puede encontrarse en [8], pág. 97.

Teorema A.13. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (es decir, $\int_K |f(x)| dx < \infty$ para todo conjunto K medible acotado de \mathbb{R}^n). Entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(y) dy$$

en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$, donde $B(x, r)$ es la bola de centro x y radio $r > 0$, y m es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n .

Bibliografía

- [1] Chui, Charles K., *An introduction to wavelets*. Wavelet Analysis and its Applications, 1. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.
- [2] Chui, Charles K., *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*. Wavelet Analysis and its Applications, 2. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.
- [3] Conway, John B., *A course in functional analysis*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 96. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [4] Daubechies, Ingrid, *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis*. IEEE Trans. Inform. Theory 36, 1990, no. 5, 961–1005.
- [5] Daubechies, Ingrid, *Ten lectures on wavelets*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 61. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.
- [6] Daubechies, Ingrid, *Where do wavelets come from?—A personal point of view*, Proc. IEEE, Special Issue on Wavelets, 84 (4), pp. 510-513, 1996.
- [7] Duffin, R. J.; Schaeffer, A. C., *A class of nonharmonic Fourier series*. Trans. Amer. Math. Soc. 72, 1952. 341–366.
- [8] Folland, Gerald B., *Real analysis*. Modern techniques and their applications. Second edition. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [9] Grossmann, A.; Morlet, J.; Paul, T., *Transforms associated to square integrable group representations. I. General results*. J. Math. Phys. 26, 1985, no. 10, 2473–2479.
- [10] Grossmann, A.; Morlet, J.; Paul, T., *Transforms associated to square integrable group representations. II. Examples*. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 45, 1986, no. 3, 293–309.

- [11] Huffman, D.A., *A Method for the Construction of Minimum Redundancy Codes*, Proceedings of the Institute of Radio Engineers, no. 40, 1951, 1098-1101.
- [12] Kahane, J.P.; Lemarié-Rieusset, P.G., *Fourier series and wavelets*, Studies in the Development of Modern Mathematics, vol. 3, Gordon and Breach Publishers, 1995.
- [13] Mallat, S., *Multiresolution approximation and wavelets*. Trans. Amer. Math. Soc. 315, p989, 69-88.
- [14] Meyer, Yves, *Ondelettes et opérateurs. I. Ondelettes*. Actualités Mathématiques. Hermann, Paris, 1990.
- [15] Pinsky, Mark A., *Introduction to Fourier analysis and wavelets*. Brooks/Cole Series in Advanced Mathematics. Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 2002.
- [16] Stein, Elias M.; Shakarchi, Rami, *Fourier analysis. An introduction*. Princeton Lectures in Analysis, 1. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.
- [17] Tchamitchian, Philippe, *Biorthogonalité et théorie des opérateurs*. Rev. Mat. Iberoamericana 3, 1987, no. 2, 163–189.